

Hans-Dieter SILL, Rostock

Zum Aufgabenbegriff in der Mathematikdidaktik

Vorbemerkungen

Im Unterschied zu einem Wort, als einer selbstständigen sprachlichen Einheit verstehen wir unter einem Begriff

- aus Sicht der Logik eine komplexe Gesamtheit von Gedanken (Bedeutungsaspekte) über Unterscheidungsmerkmale einer Objektklasse,
- aus Sicht der Neurowissenschaften ein räumlich-zeitliches Aktivitätsmuster verbundener Neuronen (Modell: semantisches Netz) und
- aus philosophischer Sicht ein dialektisches Wechselverhältnis inhaltlicher (semantischer) und formaler (syntaktischer) Aspekte.

Ein Bedeutungsaspekt eines Begriffs hat einen objektiven bzw. einen subjektiven Charakter, wenn die Bedeutung unabhängig bzw. nicht unabhängig vom Denken oder Handeln eines Individuums existiert. Ein Begriff kann zugleich objektive und subjektive Aspekte haben.

Ein Begriff als Bestandteil einer Theorie ist somit zum einen ein strukturierter Bestandteil des semantischen Netzes eines Individuums. Ein Begriff kann auch einen intersubjektiven, also objektiven Charakter bekommen und damit begriffliche Grundlage einer Wissenschaft sein. Dazu ist ein Diskurs der subjektiven Theorien einzelner Wissenschaftler notwendig.

Mit diesem Artikel soll ein Beitrag zum Diskurs zu den Grundbegriffen einer Mathematikdidaktik Aufgabe und Problem sowie davon abgeleiteter Begriffe erfolgen, der angesichts unterschiedlicher Bedeutungen und unscharfer Bestimmungen in der Literatur dringend notwendig erscheint. Dabei geht es nicht um eine Definition im engen Sinne, sondern um eine Explikation der Begriffe.

1. Zu Bedeutungen der Wörter „Aufgabe“ und „Problem“

Die Wörter werden in vielen Publikationen als Nebenbegriffe ausgefasst. Oft bezieht man sich auf Dörner (1979, S. 10): „Aufgaben erfordern nur reproduktives Denken, beim Problemlösen muss etwas Neues geschaffen werden.“ Diese Bedeutungen findet man auch bei Wiegand und Blum (1999, S. 590): „Wie üblich verstehen wir unter einem Problem eine geistige Anforderungen für ein Individuum, bei der ein Anfangszustand A vermöge einer gewissen Transformation T in einen erwünschten Zielzustand Z zu überführen ist, wobei eine gewisse Barriere dies vorerst verhindert. Gibt es keine Barriere, ... so spricht man von einer Aufgabe.“

Eine solche Verwendung der Wörter korrespondiert insbesondere beim Wort „Problem“ mit der umgangssprachlichen Bedeutung. Unter einem Problem wird immer etwas Schwieriges, schwer zu Beantwortendes, Kompliziertes oder Ungelöstes verstanden. Eine Aufgabe kann allerdings im umgangssprachlichen Sinne auch leicht oder schwer sein.

Bei konsequenter Verwendung dieser Bedeutungen müsste zwischen Anforderungen an Schüler unterschieden werden, die man als Aufgabe bzw. als Problem bezeichnet, ein Problem wäre somit keine Aufgabe. Dies wird selbst in der betreffenden Literatur in der Regel nicht getan.

Beide Wörter werden aber auch in der didaktischen Literatur im hierarchischen Sinne verwendet, so etwa bei Bruder (2008). „Eine Aufforderung zum Lern-Handeln im Mathematikunterricht wird als Aufgabe bezeichnet.“ (S. 19) „Eine subjektiv schwierige ... Aufgabe wird als Problemaufgabe oder kurz als Problem bezeichnet.“ (S. 20)

In diesen Bedeutungen ist also „Aufgabe“ der Oberbegriff und hat einen primär objektiven Charakter, während das Wort „Problem“ einen subjektiven Charakter erhält. Eine konsequente Verwendung der Wörter in diesen Bedeutungen führt unter anderem zu folgenden Aussagen.

- Man kann von einem Problem immer nur in Bezug auf das Subjekt sprechen, dass dieses Aufforderung bearbeiten soll. Eine Aufgabe kann kein Problem an sich sein.
- Es kann zwischen dem Anforderungsniveau einer Aufgabe als Maß für die objektive Struktur ihrer Anforderungen und dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe als Maß für den Grad der Bewältigung dieser Aufgabe in einer bestimmten Population unter bestimmten Bedingungen unterschieden werden.
- Ein Problem muss nicht immer eine Aufgabe mit einem hohen Anforderungsniveau sein. Problemlösen im Mathematikunterricht beschränkt sich damit nicht auf die Bewältigung anspruchsvoller Anforderungen, bereits sehr einfache Aufgaben können für einige Schüler ein Problem sein.

In Bezug auf die Formulierungen von Bruder (2008) ist zu fragen:

- Geht es um alle Lernhandlungen, also auch z. B. um soziales Lernen?
- Sollte nur ein Bezug zum Unterricht erfolgen, womit z. B. außerschulische Prozesse ausgeklammert würden?

Wir schlagen eine etwas modifizierte Fassung der Bedeutungen vor:

Eine **mathematische Aufgabe** ist eine mündliche oder schriftliche Aufforderung zum Ausführen von Handlungen, die mathematisches Wissen und Können erfordern. Eine Aufgabe ist ein **Problem** für einen Lernenden, wenn ihm die Lösungsschritte nicht unmittelbar bewusst sind.

