Kapitel 1
Versicherungsmathematik: Teil der Versicherungswissenschaft

Die Versicherungsmathematik ist sowohl ein Teilgebiet der Angewandten Mathematik, präziser: der angewandten Stochastik, als auch ein Teil der Versicherungswissenschaft. Demzufolge muß sie mit einem gewissen Verständnis ihres außermathematischen Umfeldes betrieben werden. Obwohl es natürlich nicht Aufgabe eines versicherungs*mathematischen* Lehrbuches sein kann, dieses Umfeld umfassend darzustellen, bemühen wir uns, den Leser mit einer diesbezüglichen Minimalorientierung auszustatten und sein Interesse für das Versicherungsgeschehen und die interdisziplinäre Versicherungswissenschaft als Ganzes zu wecken. Gelegentlich appellieren die Ausführungen dieses Kapitels an ein gewisses intuitives Vorverständnis von Sachverhalten aus dem Versicherungswesen. In späteren Kapiteln wird darauf nicht zurückgegriffen.

Abschnitt A ist der Klärung des Versicherungsbegriffes aus ökonomischer und aus juristischer Sicht und seiner inhaltlichen Untergliederung gewidmet.

Abschnitt B befaßt sich mit der Einordnung der Versicherungsmathematik im Rahmen der Versicherungswissenschaft und im Rahmen der Mathematik sowie mit einigen Aspekten ihrer historischen Entwicklung. Wie in Abschnitt A haben wir uns hier teilweise an einige Beiträge des von Farny et al. (1988) herausgegebenen Handwörterbuches der Versicherung angelehnt, welches für eine allgemeine Orientierung über die Versicherungswissenschaft trotz der seither stark veränderten Rahmenbedingungen nach wie vor sehr zu empfehlen ist. Eine weitere wichtige Quelle, insbesondere zum betriebswirtschaftswissenschaftlichen Umfeld der Versicherungsmathematik, ist Farny (1995).

Abschnitt C führt exemplarisch in Grundlagen des internationalen versicherungsmathematischen Bezeichnungsstandards ein.

A Was ist Versicherung?

Je nach Position des Fragenden im Versicherungsgeschehen fällt die Antwort unterschiedlich aus: Aus der Sicht des Versicherungsnehmers (VN) ist Versicherung primär ein Mittel seiner individuellen Risikopolitik, aus der des Versicherers (VR) ein Schutzversprechen als produziertes Wirtschaftsgut, und aus gemeinsamer Sicht handelt es sich um einen finanziellen Risikotransfer vom VN auf den VR gegen Entgeltzahlung (nach Farny, 1988, Abschnitt V).

Jedenfalls ist Versicherung ein ökonomisches, ein juristisches und ein mathematisches Phänomen. Aus ökonomischer Sicht steht natürlich das Versicherungsgeschäft im Vordergrund und damit die Antwort auf die Frage „*Warum* Versicherung?“. Aus juristischer Sicht stehen der Versicherungsvertrag und die Vertragspartner (VN und VR) im Mittelpunkt, also Antworten auf die Fragen, *wer* ein Versicherungsgeschäft abschließt und *was* es beinhaltet. Der Versicherungskalkül, der dem VR Aufschluß darüber gibt, *wie* ein Versicherungsgeschäft inhaltlich auszugestalten ist, ist primär ein mathematisches Problem. Diese Ausführungen zeigen, daß die Versicherungswissenschaft notwendigerweise interdisziplinär ist. Zu den genannten drei Komponenten kommen dabei nachrangig von Fall zu Fall andere hinzu, etwa

- medizinische (in der Personenversicherung),
- technische (in der Sachversicherung)

und viele andere mehr.

Dem interdisziplinären Charakter der Versicherungswissenschaft entsprechend, gibt es verschiedene Definitionen von Versicherung. Die folgende ökonomische Definition zitieren wir aus Farny (1988, p. 870).

1.1 Definition. „Versicherung ist die Deckung eines im einzelnen ungewissen, insgesamt geschätzten Mittelbedarfs auf der Grundlage des Risikoausgleichs im Kollektiv und in der Zeit.“

Zum Vergleich zitieren wir nachstehend eine juristische Definition aus Prölss et al. (1997, p. 144).

1.2 Definition. „Versicherungsgeschäfte betreibt, wer, ohne daß ein innerer Zusammenhang mit einem Rechtsgeschäft anderer Art besteht, gegen Entgelt verpflichtet ist, ein wirtschaftliches Risiko dergestalt zu übernehmen, daß er

(a) anderen vermögenswerte Leistungen zu erbringen hat, wenn sich eine für deren wirtschaftliche Verhältnisse nachteilige, ihrem Eintritt nach ungewisse Tatsache ereignet, um die dadurch verursachten Nachteile auszugleichen, oder

(b) anderen vermögenswerte Leistungen zu erbringen hat, wobei es von der Dauer des menschlichen Lebens oder dem Eintritt oder Nichteintritt einer Tatsache im Lauf des menschlichen Lebens abhängt, ob oder wann oder in welchem Umfang zu leisten oder wie hoch das Entgelt ist,

sofern der Risikoübernahme eine Kalkulation zugrunde liegt, wonach die dazu erforderlichen Mittel ganz oder im wesentlichen durch die Gesamtheit der Entgelte aufgebracht werden.“

Aus beiden Definitionen zusammen ergeben sich drei Hauptmerkmale des Versicherungsgeschäftes:

- die Finanzierung aus den Entgelten,
- die Ungewißheit hinsichtlich des versicherten Ereignisses,
- Risikokalkulation und Risikoausgleich.

Letzteres, insbesondere der Risikoausgleich im Kollektiv, grenzt Versicherungsgeschäfte gegen Bankgeschäfte ab. Im Zeitalter der neuen Finanzinstrumente und -produkte (Derivate, Futures, ...) wird diese Abgrenzung allerdings zunehmend unschärfer. Die Ungewißheit hinsichtlich des versicherten Ereignisses kann bestehen in Bezug auf die Tatsache seines Eintrittes, den Zeitpunkt des Eintrittes oder in Bezug auf seine Qualität (Art, Ausmaß). Beispielsweise ist der menschliche Tod ein sicheres Ereignis, dessen Zeitpunkt i.a. nicht feststeht; der Eintritt eines Feuerschadens ist ungewiß, seine Höhe im Falle des Eintrittes ist ebenfalls a priori unbestimmt. Diese zufälligen Momente sind maßgeblich dafür, daß die Stochastik, also die mathematische Theorie des Zufalls, mit ihren Teildisziplinen Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, die Basis der Versicherungsmathematik und der mathematischen Risikotheorie bildet.

Das folgende Schema gibt eine grobe Übersicht über die Rolle des Zufalls bei Leistungshöhe und Fälligkeit von Versicherungen. Die Rolle des Zufalls bei der Prämienzahlung bleibt unberücksichtigt. Bei der temporären (befristeten) Todesfallversicherung (Risikolebensversicherung) wird bei Tod innerhalb der Vertragslaufzeit eine in der Regel todeszeitunabhängige Versicherungssumme fällig, bei der reinen Erlebensfallversicherung wird die Versicherungssumme fällig bei Erleben des Vertragsablaufs und bei der Gemischten Kapitalversicherung bei Tod innerhalb der Vertragslaufzeit oder bei Erleben des Ablaufs. Bei der Versicherung auf festen Termin ist ein fester Betrag zu einem festen Zeitpunkt unabhängig vom Erleben zu zahlen, nur die Prämienzahlungsdauer ist zufällig. Bei der Feuerversicherung wird im Schadensfalle in Abhängigkeit von der zufälligen Schadenshöhe geleistet. Fondsgebundene Gemischte Kapitalversicherungen können so gestaltet werden, daß die Leistung sowohl bei Tod innerhalb der Vertragslaufzeit als auch bei Erleben des Ablaufs in Investmentfondsanteilen definiert wird. Bei Stop-Loss-Rückversicherungen übernimmt der Rückversicherer am Jahresende, also zu einem festen Vertragszeitpunkt, den (zufälligen) Teil des Jahresgesamtschadens aus einem *Portefeuille* (einer Gesamtheit von Risiken) eines Erstversicherers, der über die Priorität, also den Selbstbehalt des Erstversicherers, hinausgeht. Dies erinnert an die Situation bei europäischen Optionen, deren Fälligkeitszeitpunkt (Ausübungstermin) fest ist und deren „Leistung" (die positive Differenz aus dem aktuellen Kurs des zugrunde liegenden Wertpapieres und dem Ausübungspreis) zufällig ist. Bei der Quotenrückversicherung übernimmt der Rückversicherer am Jahresende einen festen Anteil des zufälligen Gesamtschadens aus einem Erstversicherungsportefeuille. Je nach Art des rückversicherten Portefeuilles kann dabei a priori feststehen, daß der Gesamtschaden strikt positiv ist.

