Sicheres Wissen und Können

Arbeiten mit Variablen, Termen, Gleichungen und Ungleichungen

Sekundarstufe I

Herausgeber: Institut für Qualitätsentwicklung
Mecklenburg-Vorpommern
Werderstraße 124
19055 Schwerin

Autoren: Evelyn Kowaleczko
Dieter Leye
Marion Lindstädt
Elke Pietsch
Marion Roscher
Dr. Christine Sikora
Prof. Dr. Hans-Dieter Sill

Druck: Universitätsdruckerei Rostock

Auflage: September 2010

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 4

Zur Entwicklung und zum Einsatz der Broschüre 5

1 Grundlegende Probleme 6

2 Zu den Begriffen Variable, Term, Gleichung und Ungleichung 8

2.1 Ausgewählte Probleme 8

2.2 Sicheres Wissen und Können 14

2.3 Aufgaben 15

3 Zum Erkennen der Struktur von Termen 19

3.1 Ausgewählte Probleme 19

3.2 Sicheres Wissen und Können 21

3.3 Aufgaben 22

4 Zum Umformen von Termen 24

4.1 Ausgewählte Probleme 24

4.2 Sicheres Wissen und Können 28

4.3 Aufgaben 29

5 Zum inhaltlichen Lösen von Gleichungen und Ungleichungen 32

5.1 Ausgewählte Probleme 32

5.2 Sicheres Wissen und Können 36

5.3 Aufgaben 37

6 Zum Umformen und Umstellen von Gleichungen und Ungleichungen 39

6.1 Ausgewählte Probleme 39

6.2 Sicheres Wissen und Können 41

6.3 Aufgaben 42

7 Zum Lösen linearer Gleichung, Ungleichungen und Gleichungssystemen 45

7.1 Ausgewählte Probleme 45

7.2 Sicheres Wissen und Können 48

7.3 Aufgaben 49

8 Zum Lösen quadratischer Gleichungen 52

8.1 Ausgewählte Probleme 52

8.2 Sicheres Wissen und Können 56

8.3 Aufgaben 57

Vorwort

Die Kultusministerkonferenz hat am 04.12.2003 für das Fach Mathematik bundesweit geltende Bildungsstandards für den Mittleren Abschluss und am 15.10.2004 für den Hauptschulabschluss verabschiedet. Die Bildungsstandards sollen in allen Bundesländern im Rahmen der Lehrplanarbeit, der Schulentwicklung sowie der Lehreraus- und -fortbildung implementiert und angewendet werden. Bildungsstandards formulieren fachliche und fachübergreifende Basisqualifikationen, die für die weitere schulische und berufliche Ausbildung von Bedeutung sind und die anschlussfähiges Lernen ermöglichen. Sie beschreiben zu erwartende Ergebnisse von Lernprozessen. Deren Anwendung bietet Hinweise für notwendige Förderungs- und Unterstützungsmaßnahmen.

In Zusammenarbeit der Fachberater für Regionale Schulen mit Fachdidaktikern des Instituts für Mathematik der Universität Rostock wurden entsprechende Materialien zur Unterstützung der Lehrerinnen und Lehrer entwickelt.

In der vorliegenden Broschüre wird für ein abgegrenztes Thema durch Zielbeschreibungen und Aufgabenangebote der entsprechende Anforderungsbereich I der Bildungsstandards charakterisiert. Die Broschüre kann in vielfältiger Weise für die Unterrichtsentwicklung an der Schule genutzt werden. Die im theoretischen Teil enthaltenen Standpunkte und Vorschläge können fachliche Diskussionen und schulinterne Festlegungen unterstützen. Das umfangreiche Aufgabenmaterial wird u. a. zur Entwicklung täglicher Übungen und schulischer Testarbeiten sowie für die differenzierte Arbeit mit Schülern, die diese Anforderungen noch nicht erfüllen, empfohlen.

Das Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur Mecklenburg-Vorpommern stellt allen Schulen eine Broschüre zur Verfügung. Sie ist unter www.mathe-mv.de zum Download veröffentlicht.

Ich bedanke mich bei den Autorinnen und Autoren dieser Broschüre, die neben ihrer Unterrichts- bzw. Lehrtätigkeit über ein Jahr intensiv an diesem Projekt gearbeitet haben.

Den Lehrerinnen und Lehrern wünsche ich viel Erfolg bei der täglichen Arbeit.

Henry Tesch

Minister für Bildung, Wissenschaft und Kultur

Zur Entwicklung und zum Einsatz der Broschüre

Mit dieser Broschüre wird die Reihe von Materialien zum sicheren Wissen und Können im Mathematikunterricht in Mecklenburg-Vorpommern fortgesetzt. Die bisherigen Titel der Reihe sind „Größen" (2. Aufl., 2005), „Geometrie in der Ebene" (2005), „Geometrie im Raum" (2005) und „Rechnen mit Zahlen und Größen" (2009). Die Broschüren wurden an alle Schulen verteilt und sind unter www.mathe-mv.de verfügbar.

Die Standpunkte und Aufgaben in der Broschüre verstehen wir als einen ersten Ansatz zur Festlegung eines landesweit einheitlichen Minimalniveaus, das mit allen Schülern[1] zu erreichen ist.

Die Standpunkte können weiterhin als Ausgangspunkt für Diskussionen in Fachschaften zu zentralen Fragen der Entwicklung des Rechnenkönnens verwendet werden und sollten zu entsprechenden Vereinbarungen an der Schule führen. Im Einzelnen können sie Grundlage für Diskussionen zu folgenden Themenkreisen sein, bei denen auch Festlegungen an der Schule vereinbart werden sollten.

- Aspekte der Begriffe Variable, Term, Gleichung und Ungleichungen und ihre Aneignung im Laufe der Schulzeit
- Möglichkeiten der Entwicklung im Erkennen der Struktur von Termen
- Möglichkeiten zum inhaltlichen Lösen von Gleichungen und Ungleichungen in den Klassen 5 bis 10
- Möglichkeiten zur Entwicklung von Fähigkeiten im Umstellen von Gleichungen
- Möglichkeiten zum Lösen von linearen Gleichungen und Gleichungssystemen
- Möglichkeiten zum inhaltlichen und formale Lösen von quadratischen Gleichungen

Den schrittweise entstehenden Broschüren zum sicheren Wissen und Können liegt ein Konzept zu Grunde, das in den Broschüren zur Arbeit mit Größen und zur räumlichen Geometrie ausführlich erläutert wurde. In dieser Broschüre soll nur noch einmal herausgestellt werden, dass unter sicherem Wissen und Können solche Bestandteile der mathematischen Bildung eines Schülers bzw. Schulabsolventen verstanden werden, die er auch nach der Schule jederzeit ohne vorherige Reaktivierung abrufen und sicher anwenden kann.

Als Grad der Sicherheit halten wir es für erforderlich, dass *jeder Schüler* von 3 (6, 9, 12, …) Aufgaben zu einer bestimmten Anforderung *mindestens* 2 (4, 6, 8, …) richtig löst. Dies bedeutet, dass jeder Schüler in einer Testarbeit zum sicheren Wissen und Können mindesten 66 % der Punkte erreicht.

Um die Aneignung dieser Mindestkompetenzen in einem Test leicht überprüfen zu können, sollte die Anzahl der Teilaufgaben zu einem Anforderungsbereich ein Vielfaches von 3 sein. In der Broschüre haben deshalb die Aufgaben in der Regel eine durch 3 teilbare Anzahl von Teilaufgaben.

Beim Zusammenstellen eines kriteriumsorientierten Tests zum sicheren Wissen und Können aus den Aufgaben der Broschüre sollten weiterhin folgende Aspekte beachtet werden.

- Die Testarbeit darf nicht speziell vorbereitet werden. Die letzten Übungen sollten mindestens etwa 3 Wochen zurückliegen.
- Da es sich um Mindestforderungen handelt, werden alle Aufgaben unabhängig vom tatsächlichen Anforderungsniveau als gleichwertig betrachtet.
- Alle einzelnen Teilaufgaben (in dieser Broschüre mit a), b) ... bezeichnet) sollten nur mit einem Punkt (richtig oder falsch bzw. nicht gelöst) bewertet werden.

Wir wünschen allen Kolleginnen und Kollegen viel Erfolg bei der Arbeit mit unserem Material!

Rostock, August 2010

---

[1] Bei allen Bezeichnungen von Personen oder Personengruppen sind immer beide Geschlechter gemeint.

1 Grundlegende Probleme

Ein zentrales Problem bei der Entwicklung des Wissens und Könnens der Schüler im Arbeiten mit Variablen, Termen, Gleichungen und Ungleichungen[2] ist die Meisterung des Wechselverhältnisses von inhaltlichem und formalem Arbeiten.

Inhaltliches bzw. semantisches Arbeiten besteht in der Erfassung, Berücksichtigung und Anwendung der Bedeutung der formalen Zeichen bzw. Zeichenreihen.

> *Beispiel:* Die Seiten einer Gleichung können verschiedene Bedeutung haben, auf der linken Seite steht die Aufgabe und auf der rechten Seite das Ergebnis.

Formales bzw. syntaktisches Arbeiten bedeutet die rein schematische Anwendung der formalen Regeln zur Arbeit mit algebraischen Ausdrücken. Es geht um die formale und möglichst automatisierte Abarbeitung von Algorithmen analog zur Arbeit eines CAS. Die entsprechenden Ausdrücke werden als formale Zeichen bzw. Zeichenreihen aufgefasst.

> *Beispiel:* Eine Gleichung ist ein mathematischer Ausdruck, bei dem zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind.

Es handelt sich um unterschiedliche, entgegengesetzte Betrachtungs- und Arbeitsweisen. Trotzdem bedingen sie sich gegenseitig u. a. in folgender Hinsicht:

- Ein formales Arbeiten setzt inhaltliches Verständnis voraus.
  So müssen die Schülerinnen und Schüler den Sinn und die Verwendungsaspekte von algebraischen Ausdrücken erfassen, um motiviert, zielorientiert und verständig formales Arbeiten in Angriff zu nehmen und einzuordnen.
  Um geeignete formale Umformungen vornehmen zu können, müssen Terme und Gleichungen inhaltlich erfasst werden, um z.B. die Struktur der Terme zu erkennen oder Unbekannte und Parameter zu unterscheiden.
- Inhaltliches Arbeiten erfordert formales Können.
  Beim inhaltlichen Lösen von Gleichungen, für die keine algorithmisch-kalkülmäßigen Lösungsverfahren vermittelt werden, sind in der Regel einige Teilhandlungen (Umformungsschritte) auf formale Weise ausführen.

Eine wesentliche *Ursache* für die oft unbefriedigenden Leistungen der Schüler und ihre verbreitete Neigung gegen das Arbeiten mit algebraischen Ausdrücken liegt in dem nicht bewältigten Verhältnis von inhaltlichem und formalem Herangehen.

Im Mathematikunterricht müssen stets beide Arten des Umgehens mit algebraischen Ausdrücken in einem geeigneten Wechselverhältnis entwickelt werden. Zur Entwicklung des Wissens und Könnens im Arbeiten mit algebraischen Ausdrücken sollten 3 Phasen konzipiert werden.

1. Phase (Kl. 1 – 6): Dominanz des inhaltlichen Arbeitens

Die Schüler verwenden bereits Buchstaben, aber auch leere Kästchen oder Fragezeichen in Gleichungen zur Kennzeichnung einer unbekannten Zahl. In Gleichungen steht auf der linken Seite immer die Aufgabe und auf der rechten Seite das Ergebnis. Sie eignen sich Vorrangregeln für Rechenausdrücke an. Sie arbeiten ab Klasse 5/6 erstmalig mit Formeln für Flächen- und Rauminhalte und erleben dabei die Verwendung von Buchstaben für beliebige Größenwerte. Sie lösen Gleichungen und Ungleichungen mit einer oder auch mehreren Variablen auf inhaltliche Weise. Das algebraische Können ist in dieser Phase Bestandteil der Entwicklung des arithmetischen Könnens.

---

[2] Für „Variable, Terme, Gleichungen und Ungleichungen“ wird im Folgenden die Bezeichnung „algebraische Ausdrücke“ gewählt und für das Wissen und Können im Arbeiten mit algebraische Ausdrücken die Bezeichnung „algebraisches Können“.

2. Phase (Kl. 7/8): Dominanz des formalen Arbeitens

In dieser Phase erfolgt mit der meist sehr konzentrierten Behandlung formaler Termumformungen und dem formalen Lösen von Gleichungen und Ungleichungen sowie dem auch noch sich danach anschließenden Übergang zum formale Arbeiten mit Funktionen eine massive Konfrontation der Schüler mit neuen, sehr abstrakten Sichtweisen. Dies ist einer der Hauptursachen dafür, dass an dieser Stelle viele Schüler aus dem Mathematikunterricht „aussteigen“. Sie begegnen dem Unterricht insbesondere bei den Themen zur Algebra und zu Funktionen mit Unverständnis und sind bestenfalls nur noch bemüht, die Anforderungen durch Arbeit nach Mustern oder formalen, oft selbst gebastelten Regeln zu bewältigen. In dieser Phase kommt es deshalb besonders darauf an, das inhaltliche Verständnis wachzuhalten und noch zu vertiefen und zu erweitern. Dazu sollten die inhaltlichen Aspekte der Begriffe Variable, Term und Gleichung den Schülern bewusst gemacht werden (vgl. Kap. 2). Das inhaltliche Lösen von Gleichungen Ungleichungen sollte weitergeführt und dem formalen Lösen bewusst gegenübergestellt werden (vgl. Kap. 5). Besonderer Wert ist auch auf die Ausbildung sicherer Teilhandlungen, wie dem Erkennen der Struktur von Termen (vgl. Kap. 3) und dem Belegen von Variablen (vgl. Kap. 2) zu legen.

3. Phase (ab Kl. 9): Inhaltliches und formales Arbeiten bei Dominanz des inhaltlichen Arbeitens

Nachdem sich die Schüler in der zweiten Phase Fertigkeiten beim Lösen elementarer Aufgaben zur Arbeit mit algebraischen Ausdrücken angeeignet haben, sollte in der 3. Phase der Schwerpunkt im Unterricht wieder auf das inhaltliche Arbeiten gelegt werden. Die bereits in der 2. Phase in Ansätzen vermittelten inhaltlichen Aspekte der Grundbegriffe sollten weiter vertieft und systematisiert werden. Im gymnasialen Bildungsgang geht es unter anderem um die Aspekte des Begriffs Parameter, die sich die Schüler aneignen sollten.

Das inhaltliche Lösen von Gleichungen sollte insbesondere beim hilfsmittelfreien Rechnen wieder eine dominierende Rolle spielen. Dazu sollten insbesondere die zahlreichen Möglichkeiten zum inhaltlichen Lösen quadratischer Gleichungen genutzt werden (vergleiche Kapitel acht).

Zum Lösen anspruchsvoller Termumformungen wie etwa dem Rechnen mit Quotienten sowie zum Lösen komplizierter Gleichungen und Gleichungssysteme sollten insbesondere im gymnasialen Bildungsgang elektronische Hilfsmittel genutzt werden.

2 Zu den Begriffen Variable, Term, Gleichung und Ungleichung

2.1 Ausgewählte Probleme

Zu den Begriffen Variable und Parameter

Der Variablenbegriff kann ebenso wie alle anderen algebraischen Grundbegriffe nur als *Wechselverhältnis* inhaltlicher und formaler Aspekte erfasst werden. Eine Reduzierung auf nur einen Aspekt (etwa Variable nur als anderes Wort für Platzhalter) sollte vermieden werden.

Die Schüler haben Variable bis zur Klasse 7 hauptsächlich unter inhaltlichen Sichtweisen kennen gelernt. Beim Arbeiten mit Termen und beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen erleben sie in den Klassen 7 und 8 den syntaktischen Variablenbegriff sowie weitere inhaltliche Aspekte. Eine Systematisierung und Zusammenfassung der unten genannten Aspekte des Variablenbegriffs sollte erst in Klasse 9 und 10 erfolgen.

Eine Variable ist aus *formaler (rein syntaktischer) Sicht* zunächst ein Buchstabe oder eine Kombination aus Buchstaben, Zahlen bzw. Zeichen, mit denen nach festgelegten Regeln umgegangen wird. Bei Verwendung von CAS sind auch Kombinationen aus mehreren Buchstaben und Zahlen möglich.

Beispiele: x, y, x_1, h_a, A_g, v_{hin}, T_1, masse1

Aber *nicht jeder* in der Mathematik verwendete Buchstabe sollte als Variable bezeichnet werden. Dies betrifft Buchstaben oder Buchstabenkombination, die ausschließlich als Bezeichnung dienen und in keinem Zusammenhang einen variablen Charakter haben.

Beispiele:
Bezeichnungen für feste Zahlen: π (Kreiszahl), e (Eulersche Zahl), g (Fallbeschleunigung)
Bezeichnungen für Zahlenbereiche: N, Z, R
Bezeichnungen für Einheiten von Größen: m, cm, mm,

Die Eigenschaft eines Buchstabens „variabel“ (veränderlich) zu sein, ist ein inhaltlicher Aspekt, der sich erst aus dem Kontext seiner Verwendung ergibt. (z. B. x in der Funktionsgleichung $y = m \cdot x + n$)

Aus inhaltlicher Sicht können verschiedene Aspekte des Variablenbegriffs unterschieden werden:

– Variable bezeichnen mathematische Objekte.

  Beispiele:
  Die Unbekannte in einer linearen Gleichung wird mit x bezeichnet.

  Die Seite eines Rechtecks wird mit a bezeichnet.

– Variable verwendet man sowohl für feste als auch für veränderliche Objekte. Dieselbe Variable kann sowohl fest als auch veränderlich sein.

  Beispiele:
  In der Gleichung $3 \cdot x = 12$ bezeichnet x eine zwar unbekannte aber feste Zahl. Man kann die Variable x auch mit beliebigen Zahlen belegen, erhält dann aber keine wahren Aussagen.

  In der Formel $A = a \cdot b$ bezeichnet die Variable a eine Seitenlänge eines Rechtecks, die einen beliebigen Wert annehmen kann. Für ein konkretes Rechteck hat a z. B. den festen Wert 3 cm.

– Variable können mit Zahlen oder Größen eines Grundbereiches oder mit Termen belegt werden. Variable können unter diesem Aspekt als *Platzhalter* bezeichnet werden.

  Beispiel:
  In dem Term $a + 2 \cdot b$ kann für a der Wert 3 cm und für b der Wert 5 cm eingesetzt werden.

- Mit Variablen kann man nach bestimmten Regeln wie mit Zahlen rechnen.

  Beispiel: Es gilt $3 \cdot a + 4 \cdot a = 7 \cdot a$

- Eine Variable kann sich ändern. Man kann untersuchen, wie sich die Änderung einer Variablen auf die Änderung einer anderen Variable auswirkt.

  Beispiel: Bei direkt proportionalen Zusammenhängen gilt: wenn x wächst, wächst auch y.

Werden Variable zur *Bezeichnung von Größen* verwendet, ist zu unterscheiden, ob nur die Zahl oder die gesamte Größenangabe gemeint ist. Variable in Formeln bezeichnen immer die Größe mit Zahl und Einheit. Bei Rechnungen mit Formeln sollten auch mit Blick auf den naturwissenschaftlichen Unterricht deshalb in der Hauptrechnung immer konsequent die Einheiten mitgeführt werden. Nur in Nebenrechnungen kann auf die Einheiten verzichtet werden.

In Mathematikprogrammen bzw. in der Informatik unterscheidet man verschiedene *Variablentypen*. Ein Variablentyp wird durch die Menge der Objekte charakterisiert, mit denen die Variable belegt werden kann.

Beispiel: Im CAS des Voyage 200 werden u. a. folgende Variablentypen unterschieden: Ausdruck (Zahlen, Terme, Gleichungen), Funktion (Funktionen mit einer oder mehreren Variablen und Parametern), Liste (Menge von Zahlen), Daten (Tabelle mit Daten)

Der Variablenbegriff steht in enger Beziehung zum Begriff *Parameter*. Der Parameterbegriff hat ebenfalls mehrere Aspekte.