Diese Formulierungen erfassen aber nur einen Teil der Gedanken bzw. Aspekte zu den Begriffen Aufgabe und Problem und sollten keinesfalls für sich als Definitionen aufgefasst werden.

Ein weiterer Aspekt bezieht sich auf die Verwendung der Wörter „lösen“ und „Lösung“, wozu nur einige Gedanken geäußert werden sollen.

- Die Formulierungen "Lösung einer Aufgabe" bzw. „Schülerlösung“ haben eine zweifache Bedeutung, sie bezeichnen sowohl den Prozess als auch das Resultat einer Handlung.
- Mit dem Wort "lösen" ist eng die Bedeutung verbunden, dass die Handlungen auch zu einem Ergebnis, also einer Lösung der Aufgabe führen. Wir halten es für sinnvoller, anstelle von „lösen“ den umfassenderen Begriff "bearbeiten" zu verwenden. Man kann eine Aufgabe bearbeiten, ohne sie zu lösen, also zu einer Lösung zu kommen.
- Mit der Formulierung "Schülerlösung" ist oft direkt eine Bewertung verbunden. Eine Lösung kann richtig, falsch oder auch teilweise richtig sein. Bei unseren Erprobungen polyvalenter Aufgabe (s. S. 4) hat es sich als sinnvoll erwiesen, anstelle von „Schülerlösungen“ von "Schülerantworten" zu sprechen.

2. Zu Bedeutungen des Wortes „offene Aufgabe“

Ein weiterer Aspekt des Aufgabenbegriffes ist die Unterscheidung in offene und geschlossene Aufgaben. In der Literatur dominiert die Auffassung, diese Bezeichnungen ohne Bezug zu den lösenden Subjekten zu verwenden, so etwa bei Pehkonen (2001, S. 62): „Eine Aufgabe wird offen genannt, wenn ihre Anfangs- und Endsituation nicht exakt gegeben ist.“

Diese Sichtweise führt in der Literatur zu gegensätzlichen Aussagen. So wird von einem Autor festgestellt, dass das Gros aller Mathematikaufgaben, die man in Schulbüchern findet, keine offenen Aufgaben sind, während ein anderer aus Sicht eines Lehrers behauptet, dass man jede Schulbuchaufgabe ohne Abänderung des Textes als offene Aufgabe verstehen kann.

Auch in dieser Hinsicht erweist es sich als sinnvoll, zwischen objektiven und subjektiven Aspekten des Begriffs zu differenzieren. Das Merkmal der Offenheit sollte aus unserer Sicht primär ein subjektiven Charakter haben, was zu folgender Explikation führt.

Eine Aufgabe heißt **offen für einen Lernenden**, wenn

- für ihn die Ausgangsbedingungen nicht vollständig sind,
- für ihn mehrere Lösungswege möglich sind oder
- er zu mehreren Ergebnissen kommen kann.

Analog ließe sich die Bezeichnung „geschlossene Aufgabe“ erklären.

Der (objektive) Grad der Offenheit einer Aufgabe ergäbe sich damit aus der Anzahl der Lösungswege und der Ergebnisse, die für den betreffenden Lernenden möglich sind.

Als Konsequenzen aus dieser Auffassung ergeben sich unter anderem die Feststellungen, dass alle Aufgaben in Bezug auf bestimmte Lernende offen sind und eine offene Aufgabe nicht a priori schwer oder leicht ist.

3. Zur Bezeichnung „polyvalente Aufgabe“

Ausgehend von den in Becker und Shimada (1977) beschriebenen Aufgaben mit „multiple correct answers“ verwenden wir seit einigen Jahren die Bezeichnung „polyvalente Aufgabe“ in folgendem Sinne.

Eine Aufgabe heißt **polyvalent für eine Gruppe von Schülern**, wenn sie folgende Merkmale besitzt:

- Jeder der Schüler findet mit hoher Wahrscheinlichkeit eine zutreffende Antwort.
- Die Aufgabe ermöglicht Schülerantworten unterschiedlicher Qualität.

Eine Publikation mit Erfahrungen zum Einsatz dieser Aufgaben in ganzjährigen Lehrerfortbildungen findet man unter der URL: www.mathe-mv.de.

Literatur

- Becker, J.; Shimada, S. (Hrsg.) (1977): The open-ended approach : a new proposal for teaching mathematics. – Reston : The National Council of Teachers of Mathematics
- Bruder, Regina (2008): Vielseitig mit Aufgaben arbeiten. Mathematische Kompetenzen nachhaltig entwickeln und sichern. In: Bruder, Regina; Leuders, Timo; Büchter, Andreas (Hg.): Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten. 1. Aufl. Berlin: Cornelsen-Scriptor, S. 18–52.
- Dörner, Dietrich (1979): Die Logik des Misslingens. Strategisches Denken in komplexen Situationen. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt (Rororo).
- Pehkonen, Erkki (2001): Offene Probleme: Eine Methode zur Entwicklung des Mathematikunterrichts. In: Der Mathematikunterricht, H. 6, S. 60–72.
- Wiegand, Bernd; Blum, Werner (1999): Offene Probleme für den Mathematikunterricht - kann man Schulbücher dafür nutzen? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1999 Vorträge auf der 33. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 1. bis 5.3.1999 in Bern. Hildesheim: Franzbecker, S. 590–593.