	Versichertes Ereignis		
Leistung	Eintritt	Zeitpunkt	Beispiel
fest	zufällig	zufällig	temporäre Risikolebensversicherung
fest	zufällig	fest	reine Erlebensfallversicherung
fest	sicher	zufällig	Gemischte Kapitalversicherung
fest	sicher	fest	Versicherung auf festen Termin
zufällig	zufällig	zufällig	Feuerversicherung
zufällig	sicher	zufällig	Fondsgebundene Gemischte Kapitalversicherung
zufällig	zufällig	fest	Stop-Loss-Rückversicherung
zufällig	sicher	fest	Quotenrückversicherung

Versicherungsunternehmen (VU) treten in Deutschland historisch bedingt in drei Rechtsformen auf: als öffentlich-rechtliche Versicherer, als Versicherungsvereine auf Gegenseitigkeit (VVaG) und als Aktiengesellschaften (AG). Für den VN ist die Rechtsform seines Vertragspartners kaum von Bedeutung.

Neben den allgemeinen Rechtsvorschriften, zum Beispiel des Bürgerlichen Gesetzbuches (BGB), des Handelsgesetzbuches (HGB), des Steuerrechts usw., die natürlich auch für VU gelten, unterliegt die Versicherungswirtschaft besonderen Rechtsvorschriften, die im Versicherungsaufsichtsgesetz (VAG) aus dem Jahre 1901 und dem Versicherungsvertragsgesetz (VVG) aus dem Jahre 1908 fixiert sind. Das VVG als Teil des Zivilrechts regelt die Beziehungen zwischen VN und VU. Das VAG ist Bestandteil des öffentlichen Rechts. Hier ist u.a. die staatliche Aufsicht durch das Bundesaufsichtsamt für das Versicherungswesen (BAV) in Berlin geregelt, dessen Vorgängerinstitution 1901 gegründet wurde. Auch die Aufgaben und die Rechtsstellung verantwortlicher Versicherungsmathematiker (Aktuare) sind hier seit 1994 geregelt.

In der Praxis gibt es verschiedene, nebeneinander gebräuchliche Einteilungsprinzipien für Versicherungsformen. Sie sind historisch gewachsen und bilden daher kein geschlossenes System. Die folgende Darstellung lehnt sich an Koch

(1988b), pp. 1252, 1253 an. Als Einteilungsprinzipien kommen grundsätzlich in Frage:

- der versicherte Gegenstand,
- die Art der Versicherungsleistung und
- die versicherte Gefahr (Risikoart).

Die Einteilung nach dem versicherten Gegenstand führt zur Unterscheidung von *Personenversicherung*, *Sachversicherung* und *Vermögensversicherung*. Letztere bezieht sich auf das Vermögen als Ganzes; ein Beispiel ist die Haftpflichtversicherung, die vermögensmindernde Schadenersatzverpflichtungen versichert. Die Einteilung nach der Art der Versicherungsleistung findet sich im VVG. Sie führt zur Unterscheidung zwischen *Summenversicherungen* und *Schadenversicherungen*. „Bei der Summenversicherung sind die Versicherungsleistungen als ein fester Geldbetrag vereinbart, der nach Eintritt des Versicherungsfalles ohne Nachweis eines konkreten Schadens gezahlt wird." (Farny, 1995, p. 328) Die Höhe der Versicherungsleistung kann trotzdem zufallsabhängig sein, wie die Beispiele einer Todesfallversicherung mit todeszeitabhängiger Versicherungssumme oder einer Krankentagegeldversicherung (bei der zwar die Versicherungssumme pro Krankheitstag nicht aber die Krankheitsdauer festliegt) zeigen. Summenversicherungen sind fast stets Personenversicherungen. Bei Schadenversicherungen sind vertragsgemäß eingetretene Vermögens-, Personen- und Sachschäden (teilweise) zu ersetzen, und dies naturgemäß in a priori unbekannter (eventuell aber limitierter) Höhe. Das älteste Klassifikationsprinzip ist die Einteilung von Versicherungszweigen nach Risikoart und versicherter Gefahr, welches zum Beispiel im VAG Verwendung findet. Dazu vergleiche man auch die Beispiele 1.3 und Aufgabe 1.

Die Begriffe „Versicherungszweig" und „Versicherungssparte" (ähnlich auch „Versicherungsbranche") werden hier näherungsweise synonym gebraucht. Sie werden weiter unterteilt in Versicherungsarten, die sowohl nach dem versicherten Gegenstand als auch nach der versicherten Gefahr bezeichnet sein können.

Die Bildung von Versicherungszweigen bzw. -sparten ist u.a. für die Kalkulation von risikogerechten Prämien, für die Vertragsverwaltung und für die Ergebnisermittlung im Rahmen der Rechnungslegung von VR von großer Wichtigkeit. Die Abgrenzung zwischen verschiedenen Versicherungszweigen und -sparten ist in gewissem Ausmaß willkürlich und auch international uneinheitlich.

1.3 Beispiele. Einige wichtige Versicherungszweige und -*arten* in Deutschland (für eine systematische Darstellung siehe Abschnitt 3312 von Farny, 1995):

- Einbruchdiebstahl- und Beraubungsversicherung,
- Gebäudeversicherung: *Feuerversicherung, Glasversicherung, Hagelversicherung, Sturmversicherung*,

- Haftpflichtversicherung: *Berufshaftpflichtversicherung, Betriebshaftpflichtversicherung, Kraftverkehrshaftpflichtversicherung, Privathaftpflichtversicherung,*
- Hausratversicherung,
- Kraftverkehrsversicherung: *Insassen-Unfallversicherung, Kraftfahrzeug-(Kasko-)versicherung, Kraftverkehrshaftpflichtversicherung,*
- Krankenversicherung, privat: *Krankheitskostenversicherung, Pflegekostenversicherung, Krankentagegeldversicherung, Krankenhaustagegeldversicherung,*
- Lebensversicherung: *Erlebensfallversicherung, Gemischte Kapitalversicherung, Pensions- und Altersrentenversicherung, Pflegerentenversicherung, Todesfallversicherung (Risikolebensversicherung),*
- Technische Versicherungen: *Maschinenversicherung, Elektronikversicherung,*
- Transportversicherung (als Allgefahrendeckung für Transportmittel und -güter),
- Unfallversicherung,
- Sonderformen: Captive-Versicherung (Selbstversicherung von Unternehmen), Rückversicherung.

Auch nach der Novellierung des VAG im Zusammenhang mit der Errichtung des europäischen Binnenmarktes 1994 bleibt das Spartentrennungsgebot in abgeschwächter Form von Bedeutung: Das Versicherungsgeschäft in der Lebensversicherung ist *EU-weit* zur Vermeidung von „Risikotransfer" zwischen den Sparten getrennt von allen anderen Sparten zu betreiben. Die Dritte Richtlinie Schadenversicherung der EU-Kommision (siehe Prölss et al. (1997), pp. 1335 bis 1366) spezifiziert die private Krankenversicherung als Schadenversicherung. *In Deutschland* gilt für sie, da sie hier auch substitutiv (d.h. als Ersatz für die gesetzliche Krankenversicherung) betrieben wird, ebenfalls das Spartentrennungsgebot. Ein bedingtes Spartentrennungsgebot, das die rechtlich selbständige Schadenabwicklung vorschreibt, gilt für die Rechtsschutzversicherung.