- Parameter sind Bezeichnungen für feste Werte in einer Gleichung bzw. Funktionsgleichung. Sie dienen zur allgemeinen Darstellung des Typs der Gleichung bzw. der Funktion.

  Beispiel: Die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ stellt die allgemein Form einer quadratischen Gleichung dar. Die Parameter a, b und c bezeichnen die Koeffizienten des quadratischen und linearen Gliedes sowie das absolute Glied. In einer konkreten Gleichung sind sie feste Zahlen.

- Man kann die Eigenschaften einer Gleichung oder einer Funktion in Abhängigkeit von den Parametern in der allgemeinen Darstellung untersuchen.

  Beispiel: Die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sowie die Lage des Graphen der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 + px + q$ hängen von p und q ab.

- Mithilfe eines Parameters können Funktionsscharen beschrieben werden. Eine Funktionsschar ist ein Klasse von Funktionen mit gemeinsamen Eigenschaften.

  Beispiel: Die Gleichung $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, beschreibt eine Klasse von Potenzfunktionen mit dem Parameter n, die mit Unterscheidung von geraden und ungeraden n noch unterteilt werden kann.

- Funktionen und geometrische Objekte (in der analytischen Geometrie) können in Abhängigkeit von einem Parameter dargestellt werden, der sich in dieser Bedeutung nicht von einer Variablen unterscheidet. In solchen Parametergleichungen können weiterhin „echte“ Parameter auftreten.

  Beispiel: Mit den Gleichungen $x = v_0 \cdot t$ und $y = y_0 - \frac{g}{2} t^2$ wird die Ortskurve bei einem waagerechten Wurf dargestellt. Der Parameter t ist die Zeit (als unabhängige Variable), v_0 (Anfangsgeschwindigkeit) und y_0 (Anfangshöhe) sind Parameter im Sinne fester Größer.

Konventionen bei der Bezeichnung mathematischer Objekte

Bei der Bezeichnung von Objekten durch Variable gibt es zahlreiche Konventionen, an die sich die Schüler im Laufe der Schulzeit gewöhnen müssen. Wegen der begrenzten Anzahl der Buchstaben des Alphabetes gibt es viele Buchstaben, die eine unterschiedliche Bedeutung haben können.

Beispiele: Besonders viele Bedeutungen hat der Buchstabe p: Prozentsatz, Parameter in quadratischen Gleichungen, allgemeinen Darstellung einer rationalen Zahl (p/q), Hypotenusenabschnitt, Druck, Wahrscheinlichkeit.

Es gibt Konventionen bei der Bezeichnung

- von Größen, z. B. A für den Flächeninhalt, V für den Rauminhalt, l für die Länge, t für die Zeit,
- von Elementen eines bestimmten Zahlengrundbereiches, z. B. werden n, m, i, k meist als Variable für natürliche Zahlen und x, y, z als Variable für reelle Zahlen verwendet,
- von Variablen und Parametern, z. B. ist es oft üblich Parameter in Gleichungen durch die Buchstaben von a bis q und Variable durch die Buchstaben von r bis z zu bezeichnen.

Die Verwendung von *Variablen in der Geometrie* weist einige Besonderheiten auf:

- Punkte werden mit großen Buchstaben bezeichnet. Die Lage der Punkte in der Ebene oder im Raum können als beliebig angesehen werden, wenn nicht konkrete Koordinaten angegeben sind. Trotzdem werden die Punkte als fest angesehen und die Buchstaben sind damit Namen bzw. Bezeichnungen für ein konkretes Objekt.
- Auch die Bezeichnung für Geraden und Strahlen sind Bezeichnungen für Objekte und nicht für zahlenmäßige Eigenschaften von Objekten. Im Unterschied zu den Variablen in der Algebra kann man mit diesen Bezeichnungen keine arithmetischen Operationen ausführen (Es kann z.B. nicht die Summe g + h der Geraden g und h gebildet werden.)
- Bei Strecken bzw. Seiten sowie Winkeln wird mit kleinen (lateinischen bzw. griechischen) Buchstaben sowohl das Objekt selbst als auch seine zahlenmäßige Eigenschaft (die Länge bzw. Größe) bezeichnet. Sind keine konkreten Seitenlängen oder Winkelgrößen gegeben, so haben diese Buchstaben offensichtlich einen variablen Charakter. Dies wird insbesondere deutlich, wenn sie Bestandteil einer Formel sind (z.B. $A = a \cdot b$; $\alpha + \beta = 180°$).
- In der Geometrie treten weiterhin als Variable die Größen Flächeninhalt und Volumen auf. Sie werden mit großen Buchstaben bezeichnet. In den entsprechenden Formeln sind diese Bezeichnungen gleichzeitig Namen für einen Term.

Zum Belegen von Variablen

Das Belegen von Variablen durch Zahlen, Größen oder andere Terme ist eine *Grundhandlung*, die für viele komplexe Handlungen von Bedeutung sind(Arbeit mit Formeln, Probe bei Gleichungen, Arbeit mit Funktionsgleichungen). Zur sicheren Ausbildung dieser Grundhandlung ist ein Arbeiten auf gegenständlicher Ebene durch jeden Schüler erforderlich. Dazu sollten an der Tafel Applikationen und von den Schülern Zettel verwendet werden, mit denen eine Variable (auf einem Zettel) durch eine Zahl, eine Größe oder einen Term (auf einem anderen Zettel) ersetzt wird.

Eine weitere Möglichkeit zur Veranschaulichung des Belegens von Variablen ist die Auffassung einer Variablen als Fach (oder Schubfach, Kasten, Schachtel, Speicherplatz), in das Zahlen, Größen oder andere Variable bzw. Terme hineingelegt werden können. Arbeiten mit Variablen bedeutet also in diesem Sinne ein Hantieren mit leeren Fächern. Ein Term ist in diesem Modell eine Verknüpfung von Fächern bzw. ein Befehl zum Umgehen mit dem möglichen Inhalt der Fächer. Termumformungen bedeuten dann Umformulieren von Befehlen. Mit diesen Betrachtungen kann ein Zugang zum Verständnis von Variablen und Termen erreicht werden. Das Modell sollte nicht übermäßig strapaziert werden, z.B. ist es nicht sinnvoll, Fächer in Fächer zu legen oder einen Term als Schrank mit Fächern zu deuten.

Die Formulierungen „Belegen von Variablen“, „Ersetzen der Variablen“ und „Einsetzen für die Variable“ sollten als synonym angesehen werden.

Zur Erklärung des Wortes „Term“

Der Begriff Term ist für die Verständigung beim Arbeiten mit Termen, Gleichungen und Ungleichungen wichtig. Seine exakte *formale Erklärung* ist im Unterricht allerdings aus folgenden Gründen kaum möglich:

- Die Abgrenzung von anderen mathematischen Ausdrücken ist nur mit großem Aufwand möglich. Eine Gegenüberstellung mit Gleichungen und Ungleichungen ist unvollständig, da z.B. die den Schülern bekannten mathematischen Ausdrücke $4 \mid 12$, $P(x; y)$, $g \perp h$, $n \in N$ u. a. weder Terme noch Gleichungen bzw. Ungleichungen sind. Mit dem Ausschluss von Relationszeichen ist das meiste erfasst, aber auch nicht alles, z.B. $P(x; y)$.
- Eine induktiv-rekursive Definition, wie sie in der Mathematik erfolgt, ist ebenfalls sehr aufwändig und muss in Klasse 7 unvollständig bleiben, da die Schüler einige mathematische Zeichen, wie $f(x)$, $\sin x$, $n!$ noch nicht kennen. Rekursive Definitionen sind den Schülern zudem nicht bekannt und schwer verständlich.

Die Vorstellungen der Schüler zum Wort Term sollten ab Klasse 5 durch die Angabe von Beispielen und Gegenbeispielen ausgebildet werden.

Als Bezeichnungen für Terme sollte man ab Klasse 8 auch große Buchstaben (auch mit Indizes) verwenden. Dies steht in guter Übereinstimmung mit den großen Buchstaben für die Größen Flächeninhalt und Volumen. Es wird die Vorstellung vermittelt, dass sich hinter den großen Buchstaben Ausdrücke mit Variablen verbergen.

Konventionen beim Arbeiten mit Termen

Die Schüler müssen erfassen, dass in der Algebra (im Unterschied zur Geometrie) die Buchstaben nicht die zu Grunde liegenden konkreten Objekte, sondern gewisse Zahlen oder Größen erfassen, die diesen Objekten zugeordnet sind. Dies kann im Zusammenhang mit der Übersetzung von Texten beim Lösen von Sachaufgaben geschehen.

Ein algebraischer Ausdruck kann sowohl einen Prozess als auch das Resultat des Prozesses darstellen. Der Term $2 + x$ kann z.B. sowohl als Aufforderung zur Rechnung bzw. nicht ausgeführte Rechnung als auch als Endergebnis einer Termumformung angesehen werden. Diese Betrachtungsweisen spielen vor allem beim Umformen von Termen und beim Übersetzen von Texten eine Rolle.

Auf Grund der möglichen Missverständnisse sollte auf die Konvention des Weglassens des Multiplikationszeichens ausführlich mit Aufgaben eingegangen werden. Insbesondere ist die Beziehung $x = 1x = 1 \cdot x$ und $-x = (-1)x = (-1) \cdot x$ zu verdeutlichen. Eine Gegenüberstellung mit der bei Zahlen üblichen Addition von nebeneinander stehenden Zeichen ist sinnvoll.

Für die Aneinanderreihung von Zeichen in Termen gelten üblicherweise folgende Regeln:

- Variable und Parameter werden in alphabetischer Reihenfolge geschrieben.
- In einer Summe aus Zahlen und Variablen werden zuerst die Variablen und dann die Zahlen geschrieben.
  Beispiel: Anstelle $1 + x$ schreibt man $x + 1$.
- In Produkten aus Zahlen, Operatoren, Parametern und Variablen gelten folgende Regeln:
  - Zuerst werden Zahlen, dann Parameter und dann Variable geschrieben
    Beispiel: Anstelle $x \cdot a \cdot 3$ schreibt man $3ax$.
  - Tritt ein Operator mit einer Zahl auf, wird er hinter die Zahl bzw. die Parameter und vor die Variablen geschrieben.
    Beispiele: $3 \cdot \sqrt{2}$; $a \cdot \sqrt{2} \cdot x$, $a \cdot \sin(30°) \cdot x$

Zu den Begriffen Gleichung und Ungleichung

Die Schüler lernen das *Gleichheitszeichen* ab Klasse 1 vor allem als gerichtetes Zeichen (von links nach rechts) kennen, d.h. die beiden Seiten der Gleichungen haben in diesen Zusammenhängen eine unterschiedliche Bedeutung.

Beispiele:

Auf der linken Seite steht	*Auf der rechten Seite steht*	*Beispiel*
die Aufgabe,	das Ergebnis der Aufgabe,	$3 \cdot 4 = 12$
eine Rechnung mit einer Unbekannten,	das Ergebnis der Rechnung mit der Unbekannten,	$a + a = 2 \cdot a$
die Unbekannte,	die Lösung der Gleichung,	$x = 3$
die Größe, die umgerechnet werden soll,	die umgerechnete Größe,	3,4 km = 3400 m
eine Größe, die berechnet werden soll.	ein Rechenausdruck mit Größen.	$A = a \cdot b$

Diese gerichtete Auffassung des Gleichheitszeichen ist im Denken der Schüler fest verankert und hat auch beim Arbeiten mit Formeln, beim Rechnen mit dem Dreisatz, z. T. auch beim Lösen von Gleichungen (Ordnen: Unbekannte links) ihre Bedeutung. Es ist also nicht erforderlich und lernpsychologisch ohnehin nicht möglich, die Vorstellungen abzulegen und völlig neue zu entwickeln. Die Schüler brauchen nicht zu vergessen, was sie bisher gelernt und geglaubt haben. Die inhaltlichen Vorstellungen zu Gleichungen sind eine notwendige und in vielen Fällen sinnvolle Betrachtungsweise.

In folgenden Fällen erleben die Schüler die beiden Seiten der Gleichung als *gleichberechtigt*:

- beim Formulieren von Rechengesetzen: $a + b = b + a$
- als Quotienten- oder Produktgleichheit: $\frac{x\ €}{3\ kg} = \frac{12\ €}{4\ kg}$
- beim Lösen von Gleichungen mit der Variablen auf beiden Seiten: $2 \cdot x - 23 = 5 \cdot x - 31$

Das *Anwenden von Umformungsregeln* zum Lösen von Gleichungen setzt eine rein syntaktische Auffassung der Gleichung voraus. Die Schüler müssen sich in diesem Fall von der Links-Rechts- bzw. Aufgabe-Resultat-Auffassung lösen und Gleichungen als formale Zeichenkette ansehen. Analogiebeziehungen zum Arbeiten eines Taschenrechners oder PC sind möglich.

Die syntaktische oder formale Betrachtung einer Gleichung sollte im Gegensatz zur inhaltlichen Betrachtungsweise als eine völlig andersartige herausgestellt werden. Ihr Sinn besteht in einer formalisierten Arbeitsweise, was viele Schüler ja durchaus anstreben. Damit ergeben sich wesentliche Erleichterungen beim Arbeiten mit Termen und beim Lösen von Gleichungen, allerdings erst, wenn man die formalen Regeln auch beherrscht.

Es ist nicht erforderlich, die syntaktische Auffassung auch für Gleichungen ohne Variable auszubilden. Dass z. B. $3 = 4$ auch eine Gleichung im formalen Sinne ist, ist zwar überraschend, erstaunlich oder auch lustig, für Schüler aber kaum verständlich zu machen. Im Zusammenhang mit dem Lösen von Gleichungen sollten lediglich Gleichungen ohne Variable unterschieden werden, die eine wahre oder falsche Aussage sind.

Ein wichtiges Ziel bei der Erweiterung des Gleichungsbegriffes ist die Einbeziehung von Formeln in die Betrachtungen zu Gleichungen. Für Schüler sind Formeln zwar auch Gleichungen, aber etwas anderes als z.B. Gleichungen mit einer Unbekannten oder Gleichungen als Rechenaufgaben. Formeln sind aus formaler Sicht Gleichungen mit mehreren Variablen (und damit auch als Funktionen mehrerer Veränderlicher aufzufassen). Werden Formeln umgeformt, können sie als Gleichungen mit Parametern angesehen werden. Parameter sind dann alle die Variablen, die auf die rechte Seite müssen.

Zur Verwendung von Termen und Gleichungen

Terme und damit gebildete Gleichungen werden für folgende Zwecke verwendet bzw. können in folgender Weise interpretiert werden.

- Mit Termen kann man Ausdrücke mit Zahlen, die eine gleiche Struktur haben, allgemein beschreiben.
  Beispiel: Rechenausdruck: $3\cdot(4 + 7)$ allgemein: $a\cdot(b + c)$
- Mit Termen kann man außer- und innermathematische Sachverhalte mit gleicher Struktur allgemein beschreiben, insbesondere geometrische Beziehungen.
  Beispiele:
  - konkreter Sachverhalt: Der Preis beträgt netto 100 € und brutto 119 €;
    allgemein: Der Bruttopreis B ergibt sich aus den Nettopreis N durch die Formel
    $B = 1{,}19\cdot N$.
  - konkreter Sachverhalt: Der Umfang eines Rechtecks mit den Seiten 3 cm und 5 cm beträgt 16 cm;
    allgemein: Für den Umfang u eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b gilt die Formel:
    $u = 2\cdot(a + b)$.
- Mit Termen kann man Eigenschaften von Zahlen allgemein beschreiben.
  Beispiel: Eine ungerade Zahl kann allgemein durch den Term: $2n +1$, $n \in N$, dargestellt werden.

Darüber hinaus verwendet man Gleichungen für folgende Zwecke:

- für Aufgaben zum Rechnen mit Zahlen oder Größen
  Beispiel: $3 + 4 = 7$; $2\text{ m} \cdot 3\text{ m} = 6\text{ m}^2$
- zum Notieren von gegebenen Werten
  Beispiel: $p = 1{,}5\ \%$, $n = 10$
- zum Darstellen von Rechengesetzen, Zusammenhängen zwischen Zahlen und Größen und von Funktionen

2.2 Sicheres Wissen und Können

Klasse 6:

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden für Buchstaben das Wort „Variable“ in den folgenden Verwendungen: Formulierung von Rechengesetzen, Unbekannte in einer Gleichung bzw. Ungleichung, Bezeichnung für Größen in der Geometrie und aus der Physik,
- wissen, dass mit dem Buchstaben x in einer Gleichung eine unbekannte Zahl bezeichnet wird,
- kennen die üblichen Bezeichnungen für die Größen Länge (l) bzw. Weg (s), Flächeninhalt (A), Rauminhalt (V), Zeit (t), Masse (m),
- können für ein Dreieck ABC die Eckpunkte, die Seiten und Winkel mit den Standardbezeichnungen (a, b, c, α, β, γ) in der richtigen Anordnung beschriften,
- wissen, dass Buchstaben unterschiedliche Bedeutung haben können und können dies an folgenden Buchstaben erläutern: a, b, m, t
- kennen die Bezeichnungen „Term“, „Gleichung“ und „Ungleichung“ und können Beispiele für Terme und Gleichungen mit einer Variablen und Ungleichungen ohne Variable erkennen und angeben,
- wissen, dass eine Formel eine Gleichung ist und bei Anwendung der Formel die Variablen auf der rechten Seite mit Größenangaben belegt werden.

Klasse 8:

Die Schülerinnen und Schüler

- wissen, dass sich Variable ändern können und man die Abhängigkeit der Veränderung einer Variablen von der Veränderung einer andern untersuchen kann,
- wissen, dass man Variable durch Zahlen, Größen oder andere Terme belegen kann und können in einfachen Fällen solche Belegungen vornehmen,
- können Beispiele für Terme, Gleichungen und Ungleichungen mit bis zu drei Variablen erkennen und angeben,
- wissen, dass man Terme verwendet, um Rechenausdrücke, geometrische Beziehungen oder außermathematische Sachverhalte allgemein zu beschreiben,
- können die Konventionen zum Weglassen des Multiplikationszeichens und der Faktoren 1 und -1 sowie der Ordnung in Produkten aus Zahlen und Variablen anwenden,
- können Terme zu gegebenen Rechenausdrücken mit maximal 2 Variablen und zwei Operationen aufstellen,
- können Terme mit maximal 2 Variablen und 2 Operationen durch Rechenausdrücke, Streckenlängen oder außermathematische Sachverhalte interpretieren.

Klasse 10, Gymnasium:

Die Schülerinnen und Schüler

- können in allgemeinen Darstellungen von Gleichungen und Funktionen die Variablen und Parameter unterscheiden
- können Gleichungen bzw. Funktionsgleichungen mit bis zu zwei Variablen und drei Parametern angeben.

