Zugänge zum Grundlegenden

Prof. Dr. Hans-Dieter Sill

Mathematisches Kolloquium, TU Darmstadt, 03.02.2016

UNIVERSITÄT ROSTOCK | MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT

Inhaltsübersicht

- Befunde und Aktivitäten
- Probleme und ihre Ursachen
- Was ist das Grundlegende?
- Was müsste sich in der Schule und in weiterführenden Bildungswegen ändern?

Befunde an Schnittstellen

- In Leistungserhebungen am Ende eines Stoffgebietes oder einer Bildungsstufe (Kl. 4, 10, 12) werden meist für Lehrkräfte zufriedenstellende Ergebnisse erreicht.
- In Leistungserhebungen in späteren Stoffgebieten oder am Beginn einer neuen Bildungsstufe sind die Ergebnisse oft unzureichend.
- Beispiele:
  - Schüler können in Kl. 9 oft keine Prozentrechnung
  - Ergebnisse von Ist-Stand-Analysen in Kl. 5
  - Ergebnisse von Eingangstests in Berufsschulen und Fachhochschulen
  - Ergebnisse von Eingangstests in Universitäten
  - War das schon immer so?

Eingangstests in Kl. 5

- Einschätzung einer Lehrkraft: „Die Ergebnisse waren eher schlecht, besonders ist mir aufgefallen, dass die formalen Aufgaben gut geklappt haben aber die Vorstellungen zu Größen waren sehr schlecht. Die Sachaufgaben waren katastrophal.“
- Beispielaufgaben aus einem Test
  - Wähle eine sinnvolle Einheit!

    f) Dauer der großen Ferien:
  - Sandras Schulweg beträgt 12,7 km. Bis zur Bushaltestelle sind es 550 m. Mit dem Bus fährt sie 11,3 km. Den Rest geht sie zu Fuß. Wie weit muss Sandra noch gehen?
  - Beim Würfeln mit zwei Spielwürfeln wird die Summe 7 wesentlich häufiger gewürfelt als die Summe 12. Woran liegt das?

Ergebnisse aus Berufsschulen und Fachhochschulen

- Bericht vom „Nachmittag der Mathematik“ der IHK Braunschweig in der *Welt am Sonntag* vom 11.10.2009:
  - „Bei Eingangstests mit Absolventen der Sekundarstufe I hätten gerade mal 30 % Dreisatz und Prozentrechenaufgaben richtig lösen können“ (Berufsschule Salzgitter)
  - „Von 1120 Testteilnehmern des Wintersemesters 2008/09 erreichte über 900 Teilnehmer nur null bis fünf von insgesamt 19 Punkten.“ (TU Braunschweig)

IPN-Studie 2014 in SH (O. Köller u. a.)

- 1360 Abiturienten in Profiloberstufen in SH getestet:
  - Nur 31 Prozent der Schüler erreichen die angestrebte voruniversitäre mathematische Bildung.
  - Die Mehrheit der Schüler schafft nur das Matheniveau der Realschule.
  - 28 Prozent der Abiturienten kommen über den Kenntnisstand von Klasse 7 oder 8 nicht hinaus
  - nicht besser als bei TIMSS 1999
- Quelle: M. Spiewak: Ewige Rechenschwäche, *Die Zeit* vom 26. März 2015

aus einem Brief von Lehrenden der Technischen Hochschule Darmstadt und Lehrkräften von umliegenden Schulen an den damaligen Direktor des Landesschulbeirats für Hessen aus dem Jahr 1949:

„Auf dem Gebiet der elementaren Arithmetik und Algebra fehlt Sicherheit, weil wahres Verständnis fehlt. Wohl werden die rationalen Rechenoperationen, die Wurzel- und Logarithmengesetze in allgemeinen Zahlen ‚durchgenommen', aber welcher Abiturient kann ein Kolloquium hierüber bestehen? Die Aufnahmeprüfungen an den Hochschulen zeigen gerade auf diesem Gebiet eine erschütternde Verständnislosigkeit […].“