B Aufgaben und Modelle der Versicherungsmathematik

Die *Versicherungsmathematik* behandelt mathematische Modelle und Methoden, die quantifizierbare Sachverhalte des Versicherungswesens beschreiben oder erklären oder mit deren Hilfe Entscheidungsprobleme der Versicherungswirtschaft gelöst werden (nach Helten, 1988, p. 1077).

Bei der Einteilung der Versicherungsmathematik nach Sachgebieten unterscheidet man

- Personenversicherungsmathematik,
- Schadenversicherungsmathematik (international firmiert dieses Teilgebiet unter der Abkürzung ASTIN, *A*ctuarial *ST*udies *I*n *N*on-life insurance),
- Finanzmathematik (AFIR, *A*ctuarial approach for *FI*nancial *R*isk), die u.a. im Hinblick auf die Steuerung von Kapitalanlagen der VU und deren Abstimmung mit den Leistungsverpflichtungen eine wachsende Rolle spielt.

Diese Einteilung ist weder vollständig noch überlappungsfrei: Der erste Punkt korrespondiert zu der Einteilung von Versicherungsformen nach dem versicherten Gegenstand, der zweite zu der Einteilung nach der Art der Versicherungsleistung. Entsprechend gliedert man in der Personenversicherungsmathematik weiter nach Versicherungszweigen auf: Krankenversicherungsmathematik, Lebensversicherungsmathematik, Pensionsversicherungsmathematik, ... Allerdings gibt es hier sehr unterschiedliche Konventionen. Gelegentlich werden die Begriffe „Personenversicherungsmathematik" und „Lebensversicherungsmathematik" synonym im Sinne des ersteren gebraucht (dies ist insbesondere in der angelsächsischen Literatur der Fall), oder „Lebensversicherungsmathematik" wird als eine Sammelbezeichnung für die Personenversicherungsmathematik unter Ausschluß der Krankenversicherungsmathematik verwendet. Uns erscheint es am schlüssigsten, unter „Lebensversicherungsmathematik" denjenigen Teil der Personenversicherungsmathematik zu verstehen, dem ausschließlich das Erlebensfallrisiko oder das Todesfallrisiko (eventuell aufgegliedert nach Todesursachen) für eine oder mehrere Leben zugrunde liegen. Die Aufgliederung der Schadenversicherungsmathematik nach Versicherungszweigen („Feuerversicherungsmathematik", „Hagelversicherungsmathematik", ...) ist unüblich.

Entsprechend der Definition 1.1 besteht die Hauptaufgabe der Versicherungsmathematik in der Bereitstellung von Kalkülen, deren Anwendung durch einen VR einen Risikoausgleich zwischen den VN und in der Zeit erlaubt. Dazu gehören (ganz oder teilweise) die

- mathematische Beschreibung des versicherten Risikos bis hin zur statistisch gesicherten Erstellung von Rechnungsgrundlagen (Schätzung und Vertafelung von Ausscheide- und Übergangswahrscheinlichkeiten),
- Tarifierung und Prämienkalkulation (Identifikation von Schadeneinflußgrößen und Bereitstellung von Tarifierungsmerkmalen, Berechnung von Barwerten, Nettoprämien, Kosten, Deckungskapitalien, ...),
- versicherungstechnische Analyse (Überschußermittlung, Überschußzerlegung nach Ursachen, Renditeberechnungen, Controlling, ...),
- Risikoteilung VN — VR — Rück-VR (Modellierung des Einflusses, den Risikoweitergabe und Selbstbeteiligungen auf Schadenzahlen und -höhen sowie den Gesamtschaden in den Portefeuilles der beteiligten VR haben, ...),

- Berechnung von Rückstellungen für die Schadenabwicklung, von Schwankungsrückstellungen und Sicherheitsreserven (beispielsweise Solvabilitätsüberlegungen),
- Überlegungen zur Beschreibung des Zinsrisikos und zur Steuerung von Kapitalanlagen.

In diese Probleme spielen vielfach außermathematische Überlegungen, zum Beispiel betriebswirtschaftlicher oder steuerlicher Natur, hinein. Versicherungsmathematiker bzw. Aktuare sind folglich nicht nur „Produktentwickler“ im Versicherungswesen, sondern wesentlich (mit-)verantwortlich für viele Belange des VR. Dieses Buch beschränkt sich auf die Behandlung von Fragestellungen, die unter die drei erstgenannten Aufgabengruppen fallen, ohne diesbezüglich erschöpfend zu sein.

Die folgende tabellarische Übersicht über die historische Entwicklung der Versicherungsmathematik mit Schwerpunkt im Bereich der Lebensversicherung und auf der Zeit bis etwa 1900 erhebt keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit. Sie soll vielmehr exemplarisch auf die Zusammenhänge zur Entwicklung der Demographie, der Statistik und ganz allgemein zur Entwicklung der Stochastik hinweisen. Die vielfältigen gesellschaftlichen und ökonomischen Einflüsse auf die Entwicklung des Versicherungswesens und damit auch auf die der Versicherungsmathematik können hier natürlich nur ganz am Rande Erwähnung finden. Um eine kritische Distanz wahren zu können, wurde die jüngere Vergangenheit nicht berücksichtigt. Den historisch interessierten Leser verweisen wir u.a. auf Braun (1963), Haberman und Sibbett (1995), Hald (1987), Koch (1988a, 1998), Seal (1977) und Sheynin (1977).

1.4 Übersicht. Zur Geschichte der Versicherungsmathematik

$\approx$ 200 n. Chr.	Praefectus praetorio *D. Ulpianus:* Erste bekannte römische Bevölkerungstafel, Prognose der zukünftigen Lebensdauer in Abhängigkeit vom Alter (Interpretation nicht völlig klar).
1308	Ältester bekannter Leibrentenvertrag, zwischen dem Erzbischof von Köln und dem Kloster St. Denis bei Paris.
1489	*J. Widman: Behende und hubsche Rechenung auff allen kauffmannschafft.* „Rechenbuch“, mit Zinsrechnung.
1583	*W. Gybbons* unterzeichnet in London den ersten bekannten Lebensversicherungsvertrag der Welt (einen Wettvertrag): Auszahlung von 400 Pfund bei Tod binnen eines Jahres (Einmalprämie 30 Pfund).
1585	*S. Stevin: Practique d'Arithmétique.* Zinstafel, Tabelle von Endwerten von Zeitrenten in Abhängigkeit von der Laufzeit.
1624	*H. Briggs: Arithmetica logarithmica.* Logarithmentafel. Zinsrechnung mittels Logarithmen.