2.3 Aufgaben

Klasse 6

1. Welche Buchstaben können als Variable bezeichnet werden?

a) $6 \cdot x - 5 = 13$ b) $a = 3$ cm c) $a + b = b + a$

d) $m = 3$ t e) $2 \cdot n + 1 < 10$ f) $V = a \cdot b \cdot c$

2. Gib zwei Bedeutungen an, die der folgende Buchstabe in der Mathematik haben kann.

a) a b) b c) m

3. Mit welchem Buchstaben wird die folgende Größe bezeichnet?

a) Zeit b) Masse c) Volumen d) Länge e) Weg f) Flächeninhalt

4. Kennzeichne alle Terme.

3 $5x$ $3 + 5$ $8 + 3x$ $3 + - 7$ $4 +$ $8 \cdot 8$

$5a -$ $(5 : 9 + 8x)$ $9x : x$ $0 \cdot x$ € $8 < 10$ $3 \mid 12$

$6 - 4 = 2$ $3°\,C > - 3°\,C$

5. Gib einen Term an, der aus Zahlen und Variablen besteht.

6. Welche der folgenden mathematischen Ausdrücke sind Gleichungen?

a) $3 + 4 = 7$ b) $5 > 3$ c) $6 \cdot x - 18 = 12$

d) $a + b = b + a$ e) $A = a \cdot b$ f) $2 \cdot x + 1$

7. Gib eine Gleichung an, in der eine Variable vorkommt.

8. Gib zwei verschiedene Ungleichungen mit Zahlen an.

9. Zeichne ein Dreieck und beschrifte alle Eckpunkte, Seiten und Winkel.

10. Setze für die Variablen in den folgenden Termen nacheinander die Zahlen 5, 10 und 20 ein und berechne den Wert des Terms.

a) $28 + x$ b) $(x + 2) \cdot 4$ c) $100 \cdot a - 10$

d) $3 \cdot a + 5 \cdot a$ e) $7 + 10 \cdot m$ f) $b : 5 + 7$

11. Ersetze in den folgenden Formeln die Variablen durch geeignete Größenangaben und berechne.

a) Umfang eines Rechtecks: $u = 2 \cdot (a + b)$ b) Länge eine Weges: $s = a + 5$ km

c) Volumen eine Quaders: $V = a \cdot b \cdot c$ d) Flächeninhalt eines Rechtecks: $A = a \cdot b$

e) Masse eines Körpers: $m = 10 \cdot m_0$ f) Zeitdauer eines Films: $t_{ges} = 10$ min $+ t$

Klasse 8

1. Gib zwei Möglichkeiten an, wofür die folgenden Buchstaben in der Mathematik verwendet werden.

a) a b) A c) x d) n e) m f) h

2. Nenne zwei Objekte, die in der Mathematik mit dem Buchstaben p bezeichnet werden. Gib jeweils zwei mögliche Belegungen für p an.

3. Welche der folgenden mathematischen Ausdrücke sind Terme?

a) $25a^3(x^2 - 1)$ b) 10^{10} c) $3 < 18$

d) $3 + 5 =$ e) $P(4; 7)$ f) $A = a \cdot b$

4. Schreibe den Term ohne Multiplikationszeichen, wenn es möglich ist.

a) $3 \cdot x$ b) $3 \cdot \frac{1}{2}$ c) $-2 \cdot x$ d) $a \cdot b \cdot c$ e) $(-1) \cdot y$ f) $3 \cdot 4 \cdot 5$

5. Gib je zwei Beispiele an.

a) ein Term ohne Variable b) ein Term mit Zahlen und einer Variablen

c) eine Gleichung mit einer Variablen d) eine Ungleichung ohne Variable

e) eine Ungleichung mit einer Variablen f) eine Gleichung mit zwei Variablen

6. Gib eine Formel an, in der drei Variable vorkommen und erläutere die Bedeutung der Variablen.

7. Ordne und verkürze die Schreibweise.

a) $a \cdot 5 \cdot y$ b) $y \cdot x \cdot (-2)$ c) $g \cdot d \cdot 7 \cdot e$ d) $7 \cdot c \cdot a \cdot (-1)$ e) $m \cdot (-4{,}1) \cdot k$ f) $c \cdot (-8) \cdot a$

8. Belege in den folgenden Termen die Variable a mit der Zahl 3 und die Variable b mit der Zahl -1.

a) $3a + b$ b) $5a - b$ c) $-2a + b$ d) $b(a + 2)$ e) $a\,b$ f) $(a + b)^2$

9. Verkürze und vereinfache so weit wie möglich.

a) $3 \cdot a$ b) $5 \cdot 7 \cdot b$ c) $0 \cdot c \cdot (-4)$ d) $103 \cdot 4{,}3$ e) $11 \cdot 11 \cdot e \cdot e$ f) $-3 \cdot (-x)$

10. Die folgenden Terme sind durch Verkürzung der Schreibweise entstanden. Wie könnten sie vorher ausgesehen haben.

a) $-7x$ b) $5xy$ c) $-1{,}2ab$ d) uv e) $-pq$ f) $-2(a + b)$

11. Gib einen Rechenausdruck mit Zahlen oder Größen an, der durch den Term allgemein beschrieben wird.

a) $a \cdot b$ $a, b \in Q$ b) $\frac{a}{b}$ $a, b \in N;\ b \neq 0$

c) $2(a + b)$ a, b: Längen von Strecken d) $n^2 + m^2$ $n, m \in N$

e) $10a + b$ $a, b \in N$ f) $A_G \cdot h$; A_G: Flächeninhalt, h: Höhe

12. Schreibe als Term.

a) die Summe aus 25 und x b) das Produkt aus y und 5,3

c) das Quadrat von a d) das Fünffache der Summe aus a und b

e) das Doppelte von z f) die Hälfte von x vermehrt um 9,5

13. Schreibe als Gleichung oder Ungleichung.

a) Die Differenz aus 20 und x ergibt 7.
b) Das Produkt aus a und b ist 12.
c) Das Doppelte von y ist kleiner als 8
d) Die Hälfte von a ist gleich b.
e) Die Zahl x vermindert um 5 ergibt 2.
f) Der Quotient von x und y ist größer als 1.

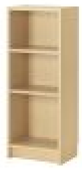
14. Beschreibe die folgenden Terme mit Worten.

a) $x + 1$ b) $3 \cdot a$ c) $x + y$ d) $2 \cdot (a + b)$ e) $a^2 : 2$ f) $5x - 3$

15. Beschreibe die folgenden Rechnungen allgemein durch einen Term mit Variablen für die Größenangaben.
Zusatz: Wo können solche Berechnungen auftreten?

a) 4 m · 5 m
b) 2·(4 m + 5 m)
c) $\frac{1}{2} \cdot$ 5 cm · 3 cm
d) 2 cm · 7 cm · 10 cm
e) 0,5 · 120 €
f) 180 km : 3 h

16. Aus Bücherregalen der Länge 40 cm und 80 cm kann eine Regalwand zusammengestellt werden. Gib einen Term an, mit dem die Länge der Regalwand allgemein beschrieben werden kann.



17. Gib einen Term mit der Variablen x an, mit dem die Sachverhalte beschrieben werden können. Erkläre jedes Mal genau die Bedeutung der Variablen x.

Sachverhalt	Term	Bedeutung der Variablen x
1)		
2)		
3)		
4)		
5)		
6)		

(2) Frau Meyer rechnet für die Kinderparty 2 Würstchen für jedes Kind und drei Würstchen als Reserve.

(1) Marko hat doppelt so viele PC-Spiele wie Sebastian.

(5) Maria verkauft Kuchen für 0,50 € pro Stück.

(6) Ein Wanderer geht in einer Stunde 4 km.

(3) Frau Schulze kauft Kirschen für 2 € das Kilo.

(4) Die Kinokarten kosten 3 € pro Kind, und jeder bekommt noch eine Popcorn-Tüte für 2 €.

18. Gib für die Berufe jeweils einen Sachverhalt an, der durch folgende Terme beschrieben werden kann: (1) $a + b$ (2) $a \cdot b$ (3) $2(a + b)$

a) Maurer b) Landschaftsgärtner c) Verkäuferin

19. In den folgenden Termen stehen die Variablen a und b für Streckenlängen, wobei $a < b$ gilt. Skizziere einen Streckenzug, der dem folgenden Term entspricht.

a) $a + b$ b) $b - a$ c) $2a$ d) $2(a + b)$ e) $\frac{1}{2}a + b$ f) $\frac{a+b}{2}$

Klasse 10, Gymnasium

1. Gib an, welche Buchstaben in den folgenden Gleichungen Variable und welche Parameter sind.

a) $A = \pi \cdot r^2$ (Flächeninhaltsformel für einen Kreis)

b) $y = mx + n$ (Gleichung für eine lineare Funktion)

c) $x^2 + px + q = 0$ (Normalform der quadratischen Gleichung)

d) $h = h_0 - \frac{g}{2}t^2$ (Höhe eines Körpers beim freien Fall)

e) $f(t) = a \cdot b^t$ (Funktionsgleichung für exponentielles Wachstum)

f) $V = a \cdot b \cdot c$ (Volumenformel eines Quaders)

2. Gib eine Gleichung für eine Funktion an, die die folgende Anzahl von Parametern hat.

a) einen Parameter b) zwei Parameter c) drei Parameter

3. Gib eine Gleichung an, die die folgende Anzahl von Variablen und Parametern enthält.

a) eine Variable und einen Parameter

b) eine Variable und zwei Parameter

c) zwei Variable und zwei Parameter

3 Zum Erkennen der Struktur von Termen

3.1 Ausgewählte Probleme

Das Können im Erkennen der Struktur von Termen ist eine Teilhandlung beim Arbeiten mit Termen, Gleichungen und Ungleichungen und damit eine notwendige Voraussetzung für das gesamte algebraische Können. Diese Teilhandlung muss separat ausgebildet werden, bevor sie in die weiteren komplexen Handlungen integriert werden kann. Es geht darum, dass die Schüler in einer gegebenen Zeichenkette die Reihenfolge der Ausführung der Operationen erkennen. Obwohl dies zunächst nur als eine rein formale Betrachtung erscheint, die auf formalen Regeln und Konventionen zur Arbeit mit Zeichenreihen beruht, ergeben sich bei genauerer Analyse zahlreiche inhaltliche Aspekte.

Wie bei jeder Handlung, die als Fertigkeit ausgebildet werden soll, muss das Erkennen der Struktur von Termen zunächst entfaltet, das heißt in für Schüler elementare Teilhandlungen zerlegt werden. Danach kann dann eine zunehmende Verkürzung und Verallgemeinerung der Handlung erfolgen. Es gibt Indizien dafür, dass der Übergang zu automatisierten Handlungen im Bereich der Algebra oft sprunghaft erfolgt, man sieht dann die Struktur einfach, ohne weiter darüber nachzudenken.

Eine wichtige Vorleistung für das Erkennen der Struktur von Termen ist die Beherrschung der Vorrangregeln für Rechenoperationen einschließlich der Verwendung von Klammern. Eine Übertragung auf das Arbeiten mit Variablen ist allerdings mit folgenden formalen und inhaltlichen Problemen verbunden.

- Die Schüler müssen die schon erwähnten Konventionen in der Verkürzung der Schreibweise (Weglassen des Multiplikationszeichens zwischen Zahlen und Variablen) beachten, so dass die Multiplikation nicht mehr so deutlich erkennbar ist.
- Es ändert sich der Charakter der Rechenoperationen. Während beim Arbeiten mit Zahlen die Operationen ausgeführt werden können, also wirklich gerechnet werden kann, ist dies beim Arbeiten mit Termen in der Regel nicht möglich. Die Rechenoperationen erhalten einen allgemeinen Charakter im Sinne des mathematischen Operationsbegriffes. Um dies zu verdeutlichen könnte man bei Termen von Operationen anstelle von Rechenoperationen sprechen.
- Während es bei der Anwendung der Vorrangregeln auf Rechenausdrücke darum geht, welche Rechnung zuerst auszuführen ist, ist es für die Erkennung der Struktur von Termen notwendig, die Operationen zu bestimmen, die zuletzt auszuführen ist. Damit wird die Grundstruktur eines Terms erkannt, die für das Arbeiten mit Termen, insbesondere auch in Gleichungen und Ungleichungen von Bedeutung ist. Um z. B. eine geeignete Umformung einer Gleichung vorzunehmen, muss ebenfalls die Operation erkannt werden, die zuletzt auszuführen ist. Es ist also nicht erforderlich, sofort die gesamte Struktur des Terms zu erfassen. Das „Erschließen“ des Terms kann schrittweise erfolgen, indem zuerst die Grundstruktur (die „äußere“ Struktur) und dann immer feinere „innere“ Strukturen erkannt werden.

Ein besonderes Problem ist die unterschiedliche Bedeutung des Minuszeichens. Es kann als Vorzeichen, als Operationszeichen oder als Operator zur Bildung des Entgegengesetzten verwendet werden. So kann das Minuszeichen in dem Term „− b“ zunächst nur als Operator aber nicht als Vorzeichen verwendet werden, da Vorzeichen nur für Zahlen und nicht für Variable erklärt sind. Wenn man aber den Term „− b“ als verkürzte Schreibweise von (− 1) · b deutet, kann das Minuszeichen auch als Vorzeichen des Koeffizienten − 1 aufgefasst werden. Im Term „− 2b“ lässt sich das Minuszeichen hingegen sofort als Vorzeichen des Koeffizienten deuten.

Damit im Zusammenhang steht die Frage der Unterscheidung von Summen und Differenzen. So kann der Term a − b sowohl als Summe als auch als Differenz gedeutet werden. Welche Bedeutung sinnvoll ist, hängt von der konkreten Situation ab. So ist es für das Zusammenfassen von Summen aus mehreren Gliedern sogar notwendig, diese Ausdrücke als Summen aufzufassen, ansonsten wäre eine Vertauschung von Gliedern gar nicht möglich. Eine Deutung als Differenz ist dann sinnvoll, wenn mit

dem Term Unterschiede beziehungsweise Abstände zwischen Zahlen ausgedrückt werden, wie etwa in der Geradengleichung $y = y_0 + m(x - x_0)$ oder in dem Term für die Varianz
$p_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$

Um die Schwierigkeiten zu verringern, die viele Schüler mit dem Minuszeichen, insbesondere beim Umformen von Termen haben, hat es sich als günstig erwiesen, darauf zu orientieren, die Minuszeichen in der Regel als Vorzeichen zu deuten.

Ein weiteres Problem ist das Verhältnis der Operationen Multiplikation und Division. Es ist beim Arbeiten mit Termen oft günstig, Quotienten in Produkte umzuwandeln. So sollten z. B. die Schüler in der Lage sein, den Quotienten $\frac{a \cdot b}{2}$ auch in der Form $\frac{1}{2}$ $a \cdot b$ zu schreiben. Dazu müssen die entsprechenden Kenntnisse aus der Bruchrechnung reaktiviert werden.

Bei Termen, die nicht nur aus einzelnen Variablen bestehen, ergibt sich weiterhin das Problem, dass bei den Überlegungen zur Strukturerkennung einzelner Bestandteile des Terms zusammengefasst werden müssen. Um den Unterschied zwischen einem Term aus einer Variablen und einem zusammengesetzten Term zu verdeutlichen, sollten für Terme indizierte T's (T_1, T_2, T_3 ...) verwendet werden.

Neben der Verwendung von indizierte T's für Terme sollte eine grafische Veranschaulichung zur Strukturanalyse verwendet werden. Dies ist z. B. durch Einkringeln der Termbestandteile möglich.

Beispiel: Zur Bestimmung der Struktur des Terms $6x - 2y^2$ sollen die Schüler die Teilterme möglichst farbig einkreisen und dann eine Beschreibung mit indizierten T's vornehmen:

Term: $6x$ $- 2y^2$ Beschreibung: $T_1 + T_2$ $T_1 = 6x$ $T_2 = - 2y^2$

3.2 Sicheres Wissen und Können

Klasse 8:

Die Schülerinnen und Schüler

- können die äußere Struktur eines Terms aus Zahlen erkennen, der maximal 2 der 5 Rechenoperationen und Klammern enthält,
- können einen Term aus Zahlen mit maximal 2 der 5 Rechenoperationen und Klammern in einen Term mit Variablen gleicher Struktur überführen und umgekehrt,
- können in einem Term aus Zahlen oder Variablen mit maximal 2 der 5 Rechenoperationen und Klammern die Operation erkennen, die zuletzt ausgeführt werden muss.

Klasse 10, Regionale Schule und Gymnasium

Die Schülerinnen und Schüler

- können in einem Term, der sich als Summe, Produkt oder Potenz zweier einzelner Terme auffassen lässt, die Grundstruktur erkennen und zwei mögliche Teilterme bestimmen, wobei die jeweiligen Teilterme maximal eine Rechenoperation enthalten
- können die Struktur einer Summe aus maximal drei Summanden erkennen und die Teilterme angeben,
- können Terme der Form $\frac{T}{n}$ mit $n \in N$ in der Form $\frac{1}{n} \cdot T$ schreiben und umgekehrt.

Klasse 10, nur Gymnasium:

Die Schülerinnen und Schüler

- können die Struktur von Termen aller betrachteten Formen mit indizierten Variablen untersuchen,
- können Quotienten aus zwei Termen als Produkte aus zwei Termen schreiben,
- können die komplette Struktur eines Terms bestimmen, der aus maximal 4 Teiltermen besteht, wobei die unterste Stufe ein Term aus einem Koeffizienten und einer Variablen ist.

3.3 Aufgaben

Klasse 8

1. Gib an, ob es sich bei den folgenden Termen um eine Summe, eine Differenz, ein Produkt, einen Quotienten oder eine Potenz handelt. Du brauchst den Wert des Ausdrucks nicht zu berechnen.

a) $5 \cdot 100 + 210$	b) $5 + 100 \cdot 210$	c) $(5 + 100) \cdot 210$
d) $(2 + 3)^2$	e) $\frac{3}{5}$	f) $2{,}3 \cdot 1{,}4 - 1{,}6 \cdot 1{,}5$
g) $(7 + 12) : (8 + 3)$	h) $5^3 \cdot 7$	i) $4 + (5 + 10) \cdot 2$

2. a) Schreibe jeweils den folgenden Term als einen Term mit Variablen. Gleiche Zahlen bedeuten gleiche Variable.
b) Markiere dann in beiden Termen die Operation, die <u>zuletzt</u> ausgeführt werden muss.
c) Gib an, ob es sich bei den Termen um eine Summe, eine Differenz, ein Produkt, einen Quotienten oder eine Potenz handelt.

(1) $3 + 3 \cdot 5$	(2) $8 \cdot 7 - 8$	(3) $5 \cdot (5 - 9)$
(4) $\frac{1}{2} \cdot (7 + 12)$	(5) $5 \cdot 2^3$	(6) $13 - (5 + 2)$
(7) $15 + 35 : 7$	(8) $(5 + 9) \cdot (9 - 2)$	(9) $5^2 + 7$

3. a) Gib zu folgenden Termen einen Term mit Zahlen an. Gleiche Variable bedeuten gleiche Zahlen.
b) Gib weiterhin an, ob es sich bei den Termen (1) bis (9) um eine Summe, eine Differenz, ein Produkt, einen Quotienten oder eine Potenz handelt.

(1) $a \cdot b + c$	(2) $a + b \cdot c$	(3) $a \cdot (b + c)$
(4) $a \cdot b - a$	(5) $a \cdot (a + b)$	(6) $a + a \cdot b$
(7) $\frac{a}{b} + c$	(8) $a + a^b$	(9) $a \cdot a^b$

Klasse 10, Regionale Schule, Gymnasium

4. Gib an, ob die Grundstruktur des Terms eine Summe ($T_1 + T_2$), ein Produkt ($T_1 \cdot T_2$) oder eine Potenz ($T_1^{T_2}$) ist und markiere jeweils T_1 und T_2 in dem Term.