Aktivitäten im schulischen Bereich

- Erstellen und Überprüfen von Zielen und Aufgaben
  - „Basiskompetenzen“ (Drüke-Noe u.a. 2011)
  - „Grundkompetenzen“ (Peschek 2011)
  - „Grundwissen und Grundkönnen“ (Feldt-Caesar, 2016)
  - Grundwissen“ (Fischer 2001, Pinkernell/Greefrath 2011)
  - „Sicheres Wissen und Können“ (Sill/Sikora 2007)
  - Vorschläge für Unterrichtsformen zur Sicherung des „Grundlegendem“, z. B. „Tägliche Übungen“ (Bruder 2008)
- Ausweisen von „Grundwissen“ in Lehrplänen oder weiteren Materialien (BY, MV, RP, SN, ST, TH, SINUS)

Forderungen, Angebote und Aktivitäten nachfolgender Bildungsstufen

- aus der Entschließung der IHK Braunschweig 2009:
  - unverzichtbare Fertigkeiten intensiver vermitteln … Setzen von Mindeststandards
  - Abstimmung der notwendigen Anforderungen an BS, FH und Unis mit Lernzielen der Oberstufe und Abschlussklassen aller Schulformen, dazu Eingangstest zur Verfügung stellen
  - Didaktik darf nicht die Beherrschung von Rechenfertigkeiten verdrängen
- Kataloge von Mindestanforderungen erarbeitet:
  - *SCHULE*WIRTSCHAFT Rheinland-Pfalz
  - cosh Baden-Württemberg

Forderungen, Angebote und Aktivitäten nachfolgender Bildungsstufen

- Unterstützungsmaßnahmen an Fach- und Hochschulen: Vorkurse, Tutorien, …
- aber kaum Verbesserungen:
  - Christa Polaczek, FH Aachen, hat in 15 Jahren „so ziemlich alle Formen der Lehre durchprobiert und evaluiert“ aber „nirgendwo Veränderungen festgestellt.“
- bei Treffen von Lehrkräften aus Schulen und Hochschulen oft Unverständnis auf beiden Seiten

Probleme und Ursachen

- mangelnde Berücksichtigung neurowissenschaftlicher Gesetze, z. B. zum Gedächtnis
- unzureichende Analyse der Anforderungen der Aufgaben
- viel zu allgemeine Anforderungen bei Mindestanforderungskatalogen
- mangelnde Berücksichtigung inhaltlicher Aspekte, z. B. <u>inhaltliches Lösen von Gleichungen</u>
- oft viele unangemessene Anforderungen in den Eingangstests
- Hauptursache: komplementäre Denkweisen von Lehrkräften aus Schulen und Hochschulen

Gedächtnisprozesse zum Schulstoff

- Grundwissen aus der Biologie:
  - Was ist die Photosynthese?
  - Warum ist die Photosynthese für Menschen und Tiere so wichtig?
  - Wo findet diese statt?
  - Was sind Spaltöffnungen?
- Grundwissen aus der Chemie
  - Was ist eine Redoxgleichung?
  - Wie stellt man sie auf?
  - Was sind Kohlenwasserstoffe?
  - Was ist eine elektrophile Addition?

Konsequenzen aus neurowissenschaftlichen Gesetzen

- Nur ein geringer Teil dessen, was im Unterricht behandelt und in LE in der Schule erfolgreich getestet wurde, kann jederzeit abrufbar bereit stehen. Dies nennen wir „Sicheres Wissen und Können“ (SWK).
- Vieles kann aber durch Reaktivierung und Übung die schon einmal erreichte Qualität wieder erhalten. Wir nennen es „Reaktivierbares Wissen und Können“ (RWK).
- Einiges ist nur exemplarisch im Unterbewusstsein vorhanden, aber auch das ist wertvoll für das weitere Lernen (Exemplarisches Wi. u. Kö, EWK).
- Aussagen zur Erfüllung von Anforderungen sind immer <u>Wahrscheinlichkeitsaussagen</u>.

Unterschiede Basiskompetenzen - SWK

- *Anzahl der Zielangaben*
  BK Terme/Gl.: 3 Zielangaben
  SWK Terme/Gl.: 72 Zielangaben
  BK Funktionen: 11 Zielangaben
  SWK Funktionen: 100 Zielangaben
- *Anzahl der Aufgaben*
  BK Terme/Gl.: 4 Aufgaben
  SWK Terme/Gl.: 627 Aufgaben
  BK Funktionen: 33 Aufgaben
  SWK Funktionen: 565 Aufgaben
- *Typ der Aufgaben*
  BK: viele Sachaufgaben (31 von 37)
  SWK: sehr wenige Sachaufgaben
- *Anzahl der Anforderungen pro Aufgabe*
  BK: viele **SWK**: eine