1657	*C. Huygens: De Ratiociniis in Aleae Ludo.* Definition des Erwartungswertes einer einfachen Zufallsvariablen in der Sprache des Glücksspiels.
1662	*J. Graunt: Natural and political observations made upon the bills of mortality.* Grundlagen der Deskriptiven Statistik und der Demographie; Erstellung einer Sterbetafel (teilweise geraten, teilweise auf der Basis der Londoner Todesregister, „bills of mortality“). Anregung durch *W. Petty.*
1669	*C. und L. Huygens:* Briefwechsel. Berechnung von Erwartungswert und Median der zukünftigen Lebensdauer mit Benutzung von Graunts Sterbetafel (mittlere und wahrscheinliche Lebenserwartung); Berechnung dieser Größen für verbundene Leben und für Personengruppen, die beim letzten Tod erlöschen.
1670	Kampener „Kommunaltontine“, entsprechend einer Idee von *L. Tonti*, gestaltet als Rentenanleihe.
1671	*J. de Witt: Waerdye van Lyf-Renten Naer proportie van Los-Renten* sowie ein Briefwechsel mit dem Bürgermeister von Amsterdam, *J. Hudde.* Berechnung von Einmalprämien für Leibrenten auf der Basis einer Mischung aus empirisch gefundener Sterbetafel und Sterbegesetz (berechnet mittels des Histogramms der Sterbealter). Barwerte bei verbundenen Leben. „Rechnungsgrundlagen erster Ordnung“ (Selektionsgewinne, Sterblichkeitsgewinne, ...). Zweck: Armeefinanzierung aus Prämieneinnahmen (Niederländisch-Französischer Krieg).
$\approx$ 1680	*J. Hudde:* Bestimmung einer Ausscheideordnung für Leibrentner der Stadt Amsterdam, 1586 bis 1590.
1693	*E. Halley: An estimate of the degrees of mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and the funerals at the city of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives.* Konstruktion einer Sterbetafel (nach Aufzeichnungen von C. Neumann über die Todesfälle 1687 bis 1691 in Breslau, aufgeschlüsselt nach Alter und Geschlecht). Darstellung von Leibrentenbarwerten mittels der Überlebenswahrscheinlichkeiten; Tabellierung von Leibrentenbarwerten bei einem und bei mehreren verbundenen Leben in Abhängigkeit vom Alter.
1706	Gründung der *Amicable Society*, der ersten Lebensversicherungsgesellschaft der Welt, in London.
1709	*N. Bernoulli: De usu artis conjectandi in jure.* Publikation von Ideen ähnlich denen der Huygens, 1669.

1713	*J. Bernoulli:* Schwaches Gesetz der großen Zahlen für Binomialverteilungen.
1718, 1812	*A. de Moivre, P.S. Laplace:* Zentraler Grenzwertsatz für Binomialverteilungen.
1725	*A. de Moivre: Annuities upon Lives.* Erstes Lehrbuch der Lebensversicherungsmathematik; Sterbegesetz als Approximation von Halleys Sterbetafel, Rekursionsformeln für Leibrentenbarwerte.
1741	*J.P. Süssmilch: Die Göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben.* Sterbetafel für Deutschland, mehr als 100 Jahre im Gebrauch.
1755	*J. Dodson: The Mathematical Repository.* Lebensversicherung gegen laufende konstante Prämien, Deckungskapital.
1762	*Deed of settlement* (Gründungsurkunde) der *Society for Equitable Assurances on Lives and Survivorships*: Wahl des auf Dodson zurückgehenden Begriffes „*Actuary*“ (Aktuar) als Berufsbezeichnung des Versicherungsmathematikers.
1765	*D. Bernoulli: Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir.* Zusammengesetzte Ausscheideordnung mit den Ausscheideursachen „Tod ohne vorherige Pockenerkrankung“ und „Ausscheiden durch Pockenerkrankung“; Aufstellung einer ersten Ausscheidetafel mit (diesen) zwei Ausscheideursachen (ausgehend von Halleys Sterbetafel).
1767, 1776	*L. Euler: Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain* sowie *Sur les rentes viagères* und *Eclaircissements sur les établissements publics en faveur tant des veuves que des morts avec la déscription d'une nouvelle espèce de tontine aussi favorable au public qu'utile à l'état.* Erweiterung der Halleyschen Sterbetafelkonstruktion auf den Fall einer nichtstationären Bevölkerung. Jahresnettoprämien für Leibrenten (auch rekursiv), Bruttoprämien. Beschreibung einer „kontinuierlichen“ (zugangsoffenen) Tontinenversicherung.
1785/86	*N. Tetens: Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, die vom Leben einer oder mehrerer Personen abhangen.* Erstes deutschsprachiges Lehrbuch der Lebensversicherungsmathematik (zweibändig); Einführung der Kommutationszahlen.
1809, 1821	*C.F. Gauß: Theoria motus* und *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae.* Ausgleichsrechnung

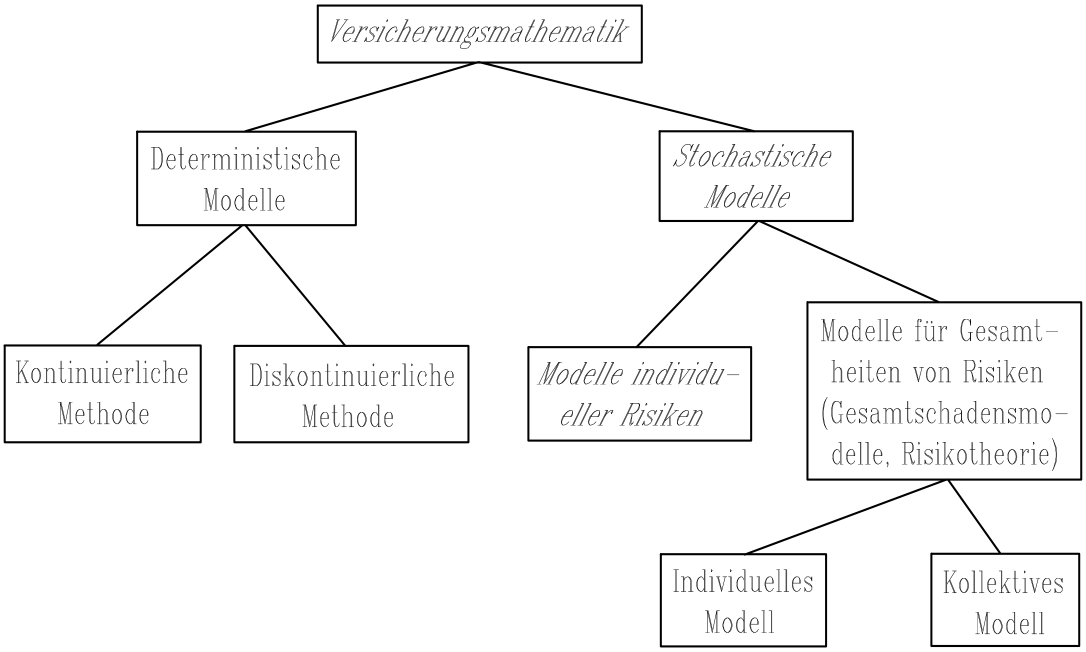
	und Parameterschätzung (Methode der kleinsten Quadrate), Normalverteilung als „Fehlergesetz".
1820, 1825	*B. Gompertz: A Sketch of an Analysis and Notation applicable to the Value of Life Contingencies* und *On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality and on a New Method of Determining the Values of Life Contingencies.* Sterbegesetz (Formel für die Sterbeintensität).
1845, 1851	*C.F. Gauß:* Gutachten zur Prüfung der Professoren-Witwen- und Waisenkasse zu Göttingen (Gauß (1845, 1851), vergleiche auch Reichel (1977)).
1860, 1866	*W.M. Makeham: On the law of mortality* und *On the principles to be observed in the Construction of Mortality Tables.* Erweiterung des Gompertzschen Sterbegesetzes.
1863	*A. Zillmer: Beiträge zur Theorie der Prämienreserve bei Lebensversicherungsanstalten.* Zur Theorie des Deckungskapitals unter Einschluß von Abschlußkosten.
1864	*S. Homans: On the Equitable Distribution of Surplus.* Erste Verwendung einer Kontributionsformel für Zwecke der Überschußverteilung.
1868	*K. Hattendorff: Das Risiko bei der Lebensversicherung.* Zerlegung der Verlustvarianz einer reinen Todesfallversicherung nach Versicherungsperioden.
1869	*W.S.B. Woolhouse: On an Improved Theory of Annuities and Assurances.* Kontinuierliche Methode der Lebensversicherungsmathematik.
1871/80	Erste Allgemeine Deutsche Sterbetafel (ADSt) für das gesamte Deutsche Reichsgebiet.
1875	*A.N. Thiele:* Differentialgleichung für das prospektive Deckungskapital einer lebenslangen Todesfallversicherung eines Lebens (unveröffentlicht).
1880	*K. Heym:* Gutachten zur Feststellung der Beitragshöhe in der gesetzlichen Sozialversicherung. Zusammen mit dem ersten Gesetzesentwurf zur Sozialversicherung 1881 dem Deutschen Reichstag vorgelegt.
1895	Gründungskongreß der IAA/AAI (International Actuarial Association/Association Actuarielle Internationale) in Brüssel.
1898	II. IAA/AAI-Kongreß. Erste internationale Standardisierung versicherungsmathematischer Bezeichnungsweisen. Die Grundprinzipien der Notation gehen zurück auf *David Jones* (1843): *On the Value of Annuities and Reversionary Payments.*
1900	*L. Bachelier: Théorie de la Spéculation.* Beginn der stochastischen Finanzmathematik in kontinuierlicher Zeit. Herleitung