Term	Struktur	Term	Struktur	Term	Struktur
a) $a(b + 1)$		e) $\frac{a}{2} b^2$		i) $(2a)^{b+c}$	
b) $2ab + (a + b)$		f) $5a^2 - 8ab$		j) $2a(b + c)$	
c) $(a + b)^2$		g) b^{2x}		k) $\frac{4}{3} \pi r^3$	
d) $(x - x_1)(x - x_2)$		h) $(2a + 5b)(3a - b)$		l) $6x - 2y^2$	

5. Die folgenden Terme haben die Struktur $T_1 + T_2 + T_3$. Gib jeweils T_1, T_2 und T_3 an.

a) $7x + 3y + z$ b) $23ab^2 - 6a(b + 1) + 2c$ c) $-x^2 + 2x - 1$

d) $-41 + 2x - 5x$ e) $(a - b) + 2ab - (a + b)$ f) $5x^2 - ax + a$

6. Stelle die folgenden Terme als Produkt zweier Terme T_1 und T_2 dar.

a) $\frac{ab}{4}$ b) $\frac{1}{2}gh$ c) $\frac{ab}{2}$ d) $\frac{1}{3}r^2h$ e) $\frac{a^3b^2c}{6}$ f) $\frac{\pi}{4}d^2$

7. Gegeben sind folgende Terme: $3a$; $-1{,}5\,b$; $-\frac{1}{2}c$ und $(d + 1)^2$

Bilde jeweils mit einigen dieser Terme einen Term der folgenden Struktur.

a) eine Summe aus zwei Termen b) ein Produkt aus zwei Termen

c) eine Summe aus drei Termen d) ein Produkt aus drei Termen

e) eine Differenz zweier Terme f) einen Quotienten aus zwei Termen

Klasse 10, nur Gymnasium

8. Schreibe die folgenden Quotienten zweier Terme als Produkte zweier Terme.

a) $\frac{(a+b)c}{d}$ b) $\frac{ab}{cd}$ c) $\frac{x - x_1}{2(x - x_2)}$

d) $\frac{n(n+1)}{2}$ e) $\frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1}$ f) $\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}$

9. Beschreibe die Struktur des Terms mit drei Termen T_1, T_2 und T_3.

a) $2x(7y - z)$ b) $2x - 3y(z + 1)$ c) $\frac{4x - y}{3z}(x + 2)$

d) $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ e) $\frac{1}{n+2}x^{n+1}$ f) $\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$

10. Gib jeweils an, ob die Terme die Struktur $T_1 \cdot T_2$, $(T_1 + T_2)^2$ oder $T_1(T_2 + T_3)$ haben und vervollständige die Tabelle.

Term	Struktur	T_1	T_2	T_3
a) $(2a + 3b)^2$				
b) $5x(6y - z)$				
c) $(3x - 5y)^2$				
d) $7xy \cdot 3x^2$				
e) $-4u(3uv - 5v^2)$				
f) $(2x + 3)(4x - 1)$				

4 Zum Umformen von Termen

4.1 *Ausgewählte Probleme*

Allgemeine Bemerkungen

Das Können im Umformen von Termen hat für sich genommen eine geringe *Bedeutung*, es ist vor allem eine Teilhandlung beim Arbeiten mit Gleichungen, Funktionen sowie Formeln. Das Anforderungsniveau von Aufgaben zur Termumformung lässt sich leicht beliebig steigern, indem immer komplexere Terme betrachtet werden. Generell sollten bei Aufgaben zu Termumformungen die Strukturen im Mittelpunkt stehen, die auch im weiteren Mathematikunterricht bzw. in anderen Unterrichtsfächern auftreten können. Dabei handelt es sich in der Regel um recht einfache Termstrukturen.

Das Grundproblem beim Arbeiten mit Termen ist das Verhältnis von *inhaltlichen und formalen Überlegungen*. Das Können im Arbeiten mit Termen entwickelt und äußert sich in der Fähigkeit, zwischen beiden Aspekten wechseln zu können. Folgende inhaltliche Überlegungen sollten in allen Abschnitten angestellt werden:

- *Interpretation der Variablen als Zahlen*: Termumformungen verallgemeinern das Rechnen mit Zahlen. Sie ermöglichen ein vorteilhaftes Rechnen mit Zahlen. Durch Belegen mit Zahlen kann man Termumformungen erklären, überprüfen oder selbstständig reaktivieren. Wenn ein Zahlenbeispiel nicht stimmt, ist auch die allgemeine Termumformung nicht richtig.
- *Interpretation der Variablen als Streckenlängen:* Variable können eine beliebige Streckenlänge bezeichnen. Dabei sind allerdings nur positive Werte möglich. Streckenlängen kann man addieren, vervielfachen und multiplizieren.
  Bei dieser Interpretation bleibt ein bestimmter Grad der Allgemeinheit erhalten, da die Schüler aus dem Geometrieunterricht Vorstellungen von allgemeinen Streckenlängen und Rechenoperationen mit ihnen haben (z.B. $a + 3$ cm, $2(a + b)$, $a \cdot b$).

Zur Ausbildung sicherer Fertigkeiten im Rechnen mit Termen spielt aus lernpsychologischer Sicht das Arbeiten mit *Umkehraufgaben* eine wichtige Rolle, wobei die eigenständige Bedeutung der betreffenden Umkehraufgaben im Mathematikunterricht unterschiedlich ist.
Es gibt folgende Paare von Umkehraufgaben:

- Multiplizieren von Zahlen und Variablen – Zerlegen von Zahlen und Variablen in Faktoren
- Ausmultiplizieren – Ausklammern
- Multiplizieren von Summen – Umformen einer Summe in ein Produkt
- Anwenden der binomischen Formeln von links nach rechts und von rechts nach links

Die Vielzahl und Komplexität der anwendbaren Regeln führt zu einer erheblichen Anzahl und Vielfalt der *Schülerfehler*. Neben der notwendigen Einheit inhaltlicher und formaler Herangehensweisen ist die Ausbildung und *Integration folgender Teilhandlungen* von entscheidender Bedeutung:

(1) Bestimmen der Struktur des Terms und Benennen der durchzuführenden Umformung

(2) Nennen und eventuell Notieren der anzuwendenden Regel

(3) Schrittweises Ausführen der Umformung nach der Regel

(4) Kontrolle durch umgekehrte Termumformung, Zahlenbeispiele oder Strukturanalysen

Aufgaben zur Fehlersuche können auf typische Fehler hinweisen und die kritische Einstellung zu eigenen Arbeitsergebnissen entwickeln helfen.

Zum Zusammenfassen von Gliedern einer Summe und zum Auflösen von Klammern

Das Zusammenfassen von Gliedern einer Summe und das Auflösen von Klammern bereiten den Schülern in der Regel bei einer isolierten Behandlung zu Beginn des Stoffgebietes wenige Probleme. Diese Termumformungen sollten deshalb genutzt werden, um die Schüler weiter an eine neue Sicht- und Sprechweisen zu gewöhnen. Es ist deshalb sinnvoll, die für die Schüler neuen und anspruchsvollen Begriffe „Koeffizient", „Glied einer Summe" und „gleichartige Glieder" einzuführen.

Ein *Koeffizient* ist eine spezielle Bezeichnung für eine Zahl, die in der Regel vor einer Variablen bzw. vor einem Produkt aus Variablen auftritt. In Ausnahmefällen (zum Beispiel $a\sqrt{2}$) kann ein Koeffizient auch hinter einer Variablen stehen. In Summen sollte das Operationszeichen stets als Vorzeichen des Koeffizienten aufgefasst werden.

Beispiel: Im Term $x^2 - 3{,}5x - 7$ ist der Koeffizient von x die Zahl $-3{,}5$.

Ein *Glied einer Summe* ist eine andere Bezeichnung für „Summand" und wird konventionell für algebraische Summen, d. h. wenn in der Summe Variable auftreten. Zwei Glieder sind *gleichartig*, wenn sie sich nur in den Koeffizienten unterscheiden, dass heißt wenn sie genau die gleichen Variablen beziehungsweise Produkte von Variablen enthalten. Die Bezeichnung spielt im weiteren Mathematikunterricht u. a. bei quadratischen Gleichungen (lineares Glied, absolutes Glied) eine Rolle.

Beim *Zusammenfassen von Gliedern einer Summe* sollten konsequent alle Plus- bzw. Minuszeichen als Vorzeichen aufgefasst werden. Auch hier ist eine grafische Visualisierung der geistigen Handlungen durch Einkringeln eine sinnvolle Unterstützung des Lernprozesses. Dabei sollten die gleichartigen Terme unterschiedlich farblich oder grafisch markiert werden.

Beispiel: Term: $r^2s + 2rs - 3r^2s - 4rs$ markierter Term: $\boxed{r^2s}\ + 2rs\ \boxed{-3r^2s}\ - 4rs$

Beim *Auflösen von Klammern* sollte an die bekannten Vorzeichenregeln beim Rechnen mit rationalen Zahlen angeknüpft werden („Minus mal Minus ergibt Plus" und „Minus mal Plus sowie Plus mal Minus ergibt Minus"). Weiterhin sollte durch eine entsprechende grafische Visualisierung das anschließende Ausmultiplizieren vorbereitet werden.

Beispiel: Term: $-(-3a + b)$ Visualisierung mit Pfeilen: $-(-3a + b)$

Zum Ausmultiplizieren und Ausklammern

Wie schon beim Auflösen von Klammern angedeutet, sollte beim *Ausmultiplizieren von Summen* das Denken der Schüler durch die Verwendung von Pfeilen grafisch unterstützt werden. Zur symbolischen Darstellung der Regel zum Ausmultiplizieren sollten indizierte T's verwendet werden, wobei eine Beschränkung auf die Darstellung des Ausmultiplizierens eines Binoms ausreichend ist.

Vorschlag: $T_1 \cdot (T_2 + T_3) = T_1 \cdot T_2 + T_1 \cdot T_3$

Beim *Ausklammern* entsteht das fachliche Problem, dass auch rationale Zahlen aus einer Summe ausgeklammert werden können und man deshalb nicht von gemeinsamen Teilern der Koeffizienten sprechen kann. Deshalb sollte die Formulierung verwendet werden, dass man „einen gemeinsamen Faktor der Koeffizienten" zu ermitteln hat. Zum Bestimmen eines gemeinsamen Faktors der Variablen sollten bei auftretenden Potenzen diese in Produkte zerlegt werden.

Als Kontrollhandlung beim Ausklammern ist es günstig, die Schüler an eine begleitende Kontrolle zu gewöhnen, das heißt nach dem Hinschreiben des gemeinsamen Faktors sollte beim Aufschreiben der verbleibenden Terme in der Klammer jedes Mal sofort eine Kontrolle durch Multiplizieren und Vergleich mit dem ursprünglichen Summanden erfolgen. Wenn man generell als Kontrolle beim Ausklammern ein nachträgliches Ausmultiplizieren vornehmen lässt, entsteht jedes Mal eine weitere zusätzliche Aufgabe, die die Schüler oft nicht ernst nehmen.

Von den beiden Termumformungen ist das Ausmultiplizieren für den weiteren Mathematikunterricht von wesentlich größerer Bedeutung und sollte als sichere Fertigkeit ausgebildet werden.

Zum Multiplizieren von Summen und Anwenden von binomischen Formeln

Das *Multiplizieren von Summen* ist eine Weiterführung des Ausmultiplizierens und sollte ebenfalls mithilfe von Pfeilen und symbolisch durch indizierte T's für den Fall der Multiplikation zweier Binome veranschaulicht werden.

Bei der Behandlung der *Binomischen Formeln* ist es aus kulturhistorischer Sicht wohl unvermeidlich, in zweifacher Hinsicht von den bisherigen Prinzipien abzuweichen. Bei der symbolischen Darstellung der Formeln sollten anstelle der bisher verwendeten indizierte T's die Variablen a und b verwendet werden. Man sollte den Schülern aber verdeutlichen, dass dies mit Blick auf die üblichen Bezeichnungen etwa in Formelsammlungen erfolgt und aus inhaltlicher Sicht es auch hier wieder sinnvoll wäre, indizierte T's zu verwenden, da man a und b bei der Anwendung der Formeln durch Terme ersetzen muss.

Ein weiterer Unterschied zur bisherigen Sichtweise Differenzen stets als Summen aufzufassen, ist die Verwendung der zweiten binomischen Formel, die eigentlich in der ersten binomischen Formel enthalten ist, da a und b Symbole für Terme sind.

Es sollte nicht versäumt werden, an dieser Stelle die Vorstellung der Schüler zum Wort „*Formel*" zu festigen und weiter zu entwickeln. Unter einer Formel haben die Schüler bis zu diesem Zeitpunkt immer eine Gleichung verstanden, bei der auf der linken Seite eine Größe steht, die durch einen Term auf der rechten Seite zu berechnen ist. In dieser Hinsicht wird der Begriff Formeln erweitert, was dann im weiteren Unterricht bei der Bezeichnung „Lösungsformel für quadratische Gleichungen" fortgesetzt wird. Was aber bleibt, sind die notwendigen Teilhandlungen zum Arbeiten mit einer Formel, nämlich das Identifizieren der Variablen in der Formel für die entsprechende konkrete Aufgabe und das Belegen der Variablen mit den entsprechenden Termen.

Zum Anwenden von Potenz- und Wurzelgesetzen

Die Entwicklung des Potenzbegriffs

Bei der Erweiterung des Potenzbegriffs in der 9. Klasse sollte darauf hingewiesen werden, dass bisher nur natürliche Zahlen als Exponenten verwendet wurden und die Formulierung: „Der Exponent gibt an, wie oft die Basis als Faktor auftritt." nur für natürliche Zahlen als Exponenten gilt. Die oft verwendetet Formulierung „a^n heißt n-mal der Faktor a" sollte deshalb und auch wegen der leichten Verwechslung mit $n \cdot a$ vermieden werden.

Man sollte dann im folgenden Unterricht generell nicht pauschal von Potenzen sondern nur von Potenzen (analog auch bei Potenzfunktionen) mit natürlichen, ganzen oder rationalen Exponenten sprechen.

Die Definition $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ sollte ausführlich begründet und motiviert werden. Da die Potenzgesetze an dieser Stelle noch nicht zur Verfügung stehen, kann man nur das Permanenzprinzip zur Begründung verwenden und auf die den Schülern bekannte Bedeutung negativer Exponenten in der Anzeige eines Taschenrechners eingehen. Als ein Prototyp kann die Schreibweise $km \cdot h^{-1}$ für den Quotienten $\frac{km}{h}$ verwendet werden. Der Unterschied zwischen negativen Zahlen und Potenzen mit negativen Exponenten sollte herausgestellt werden.

Darstellen und Vorstellen sehr großer und sehr kleiner Zahlen

Das Können im Umgehen mit sehr kleinen und sehr großen Zahlen, die mit abgetrennten Zehnerpotenzen bzw. mit Einheitenvorsätzen dargestellt sind, wird in vielen Berufen und im täglichen Leben oft benötigt und sollte zur mathematischen Grundbildung gehören, wobei es vor allem um die Potenzen von 10^9 bis 10^{-9} geht.

Bedeutung und Anwenden der Potenzgesetze

Die Hauptanwendung der Potenzgesetze bei Sach- und Anwendungsaufgaben ist das Arbeiten mit Zehnerpotenzen. Dies ist oft inhaltlich durchführbar und stellt nicht so hohe Anforderungen an das Können im Arbeiten mit Variablen. Die Gesetze für Zehnerpotenzen können leicht gewonnen und auf Potenzen mit gleicher Basis verallgemeinert werden.

Eine wichtige Anwendung von Potenzen mit beliebiger Basis ist das Schreiben von Brüchen als Produkte und umgekehrt, insbesondere bei Quotienten von Größen.

Das Vereinfachen von Termen mit komplizierter Struktur und mehreren Variablen als Basen bzw. Exponenten hat für spätere Anwendungen eine geringe Bedeutung und sollte nicht geübt werden.

Aufgaben zur Anwendung der *Potenzgesetze* können inhaltlich und formal gelöst werden. Das inhaltliche Lösen basiert auf der Bedeutung der Potenzschreibweise. So wie bereits beim Ausklammern und Ausmultiplizieren in der Klasse 8 vorgegangen wurde, müssen dabei die Potenzen im Kopf zerlegt, ausführlich geschrieben bzw. Produkte zu Potenzen zusammengefasst werden.

Beim formalen Lösen sind folgende Teilhandlungen erforderlich:

1. Erkennen der Struktur des Terms
2. Identifizieren der Basen und Exponenten der vorkommenden Potenzen
3. Feststellen, ob Basen oder Exponenten gleich sind
4. Reaktivieren des betreffenden Gesetzes
5. Belegen der Variablen im Gesetz
6. Durchführen der Rechnungen
7. Kontrolle der Handlungen

Bei diesen vielen Teilhandlungen ist naturgemäß die Fehlerwahrscheinlichkeit sehr groß, womit die erheblichen Schwierigkeiten, die Schüler beim Anwenden von Potenzgesetzen haben, teilweise erklärt werden können. Man sollte nach Möglichkeit vor allem solche Aufgaben stellen, die auf Grund des überschaubaren Zahlenmaterials inhaltlich gelöst werden können.

Auf ein Auswendiglernen der Potenzgesetze kann verzichtet werden, wenn man die Schüler daran gewöhnt, die Potenzgesetze an prototypischen Beispielen selbstständig zu reaktivieren. Diese prototypischen Beispiele können folgende sein:

(1) $a^2 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5 = a^{2+3}$

(2) $a^5 : a^3 = \frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a^2 = a^{5-3}$

(3) $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^6 = a^{2 \cdot 3}$

(4) $(a \cdot b)^2 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = a^2 \cdot b^2$

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$

Anstelle von a könnte bei den Beispielen (1) bis (3) auch die Zahl 10 verwendet werden.

Aus jedem Potenzgesetz ergeben sich zwei unterschiedliche Aufgabentypen und damit auch zwei unterschiedliche Handlungsvorschriften zum Lösen dieser Aufgaben, je nach dem in welche Richtung das Potenzgesetz gelesen wird. Das 4. und 5. Potenzgesetz wird meist als Multiplizieren bzw. Dividieren von Potenzen mit gleichen Exponenten formuliert. Die umgekehrte Leserichtung entspricht dem Potenzieren von Produkten bzw. Quotienten und ist im weiteren Mathematikunterricht von wesentlich größerer Bedeutung. Deshalb wurde beim Vorschlag der Prototypen (4) und (5) für diese Gesetze auch die umgekehrte Richtung als Grundlage gewählt.

4.2 Sicheres Wissen und Können

Klasse 8

Die Schülerinnen und Schüler

- können Terme zusammenfassen, die maximal 4 Summanden haben,
- können Produkte aus maximal 3 Faktoren zusammenfassen, die jeweils aus einem Koeffizienten und einer Variablen bestehen,
- können zwei Terme aus einem Koeffizienten und maximal zwei Variablen durcheinander dividieren, wobei als Ergebnis ein Bruch auftreten kann,
- können Klammern um Terme mit zwei Gliedern auflösen,
- können unter Beachtung der bisherigen Bedingungen ein Binom mit einem Term aus einer Zahl und einer Variablen ausmultiplizieren,
- können zwei Summen aus je zwei Variablen miteinander multiplizieren,

Klasse 10

Die Schülerinnen und Schüler

- können Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen schreiben,
- können die Potenzgesetze auf das Rechnen mit Zehnerpotenzen anwenden,
- können Quotienten von Einheiten als Produkte mithilfe negativer Exponenten schreiben,
- können die Potenzgesetze für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten anwenden (nur Gymnasium),
- können Wurzeln als Potenzen schreiben (nur Gymnasium),
- wissen, dass Logarithmen Exponenten sind,
- können logarithmische Gleichungen als Exponentialgleichungen schreiben und lösen, wenn als Exponenten nur natürliche Zahlen auftreten (nur Gymnasium).