Überhöhte Anforderungen bei Tests und Mindestanforderungen

- ein unvorbereiteter Test mit Anforderungen aus fast Gebieten der Schule kann nur SWK enthalten
- Eingangstest Kl. 5
- Selbsttest für Studienanfänge FH Wismar:
  - Gutachten Fachberater MV: fast alles überhöht, kein SWK
  - Gutachten TH Aachen: alles notwendig
- Mindestanforderungskatalog der HS in BW (cosh):
  - enthält z. T. Inhalte, die nicht in LP enthalten sind
  - übrige Inhalte entsprechen dem üblichen Anforderungsniveau der LP und zentralen LE

Mensch und Mathematik

Ein Begriff ist eine Gesamtheit von Gedanken. Er wird in einem semantischen Netz gespeichert.

Ein Begriff ist durch eine Definition hinreichend beschrieben.

Bsp.: <u>Variablenbegriff und Funktionsbegriff</u>

Begründungen und Beweise findet man durch reduktives Schließen.

Beweise werden mit deduktiven Schlüssen dargestellt.

George Polya zu Schlussweisen

George Polya (1887-1985): Mathematik und plausibles Schließen, 1. Band, Princeton 1954:

„Man muß einen mathematischen Satz erraten, ehe man ihn beweist; man muß die Idee eines Beweises erraten, ehe man die Details ausführt. Man muß Beobachtungen kombinieren und Analogien verfolgen; man muß immer und immer wieder probieren. Das Resultat der schöpferischen Tätigkeit des Mathematikers ist demonstratives Schließen, ist ein Beweis; aber entdeckt wird der Beweis durch plausibles Schließen.“

Mensch und Mathematik

Ein Mensch hat psychische Dispositionen, z. B.: Kenntnisse, Fähigkeiten, Fertigkeiten, Einstellungen

Mathematik hat stoffliche Inhalte, z. B.: Begriffe, Sätze, Beweise, Verfahren

Das mathematische Wissen und Können ist im Kopf.

Man kann etwas vergessen.

Die Mathematik steht im Lehrbuch.

Ein Lehrbuch „vergisst“ nichts.

Mensch und Mathematik

Stochastik in der Schule heißt Entwicklung von Datenkompetenz und stochastischem Denken

Stochastik in der Schule ist nicht erforderlich.

(cosh, IHK Braunschweig)

Ein Lehrerstudent muss die Schulmathematik sicher beherrschen.

Ein Lehrerstudent muss den strin-genten Aufbau von mathematischen Theorien erleben.

Mensch und Mathematik

Die Kenntnisse zum Begriff „Natürliche Zahl“ sind grundlegend für die Aneignung aller Zahlbegriffe.

Die Peano-Axiome definieren den Bereich der natürlichen Zahlen.

Das Können im mündlichen Rechnen mit natürlichen Zahlen ist Grundlage aller Rechnungen mit Zahlen.

Für das Rechnen mit natürlichen Zahlen gibt es Rechengesetze.

Was ist das Grundlegende?

- Grundlegend in Bezug auf die kognitive Struktur mathematischer Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten eines Menschen sind solche Bestandteile, die
  - dauerhaft und disponibel verfügbar sind,
  - die Bewältigung von mit mathematischem Wissen und Können verbundenen Anforderungen des täglichen und gesellschaftlichen Lebens eines Bürgers in hinreichender Weise ermöglichen sowie
  - notwendig für eine Reaktivierung und Erweiterung seines mathematischen Wissens und Könnens im weiteren Bildungsweg und im beruflichen Leben sind.
- Grundlegend in Bezug auf eine mathematische Theorie sind Begriffe, Sätze, Verfahren und Denkweisen, die den Kern (die Basis) der Theorie bilden.

Was müsste sich ändern?

- *Die Schule* muss in weit höherem Maße gewährleisten, dass
  - die Absolventen grundlegende mathematische Dispositionen (im obigen Sinne des Grundlegenden) besitzen, indem
  - eine stärkere Gewichtung und auch <u>Reduzierung der Unterrichtziele</u> erfolgt,
  - ein geeignetes System von Formen der Festigung, insbesondere von Täglichen Übungen, konsequent umgesetzt wird und dabei
  - das Verhältnis inhaltlicher und formaler Aspekte von Begriffen und Verfahren weit stärker beachtet wird.