	einer Optionspreisformel unter Zugrundelegung einer Brownschen Bewegung für die Aktienkursentwicklung.
1901	VAG, Gründung des *Kaiserlichen Aufsichtsamtes für Privatversicherung* als Vorgängerinstitution des BAV.
1909, 1926	*F. Lundberg: Approximerad Framställning av Sannolikhetsfunktionen und Återförsäkring av Kollektivrisker* sowie *Försäkringsteknisk Riskutjämning.* Kollektive Risikotheorie und stochastische Prozesse (Schadenzahlprozesse, Gesamtschadenprozesse), Risikotheorie.
1914	*F.P. Cantelli: Genesi e costruzione delle tavole di mutualità.* „Theorie“ (Satz) von Cantelli als Rechtfertigung für die Vernachlässigung der Ausscheideursache „Storno“.
1914	*A.H. Mowbray: How Extensive a Payroll Exposure is necessary to give a dependable Pure Premium.* Anfänge der Erfahrungstarifierung, ausgehend von der Unfallversicherung.
1930	*H. Cramér: On the Mathematical Theory of Risk.* Fortführung der Risikotheorie und der Ruintheorie.
1964, 1967, 1970	*H. Bühlmann: Optimale Prämienstufensysteme*, *Experience Rating and Credibility* und *Mathematical Methods in Risk Theory.* Credibility Theorie und Erfahrungstarifierung mittels Bayesmethoden; Prämienberechnungsprinzipien; umfassende Darstellung der Risikotheorie.
1969	*J. M. Hoem: Markov Chain Models in Life Insurance.* Systematische Darstellung der Lebens- und Pensionsversicherungsmathematik mit Hilfe von Markovschen Sprungprozessen mit endlichen Zustandsräumen.
1973	*F. Black, M. Scholes: The Pricing of Options and Corporate Liabilities.* Stochastische Optionspreistheorie; Martingalmethoden und stochastische Prozesse in der Finanzmathematik (Ökonomie-Nobelpreis für R.G. Merton und M. Scholes 1997).

Im Laufe der historischen Entwicklung hat sich natürlich auch das Aufgabenfeld der Versicherungsmathematiker bzw. Aktuare gewandelt und erweitert. In einem sehr bekannt gewordenen Editorial des ASTIN BULLETIN (1987) unterscheidet Bühlmann

- *Aktuare erster Art*, die deterministische Modelle und Methoden verwenden und hauptsächlich in der Personenversicherung tätig sind (zum Beispiel Huygens, Halley, Tetens und Zillmer)
- *Aktuare zweiter Art*, die stochastische Methoden für unabhängige Risiken oder Schäden verwenden und so auch die Risikotheorie und die Schadenversicherungsmathematik als Tätigkeitsfelder erschlossen haben (beispielsweise Lundberg und Cramér)

- *Aktuare dritter Art*, die mit Martingalmethoden, stochastischer Analysis und anderen Werkzeugen aus der Theorie stochastischer Prozesse in der stochastischen Finanzmathematik tätig sind (zum Beispiel Black und Scholes).



Die vorstehende Graphik gibt eine grobe Übersicht über die Einteilung der Versicherungsmathematik nach Modellen und Methoden. Die *gesperrt gedruckten Einträge* kennzeichnen die Felder, denen dieses Buch hauptsächlich zuzuordnen ist. Der Rest dieses Abschnittes dient der Erläuterung der in dieser Graphik verwendeten Begriffe, wobei wir uns wiederum teilweise an Helten (1988) anlehnen.

Aus wissenschaftstheoretischer Sicht sind *deterministische Modelle* Erklärungsmodelle. Eingangs- und Zielgrößen werden als deterministisch angesehen (Zinssatz, Kosten) oder durch ihre Erwartungswerte ersetzt (rechnungsmäßige, also erwartete Anzahl der Leistungsfälle, erwartete Schadenhöhen). Die Eingangsgrößen bestimmen (erklären) die Zielgrößen. Im Ergebnis erhält man ein reines Mittelwertskalkül, welches ungeeignet ist zur Abbildung von Vorgängen des Versicherungsgeschehens, bei denen Zufallsschwankungen um den Mittelwert von Bedeutung sind. Beispielsweise sind eine fundierte Risikobewertung und die Berechnung von Sicherheitszuschlägen in diesem Rahmen nicht möglich.

1.5 Beispiel. In einer Versicherungsperiode entstehe mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ein einzelner Schaden, der im Falle des Eintritts eine feste Höhe hat. Ist die Eintrittswahrscheinlichkeit 1/2 und die Schadenhöhe 1, so ist der erwartete Schaden 1/2, seine Varianz 1/4. Ist die Eintrittswahrscheinlichkeit 1/6 und die Schadenhöhe 3, so ist der erwartete Schaden ebenfalls 1/2, seine Varianz hingegen 5/4. Beide Schadenvariablen werden nach dem deterministischen Modell als gleich gefährlich angesehen.

Die Unterscheidung zwischen diskontinuierlicher und kontinuierlicher Methode der Versicherungsmathematik geschieht an Hand der Natur der jeweils verwendeten Zeitvariablen. (Zutreffender wäre es, das Wort „Methode" durch „Modell" zu ersetzen!) Bei der *diskontinuierlichen Methode* (synonym: *diskreten Methode*) existiert eine höchstens abzählbare Menge von Zeitpunkten (meist äquidistant), zu denen die für das Versicherungsgeschehen relevanten Ereignisse auftreten oder registriert werden. Alle Zufallsvariablen, die Zeiten beschreiben, realisieren in dieser Menge. Gegebenenfalls wird dies durch Diskretisierung (beispielsweise Runden oder Abschneiden) erreicht. Bei der *kontinuierlichen Methode* (synonym: *stetigen Methode*) wird meist angenommen, daß die Verteilungen von Zufallsvariablen, die Zeiten modellieren, Lebesgue-Dichten besitzen. Oft hat das reale Versicherungsgeschehen gemischten Charakter. Zeitvariablen, die Gegenstand von vertraglichen Regelungen und Einschränkungen sind (Prämienzahlungs- und teilweise auch Leistungszeiten, Stornozeiten, ...), sind in der Regel „diskret", während biometrische Variablen (Todeszeitpunkte, Invalidisierungszeitpunkte, ...) als „kontinuierlich" anzusehen sind.

Das folgende Beispiel, in dem gleichzeitig im Wege des Vorgriffs auf Kapitel 2 auch einige in der elementaren Finanzmathematik allgemein übliche Bezeichnungen eingeführt werden, dient der Illustration der Unterscheidung von diskontinuierlicher und kontinuierlicher Methode der Versicherungsmathematik.

1.6 Beispiel. Die deterministische Verzinsung eines Kapitals mit *Barwert* (Anfangswert) B wird beschrieben durch eine *Kapitalfunktion* (Aufzinsungsfunktion) $K\colon [0,\infty) \longrightarrow [1,\infty)$. Per Definition ist K monoton nichtfallend und rechtsseitig stetig, also eine endliche Verteilungsfunktion, mit $K(0) = 1$. Die Größe $S := B \cdot K(t)$ wird interpretiert als Endwert des Startkapitals B zur Zeit $t \geq 0$. Es sei

$r :=$ $K(1)$ der *Aufzinsungsfaktor* (für das erste Jahr),
$i :=$ $r - 1$ der *Zinssatz* („interest", also der Zinszuwachs im ersten Jahr auf ein Startkapital der Höhe 1),
$p :=$ $100 \cdot i$ der *Zinsfuß* im ersten Jahr,
$v :=$ $1/r$ der *Abzinsungsfaktor (Diskontierungsfaktor)*,
$d :=$ $1 - v$ der *jährliche Diskont* („Vorauszins", vergleiche Aufgabe 2).