4.3 Aufgaben

Klasse 8

1. Fasse zusammen.

a) $12x - 12 + x + 4$ b) $a + 2b - 4a + 5a$ c) $20 - 20g + 5g - 18$

d) $4ab + 2bc - ab$ e) $5rs - 4ts + 7ts - 9rs$ f) $r^2s + 2rs - 3r^2s - 4rs$

g) $3xy - 2x^2y + xy - 3x^2y$ h) $-5uv + 4uv - 6u^2v + 5u^2v$ i) $u - v^2 + v^2 + u$

2. Vereinfache.

a) $5x \cdot 2$ b) $16 \cdot 4a$ c) $3c \cdot 2d$

d) $3x \cdot 5y \cdot 2$ e) $7a \cdot 7b \cdot 0$ f) $1 \cdot 12c \cdot 8a$

g) $-8a \cdot 5b$ h) $-14s \cdot (-3t)$ i) $-8a \cdot 6a \cdot 3c$

3. Berechne.

a) $55x : 5$ b) $42b : 6b$ c) $15xy : 5x$

d) $77c : 7ac$ e) $-5a : 5$ f) $-30ac : (-3c)$

4. Vereinfache soweit wie möglich.

a) $6k : 5k$ b) $20a : 5b$ c) $7x : 14y$

d) $6a : 12a$ e) $4y : 3y^2$ f) $5d^2 : 5d$

5. Löse die Klammer auf.

a) $3n + (2m - 1)$ b) $6x - (2 + 4y)$ c) $-(5x - 7)$

d) $-(-3a + b)$ e) $(-4a - 3b)$ f) $4m + (-3n + 4)$

g) $4a - 7a + 6a$ h) $4a + (7a + 6a)$ i) $4a - (7a + 6a)$

6. Ergänze.

a) $-5x - 7 = -(\ldots\ldots\ldots\ldots)$ b) $4a - 5b + 2c = 4a + (\ldots\ldots\ldots\ldots)$ c) $6n - 4 + 5m = 6n - (\ldots\ldots\ldots\ldots)$

7. Multipliziere aus.

a) $2\,(4x + 2y)$ b) $x\,(1 + 3y)$ c) $-5\,(-5x - 4k)$

d) $2y\,(2 - 2y)$ e) $(5 + 3x) \cdot (-3)$ f) $-3x\,(-x + 2y)$

g) $4\,(-2a + 5)$ h) $4a\,(-2a + 5)$ i) $(4a - 2a) \cdot 5$

8. Forme in eine Summe um.

a) $(a + b) \cdot (c + d)$ b) $(-a + b) \cdot (-c + d)$ c) $(-a - b) \cdot (-x - y)$

d) $(m - n) \cdot (-a + b)$ e) $(a + 1) \cdot (1 - b)$ f) $(a - b) \cdot (c - d)$

9. Berechne.

a) $(a + 2b)^2$ b) $(a - 3)^2$ c) $(a - 3)(a + 3)$

d) $(10 - a)^2$ e) $(2x + 1)(2x - 1)$ f) $(2x + 3y)^2$

Klasse 10

Hinweis: Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass alle Variablen nur Werte ungleich Null annehmen.

10. Schreibe mit abgetrennten Zehnerpotenzen.
Beispiel: $0,0123 = 1,23 \cdot 10^{-2}$

a) 0,0045 m = ……………… b) 5 620 km = ……………… c) 0,00006 km = ………………

d) 566 cm = ……………… e) 0,0907 m = ……………… f) 45 980 t = ………………

11. Vereinfache.

a) $10^3 \cdot 10^2$ b) $10^{-1} \cdot 10^2$ c) $10^{-5} \cdot 10^3$

d) $10^7 \cdot 10^3$ e) $10^{-2} \cdot 10^{-1}$ f) $10^5 \cdot 10^{-5}$

12. Schreibe als Produkt mithilfe negativer Exponenten.

a) $20\ \frac{km}{h}$ b) $2\ \frac{m}{s^2}$ c) $5\ \frac{g}{cm^3}$

13. Wende die Potenzgesetze an.

a) $3^3 \cdot 3^2$ b) $2^4 \cdot 2^3$ c) $c^4 \cdot c^7$

d) $3^4 \cdot 2^4$ e) $9^2 \cdot 2^2$ f) $8^5 \cdot x^5$

g) $\frac{2^8}{2^5}$ h) $\frac{4^6}{4^6}$ i) $\frac{x^{13}}{x^7}$

k) $\frac{16^4}{4^4}$ l) $\frac{32^5}{16^5}$ m) $\frac{x^7}{y^7}$

14. Schreibe ohne Klammern.

a) $(a \cdot b)^3$ b) $(-a \cdot b)^2$ c) $(-2x)^3$

d) $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ e) $\left(\frac{2}{3}a\right)^2$ f) $\left(\frac{x}{y}\right)^3$

Klasse 10 Gymnasium

15. Schreibe als Bruch.

a) a^{-2} b) n^{-1} c) $(2x)^{-2}$

d) $(a \cdot b)^{-3}$ e) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$ f) $\left(\frac{3}{y}\right)^{-3}$

16. Schreibe als Potenz.

a) $\frac{1}{x}$ b) $\frac{1}{x^2}$ c) $\frac{2}{x}$

17. Wende die Potenzgesetze an.

a) $2^{-3} \cdot 2^{-4}$ b) $3^{-5} \cdot 3^{3}$ c) $a^{-4} \cdot a^{-2}$

d) $4^{-3} \cdot 3^{-3}$ e) $7^{-2} \cdot 2^{-2}$ f) $5^{-1} \cdot x^{-1}$

g) $\frac{3^{-3}}{3^{2}}$ h) $\frac{2^{5}}{2^{-3}}$ i) $\frac{c^{-4}}{c^{-3}}$,

k) $\frac{8^{-2}}{2^{-2}}$ l) $\frac{64^{-1}}{16^{-1}}$ m) $\frac{a^{-7}}{b^{-7}}$

18. Schreibe als Potenz.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{4}$ c) $\sqrt{a^{3}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ e) $\sqrt[3]{x^{9}}$ f) $\sqrt[4]{x^{-3}}$

19. Schreibe als Wurzel.

a) $2^{\frac{1}{2}}$ b) $5^{\frac{1}{4}}$ c) $c^{\frac{1}{3}}$

d) $3^{\frac{2}{5}}$ e) $2^{-\frac{1}{2}}$ f) $a^{1,5}$

20. Fasse zusammen.

a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ b) $x \cdot \sqrt{x}$ c) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}$

d) $\frac{x}{\sqrt{x}}$ e) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ f) $\sqrt{x^{5}} \cdot \sqrt[5]{x}$

21. Schreibe als Potenz.

a) $\log_2 8 = 3$ b) $\log_3 27 = 3$ c) $\log_{10} 1 = 0$

22. Bestimme x.

a) $x = \log_{10} 100$ b) $x = \log_2 8$ c) $x = \log_5 25$

d) $\log_2 x = 4$ e) $\log_3 x = 1$ f) $\log_3 x = 0$

g) $\log_x 8 = 3$ h) $\log_x 16 = 2$ i) $\log_x 25 = 1$

5 Zum inhaltlichen Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

5.1 *Ausgewählte Probleme*

Unter dem inhaltlichen Lösen von Gleichungen und Ungleichungen versteht man das Lösen ohne Verwendung von algorithmisch-kalkülmäßigen Verfahren. Das inhaltliche Lösen ist die einzige Möglichkeit für alle Gleichungstypen bis zur Einführung der formalen algorithmisch-kalkülmäßiger Verfahren in Kl. 7/8. Danach bleibt es das einzige Lösungsverfahren für alle Typen, für die die Schüler kein formales Lösungsverfahren kennen lernen.

Das inhaltliche Lösen ist aber auch nach der Behandlung algorithmisch-kalkülmäßiger Lösungsverfahren weiterhin als eine Lösungsmöglichkeit anzusehen, die bei einfachem Zahlenmaterial und einfachen Gleichungsstrukturen sinnvoll anzuwenden ist. Analog zum Herangehen an die Lösung numerischer Aufgaben (erst überprüfen, ob Einfachheit oder Besonderheit des Zahlenmaterials bzw. die Anwendung von Rechenvorteilen eine Lösung im Kopf ermöglicht und dann erst schriftlich oder mit dem Taschenrechner rechnen) sollte auch für algebraische Aufgaben eine entsprechende Einstellung und Gewohnheit zur Überprüfung rationeller, inhaltlicher Lösungsmöglichkeiten entwickelt werden. Als Prinzip für das Lösen einer Gleichung sollte gelten:

„Versuche jede Gleichung zuerst inhaltlich zu lösen!“

Das inhaltliche Lösen ermöglicht oft ein rationelleres Lösen als das kalkülmäßig-algorithmische Vorgehen. Es entwickelt weiterhin die Fähigkeit im Erkennen von Termstrukturen als der wesentlichen Voraussetzung für das formale Lösen.

Bei Gleichungen, die sich inhaltlich lösen lassen, können die Rechnungen meist im Kopf ausgeführt werden. Das inhaltliche Lösen dient also auch zur Festigung der Kopfrechenfertigkeiten bis in obere Klassen.

Inhaltliches Lösen kann die Vertrautheit der Schüler mit Variablen, Termen und Gleichungen fördern helfen. Variable werden als Zeichen für unbekannte Zahlen (Platzhalter) interpretiert, Terme und Gleichungen als verallgemeinerte Rechenausdrücke mit einer beliebigen Zahl.

Es gibt mindestens folgende ***Möglichkeiten zum inhaltlichen Lösen,*** die jeweils an Beispielen erläutert werden sollen. Dabei wird jeweils eine mögliche schriftliche Darstellung der Lösung in entfalteter Form angegeben, die bei ersten Übungen verwendet und dann noch verkürzt werden kann.

1. Einfaches oder systematisches Probieren

Ein Probieren ist nur anwendbar, wenn der Variablengrundbereich die Menge der natürlichen oder ganzen Zahlen ist. Durch einfaches Probieren kann man nur in wenigen überschaubaren Fällen eine Lösung finden.

Beispiel Kl. 5/6: $6 \cdot x = 40 - 2 \cdot x \quad x \in N$

<table>
<tr><th>Mögliche Überlegungen</th><th colspan="4">Mögliche schriftliche Darstellung</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Für x können nur natürliche Zahlen eingesetzt werden, also beginne ich bei 0.</td><td>x</td><td>$6 \cdot x$</td><td>Vergleich</td><td>$40 - 2 \cdot x$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>$<$</td><td>40</td></tr>
<tr><td>1</td><td>6</td><td>$<$</td><td>38</td></tr>
<tr><td>Die Werte beider Seiten liegen weit auseinander, also probiere ich mit größeren Werten für x</td><td>4</td><td>24</td><td>$<$</td><td>32</td></tr>
<tr><td>Für x = 5 habe ich eine Lösung gefunden.</td><td>5</td><td>30</td><td>=</td><td>30</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Für größere Werte von x wird die linke Seite immer größer und die rechte immer kleiner, also ist x = 5 die einzige Lösung.</td><td>6</td><td>36</td><td>$>$</td><td>28</td></tr>
<tr><td colspan="4">x = 5</td></tr>
</table>

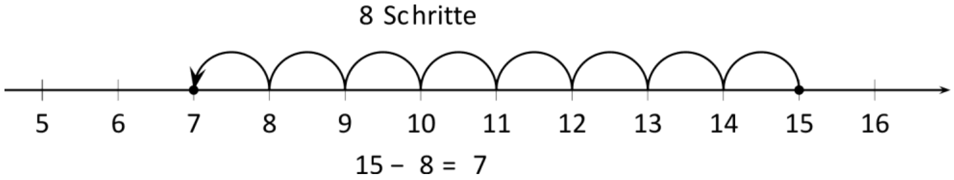
2. Veranschaulichung von Gleichungen bzw. Ungleichungen auf einer Zahlengeraden

Dieses Verfahren ist nur anwendbar, wenn alle Zahlen auf einem Ausschnitt des Zahlenstrahls bzw. der Zahlengeraden darstellbar sind. Die Überlegungen beruhen auf dem Schreiten auf der Zahlengeraden (bei Gleichungen) oder der Betrachtung der Ordnung der Zahlen (bei Ungleichungen).

Das Verfahren ist für den Grundbereich der natürlichen Zahlen bei einfachen Gleichungen (nur Addition oder Subtraktion) in Kl. 5/6 und in Klasse 7 für ganze Zahlen geeignet.

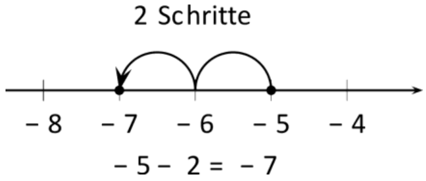
Beispiel, Kl. 5: $15 - x = 7$

Mögliche Überlegungen: Ich suche die Zahl 15 auf dem Zahlenstrahl und gehe so viele Schritte nach links, bis ich bei der Zahl 7 angelangt bin.



Beispiel, Kl. 7: $-5 - x = -7$

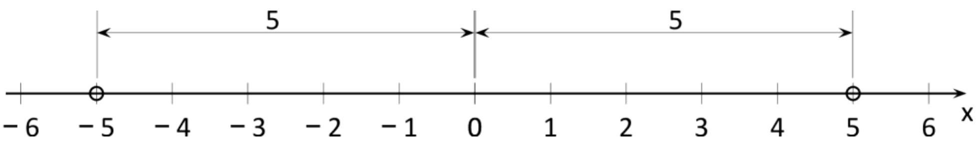
Mögliche Überlegungen: Ich suche die Zahl − 5 auf der Zahlengeraden und gehe so viele Schritte nach links, bis ich bei der Zahl −7 angelangt bin.



Das Verfahren lässt sich auch zur Lösung von Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen einsetzen. Dazu muss der Betrag einer Zahl als Abstand vom Nullpunkt und der Betrag der Differenz zweier Zahlen als Abstand der Zahlen gedeutet werden.

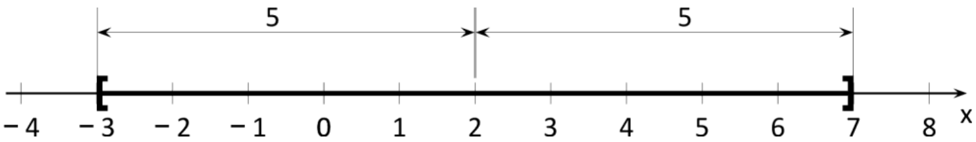
Beispiel, ab Kl. 7: $| x | = 5$

Mögliche Überlegungen: Die Zahl x hat den Abstand 5 vom Nullpunkt. Dies trifft für die Zahlen 5 und − 5 zu, also gilt $x_1 = 5$ und $x_2 = -5$.



Beispiel, ab Kl. 7: $| x - 2 | \le 5$

Mögliche Überlegungen: Der Abstand der Zahl x zur Zahl 2 ist kleiner oder gleich 5. Die gesuchten Zahlen sind also nicht weiter als 5 von der Zahl 2 entfernt. Also zähle ich 5 Schritte nach rechts und 5 Schritte nach links. Alles was innerhalb dieses Bereiches liegt, erfüllt die Ungleichung, also gilt $-3 \le x \le 7$.



3. Zerlegen von Zahlen und Termen in Summen, Differenzen und Produkte

Das Zerlegen von Zahlen in Summen und Produkte ist ein sehr wichtiger Aufgabentyp zur Entwicklung der Kopfrechenfertigkeiten. Das Verfahren kann in allen Klassenstufen vorrangig zum Lösen linearer Gleichungen verwendet werden.

Es können aber auch quadratische Gleichungen der Form $(x + b)^2 = a$ damit gelöst werden, wenn sich a leicht in ein Produkt aus zwei gleichen Faktoren zerlegen lässt.

Eine Zerlegung in eine Differenz sollte nur in den Fällen vorgenommen werden, in denen die Variable im Subtrahenden vorkommt (Beispiel: $15 - 2 \cdot x = 7$). Ansonsten sollte bei Differenzen die Umkehrung der Rechenoperation erfolgen (vgl. 4. Verwenden der Umkehroperation).

Beispiel, ab Kl. 5: $10 \cdot (x + 5) = 80$

Mögliche Überlegungen	Mögliche schriftliche Darstellung
Die Zahl 80 kann in das Produkt $10 \cdot 8$ zerlegt werden, also ist $8 = x + 5$.	$10 \cdot (x + 5) = 80$ $10 \cdot 8 = 80$ $8 = x + 5$
Die Zahl 8 kann in die Summe $3 + 5$ zerlegt werden, also ist $x = 3$	$x = 3$

Beispiel, ab Kl. 7: $(x + 1)^2 = 36$

Mögliche Überlegungen	Mögliche schriftliche Darstellung
36 lässt sich auf zwei Arten in ein Produkt aus zwei gleiche Faktoren zerlegen: $36 = 6 \cdot 6$ und $36 = (-6) \cdot (-6)$, also ist $x + 1$ entweder 6 oder -6.	$(x + 1)^2 = 36$ $36 = 6 \cdot 6$ $36 = (-6) \cdot (-6)$ $x_1 + 1 = 6$ $x_2 + 1 = -6$ $x_1 = 5$ $x_2 = -7$

4. *Verwenden der Umkehroperation bzw. Umkehrfunktion*

Überlegungen zur Umkehroperation sind bei auftretenden Differenzen und Quotienten sinnvoll. Damit werden die formalen Umformungsregeln vorbereitet. Die schriftliche Darstellung sollte sich von der Darstellung bei Anwendung formaler Regeln deutlich unterscheiden.

Beispiel, Kl. 5: $x - 50 = 100$

Mögliche Überlegungen	Mögliche schriftliche Darstellung
Wenn ich von einer Zahl 50 abziehe, erhalte ich 100. Wenn ich zu 100 wieder 50 hinzuzähle, erhalte ich die ursprüngliche Zahl.	$x - 50 = 100$, also $x = 100 + 50$ $x = 150$

Mit Überlegungen zur Umkehroperation bzw. Umkehrfunktion können auch quadratische Gleichungen gelöst werden. Dabei sollte der Unterschied zwischen dem eindeutigen Wurzelziehen und der Existenz zweier Lösungen der quadratischen Gleichung beachtet werden. So ist z. B. $\sqrt{36} = 6$ und nicht auch -6, während die Gleichung $x^2 = 36$ die Lösungen 6 und -6 hat.

Beispiel, Kl. 9: $x^2 = 7$

Mögliche Überlegungen	Mögliche schriftliche Darstellung
Das Wurzelziehen ist die Umkehrung des Quadrierens, also ist eine Lösung $x = \sqrt{7}$. Da auch gilt $(-\sqrt{7}) \cdot (-\sqrt{7}) = (\sqrt{7})^2 = 7$, ist auch $-\sqrt{7}$ eine Lösung.	$x^2 = 7$ $x_1 = \sqrt{7}$ $x_2 = -\sqrt{7}$

5. *Vergleichen von Zählern und Nennern bei Verhältnisgleichungen*

Viele Verhältnisgleichungen, die in Schullehrbüchern, beim Lösen von Sachaufgaben oder in anderen Fächern (Physikunterricht) auftreten, besitzen ganzzahlige Lösungen, die sehr leicht durch multiplikativen Vergleich der Zähler bzw. der Nenner gefunden werden können. Auch ein Kürzen hilft oft.

Beispiel, Kl. 8: $\frac{6}{x} = \frac{18}{3}$

Mögliche Überlegungen	Mögliche schriftliche Darstellung
I: Zähler vergleichen: Es ist $6 \cdot 3 = 18$, also ist auch $x \cdot 3 = 3$, also $x = 1$. II: Zähler und Nenner vergleichen: Es ist $3 \cdot 6 = 18$, also ist auch $x \cdot 6 = 6$, also $x = 1$. III: rechten Bruch kürzen ergibt $\frac{6}{1}$, also ist $x = 1$	$\cdot 3$ $\frac{6}{x} = \frac{18}{3}$ $\cdot 6$ $x = 1$ $\frac{6}{x} = \frac{18}{3} = \frac{6}{1}$ also $x = 1$

6. *Verwenden von Definitionen und Sätzen*

Alle quadratischen Gleichungen der Form $a(x – b)(x – c) = 0$ können mithilfe des Satzes gelöst werden, dass ein Produkt dann gleich Null ist, wenn ein Faktor Null ist.

Auch alle quadratischen Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$ können durch Ausklammern von x auf die obige Form zurückgeführt und damit mit dem Satz gelöst werden.