Reform der Abiturstufe

- Martin Spiewak in: *Die Zeit* vom 26. März 2015:
  „Vielleicht sollte man eher fragen, ob der Bildungskanon des Gymnasiums für die Mathematik tatsächlich der richtige ist, wenn ihn ein großer Teil des Abiturjahrgangs nicht einmal in Ansätzen beherrscht – wahrscheinlich seit Generationen."
- Bsp.: Stellungnahme der MNF der Uni Rostock zum Rahmenplanentwurf Abiturstufe in MV, 2015:
  „Das Hauptproblem der Studienanfänger sind für uns die oft gravierenden Mängel im grundlegenden mathematischen Wissen und Können. … Um die zeitlichen Voraussetzungen für die Sicherung der Mindestanforderungen zu gewährleisten, streben wir mit unseren inhaltlichen Vorschlägen eine möglichst weitgehende Reduzierung der vorgesehenen Inhalte an."

Was müsste sich ändern?

- In den *weiterführenden Bildungswegen* sollte man
  - sich davon verabschieden, Eingangstest durchzuführen und damit verbundene Schuldzuweisungen an die Schule auszusprechen,
  - keine übererhöhten Erwartungen an das grundlegende Wissen und Können der Schulabsolventen haben, sondern ihre realen Möglichkeiten akzeptieren (G. Törner),
  - auf überhöhte Anforderungen in der Anfangsphase der neuen Ausbildung verzichten, sondern
  - den neuen Lernenden ausreichend Möglichkeiten zur zielgerichteten Reaktivierung und partiellen Erweiterung ihres mathematischen Wissens und Könnens anbieten mit einem hohen Grad an Selbstständigkeit und Nutzung von spezifischen Lernprogrammen.

6.4.2 Grundbegriffe der Algebra

a) Variable/<u>Parameter</u>:

- *Formale Aspekte:*

  Eine Variable ist ein Buchstabe oder eine Zusammensetzung aus Buchstaben, Ziffern oder Zeichen. Nicht jeder Buchstabe ist eine Variable.
- *Inhaltliche Aspekte:*
  1. **Verwendungsaspekt:**

     Variable werden verwendet für
     a) bekannte Zahlen oder Größen,
     b) unbekannte aber feste Zahlen,
     c) beliebige Zahlen oder Größen.
  2. **Bezeichnungsaspekt:**

     Variable dienen zur Bezeichnung von Zahlen und Größen.
     Es gibt Konventionen für Bezeichnungen.
  3. **Einsetzungsaspekt:**

     Für Variable können Zahlen, Größen oder Terme eingesetzt werden. Variable sind Platzhalter oder <u>Namen leerer Fächer</u>.
  4. **Rechenaspekt:**

     Mit Variablen kann man wie mit Zahlen rechnen.
  5. **Veränderungsaspekt:**

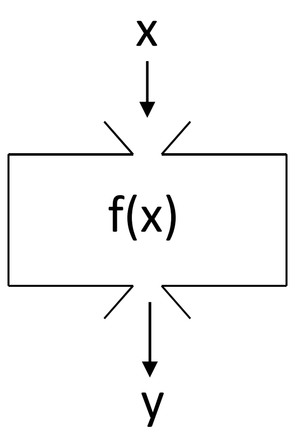
     Eine Variable kann sich ändern.

6.4.3 Funktionsbegriff

- formaler (mengentheoretischer) Aspekt:
  Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung von Elementen einer Menge X zu Elementen einer Menge Y.
- Inhaltliche Aspekte

1. **Modellaspekt:**
   Mit Funktionen können reale Zusammenhänge und Abhängigkeiten zwischen Größen beschrieben werden.
2. **Kausaler Aspekt:**
   Mit einer Funktion f kann die Abhängigkeit einer Größe Y von einer Größe X bzw. der Zusammenhang zwischen zwei Größen beschrieben werden. Die Größe Y ist eine Funktion der Größe X.
   Die Abhängigkeit gilt nur unter bestimmten Bedingungen.
3. **Algorithmischer Aspekt:**
   f(x) ist eine Vorschrift, mit der aus einem Eingabewert x ein Ausgabewert y entsteht.