Die Verzinsung kann diskontinuierlich (Zinszuschreibung nur zu bestimmten Zeitpunkten, oft in gleichlangen sogenannten *Konversionsperioden*) oder kontinuierlich erfolgen. Die Konversionsperiodenlänge ist meist ein Jahr.

Das einfachste Beispiel einer Kapitalfunktion ist gegeben durch die *einfache (lineare) Verzinsung.* Dabei ist

$$\begin{aligned} K(t) &= K_E(t) := 1 + [t] \cdot i, && \text{diskontinuierlich,} \\ K(t) &= K_E(t) := 1 + t \cdot i, && \text{kontinuierlich.} \end{aligned}$$

Die Abzinsung erfolgt also gemäß

$$\begin{aligned} B &= \frac{S}{1 + n \cdot i}\,, && \text{diskontinuierlich, } n \text{ Jahre,} \\ B &= \frac{S}{1 + t \cdot i}\,, && \text{kontinuierlich, Dauer } t. \end{aligned}$$

Die Unterscheidung von diskontinuierlicher und kontinuierlicher Methode der Versicherungsmathematik ist historisch gewachsen und rein technischer Natur, ohne wesentlichen versicherungswissenschaftlichen oder mathematischen Hintergrund. Sie hat in der Personenversicherungsmathematik zu einem Methodenstreit geführt, der in einem Nebeneinander von Elementen der kontinuierlichen Methode und der diskontinuierlichen Methode, im unmotivierten Wechsel zwischen beiden Ansätzen und in Doppelentwicklungen resultiert. Für praktische Zwecke wird meist die diskontinuierliche Methode verwandt, während in der Theorie häufig mit der kontinuierlichen Methode argumentiert wird. Besonders auffallende Beispiele dieser unkoordinierten Parallelität finden sich in der Theorie des Deckungskapitals, in der zur Beschreibung der zeitlichen Dynamik des prospektiven Deckungskapitals nebeneinander diskrete Rekursionsformeln und erkennbar gleichartig strukturierte Differentialgleichungen herangezogen werden, ohne aus der Strukturgleichheit weitergehende Schlüsse zu ziehen (vergleiche die Kapitel 9 und 10, insbesondere Bemerkung 9.11 (c)).

Es ist ein Anliegen dieses Buches, zu zeigen, daß das mathematische Standardrepertoire der Maßtheorie und der Stochastik eine Darstellung der Personenversicherungsmathematik ermöglicht, die auf die unnatürliche Unterscheidung zwischen diskontinuierlicher und kontinuierlicher Methode verzichten kann, da sie beide als Spezialfälle enthält. Hierzu ist weder die Einführung eines besonderen Integralbegriffes (etwa des Stieltjes-Schärfschen Integrals, vergleiche Jensen (1992, 1993) und die dort angegebenen Quellen) noch die einer besonderen Funktionenklasse („Versicherungsfunktionen“, siehe u.a. Saxer (1958), § 1.5) erforderlich. Es ist lediglich notwendig, statt einer augenblicksbezogenen Betrachtungsweise konsequent eine zeitraumbezogene (kumulative) Sichtweise einzunehmen, also nicht das Geschehen *exakt zu* sondern dasjenige *bis zu* einem Zeitpunkt zu modellieren. Auf diesen Aspekt kommen wir insbesondere in den Kapiteln 2, 3, 5, 6, 9 und 10 zurück.

Ein einfaches Beispiel ist die Beschreibung der Verzinsung durch Kapitalfunktionen, deren Wert zu einer festen Zeit die Höhe des *bis dahin* unter Einfluß der Verzinsung *kumulierten* Kapitals (bei einem Startkapital der Höhe 1) darstellt. Wie der folgende wohlbekannte maßtheoretische Hilfssatz zeigt, faßt die Kapitalfunktion den diskontinuierlichen und den kontinuierlichen Teil des Zinsgeschehens zusammen.

1.7 Hilfssatz. *Jede Kapitalfunktion K besitzt eine eindeutige Zerlegung der Form*

$$K = K^{(d)} + K^{(c)} = K^{(d)} + K^{(cs)} + K^{(ca)} \tag{1.7.1}$$

in einen rein diskontinuierlichen Anteil

$$K^{(d)}\colon t \longmapsto \sum_{s \le t} \Delta K(s) \tag{1.7.2}$$

(Wachstum nur durch Sprünge, $K^{(d)}(0) = 1$) und einen stetigen Anteil

$$K^{(c)} := K - K^{(d)}, \tag{1.7.3}$$

der weiter eindeutig in einen absolutstetigen Anteil

$$K^{(ca)}\colon t \longmapsto \int_0^t k^{(ca)}(\tau)\, d\tau \tag{1.7.4}$$

und einen stetigen Anteil, der singulär zum Lebesgue-Maß ist,

$$K^{(cs)} := K^{(c)} - K^{(ca)}, \tag{1.7.5}$$

zerlegt werden kann.

Beweis. Offenbar ist $K^{(d)}$ eine Kapitalfunktion, die nur durch Sprünge wächst. $K^{(c)}$ ist eine Verteilungsfunktion, aber wegen $K^{(c)}(0) = 0$ keine Kapitalfunktion. Die Zerlegung (1.7.4), (1.7.5) folgt aus dem Satz von Lebesgue-Radon-Nikodym (siehe zum Beispiel Rudin (1987), Theorem 6.10). □

In diesem Buch werden der Versicherungsmathematik *stochastische Modelle* zugrunde gelegt. Aus wissenschaftstheoretischer Sicht sind solche Modelle Beschreibungsmodelle. Formal ist dabei zwischen statischen stochastischen Modellen und dynamischen stochastischen Modellen zu unterscheiden. Statische Modelle beruhen auf der Beschreibung des Versicherungsgeschehens durch Zufallsvariablen, dynamische Modelle auf der Beschreibung durch stochastische Prozesse. Bei ersteren werden also *Zeitpunkte* oder über einen *festen* Zeitraum aggregierte Größen (Prämien, Schadenzahlen und -höhen, …) betrachtet, bei letzteren steht der *Versicherungsverlauf* in einem Zeitraum im Mittelpunkt. In den Kapiteln 3, 5, 9 und 11 verwenden wir ausschließlich statische Modelle, während in den Kapiteln 4, 6, 10 und 12 vor allem dynamische Modelle von Bedeutung sind. Die Kapitel 7 und 8 beziehen sich teilweise auf Kapitel 5 und teilweise auf Kapitel 6, so daß dort mittelbar sowohl statische als auch dynamische Modelle eine Rolle spielen.

Vom Untersuchungsgegenstand her unterscheiden wir zwischen stochastischen Modellen für individuelle Risiken und stochastischen Modellen für Gesamtheiten von Risiken. Beide können in statischer und in dynamischer Form auftreten. *Modelle individueller Risiken* haben Aussagen für Verteilungen versicherungsrelevanter Zufallsgrößen für Einzelrisiken zum Ziel. Da sich dieses Buch fast ausschließlich mit dem Einzelrisiko befaßt, verzichten wir hier auf weitere diesbezügliche Ausführungen und erläutern zur Abgrenzung kurz einige Grundbegriffe der *Risikotheorie.* Deren Anliegen sind Aussagen für über ein Portefeuille aggregierte Größen, hauptsächlich für den Gesamtschaden. Im *individuellen Modell* der Risikotheorie (begrifflich nicht zu verwechseln mit Modellen individueller Risiken!) wird der Gesamtschaden ausgehend vom Einzelrisiko modelliert. Dagegen stellt das kollektive Modell gleich auf den Gesamtschaden im Portefeuille ab. Obwohl dies im weiteren nicht benötigt wird, geben wir auch eine formale Definition beider Modelle, beschränken uns dabei aber auf den statischen Fall.