Beispiel, Kl. 9*:* $2x(x − 5) = 0$

Mögliche Überlegungen	Mögliche schriftliche Darstellung
Das Produkt der Faktoren x und x − 5 ist Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist, also wenn x = 0 oder wenn x = 5	$2x(x − 5) = 0$ $2x_1 = 0$ $x_2 − 5 = 0$ $x_1 = 0$ $x_2 = 5$

Für das Lösen von Exponential- und Logarithmusgleichungen gibt es keine allgemeinen schriftlichen Lösungsverfahren. Ohne Rechenhilfsmittel können diese Gleichungen durch Anwendung von Definitionen nur inhaltlich gelöst werden, wenn dies auf Grund einfacher Zahlen möglich ist.

Beispiel, Kl. 10 : $3^x = 81$

Mögliche Überlegungen	Mögliche schriftliche Darstellung
Ich muss 81 als Potenz mit der Basis 3 schreiben und probiere, ob ich auf 81 komme. $3 \cdot 3 = 9$; $9 \cdot 3 = 27$; $27 \cdot 3 = 81$ also $3^4 = 81$, also $x = 4$	$3^x = 81$ $3^4 = 81$ $x = 4$

7. *Grafisches Lösen von Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen*

Mit dieser Art des grafischen Lösens ist das Transformieren des Problems in die Sprache der Funktionen gemeint. So können etwa die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ als Schnittpunkte der Graphen der Funktionen $y_1 = x^2$ und $y_2 = – px – q$ bestimmt werden. Diese Methode sollte nur zur Festigung des Könnens im Arbeiten mit Funktionen verwendet werden, da sie keine rationelle Form des Lösens darstellt.

5.2 Sicheres Wissen und Können

Hinweis: Mit „lösen“ ist immer inhaltliches Lösen gemeint.

Klasse 6:

Die Schülerinnen und Schüler

- können lineare Gleichungen mit einer Variablen, die nur einmal auf der linken Seite der Gleichung auftritt, inhaltlich durch Zerlegen der Zahl auf der rechten Seite in eine Summe, eine Differenz oder ein Produkt lösen,
- können lineare Gleichungen mit einer Variablen auf der linken Seite, in der Differenzen oder Quotienten auftreten, durch Anwenden der Umkehroperation lösen,
- können einfache lineare Gleichungen der genannten Form durch Veranschaulichung auf einem Zahlenstrahl lösen,
- können die Lösungen folgender Gleichungs- und Ungleichungstypen durch systematisches Probieren finden: lineare Ungleichungen mit einer Variablen (auf der linken Seite), quadratische Gleichungen mit natürlichen Zahlen als Lösungen, lineare Gleichungen mit einer Variablen, die auf beiden Seiten auftritt.

Klasse 10, Regionale Schule und Gymnasium

Die Schülerinnen und Schüler

- können lineare Gleichungen mit einer Variablen durch Zerlegen von Zahlen oder Termen in Summen, Differenzen oder Produkte lösen, wenn dies sinnvoll möglich ist,
- können Verhältnisgleichungen durch Vergleichen von Zählern bzw. Nennern lösen, wenn dies sinnvoll möglich ist,
- können folgende Typen quadratischer Gleichungen mit den angegebenen Verfahren lösen

(1)	$x^2 = a$	Betrachtungen zur Umkehroperation oder zum Quadrat eine Zahl
(2)	$(x + a)^2 = b$	Betrachtungen wie (1), Rückführen durch formales Umformen
(3)	$x(x - a) = 0$	Anwenden des Satzes über ein Produkt, mit dem Wert Null
(4)	$x^2 + ax = 0$	Rückführung auf (3) durch Ausklammern
(5)	$(x - a)(x - b) = 0$	Überlegungen wie (3)

Klasse 10, nur Gymnasium:

Die Schülerinnen und Schüler

- können Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen durch Veranschaulichung auf der Zahlengeraden lösen,
- können Exponential- und Logarithmusgleichungen durch Anwenden der Umkehroperation bzw. der Definition der Rechoperation lösen, wenn dies im Kopf möglich ist.

5.3 *Aufgaben*

Klasse 6:

1. Löse folgende Gleichungen durch Zerlegen von Zahlen in eine Summe, eine Differenz oder ein Produkt.

a) $3 \cdot x = 15$ b) $x \cdot 9 = 27$ c) $x \cdot x = 25$

d) $3 \cdot x + 5 = 11$ e) $10 - x = 2$ f) $3 \cdot (z + 2) = 15$

g) $39 - 2 \cdot x = 31$ h) $10 \cdot (x + 5) = 80$ i) $28 + 8 \cdot x = 60$

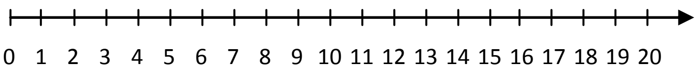
2. Lösen folgende Gleichungen durch Umkehren der Rechenoperation.

a) $x - 50 = 100$ b) $y : 5 = 9$ c) $z + 20 = 345$

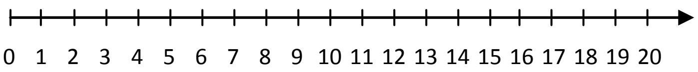
d) $x \cdot 10 = 300$ e) $\frac{a}{9} = 8$ f) $2 \cdot x - 15 = 25$

3. Löse folgende Gleichungen und Ungleichungen durch Veranschaulichung auf dem gegebenen Zahlenstrahl.

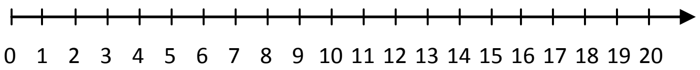
a) $15 - a = 7$



b) $b < 9$



c) $12 + c = 19$



4. Löse folgende Gleichungen bzw. Ungleichungen durch systematisches Probieren im Bereich der natürlichen Zahlen.

a) $6 \cdot x = 40 - 2 \cdot x$ b) $x \cdot x = x + x$ c) $5 \cdot x + 2 < 25$

Klasse 10, Regionale Schule, Gymnasium

5. Löse die folgenden linearen Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen.

a) $(x + 5) \cdot 7 = 70$ b) $8(2x + 6) = 64$ c) $50 - 10x = 0$

d) $4x + 3 = 15$ e) $95 - 5x = 80$ f) $11(x + 3) = 88$

6. Löse die Verhältnisgleichungen durch inhaltliche Überlegungen.

a) $\frac{6}{x} = \frac{18}{3}$ b) $\frac{x}{12} = \frac{5}{15}$ c) $\frac{12}{5} = \frac{6}{x}$

d) $\frac{24}{x+7}=\frac{6}{5}$ e) $\frac{9}{x}=\frac{3}{4}$ f) $\frac{16}{x+4}=8$

7. Löse die quadratischen Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen.

a) $x^2 = 36$ b) $x^2 = \frac{1}{4}$ c) $x^2 = 0{,}01$

d) $4x^2 = 100$ e) $(x-1)^2 = 25$ f) $(x+2)^2 = 1600$

g) $x^2 = 2$ h) $x^2 = 7$ i) $x^2 = 1{,}6$

8. Löse die quadratischen Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen.

a) $x(x-5) = 0$ c) $(x-1)(x+2) = 0$ d) $x^2 - 7x = 0$

e) $(x+7)(x+5) = 0$ f) $x^2 + 2x = 0$ g) $(x+3)x = 0$

9. Löse die quadratischen Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen.

a) $x^2 - 100 = 0$ b) $(x+13)(13-x) = 0$ c) $x^2 - 5 = 44$

d) $8x^2 = x$ e) $2x^2 = 128$ f) $x^2 - 5x = 0$

Klasse 10, nur Gymnasium

10. Löse die folgenden Ungleichungen durch Veranschaulichung auf einer Zahlenrade.

a) $|x| = 3$ b) $|x| > 4$ c) $|x-2| = 3$

d) $|x-1| > 2$ e) $|x-1| < 2$ f) $|x-5| \geq 4$

11. Löse die folgenden Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen.

a) $2^x = 8$ b) $\log_x 81 = 2$ c) $3^x = \frac{1}{3}$

d) $x = \log_2 32$ e) $x = \log_{10} 100$ f) $2^{x-1} = 8$

6 Zum Umformen und Umstellen von Gleichungen und Ungleichungen

6.1 Ausgewählte Probleme

Zu den Begriffen Umformen, Umstellen und Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

Unter dem *Umformen* von Gleichungen bzw. Ungleichungen versteht man das Anwenden von Umformungsregeln, bei denen sich die Lösungsmenge der Gleichung bzw. Ungleichung nicht ändert. Das Umformen kann aus verschiedenen Gründen erfolgen.

- Es soll eine Gleichung in eine bestimmte Form überführt werden

  Beispiel: Die Gleichung $5x^2 = 35x - 10$ soll in die Normalform der quadratischen Gleichung überführt werden.

- Es soll eine Gleichung, zum Beispiel eine Formel, nach einer Variablen umgestellt werden.

  Beispiel: Die Flächeninhaltsformel $A = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h$ soll nach a umgestellt werden.

- Es soll eine Gleichung gelöst werden.

  Beispiel: Es ist die Gleichung $2x - 3 = 5x - 7$ zu lösen.

Das Umformen von Gleichungen ist also umfassender als das Umstellen bzw. das Lösen einer Gleichung. Umstellen bzw. (formales) Lösen von Gleichungen und Ungleichungen bedeutet jedoch immer ein zielgerichtetes Umformen.

Zum Umstellen von Gleichungen

Das Umstellen einer Gleichung nach einer Variablen (auch als „Auflösen der Gleichung nach der Variablen“ bezeichnet) hat sowohl im Mathematikunterricht als auch vor allem in den nachfolgenden Bildungsbereichen einen weit höheren Stellenwert als das Lösen einer Gleichung. Insbesondere müssen oft Formeln oder andere Größengleichungen[3] nach einer Variablen umgestellt werden. Das Umstellen von Formeln[4] oder andere Größengleichungen sollte deshalb im Mathematikunterricht weit stärker als bisher berücksichtigt werden. Es ist dabei allerdings zu beachten, dass das Umstellen einer Gleichung oft höhere Anforderungen stellt als das Lösen von Gleichungen, da mehrere Variable zu betrachten und unterschiedlich zu behandeln sind.

Umformungsregeln für Gleichungen

Die Umformungsregeln sollten unter Verwendung eines Waagemodells erarbeitet werden, da diese inhaltliche Interpretation einer Gleichung für das Lösen von Gleichungen ausreichend ist und mit dem Modell ein wesentlicher Aspekt (auf beiden Seiten das Gleiche machen) veranschaulicht werden kann. Allerdings muss eine Beschränkung auf positive Zahlen erfolgen.

Die Umformungsregeln sollten für Terme und nicht extra für Zahlen formuliert werden, da dies mathematisch nicht erforderlich ist und beim Lösen von Gleichungen und insbesondere beim Umstellen von Gleichungen oft mit Termen operiert werden muss.

---

[3] Eine Größengleichung ist eine Gleichung, in der Variable für Größen auftreten, wie z. B. bei allen Umfangs-, Flächeninhalts- und Rauminhaltsformel sowie alle physikalischen Formeln. Größengleichungen sind auch Gleichungen, die oft mit geometrischen Sätzen verbunden sind, wie die Innenwinkelsumme im Dreieck, Gleichungen zur Satzgruppe des Pythagoras, die Strahlensätze oder die trigonometrischen Beziehungen in Dreiecken.

[4] Als Beispiele für Formeln sollten nur solche verwendet werden, die in Unterrichtsfächern der Sekundarstufe I vorkommen können.

Es muss den Schülern bewusst werden, dass die Umformungsregeln für beliebige Gleichungen gelten. Deshalb sollten auch andere Gleichungstypen in die Übungen einbezogen werden.

Um das Finden und Verstehen der Umformungsregeln noch deutlicher vom Lösen von Gleichungen abzuheben, sollte bei den Übungen zu den Umformungsregeln auch von Gleichungen in einfachen Formen ausgegangen werden, die dann schrittweise zu komplizierteren Gleichungen umgeformt werden. Dabei können dann auch andere Gleichungstypen entstehen.

Beispiel: Gib eine Gleichung an, aus der die Gleichung $2x = -1$ entstanden sein könnte.

Zum Grundbereich einer Gleichung oder Ungleichung

Betrachtungen zum *Grundbereich* sind bei einigen Anwendungen wichtig, um die erhaltenen Lösungen auf Brauchbarkeit zu untersuchen. Dies ergibt sich aber meist aus dem vorliegenden Sachverhalt. Umfangreiche Übungen zum Lösen von Gleichungen in verschiedenen Grundbereichen werden nicht für erforderlich gehalten. Auch eine Angabe des Grundbereiches bei jeder Gleichung ist nicht notwendig, es reicht ein genereller Hinweis, dass immer der umfassende Grundbereich gemeint ist. Wichtig ist jedoch, die Schüler daran zu gewöhnen, zu Beginn der Lösung einer Gleichung oder Ungleichung immer mögliche Einschränkungen des Grundbereiches zu überprüfen, die sich aus Einschränkungen bei Rechenoperationen (Nenner verschieden Null, Radikand größer Null) ergeben. Dies ist insbesondere für die Anwendung der Umformungsregeln von Bedeutung.

6.2 Sicheres Wissen und Können

Klasse 8:

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen die Schreibweise für das Umformen von Gleichungen und Ungleichungen
- kennen folgende Umformungsregeln für Gleichungen bzw. Ungleichungen und wissen, dass sich bei ihrer Anwendung die Lösungsmenge nicht ändert:
    - Die Seiten einer Gleichung können vertauscht werden.
    - Auf beiden Seiten einer Gleichung oder Ungleichung kann derselbe Term addiert oder subtrahiert werden.
    - Beide Seiten einer Gleichung können mit demselben Term multipliziert bzw. durch denselben Term dividiert werden, wenn er nicht den Wert Null annehmen kann.
    - Beide Seiten einer Ungleichung können mit derselben Zahl ungleich Null multipliziert bzw. durch dieselbe Zahl ungleich Null dividiert werden. Wenn die Zahl negativ ist, kehrt sich das Relationszeichen um.
- können einen vorgenommenen Umformungsschritt erkennen bei
    - linearen oder quadratischen Gleichungen mit einer Variablen,
    - Formeln oder Größengleichungen,
- können eine äquivalente Gleichung durch einen Umformungsschritt bilden zu
    - linearen oder quadratischen Gleichungen mit einer Variablen,
    - einfachen Formeln bzw. Größengleichungen,
    - linearen Ungleichungen mit einer Variablen
- können eine Formel oder Größengleichung in einem Schritt nach einer Größe umstellen,
- können entscheiden, ob eine Umformung einer linearen oder quadratischen Gleichung, einer Formel oder einer Ungleichung richtig vorgenommen wurde.

Klasse 10, Gymnasium:

Die Schülerinnen und Schüler

- wissen, dass sich beim Quadrieren und Wurzelziehen die Lösungsmenge einer Gleichung ändern kann.

6.3 Aufgaben

Klasse 8

Hinweis:
Wenn kein Grundbereich angegeben ist, ist immer der Bereich der rationalen Zahlen gemeint.

1. Die folgenden Paare von Gleichungen haben dieselbe Lösungsmenge. Gib die Umformung an, mit der die erste Gleichung in die zweite überführt werden kann.

a) $\frac{1}{4}x = 2 \mid$
$\frac{1}{4}x + 2 = 4$

b) $x + 3 = 5 \mid$
$10x + 30 = 50$

c) $5a = a + 1 \mid$
$4a = 1$

d) $x + 1 = 2x \mid$
$2x + 2 = 4x$

e) $\frac{k}{2} = 2 + k \mid$
$k = 4 + 2k$

f) $3s - 6 = 9 \mid$
$s - 2 = 3$

2. Gib eine Umformung an, die die erste Gleichung in die zweite überführt. Alle vorkommenden Variablen nehmen nur positive Werte an.

a) $V = \frac{1}{3}A \cdot h \mid$
$3V = A \cdot h$

b) $A = \frac{1}{2}a \cdot b \mid$
$\frac{A}{b} = \frac{1}{2}a$

c) $u = 2\pi \cdot r \mid$
$\frac{u}{\pi} = 2r$

d) $u = a + b + c \mid$
$u - a = b + c$

e) $\rho = \frac{m}{V} \mid$
$\frac{\rho}{m} = \frac{1}{V}$

f) $s = v \cdot t \mid$
$\frac{s}{v} = t$

3. Finde zwei Gleichungen mit derselben Lösungsmenge, indem du

(1) auf beiden Seiten der Gleichung eine Zahl addierst oder

(2) beide Seiten der Gleichung mit einer Zahl multiplizierst.

Notiere deine jeweilige Umformung.

a) $4x = 12$ b) $\frac{1}{2}a = 5$ c) $x + 2 = 7$

d) $2b + 1 = b$ e) $k + 3 = 4k$ f) $3k = 1 + k$

4. Finde jeweils zwei weitere Gleichungen mit derselben Lösungsmenge, indem du eine Umformung vornimmst. Notiere deine Umformungen.

a) $8x = 12$ b) $3k = 9$ c) $2x + 3 = 0$

d) $5x - 2 = 3x$ e) $3k + 8 = 12k$ f) $-2 + 5a = 2a$

5. Nimm folgende Umformungen vor.

a) $2x + 3 = 5 \quad | -3$ b) $3x - 5 = -2 \quad | +5$ c) $9 = \frac{1}{2}x - 2 \quad | +2$

d) $-\frac{1}{4}x = 9 \quad | \cdot (-4)$ e) $\frac{2}{x} = 5 \,|\cdot x;\; x \neq 0$ f) $5 = \frac{2}{x} \quad | \cdot x,\; x \neq 0$

6. Nimm folgende Umformungen vor.

a) $4 < 10 \quad | : 2$ b) $4 < 10 \quad | \cdot 2$ c) $4 < 10 \quad | : (-2)$

d) $4 < 10 \quad | \cdot (-2)$ e) $2x < 5 \quad | : 2$ f) $-2x < 5 \quad | : (-2)$

7. Entscheide, ob die folgenden Umformungen richtig vorgenommen wurden. Korrigiere, wenn nötig.

a) $x^2 + a^2 + 3 = 10 \quad | -3$
$x^2 + a^2 = 7$

b) $-4x = x + 1 \quad | +4$
$x = x + 5$

c) $-2a = 6b \quad | \cdot (-2)$
$a = 3b$

d) $-\frac{a}{2} = 3s \quad | \cdot (-2)$
$a = -6s$

e) $7k - 3m = 5k + 2m \quad | -2m$
$7k - 5m = 5k$

f) $b^2 = -a^2 + c^2 \quad | -a^2$
$b^2 + a^2 = c^2$

8. Finde den Fehler.

a) $4x > 3$
$3 > 4x$

b) $3x > -9 \quad | :3$
$x < -3$

c) $-20 > -5x \quad | : (-5)$
$-4 < x$

d) $10 > -5x \quad | : (-5)$
$-2 > x$

e) $8 > -\frac{x}{2} \quad | \cdot (-2)$
$16 < x$

f) $\frac{1}{3} > \frac{x}{2} \quad | \cdot 2$
$\frac{1}{3} > x$

9. Nimm folgende Umformungen vor. Alle vorkommenden Variablen nehmen nur positive Werte an.

a) $\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad | -\alpha$ b) $\frac{b}{u} = \frac{\alpha}{360°} \quad | \cdot u$

c) $\frac{b}{u} = \frac{\alpha}{360°} \quad | \cdot 360°$ d) $\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad | \cdot c$

e) $\frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CB'}} \quad | \cdot \overline{CB'}$ f) $\frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} \cdot \overline{CB'} = \overline{CB} \quad | \cdot \overline{CA'}$

10. Ergänze! Alle vorkommenden Variablen nehmen nur positive Werte an.

a) $v = \frac{s}{t} \quad |\cdot t$

$=$

b) $v \cdot t = s \quad |:v$

$=$

c) $A = \frac{1}{2}(a+c)\cdot h \quad | \cdot 2$

$=$

d) $2A = (a+c)\cdot h \quad |:(a+c$

$=$

e) $s = \frac{a}{2}\cdot t^2 \quad |$

$2s = a\cdot t^2$

f) $c^2 = a^2 + b^2 \quad |$

$c = \sqrt{a^2+b^2}$

g) $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad |$

$\frac{a}{b}\cdot \sin\beta = \sin\alpha$

i) $\frac{b}{c} = \cos\alpha \quad |\cdot c$

$=$

i) $b = c\cdot\cos\alpha \quad |:\cos\alpha$

$=$

11. Stelle nach der in Klammern stehenden Größe um. Alle vorkommenden Variablen nehmen nur positive Werte an.

a) $A = a \cdot b$ (b)

b) $V = a \cdot b \cdot c$ (c)

c) $V = \frac{1}{3}a^2\cdot h$ (h)

d) $v = \frac{s}{t}$ (s)

e) $F = m \cdot a$ (m)

f) $R = \frac{U}{I}$ (U)

12. Entscheide, ob folgende Umformungen richtig oder falsch sind. Alle vorkommenden Variablen nehmen nur positive Werte an.

a) $A = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h \rightarrow h = \frac{A}{2\cdot g}$

b) $u = a+b+c \rightarrow b = u - a + c$

c) $h^2 = p\cdot q \rightarrow q = \frac{h^2}{p}$

d) $u = 2(a+b) \rightarrow a = \frac{u}{2} - b$

e) $A = \frac{1}{2}ef \rightarrow e = 2Af$

f) $e^2 = 4a^2 - f^2 \rightarrow a^2 = \frac{1}{4}e^2 + f^2$

Klasse 10:

13. Haben folgende Gleichungen im Bereich der reellen Zahlen dieselbe Lösungsmenge?

a) $x^2 = 1$ und $x = 1$

b) $\sqrt{x^2} = 2$ und $x = 2$

c) $\sqrt{x} = 3$ und $x = 9$

d) $\sqrt{x^2+8} = 3$ und $x + 2 = 3$

e) $a^2 + 4 = 25$ und $a + 2 = 5$

f) $\sqrt{2x} = 2$ $(x > 0)$ und $2x = 4$

7 Zum Lösen von linearen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen

7.1 Ausgewählte Probleme

Zum Begriff der linearen Gleichung bzw. Ungleichung

Der Begriff der linearen Gleichung und analog auch der linearen Ungleichung wird in der Literatur nicht einheitlich verwendet. Es gibt zwei verschiedene Begriffsverständnisse:

(1) Linear heißt, dass die Variable nur mit dem Exponenten 1 vorkommt. Danach ist die Gleichung $\frac{a}{x} = b$, $x \in R$, $x \neq 0$ eine nichtlineare Gleichung, da der Exponent -1 auftritt.