   „Maschinenmodell“:



4. **Dynamischer Aspekt:**
   Bei einer Veränderung von x verändert sich auch y.
5. **Darstellungsaspekt:**
   Eine Funktion kann verbal, durch eine Tabelle, ein Pfeildiagramm, einen Graphen oder eine Gleichung mit zwei Variablen dargestellt werden.

Lernpsychologische Prinzipien des Mathematikunterrichts

2. Prinzip der Strukturierung von Handlungen

(1) Zerlegen komplexer Handlungen in Teilhandlungen

(2) separate Ausbildung einzelner Teilhandlungen

(3) Integration der Teilhandlungen

Beispiel 1: Umformen von Termen

Beispiel 2: Lösen von Sachaufgaben

10.3.2 Hauptschritte einer heuristischen Orientierung zum Lösen von Sachaufgaben

- In LB oft viele spezielle Orientierungen mit unterschiedlicher Anzahl und Formulierung der Teilschritte
- Vorschlag für *eine* ***allgemeine Orientierungsgrundlage*** für *alle* Sachaufgaben (vgl. 10.1. f)):
  1. Erfassen des Sachverhaltes
  2. Analysieren des Sachverhaltes
  3. Suchen nach Lösungsideen und Planen eines Lösungsweges
  4. Durchführen des Lösungsplanes
  5. Kontrolle und Auswertung der Lösung und des Lösungsweges
- Hauptetappen der Aneignung der in der Sek. I
  - Kl. 1 – 4: Beginn der Entwicklung von Teilhandlungen
  - Kl. 5/6: allgemeine Schrittfolge, Festigung der Teilhandlungen
  - Kl. 7/8: Integration weiterer Aufgabentypen und Teilhandlungen
  - Kl. 9/10: Verallgemeinerung und Verkürzung zur allgemeinen Vorgehensweise bei der Bearbeitung von Problemen
  - Kl. 11/12: Integration weiterer Aufgabentypen, insbesondere Extremwertaufgaben

10.3.3 Möglichkeiten zum Erfassen und Analysieren des Sachverhaltes

a) Erfassen des Sachverhaltes

– Ziel: geistiges Hineinversetzen in den Sachverhalt

(1) ***Worum geht es in der Aufgabe?***
Ziel: Erfassen der Hauptinformation

(2) ***Verstehe ich alles in dem Text?***
Ziel: Klären unbekannter Begriffe und Sachverhalte

(3) ***Was muss man in Wirklichkeit noch alles beachten?***
Welche Angaben sind nur Näherungswerte?
Ziel: Vergleiche mit der Wirklichkeit, sinnvolle Genauigkeit beachten

(4) ***Welche Fragen könnte man noch stellen, die sich mit den Angaben in der Aufgabe beantworten lassen?***
Ziel: Stellen weiterer Fragen zu den Informationen in der Aufgabe

(5) ***Könnte ich mir den Sachverhalt mit Gegenständen veranschaulichen?***
Ziel: Vorstellen oder Realisieren einer gegenständlichen Veranschaulichung des Sachverhalts

(6) ***Wie könnte vermutlich die Antwort sein?***
Ziel: Schätzen des Ergebnisses auf Grund von Erfahrungen, Vorstellungen oder Kenntnissen zum Sachverhalt

SWK zum Lösen von Extremwertaufgaben

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- Extremwertaufgaben nicht algorithmisch gelöst werden können, sondern ein Spezialfall von Problem- oder Sachaufgaben sind (heuristische Vorgehensweisen),
- bei jeder Extremwertaufgabe zum Erfassen und Analysieren des Sachverhalts zunächst die Hauptinformation erfasst, eine Skizze angefertigt, unbekannte Begriffe geklärt werden sollten und sie sich die Veränderung der Zielgröße vorstellen müssen,
- es bei Extremwertproblemen meist sinnvoll ist, von der Zielgröße auszugehen und nach Formeln oder Gleichungen mit der Zielgröße zu suchen (Rückwärtsarbeiten),

Quelle: Guba, W.; Jagnow, I.; Mendler, V.; Pietsch, E.; Sachs, A.; Sikora, Ch.; Sill, H.-D.: Ziele und Aufgaben zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe, Klassen 10 – 12, Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur Mecklenburg-Vorpommern, 2009

http://www.mathe-mv.de/publikationen/gymnasiale-oberstufe/vorschlaege-klasse-10-bis-12-der-ag-gymnasiale-oberstufe-mathematik/