1.8 Definition

(a) Ein *(statisches) individuelles Risikomodell* ist gegeben durch n unabhängige Versicherungsträger, die *Policen.* Diesen zugeordnet sind Schadenhöhen $X_1, \ldots, X_n$ innerhalb einer Versicherungsperiode, aufgefaßt als stochastisch unabhängige, nichtnegative Zufallsvariablen mit Verteilungen $P_1, \ldots$ $\ldots, P_n$. Der Gesamtschaden im Portefeuille ist

$$GS_{\text{ind}} := \sum_{i=1}^{n} X_i\,,$$

seine Verteilung ist gegeben durch das Faltungsprodukt

$$P_{\text{ind}} := \mathop{*}_{i=1}^{n} P_i\,.$$

(b) Bei einem *(statischen) kollektiven Risikomodell* werden die Schäden im Gesamtbestand nach Anzahl und Höhe registriert: Gegeben sind die Schadenzahl $N \in \mathbb{N}$ innerhalb einer Versicherungsperiode und die Schadenhöhen $Y_i > 0$ in der Eintrittsreihenfolge, aufgefaßt als stochastisch unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Die Schadenhöhen seien identisch gemäß $Q\big|_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)}$ verteilt. Der Gesamtschaden im Portefeuille ist

$$GS_{\text{coll}} := \sum_{i=1}^{N} Y_i\,,$$

seine Verteilung ist gegeben als Mischung von Faltungspotenzen von Q,

$$P_{\text{coll}}\colon B \longmapsto P(GS_{\text{coll}} \in B) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N = k) \cdot Q^{*k}(B), \quad B \in \mathfrak{B}([0, \infty)).$$

Im individuellen und im kollektiven Risikomodell wird also derselbe Sachverhalt, die Höhe des Gesamtschadens im Portefeuille, auf zwei unterschiedliche Weisen modelliert: Der Ausgangspunkt des individuellen Modells ist der *Einzelvertrag*, derjenige des kollektiven Modells der *Einzelschaden*. Im Idealfalle sind Modelle für dasselbe Portefeuille so aneinander angepaßt, daß $P_{\text{ind}} = P_{\text{coll}}$; faktisch muß man sich in der Regel damit zufrieden geben, eine „hinreichend gute“ Approximation des individuellen Modelles durch das kollektive Modell zu erzielen (vergleiche zum Beispiel Hipp und Michel (1990), Kapitel 2).

1.9 Beispiel. Ist im statischen kollektiven Risikomodell 1.8 (b) $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$, so ist P_{coll} eine *zusammengesetzte Poissonverteilung* mit Sprungintensität λ und Sprunghöhenverteilung Q:

$$P_{\text{coll}} = ZP(\lambda, Q)\colon B \longmapsto \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} Q^{*k}(B).$$

C Internationale versicherungsmathematische Bezeichnungsweise

Wir wenden uns dem versicherungsmathematischen Bezeichnungsstandard zu. Von vielen außerhalb der Versicherungsmathematik tätigen Mathematikern werden diese Bezeichnungen als Folterwerkzeuge angesehen, deren Vorzeigen alleine schon genügt, Fluchtinstinkte zu wecken. Insofern bilden sie ein eigenständiges Zugangshindernis zur Personenversicherungsmathematik. Daß wir trotzdem, mit geringfügigen Abstrichen und Modifikationen, dem Bezeichnungsstandard folgen, hat hauptsächlich den Grund, daß er wegen seiner weiten Verbreitung von keinem in der Praxis tätigen Versicherungsmathematiker ignoriert werden kann.

Die Ausführungen dieses Abschnittes enthalten notwendigerweise einige Vorgriffe auf noch folgende Kapitel, da Bezeichnungsgrundsätze nicht ganz losgelöst von Inhalten dargestellt werden können. Sie sollten daher zunächst nur kursorisch zur Gewinnung eines ersten Eindrucks und später nochmals im Zusammenhang mit den entsprechenden Kapiteln gelesen werden.

Auf dem XIV. Internationalen Kongreß der Versicherungsmathematiker in Madrid (1954) wurde die heute noch maßgebliche, überarbeitete Version des internationalen versicherungsmathematischen Bezeichnungsstandards beschlossen und anschließend u.a. in Band II (1955) der Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik (DGVM), pp. 367 bis 376, publiziert. Eine Übersicht über allgemeine Bezeichnungsregeln, die wir hier teilweise wiedergeben, findet sich zum Beispiel in Appendix 4, pp. 577 bis 583 von Bowers et al. (1986). Ansonsten verzichten wir auf eine systematische Erläuterung der versicherungsmathematischen Bezeichnungsweise und erklären Bezeichnungen ad hoc, dann wenn sie benötigt werden.

1.10 Bemerkungen. Einige Bezeichnungsgrundsätze:

(a) Ein versicherungsmathematisches Symbol, etwa ${}^{(\delta)}\ddot{a}_x^{(k)}$ oder ${}_tp_x$, besteht in der Regel aus mehreren Symbolkomponenten: Dem Grundsymbol, hier $\ddot{a}$ bzw. p, an dessen vier Ecken zusätzliche Symbolkomponenten nach folgendem Schema angebracht werden können:

Bedeutung frei		Zahlungsweise
	Grundsymbol	
Dauer		Alter, Reihenfolge

Beispielsweise ist $\ddot{a}$ das Grundsymbol für einen erwarteten Rentenbarwert bei vorschüssiger Zahlungsweise (siehe Kapitel 2 und 5), p das Grundsymbol für eine Verbleibswahrscheinlichkeit (siehe (b), Beispiel 1.11 (b) und Kapitel 3), $x \geq 0$ gibt in beiden Beispielen das Alter der betreffenden Person an, (k) deutet auf eine k-tel–jährliche Zahlungsweise der Rente hin ($k \in \mathbb{N}$), (δ) auf die Barwertermittlung gemäß der zusammengesetzten Verzinsung mit Zinsintensität $\delta \geq 0$ (Aufgabe 2 (b) und Kapitel 2), und $t > 0$ gibt die Zeitdauer an, für die die Verbleibswahrscheinlichkeit ermittelt wird.

(b) Grundsymbole, die mit dem Ausscheiden aus einem Kollektiv zusammenhängen (vergleiche Kapitel 3):
   - ℓ : Erwartete Zahl der im Kollektiv Befindlichen
   - d : Erwartete Zahl der Ausgeschiedenen
   - p : Verbleibswahrscheinlichkeit
   - q : Ausscheidewahrscheinlichkeit.

(c) Altersbezeichnungen:
   - (x) : Person des Alters x (häufig: ein Mann; dann (y): eine Frau des Alters y)
   - ω : Schlußalter der verwendeten Sterbetafel ($\omega = 101$ bei der Sterbetafel 1994 T der Deutschen Aktuarvereinigung (DAV), vergleiche die Tabellen 13.3 und 13.4).

(d) Als Ausnahmeregelung zu (a) und Konzession an die Bezeichnungsweisen der Finanzmathematik (vergleiche Kapitel 2) kennzeichnet

$$\overline{\text{Buchstabe}|}, \quad \overline{\text{Zahl}|}$$

rechts unten feste, nichtzufällige *Laufzeiten.*

$$\text{Buchstabe}\,|\ldots, \quad \text{Zahl}\,|\ldots$$

links unten kennzeichnet eine *Aufschubzeit.*

$$(\text{Buchstabe}), (\text{Zahl})$$

rechts oben gibt die Anzahl der gleichen Teile an, in welche das Jahr geteilt ist. Bei kontinuierlichen Größen (Anzahl $\longrightarrow \infty$) wird statt der Verwendung von (∞) das Grundsymbol überquert.

1.11 Beispiele. (Vergleiche Abschnitt 2 A zu (a) und 3 A zu (b))

(a) $i^{(k)} := k\left((1+i)^{1/k} - 1\right)$
= *nomineller Jahreszinssatz*, wenn die Zinszahlung k-tel–jährlich in gleichen Raten von $(1+i)^{1/k} - 1$ erfolgt (effektiver Jahreszins i).