(2) Jede Gleichung, die sich durch äquivalente Umformungen in die Form $ax + b = 0$ überführen lässt, ist eine lineare Gleichung. Damit wäre die unter (1) genannte Gleichung linear.

Für die Auffassung (1) spricht u. a. , dass die Funktion $f(x) = \frac{a}{x}$ ebenfalls als nichtlinear bezeichnet wird und bei linearen Gleichungssystemen Terme der Form $\frac{a}{x}$ nicht auftreten. Die Definition (1) sollte deshalb verwendet werden.

Zum inhaltlichen und formalen Lösen linearer Gleichungen und Ungleichungen

Generell sollte auch für lineare Gleichungen der Grundsatz gelten: „Versuche jede Gleichung zuerst inhaltlich zu lösen.“ Bis zur Behandlung der Umformungsregeln in Klasse 7/8 ist dies auch die einzige Möglichkeit für die Schüler. Nach der Behandlung der Umformungsregeln müssen die Schüler mit dem formalen Lösen linearer Gleichungen als einem zentralen Element der 2. Phase der Entwicklung ihres algebraischen Könnens (vgl. S. 7) vertraut gemacht werden. Dazu müssen im Wesentlichen die Teilhandlungen "Ordnen" und "Isolieren der Variable" ausgebildet werden. Beim Lösen sind außerdem bei bestimmten Gleichungen noch die Termumformungen „Zusammenfassen“ oder „Klammern auflösen“ erforderlich.

Das *Isolieren* einer Variablen in einer linearen Gleichung als letzter Schritt des Lösen einer Gleichung kann wie in der bisherigen Weise durch inhaltliche Überlegungen vollzogen werden, insbesondere durch Anwenden des Verfahrens der Umkehroperation (s. S. 34). Die Notwendigkeit formaler Vorgehensweisen zum Lösen von Gleichungen kann den Schülern deshalb für diesen Aufgabentyp nicht verdeutlicht werden, deshalb sollte man sich nicht zu lange bei solchen Aufgaben aufhalten, wenn in Kl. 8 das formale Lösen erarbeitet werden soll.

Demgegenüber lässt sich das Isolieren der Variablen bei linearen Ungleichungen nicht so einfach durch inhaltliche Überlegungen durchführen (Bsp.: $3x < 7$). Hier ist die Verwendung eines formalen Vorgehens also viel nahe liegender.

Erst wenn bei linearen Gleichungen die Unbekannte auf beiden Seiten auftritt, versagen meist inhaltliche Überlegungen, und der Nutzen formaler Verfahren wird klar erkennbar. Deshalb ist der *Übergang zum Ordnen* der Variablen der entscheidende Schritt in der Entwicklung des Verständnisses formaler Lösungsverfahren.

Zur Rolle der Probe

Wie bei jeder Handlung müssen die Schüler auch beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen an eine Kontrolle ihrer Handlungen gewöhnt werden. In der Algebra wird für eine bestimmte Art der Ergebniskontrolle der Begriff Probe verwendet. Damit ist gemeint, dass die ermittelten Ergebnisse in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden. Bei linearen Ungleichungen ist eine Probe durch Einsetzen einzelner Werte möglich. Es sollte dabei durchaus verdeutlicht werden, dass die Probe aus rein mathematischer Sicht kein Bestandteil des formalen Verfahrens zum Lösen einer Gleichung ist, solange nur äquivalente Umformungen vorgenommen wurden.

Neben der Probe als Ergebniskontrolle sollten die Schüler auch auf andere Formen der Kontrolle orientiert werden. Geeignet ist ebenfalls ein nochmaliges Nachvollziehen der Umformungsschritte am besten in umgekehrter Reihenfolge.

Für die äußere Form der Probe sind verschiedene Darstellungen möglich, die alle Vor- und Nachteile haben. Sinnvoll ist auch der Einsatz eines Taschenrechners, wodurch der Schreibaufwand reduziert werden kann.

Zur Entwicklung des Gleichungs- und Variablenbegriffs bei der Behandlung von linearen Gleichungssystemen

Es sollte in Kl. 9 nicht sofort mit der Behandlung von Gleichungssystemen bzw. der grafischen Ermittlung des Schnittpunktes der Graphen zweier linearer Funktionen begonnen, sondern zunächst Gleichungen mit zwei Variablen betrachtet werden. Damit können wichtige Beiträge zur Weiterentwicklung des Gleichungs- und Variablenbegriffs, zum Verständnis der Beziehungen von Algebra und Analysis und damit zum Verständnis des graphischen Lösens von Gleichungssystemen geleistet werden. Durch die Behandlung von Gleichungen mit zwei Variablen wird der Gleichungsbegriff verallgemeinert und vertieft.
Anknüpfend an die Lösung von Gleichungen mit zwei Unbekannten im Bereich der natürlichen Zahlen in Kl. 5 sollen die Schüler erkennen, dass eine Gleichung nicht nur eine Zahl als Lösung, sondern auch Paare von Zahlen als Lösung haben kann. Damit verbunden wird die Vorstellung von einer Variablen in einer Gleichung als zwar unbekannte aber feste Zahl erweitert und der Aspekt der Variabilität auch auf Variable in Gleichungen ausgedehnt. Die Gleichungen sollten deshalb auch nicht als Gleichung mit zwei Unbekannten, sondern als Gleichung mit zwei Variablen bezeichnet werden.

In einer linearen Gleichung mit zwei Variablen sind beide Variablen gleichberechtigt. In einer Funktionsgleichung dagegen steht auf der linken Seite die Variable für die Funktionswerte und rechts steht die Variable für die Argumente. Diese gerichtete Betrachtung kann durch die Sprechweisen „unabhängige Variable“ bzw. „frei wählbare Variable“ verdeutlicht werden. Dieser Unterschied tritt allerdings innermathematisch kaum in Erscheinung, da lineare Funktionen umkehrbar eindeutig sind.

Zur Rolle des graphischen Lösens von Gleichungssystemen

In Weiterführung der Vorgehensweise zur graphischen bzw. rechnerischen Bestimmung von Nullstellen kann erneut ein wesentlicher Beitrag zur Verständnis der Beziehungen von algebraischen und analytischen Betrachtungen geleistet und das *Transformationsprinzip* (Übersetzen eines Problems in die Sprache einer anderen Teildisziplin) verdeutlicht werden. In diesem Fall wird von einem algebraischen Problem ausgegangen und in die Analysis („Sprache der Funktionen“) übersetzt. Diese verschiedenen Sichtweisen sollten gründlich diskutiert und auseinander gehalten werden. Dabei können folgende Aspekte beachtet werden:

Die Interpretation der beiden Gleichungen eines linearen Gleichungssystems als Funktionsgleichungen und die damit verbundene graphische Lösung stellt eine Art der inhaltlichen Betrachtung des Problems dar. Damit können weiterhin die Kenntnisse der Schüler zu linearen Funktionen gefestigt werden.

Zu den rechnerischen Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems ist ein Beispiel für die Lösung eines Problems durch Zerlegen in Teilprobleme und Bilden des Durchschnitts der Lösungen der Teilprobleme (*Zerlegungsprinzip*). Diese heuristische Vorgehensweise trat bereits bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben nach der Methode der Bestimmungslinien auf und sollte als Verfahren den Schülern bewusst gemacht werden, wobei ein Hinweis auf das Lösen von Konstruktionsaufgaben sinnvoll ist.

Die verschiedenen Verfahren zur rechnerischen Lösung eines linearen Gleichungssystems sollten in folgender Weise in die bisherigen Kenntnisse der Schüler zum Lösen von Gleichungen bzw. zum graphischen Lösen eingebettet werden, damit keine neuen Verfahren angeeignet werden müssen.

- Das Gleichsetzungsverfahren lässt sich als rechnerische Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden auffassen und somit in die Kenntnisse zum graphischen Lösen einordnen.
- Das Einsetzungsverfahren entspricht der Ersetzung einer Variablen durch einen Term. Dieses Verfahren wurde implizit bisher bereits häufig bei der Lösung von Sachaufgaben mit mehreren Variablen angewandt. In Kl. 8 wurde darauf orientiert, möglichst wenige Variable zu verwenden, wozu die Erfassung der gegebenen und gesuchten Größen in Tabellen geeignet ist.
- Das Additions- bzw. Subtraktionsverfahren lässt sich als Anwendung einer Umformungsregel für Gleichungen (auf beiden Seiten denselben Term addieren oder subtrahieren) auffassen.

Von den möglichen Verfahren zum Lösen von Gleichungssystemen sollte das Einsetzungsverfahren im Mittelpunkt stehen. Es ist immer anwendbar und ist auch zum Lösen einiger nichtlinearer Gleichungen geeignet. Das Gleichsetzungsverfahren ist ein Spezialfall des Einsetzungsverfahrens und das Additionsverfahren ist nur bei bestimmten Gleichungssystemen günstig, worauf am Gymnasium eingegangen werden sollte.

Zur Angabe von Lösungen bei Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen

Die Lösung bzw. Lösungen von Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen sollten in der Regel in der Form $x = \ldots$; $x < \ldots$ bzw. $x = \ldots \;\; y = \ldots$ angegeben werden.

Die Angabe einer Lösungsmenge sollte nur sehr selten erfolgen, um die Schüler an die Mengenschreibweise mit geschweiften Klammern zu erinnern (Kl. 6 Teilbarkeit). Lösungsmengen sollten nur angegeben werden, wenn mehrere diskrete Lösungen vorhanden sind. Es ist allerdings auch eine Aufzählung möglich, z.B. $x = 2; 3; 4; 5$.

In der Regionalen Schule sollte im sicheren Wissen und Können die Mengenschreibweise nicht verwendet werden. Ist die Lösungsmenge leer, sollte dies durch die Formulierung „nicht lösbar“ oder „keine Lösung“ zum Ausdruck gebracht werden.

Die Formulierung "Löse die Gleichung …“ bzw. „Löse das Gleichungssystem …“ sollte auch dann verwendet wird, wenn es keine Lösung gibt.

7.2 Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler

- wissen, dass man alle Lösungen einer Gleichung oder Ungleichung als Lösungsmenge bezeichnet,
- können lineare Gleichungen und Ungleichungen in verschiedenen Grundbereichen lösen,
- können die Variable in einer linearen Gleichung oder Ungleichung in einem Schritt isolieren, wenn dies möglich ist,
- können lineare Gleichungen, bei denen die Variable auf beiden Seiten auftritt, lösen, wenn dies in zwei bis drei Schritten möglich ist,
- können eine Probe zu einer linearen Gleichung und gegebener Lösung durchführen,
- können einfache Sachverhalte durch eine Gleichung mit einer Variablen beschreiben,
- können zu einer Gleichung mit zwei Variablen mögliche Lösungen als Zahlenpaare in verschiedenen Grundbereichen angeben,
- wissen, dass die Lösungsmenge eines Gleichungssystems aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen aus allen Paaren $(x; y)$ reeller Zahlen besteht, die sowohl die Gleichung (I) als auch die Gleichung (II) erfüllen und können die Lösung als geordnetes Paar oder in der Form $x = \ldots$ und $y = \ldots$ angeben,
- können die Lösung linearer Gleichungssysteme mit zwei Variablen mithilfe der Graphen der betreffenden linearen Funktionen ermitteln, wenn die Graphen gegeben sind,
- können bei gegebenen Graphen Betrachtungen zur Anzahl der Lösungen von Gleichungssystemen durchführen, indem sie ihre Kenntnisse zum grafischen Lösen verwenden,
- können ein rechnerisches Lösungsverfahren zum Lösen sehr einfacher linearer Gleichungssysteme anwenden,
- können einfache Sachverhalte durch ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen beschreiben.

7.3 Aufgaben

1. Gib eine Umformung an, die du ausführen musst, um die Gleichung in einem Schritt zu lösen.

a) $x - 25 = 55$ b) $48 = -1{,}2 + x$ c) $x - 2 = -6$

d) $1{,}3 + x = 27$ e) $x + 1{,}8 = 3{,}3$ f) $14{,}7 = 13 + x$

2. Gib eine Umformung an, die du ausführen musst, um die Gleichung in einem Schritt zu lösen.

a) $2 \cdot x = 51$ b) $\frac{x}{7} = 4$ c) $3{,}8 = 12 \cdot x$

d) $x : 13 = 5$ e) $x \cdot 9 = -55$ f) $7 = x : 3{,}6$

g) $\frac{x}{5} = \frac{6}{8}$ h) $\frac{1}{3} = \frac{x}{1{,}2}$ h) $1 : 25 = x : 22{,}5$

3. Löse die Gleichungen, indem du geeignete Umformungen vornimmst.

a) $8x + 24 = 56$ b) $16 + 12x = 64 - 4x$ c) $9x + 5 = 3x - 1$

d) $5x + 2 = 4x + 9$ e) $8x - 10 = 20 - 7x$ f) $9x - 27 = 13x + 1$

4. Überprüfe mit einer Probe, ob die gegebene Zahl eine Lösung der Gleichung ist.

a) $48 = -12 + x$ $x = 60$ b) $8x + 3 = 3x - 4$ $x = -2$

c) $\frac{9}{x} = 5$ $x = 4$ d) $2x - 4 = 6x$ $x = 1$

e) $3{,}5 + 4x = 2x - 2{,}5$ $x = -3$ f) $\frac{x}{70} = \frac{2}{35}$ $x = 8$

5. Gib eine Umformung an, die du ausführen musst, um die Ungleichung in einem Schritt zu lösen.

a) $x - 5 < 2{,}5$ b) $48 > -3{,}2 + x$ c) $x - 4 < -12$

d) $4 \cdot x < 56$ e) $36 > 3{,}6 \cdot x$ f) $x \cdot 4{,}6 > -5{,}4$

g) $0{,}3 + x < 4{,}7$ h) $x + 8 > 3$ i) $27 < 2{,}3 + x$

j) $x : 11 > 3$ k) $\frac{x}{7} < 0{,}5$ l) $8 < x : 3{,}7$

6. Gib alle natürlichen Zahlen an, die Lösungen der Ungleichung sind.

a) $2x < 5$ b) $x + 6 > 12$ c) $-3x < -9$

d) $x + 1{,}8 < 3{,}3$ e) $x : 3 > 5$ f) $\frac{x}{5} < \frac{9}{4}$

7. Gib jeweils eine Gleichung mit einer Variablen an, die den Sachverhalt beschreibt.
Gib die Bedeutung der Variablen an.

a) Lara kauft in einer Bäckerei 12 Knusperstangen. Sie bezahlt 8,40 €.

b) Für eine Aufführung in der Schulsporthalle sollen 266 Stühle in 14 gleich lange Reihen aufgestellt werden.

c) Robert denkt sich eine Zahl aus. Wenn er diese verdoppelt und dann um 13 vermehrt, erhält er 41.

8. Gib für die Gleichungen mit zwei Variablen jeweils 3 Zahlenpaare an, die diese Gleichungen erfüllen.

a) $m - n = 10$ ($m, n \in N$) b) $a + b = 1$ ($a, b \in Q$) c) $y = 3x + 1$ ($x, y \in Z$)

d) $2x + y = 12$ ($x, y \in N$) e) $11 - d = 2c$ ($c, d \in Q$) f) $q + 1 = p - 6$ ($p, q \in R$)

9. Überprüfe für das vorgegebene Gleichungssystem, ob das angegebene Zahlenpaar (x; y) Lösung ist.

a) I: $x + y = 6$
II: $y - x = 2$
(4; 2)

b) I: $3y - x = 9$
II: $4y + 3x = -5$
(2; – 1)

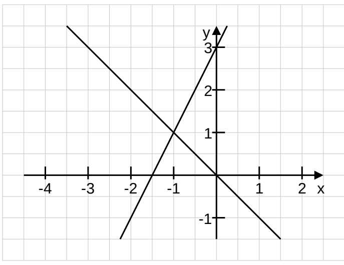
c) I: $2x - 4 = y$
II: $x + 2y = 2$
(2; 0)

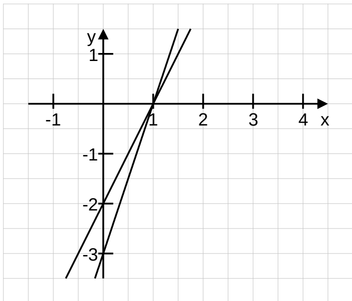
10. Eine Gleichung mit zwei Variablen kann als lineare Funktion aufgefasst werden.
Lies die Lösung der Gleichungssysteme aus der grafischen Darstellung der beiden Funktionen ab.

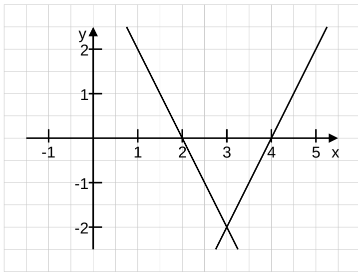
a) I: $y = 2x + 3$
II: $y = -x$

b) I: $y = 3x - 3$
II: $y = 2x - 2$

c) I: $y = 2x - 8$
II: $y = -2x + 4$







11. Woran kann man in der grafischen Darstellung eines Gleichungssystems erkennen, wie viele Lösungen es hat? Vervollständige den Lückentext.

a) Wenn zwei Graphen linearer Funktionen sich in einem Punkt schneiden, so hat das zugehörige Gleichungssystem ……………………………Lösung.

b) Ein Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, wenn die Graphen der linearen Funktionen……………………………………………………………………………………………………

c) Das Gleichungssystem hat keine Lösung, wenn die Graphen der beiden linearen Funktionen …….