(b) ℓ_x: Erwartete Anzahl der im Kollektiv befindlichen x-jährigen Personen.
$d_x := \ell_x - \ell_{x+1}$: Erwartete Anzahl der im Altersintervall $(x, x+1]$ ausscheidenden Personen.
${}_tp_x$: Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person, auch im Alter $x + t$ einschließlich noch zum Kollektiv zu gehören.
$p_x := {}_1p_x$.
${}_tq_x := 1 - {}_tp_x$: Wahrscheinlichkeit für eine x-jährige Person, im Altersintervall $(x, x+t]$ auszuscheiden.
$q_x := {}_1q_x$.
${}_{s|t}q_x$: Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person, im Altersintervall $(x + s, x + s + t]$ auszuscheiden (Alter x, Aufschubzeit s, Dauer t).

Der Vorteil dieser Bezeichnungsweisen liegt in ihrer internationalen Standardisierung und in ihrer dadurch bedingten weiten Verbreitung. Auch werden sie von vielen in der Versicherungswirtschaft tätigen Ökonomen und Juristen zumindest teilweise verstanden. Dem stehen Nachteile gegenüber:

- Der wesentliche Nachteil besteht in der Abweichung von der Notation der Stochastik. Ist beispielsweise $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $T_x: (\Omega, \mathfrak{A}) \longrightarrow \big([0,\infty), \mathfrak{B}([0,\infty))\big)$ die zukünftige Lebensdauer von (x), so ist

$$ {}_tp_x = P(T_x > t)$$

und

$$t \longmapsto {}_tq_x = P(T_x \leq t)$$

die Verteilungsfunktion von T_x. (In allen praktisch relevanten Situationen ist $\mathcal{L}(T_x)$ stetig und damit ${}_tp_x = P(T_x \geq t)$ sowie ${}_tq_x = P(T_x < t)$, in Einklang mit der üblichen Verwendung dieser Symbole in der Lebensversicherungsmathematik.) Zusammen mit Diskrepanzen in der Terminologie hatten solche Notationsunterschiede etliche Doppelentwicklungen in der Versicherungsmathematik einerseits und in sonstigen Bereichen der Stochastik andererseits zur Folge. Ein Beispiel, auf das wir in Abschnitt 3 C näher eingehen, sind Parallelüberlegungen in den Bereichen „unabhängige Wahrscheinlichkeiten" (versicherungsmathematische Terminologie und Notation) und Darstellungen von „Modellen mit konkurrierenden Risiken" mittels „latenter Ausfallzeiten" (Terminologie und Notation der Statistik).

- Die Notation ist wenig textverarbeitungsgerecht, wie u.a. auch bei der Erstellung dieses Buchmanuskriptes auffiel.
- Die Notation ist nicht konsistent: Beispielsweise bedeutet bei einem Modell mit m konkurrierenden Risiken (etwa: $m = 2$, Lebensversicherungsportefeuille mit den Ausscheideursachen Unfalltod und Tod aus sonstigen Gründen) ${}_tq_x^{(j)}$ die Wahrscheinlichkeit, daß (x) im Altersintervall $(x, x+t]$ wegen des Risikos j ausscheidet. Also ist (j) im Widerspruch zu Bemerkung 1.10 (a) keine Zahlungsweise. Ein weiteres Beispiel für mangelnde Konsistenz ist die Verwendung der Bezeichnung $\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ (statt des eigentlich korrekten ${}_n\ddot{a}_x$) für den erwarteten Barwert einer n Jahre jährlich vorschüssig zahlbaren Leibrente für (x) (vergleiche Bemerkung 1.10 (d)).

Diese und andere Probleme legen den Gedanken an eine Bezeichnungsreform nahe. Auch besteht Bedarf an Ergänzungen des Bezeichnungsstandards, da beispielsweise die Bezeichnungsweisen in der Pensionsversicherungsmathematik bisher teilweise noch nicht international vereinheitlicht sind. In diesem Bereich folgen wir im wesentlichen der im deutschsprachigen Raum historisch gewachsenen Bezeichungsweise, wie sie etwa den Richttafeln für die Pensionsversicherung von Heubeck (1983b, 1998) zugrunde liegt. (Für Details sei auf die Abschnitte 6 E und 7 D verwiesen.)

D Aufgaben

Aufgabe 1. Untersuchen Sie folgende Versicherungsarten hinsichtlich der Zufälligkeit von Leistungshöhe, Fälligkeitszeit und Eintritt der (des) versicherten Ereignisse(s) sowie ihrer Einordnung in die Kategorien Summenversiche-

rung/Schadenversicherung bzw. Personenversicherung/Sachversicherung/Vermögensversicherung:
- Altersrentenversicherung (privat),
- Berufsunfähigkeitsversicherung,
- Betriebsunterbrechungsversicherung,
- Hagelversicherung,
- Krankentagegeldversicherung,
- Krankheitskostenversicherung (privat),
- Kredit- und Kautionsversicherung,
- Rechtsschutzversicherung,
- Sturmversicherung.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) $$d = \frac{i}{1+i}\,, \qquad i\,v = d\,, \qquad d\,r = i\,, \qquad (1-d)\,r = 1\,;$$

begründen Sie mittels der letzten Identität die Bezeichnung „Vorauszins" für d!

(b) $\lim\limits_{k\to\infty} i^{(k)} = \log r =: \delta$.

δ wird als *Zinsintensität* bezeichnet (siehe auch Beispiel 2.5 (a)). Im Sinne der Bezeichnungssystematik 1.10 (d) wäre die Bezeichnung $\bar{\imath}$ statt δ zu verwenden.

Aufgabe 3. Diskutieren Sie die Unabhängigkeitsannahme im individuellen Modell der Risikotheorie!

Aufgabe 4. Formulieren Sie, ausgehend von einem Schadenzahlprozeß $\big(N(t)\big)_{t\geq 0}$ und Schadenhöhenvariablen $Y_1, Y_2, \ldots$ ein dynamisches Modell der kollektiven Risikotheorie (Gesamtschadenprozeß)!

Literaturhinweis: Schmidt (1996), Abschnitt 5.1.

Aufgabe 5. Gegeben sei das dynamische kollektive Risikomodell mit einem Schadenzahlprozeß mit unabhängigigen stationären Zuwächsen. Zeigen Sie, daß dann auch der Gesamtschadenprozeß unabhängige stationäre Zuwächse besitzt! Welche endlich-dimensionalen Randverteilungen hat dieser Prozeß, falls der Schadenzahlprozeß ein homogener Poissonprozeß ist?

Aufgabe 6. (Bezeichnungen wie in Abschnitt C)
Sei $T_x\colon (\Omega, \mathfrak{A}, P) \longrightarrow \big([0,\infty), \mathfrak{B}([0,\infty))\big)$, $x \geq 0$, eine Familie von Zufallsvariablen, die die Lebensdauer beim Absterben einer Population der Ausgangsgröße ℓ_0 beschreibt:

$$\mathcal{L}(T_x) = \mathcal{L}(T_0 - x \mid T_0 > x)\,, \qquad x \geq 0\,.$$

(a) Begründen Sie die Verträglichkeitsbeziehung

$$P(T_{x+s} > t) = P(T_x > s + t \mid T_x > s)\,, \qquad x \geq 0, \quad s,t \geq 0,$$

und damit

$${}_np_x = \prod_{j=1}^{n} p_{x+j-1}\,, \qquad \ell_n = \ell_0 \prod_{j=1}^{n} p_{j-1}\,, \qquad x \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}\,!$$

(b) Zeigen Sie, daß $T_x > 0$ P-fast sicher für alle $x < \omega_0 := \inf\{t \geq 0 \mid P(T_0 \leq t) = 1\}$ und $T_x = 0$ P-fast sicher für alle $x \geq \omega_0$!

Hinweis: Vergleichen Sie mit Bemerkung und Definition 3.6!