12. Entscheide ohne zu rechnen, welches Gleichungssystem genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen hat. Kreuze an.

a) I: $y = 8x - 4$
II: $y = 4x + 2$

genau eine	
keine	
unendlich viele	

b) I: $y = 2x + 5$
II: $y = 2x - 3$

genau eine	
keine	
unendlich viele	

c) I: $y = 3x + 6$
II: $y = 3x + 6$

genau eine	
Keine	
unendlich viele	

13. Forme das lineare Gleichungssystem mit zwei Variablen in eine lineare Gleichung mit einer Variablen um.

a) I: $4x - 5 = y$
II: $y = 3x$

b) I: $12 + 7x = 2y$
II: $7x = 4 + y$

c) I: $2x - 3y = 154$
II: $5x + 3y = 160$

14. Löse das lineare Gleichungssystem rechnerisch.

a) I: $12x + 6 = 2y$
II: $3x + 6 = y$

b) I: $2x + 4 = 2y$
II: $-2x + 8 = y$

c) I: $y = 6x + 7$
II: $y = 9x - 2$

15. Suche den Fehler und berichtige.

a) I: $2x - y = 10$
II: $y = 3x - 5$
→ $2x - 3x - 5 = 10$

b) I: $2x + 6 = 8y$
II: $2y = 2x - 6$
→ $2x + 6 = 8\,(2x - 6)$

c) I: $5x - 3 = 6y$
II: $6y = 4x$
→ $5x - 3 = 4x$
$x - 3 = 0$
$x = 3$
$y = 4 \cdot 3$
$y = 12$

16. Stelle ein Gleichungssystem mit zwei Variablen auf, das den Sachverhalt darstellt.
Gib die Bedeutung der Variablen an.

a) Die Summe zweier Zahlen beträgt 108. Die Differenz der beiden Zahlen ist 8.

b)

Strandhotel:
66 Einzel- und
Doppelzimmer
mit 92 Betten

c) André ist fünf Jahre älter als sein Bruder Lars. Zusammen sind beide 23 Jahre alt.

8 Zum Lösen quadratischer Gleichungen

8.1 Ausgewählte Probleme

Zur Verwendung von Fachbegriffen und zum Begriff der quadratischen Gleichung

Bei der Behandlung quadratischer Gleichungen sollten möglichst wenige spezielle Bezeichnungen eingeführt werden. Es ist ausreichend, sich auf die Bezeichnungen „quadratische Gleichung“ und „Normalform der quadratischen Gleichung“ zu beschränken, wobei letztere nur im Zusammenhang mit der Lösungsformel verwendet werden muss. Auf die oft in Lehrbüchern benutzten Formulierungen „allgemeine Form der quadratischen Gleichung“, „rein quadratische Gleichung“, „gemischt quadratische Gleichung“ sowie auf den Begriff „Diskriminante“ kann verzichtet werden, sie sollten höchstens nur exemplarisch behandelt werden.

Als eine „quadratische Gleichung“ bezüglich einer Unbekannten bzw. einer Variablen sollte eine Gleichung bezeichnet werden, in der die betreffende Unbekannte bzw. Variable in der zweiten Potenz auftritt. Die Bezeichnung sollte auch dann erfolgen, wenn noch Klammern aufzulösen sind oder quadratische Terme auf beiden Seiten auftreten.

Beispiele:

$3x + 1 = 4x^2$ $\quad x^2 + 2x + 1 = 0$ $\quad x^2 = 7$ $\quad A = a^2$ $\quad 3x(x-1) = 5$ $\quad x(x-1) = x^2 + 1$

Analog zum Begriff der linearen Gleichung sollten Gleichungen mit Quotienten, auch wenn sie sich in quadratische Gleichungen umformen lassen, nicht als quadratische Gleichungen bezeichnet werden, wie etwa die Gleichung $\frac{x}{x-1} = x + 1$ mit $x \neq 1$.

Eine Gleichung kann nur quadratisch in Bezug auf eine Unbekannte bzw. Variable sein, wobei dieser Bezug nicht formuliert werden sollte, wenn es nur eine Unbekannte gibt.

Beispiel: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ist eine quadratische Gleichung bezüglich r und eine lineare bezüglich h.

Zur Weiterentwicklung des Variablen- und Gleichungsbegriffs im Zusammenhang mit quadratischen Gleichungen

Das Thema „Quadratische Gleichungen“ sollte genutzt werden, um die Kenntnisse und Vorstellungen der Schüler zu den Begriffen Variable und Gleichung weiter zu entwickeln. Dazu sollten in geeigneter Weise folgende neue Gedanken beim Schüler ausgebildet werden:

- Bisher hatten Gleichungen mit einer Unbekannten meist genau eine Lösung. Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten haben meist als Lösung ein Paar von Zahlen. Bei einer Gleichung mit 2 Variablen gibt es unendliche viele Paare von Zahlen, die die Gleichung erfüllen.
  Eine quadratische Gleichung kann dagegen eine, zwei oder gar keine Lösung haben.
- Wenn es lineare und quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten gibt, muss es auch noch Gleichungen geben, in denen die Unbekannte in dritter oder höherer Potenz auftritt und die noch mehr als zwei Lösungen haben können (nur Gymnasium).
- Um die verschiedenen Lösungen einer quadratischen Gleichung zu unterscheiden, bezeichnet man die Werte, die die Unbekannte x annehmen kann, mit x_1 und x_2.
- Die Variablen p und q in der Normalform der quadratischen Gleichung sind Parameter, die für jede konkrete Gleichung je einen bestimmten Wert annehmen. Dies ist z. B. analog zu den Parametern m und n in der Gleichung für eine lineare Funktion.
- In quadratischen Gleichung können neben der Unbekannten auch Parameter auftreten (Bsp.: $x^2 + px + 4 = 0$). Die Lösung der Gleichung kann dann nur in Abhängigkeit von dem Parameter angegeben werden (nur exemplarisch am Gymnasium).

Zum Verhältnis von quadratischen Gleichungen und quadratischen Funktionen
In vielen Lehrbüchern werden quadratische Gleichungen und quadratische Funktionen in engem Zusammenhang und oft in einem Kapitel behandelt. Trotz einiger formaler Gemeinsamkeiten handelt es sich in wesentlichen Punkten um unterschiedliche Linien in der Entwicklung des mathematischen Wissens und Könnens der Schüler, was bei einer zu engen Verbindung beider Themen verloren gehen kann. Bei der Behandlung quadratischer Gleichungen geht es im Kern um die Entwicklung des Gleichungsbegriffs und die Entwicklung des Könnens im Lösen von Gleichungen. Bei der Behandlung quadratischer Funktionen steht die Entwicklung des Funktionsbegriffs und des Könnens im Arbeiten mit Funktionen im Mittelpunkt.

Es gibt allerdings folgende inhaltliche Schnittpunkte der beiden Entwicklungslinien.

- In beiden Fällen treten Variable in unterschiedlicher Bedeutung auf. Bei Gleichungen eher als Unbekannte, bei Funktionen meist als beliebig Veränderliche, bei beiden Themen als Parameter.
- Funktionen werden meist durch eine Gleichung mit den zwei Variablen y und x dargestellt, quadratische Funktionen durch eine Gleichung, bei der x quadratisch auftritt.
- Die Berechnung von Nullstellen quadratischer Funktionen führt auf das Lösen einer quadratischen Gleichung.
- In beiden Themen kommt die Bezeichnung „Normalform“ vor.

Die quadratischen Gleichungen sollten aus folgenden Gründen vor den quadratischen Funktionen behandelt werden.

- Auf diese Weise kann die Eigenständigkeit der Entwicklung des Könnens im Lösen von Gleichungen stärker hervorgehoben werden. Der mathematische Bezug zu den quadratischen Funktionen kann auch nach bzw. bei deren Behandlung erarbeitet werden.
- Das Lösen quadratischer Gleichungen ist einfacher als die Bearbeitung der oft komplexen Probleme im Zusammenhang mit quadratischen Funktionen.
- Durch die Behandlung quadratischer Gleichungen wird die Nullstellenberechnung quadratischer Funktionen vorbereitet, während bei einer umgekehrten Reihenfolge das Lösen quadratischer Gleichungen lediglich als Hilfsmittel für die Nullstellenberechnung angesehen werden könnte.
- In der Kl. 8 werden auch zuerst die linearen Gleichungen und dann die linearen Funktionen behandelt. Es sollte in Kl. 9 eine möglichst weitgehende Analogie zwischen der Behandlung der Gleichungen bzw. Funktionen bestehen.

Zum Verhältnis von inhaltlichem und formalem Lösen quadratischer Gleichungen
Es sollte nicht die Behandlung einer Vielzahl von Typen quadratischer Gleichungen mit algorithmischen Methoden angestrebt werden. Diese Vorgehensweise ist zeitaufwendig und sehr anspruchsvoll, da die Schüler dazu alle Typen und Lösungsformeln lernen müssen und bei einer konkreten Gleichung immer zuerst den Typ identifizieren, die Parameter bestimmen und dann die Formel richtig anwenden müssen.

Dem Grundsatz entsprechend: „Versuche jede Gleichung zuerst inhaltlich zu lösen!“ sollten die Schüler daran gewöhnt werden, die Lösungsformel erst anzuwenden, wenn sie die Gleichung nicht inhaltlich lösen können.
In Kapitel 5 wurden bereits die wichtigsten inhaltlichen Vorgehensweisen zum Lösen quadratischer Gleichungen an Beispielen erläutert, auf die hier nur noch einmal hingewiesen werden soll.

- Verwenden des Wurzelziehens als Umkehrung des Quadrierens (s. S. 34)
- Verwenden des Satzes über eine Produkt mit dem Wert Null (s. S. 35)

Mit diesen beiden Vorgehensweisen können alle quadratischen Gleichungen der folgenden Arten ohne Anwendung der Lösungsformel gelöst werden, wobei in einigen Fällen noch formale Umformungsregeln angewendet werden müssen:

$x^2 = a$ $\quad$ $(x + d)^2 = e$ $\quad$ $(x + c) \cdot (x + d) = 0$ $\quad$ $x^2 + px = 0$

Beispiel: $(x - 5)^2 = 7$

Mögliche Überlegungen	Mögliche schriftliche Darstellung
Das Wurzelziehen ist die Umkehrung des Quadrierens, also gilt für eine Lösung $x_1 - 5 = \sqrt{7}$. Da auch gilt $(-\sqrt{7}) \cdot (-\sqrt{7}) = (\sqrt{7})^2 = 7$, gilt für die zweite Lösung $x_2 - 5 = -\sqrt{7}$.	$(x - 5)^2 = 7$ $x_1 - 5 = \sqrt{7}$ $\quad$ $x_2 - 5 = -\sqrt{7}$ $x_1 = 5 + \sqrt{7}$ $\quad$ $x_2 = 5 - \sqrt{7}$

An Gymnasien können als weitere Möglichkeiten zum inhaltlichen Lösen das Verwenden der quadratischen Ergänzung, der Betragsschreibweise, binomischer Formeln oder des Satzes von Vieta betrachtet werden.

Verwenden der quadratischen Ergänzung

Mithilfe der sogenannten quadratischen Ergänzung kann jede quadratische Gleichung unter Anwendung binomischer Formeln und der inhaltlichen Lösung von Gleichungen des Typs $(x + a)^2 = b$ gelöst werden. Das Verfahren der quadratischen Ergänzung sollte aber nur verwendet werden, wenn alle Rechnungen im Kopf auszuführen sind, d. h. dass u. a. p ein kleine und gerade Zahl ist.

Beispiel: $x^2 - 6x + 6 = 0$

Mögliche Überlegungen	Mögliche schriftliche Darstellung
Zur Anwendung der zweiten binomischen Formel muss ich im gemischten Glied $-6x$ den Wert für b bestimmen. Da $-6x = -2xb$, ist $b = 3$, also $b^2 = 9$. Um die Formel anzuwenden, addiere ich auf beiden Seiten 3. Die Gleichung $(x - 3)^2 = 3$ kann ich nun weiter inhaltlich durch Umkehren des Quadrierens lösen.	$x^2 - 6x + 6 = 0 \quad \mid +3$ $x^2 - 6x + 9 = 3$ $(x - 3)^2 = 3$ $x_1 - 3 = \sqrt{3}$ $\quad$ $x_2 - 3 = -\sqrt{3}$ $x_1 = 3 + \sqrt{3}$ $\quad$ $x_2 = 3 - \sqrt{3}$

Verwenden der Betragsschreibweise

Beispiel: Die (lineare) Gleichung $|x| = 5$ hat die Lösungen $x_1 = 5$ und $x_1 = -5$. Man kann als Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 = 25$ deshalb auch die Gleichung $|x| = 5$ angeben.

Allgemein gilt[5]: Wenn $x^2 = a$, $a > 0$ ist $|x| = \sqrt{a}$

Verwenden binomischer Formeln

Bei einfachen ganzen Zahlen können bestimmte quadratische Gleichungen durch Anwendung binomischer Formeln in die Form $(x + a)^2 = 0$ gebracht werden, die dann inhaltlich gelöst wird.

Beispiel: $x^2 - 4x + 4 = 0$ Anwenden der 2. Binomischen Formel: $(x - 2)^2 = 0$, also $x = 2$

[5] Mit dieser Schreibweise können Gleichungen durch Wurzelziehen auf beiden Seiten äquivalent umgeformt werden.

Anwenden des Satzes von Vieta

Bei einfachen ganzen Zahlen kann versucht werden, in der Normalform der Gleichungen p und q geschickt in ein Produkt bzw. eine Summe zu zerlegen. Es sollte zuerst eine Zerlegung von q in Faktoren probiert werden.

Beispiel: $x^2 - x - 6 = 0$ $\quad p = -1 \quad \underline{-p = 1} \quad q = -6$

Zerlegung von $q = -6$ in Faktoren:	$(-1) \cdot 6$	$1 \cdot (-6)$	$(-2) \cdot 3$	$2 \cdot (-3)$
Summe der Faktoren, Vergleich mit $-p = 1$:	5	-5	$\underline{1}$	-1
Lösungen nach dem Satz des Vieta:			$x_1 = -2 \quad x_2 = 3$	

8.2 Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler

- können lineare und quadratische Gleichungen unterscheiden,
- können quadratische Gleichungen der Form $x^2 = a$, $(x + d)^2 = e$, $(x + c) \cdot (x + d) = 0$ und $x^2 + px = 0$ inhaltlich lösen ohne diese allgemeinen Darstellungen zu benutzen,
- können die Lösungen quadratischer Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ mithilfe der Lösungsformel bestimmen, wenn die Lösungsformel gegeben ist und die Diskriminante keine Quadratzahl ist,
- wissen, dass eine quadratische Gleichung entweder keine, genau eine oder genau zwei Lösungen hat,
- können die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung unter Anwendung der Lösungsformel bestimmen, indem sie den Ausdruck unter der Wurzel auswerten,
- können überprüfen, ob gegeben Zahlen Lösung der quadratischen Gleichung sind.

8.3 Aufgaben

1. Entscheide, ob es sich bei den angegebenen Gleichungen um lineare oder quadratische Gleichungen handelt.

a) $2x - 5 = x^2 + 4$	b) $-2x + 5 = 4(3x - 2)$	c) $-5x^2 + x = 0$
d) $x^2 - 4 = 0$	e) $-x + 4 = 2x + 3$	f) $4(3x - 2) = 5x(2x + 8)$
g) $(x - 9)(x + 9)= 0$	h) $3x + 2 = 0$	i) $(x + 2)(x - 2) = 2x$

2. Kann man die folgenden Gleichungen als quadratische Gleichung mit einer Variablen auffassen? Wenn ja, gib die betreffende Variable an.

a) $x^2 + px + q = 0$	b) $0{,}4x = 0{,}8x - 4$	c) $2x^3 + 9 = 0$
d) $a^2 + b^2 = c^2$	e) $ax^2 + bx + c = 0$	f) $0{,}5d = -0{,}5d^2$
g) $A = \pi d^2$	h) $A_O = 2(ab + bc + ac)$	i) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

3. Bestimme die Lösungen der Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen.

a) $x^2 = 81$	b) $3x^2 = 75$	b) $12x^2 + 4 = 52$
d) $49 = x^2$	e) $x^2 = 0$	f) $40 = x^2 + 65$
g) $x^2 - 64 = 0$	h) $x^2 = -9$	i) $2x^2 - 68 = 30$

4. Bestimme die Lösungen der Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen.

a) $x^2 + 5x = 0$	d) $20x = 5x^2$	g) $-15x = 3x^2$
b) $x^2 - 8x = 0$	e) $4x^2 - 16x = 0$	h) $5x^2 - 10x = 0$
c) $x^2 = 15x$	f) $2x^2 = 8x$	i) $x^2 = x$

5. Überprüfe, ob die folgenden quadratischen Gleichungen in der Form $x^2 + px + q = 0$ angegeben sind. Kreuze an.

a) $x^2 - 4x + 8 = 0$	ja: ____nein: ____
b) $-x^2 + 2x - 4 = 0$	ja: ____nein: ____
c) $(x + 2)(x - 3) = 0$	ja: ____nein: ____
d) $16x - 20 + x^2 = 0$	ja: ____nein: ____
e) $x^2 + 20x = 0$	ja: ____nein: ____
f) $0 = x^2 + 10$	ja: ____nein: ____

6. Schreibe die folgenden quadratischen Gleichungen in der Form $x^2 + px + q = 0$.

a) $x^2 = -2x + 8$	b) $-x^2 + 2x - 4 = 0$	c) $10x - 10 = x^2$
d) $0 = -8x^2 + 32x - 24$	e) $0 = x(x - 6) + 2x$	f) $-x^2 = x - 1$

7. Die folgenden quadratischen Gleichungen haben die Form $x^2 + px + q$. Bestimme p und q.

a) $x^2 + 4x + 8 = 0$	p: ____	q: ____
b) $x^2 - 2x + 7 = 0$	p: ____	q: ____
c) $x^2 + 8x - 5 = 0$	p ____	q: ____
d) $x^2 - 7x - 1 = 0$	p: ____	q: ____
e) $x^2 - 0.5x + 1,5 = 0$	p: ____	q: ____
f) $x^2 + 1,75x - 0,2 = 0$	p: ____	q: ____
g) $x^2 + 10x = 0$	p: ____	q: ____
h) $x^2 + x + 2 = 0$	p: ____	q: ____
i) $x^2 - x = 0$	p: ____	q: ____

8. Löse die quadratischen Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel $x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

a) $x^2 + 6x - 4 = 0$	b) $x^2 - 10x + 10 = 0$	c) $x^2 + 2x - 1 = 0$
g) $x^2 + 4x - 14 = 0$	h) $x^2 - 8x + 6 = 0$	i) $x^2 + x - 1 = 0$

9. Entscheide mithilfe der Lösungsformel $x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, ob die Gleichung keine, eine oder zwei Lösungen hat.

a) $x^2 - 16x + 64 = 0$	b) $x^2 + 2x + 7 = 0$	c) $x^2 - 5x - 5 = 0$
d) $x^2 + 12x + 36 = 0$	e) $x^2 - 4x + 5 = 0$	f) $x^2 - 5x + 4 = 0$

10. Stelle fest, ob die Lösungen die jeweils zugehörige quadratische Gleichung zu einer wahren Aussage machen.

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$	$x_1 = 4$ und	$x_2 = 3$
b) $x^2 + 7x + 10 = 0$	$x_1 = -5$ und	$x_2 = -2$
c) $x^2 + x - 56 = 0$	$x_1 = -7$ und	$x_2 = 8$
d) $x^2 - 9x - 10 = 0$	$x_1 = -1$ und	$x_2 = 10$
e) $x^2 + 13x + 30 = 0$	$x_1 = 3$ und	$x_2 = 10$
f) $x^2 + 6x + 8 = 0$	$x_1 = -4$ und	$x_2 = -2$