

# Leitidee „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“



Fachliche und fachdidaktische Grundlagen

mit

Hinweisen für den Unterricht in der Primarstufe

**Autoren:** Grit Kurtzmann

Prof. Dr. Hans-Dieter Sill

**Druck:** Druckerei der Universität Rostock

**Auflage:** 1. Auflage, August 2013

# Inhaltsverzeichnis

<b>VORWORT</b>	<b>5</b>
<b>1 ZUR MODELLIERUNG STOCHASTISCHER SITUATIONEN</b>	<b>6</b>
1.1 Vorbemerkungen	6
1.2 Zur Verwendung der Wörter „Zufall“ und „zufällig“	7
1.2.1 Fachliche Grundlagen	7
1.2.2 Empfehlungen und Hinweise für den Unterricht in der Primarstufe	9
1.3 Zur Prozessbetrachtung stochastischer Situationen	9
1.3.1 Fachliche Grundlagen	9
1.3.2 Hinweise für den Unterricht	14
<b>2 STATISTISCHE UNTERSUCHUNGEN</b>	<b>15</b>
2.1 Vorbemerkungen	15
2.2 Durchführung einer statistischen Untersuchung	16
2.2.1 Erfassung von Daten	16
2.2.1.1 Fachliche Grundlagen	16
2.2.1.2 Hinweise für den Unterricht	17
2.2.2 Daten- und Skalenarten	19
2.2.2.1 Fachliche Grundlagen	19
2.2.2.2 Hinweise für den Unterricht	20
2.2.3 Möglichkeiten der grafischen Darstellung	20
2.2.3.1 Fachliche Grundlagen	20
2.2.3.2 Hinweise für den Unterricht	23
2.2.4 Lesen und Interpretieren von Diagrammen, Fehler in Diagrammen	26
2.2.4.1 Fachliche Grundlagen	26
2.2.4.2 Hinweise für den Unterricht	26
2.3 Auswertung statistischer Untersuchungen	27
2.3.1 Analyse von Häufigkeitsverteilungen	27
2.3.1.1 Fachliche Grundlagen	27
2.3.2 Beschreibung und Exploration von Daten	28
2.3.2.1 Fachliche Grundlagen	28
2.3.2.2 Hinweise für den Unterricht	28
2.3.3 Methoden der Beschreibenden Statistik	28
2.3.3.1 Fachliche Grundlagen	28
2.3.3.2 Hinweise für den Unterricht	33
2.4 Methoden der Explorativen Datenanalyse	34
2.4.1 Fachliche Grundlagen	34
2.4.2 Hinweise für den Unterricht	37
2.5 Gruppierung von Daten	38
2.5.1 Fachliche Grundlagen	38
2.5.2 Hinweise für den Unterricht	40

<b>2.6</b>	<b>Schlussfolgerungen und Prognosen aus Daten</b>	<b>40</b>
2.6.1	Fachliche Grundlagen	40
2.6.2	Hinweise für den Unterricht	40
<b>2.7</b>	<b>Planung einer statistischen Untersuchung</b>	<b>41</b>
2.7.1	Grundgesamtheit und Stichprobe	41
2.7.1.1	Fachliche Grundlagen	41
2.7.1.2	Hinweise für den Unterricht	41
2.7.2	Fragenstellungen	41
2.7.2.1	Fachliche Grundlagen	41
2.7.2.2	Hinweise für den Unterricht	42
2.7.3	Fehler bei der Planung von statistischen Untersuchungen	42
2.7.3.1	Fachliche Grundlagen	42
<b>3</b>	<b>EINFÜHRUNG IN DIE WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG</b>	<b>44</b>
<b>3.1</b>	<b>Zum präformalen Wahrscheinlichkeitsbegriff</b>	<b>44</b>
3.1.1	Fachliche Grundlagen	44
3.1.2	Hinweise für den Unterricht	55
<b>3.2</b>	<b>Zu Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	<b>56</b>
3.2.1	Fachliche Grundlagen	56
3.2.2	Hinweise für den Unterricht	63
<b>3.3</b>	<b>Mehrstufige Vorgänge</b>	<b>63</b>
3.3.1	Fachliche Grundlagen	63
3.3.2	Hinweise für den Unterricht	67
<b>3.4</b>	<b>Berechnen und Interpretieren von Erwartungswerten</b>	<b>68</b>
<b>4</b>	<b>METHODEN ZUM LÖSEN KOMBINATORISCHER AUFGABEN</b>	<b>71</b>
<b>4.1</b>	<b>Zur Rolle der Kombinatorik</b>	<b>71</b>
<b>4.2</b>	<b>Fachliche Grundlagen</b>	<b>71</b>
4.2.1	Systematisches Probieren	71
4.2.2	Verwenden von kombinatorischen Baumdiagrammen	72
4.2.3	Verwenden von Zählregeln	73
4.2.4	Verwendung von Modellen	75
<b>4.3</b>	<b>Hinweise für den Unterricht</b>	<b>75</b>

# Vorwort

Mit den von der Kultusministerkonferenz am 15. Oktober 2004 beschlossenen Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich wurde erstmalig in einer bundesweiten Orientierung für den Mathematikunterricht die verpflichtende Aufnahme von Elementen der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung in den Grundschulunterricht festgelegt. Mit den gleichzeitig beschlossenen Vereinbarungen über die Bildungsstandards haben sich alle Bundesländer verpflichtet, die Bildungsstandards als Grundlagen der fachspezifischen Anforderungen für den Unterricht im Primarbereich ab dem Schuljahr 2005/06 zu verwenden sowie die Standards in der Lehrplanarbeit, der Schulentwicklung sowie der Lehreraus- und -fortbildung zu implementieren.

Diesem Anliegen soll unser Fortbildungskurs „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ entsprechen. Als Titel des Kurses haben wir die Bezeichnung der entsprechenden Leitidee in den Bildungsstandards für den Primarbereich gewählt. Im Rahmenplan für die Grundschule von Mecklenburg-Vorpommern aus dem Jahre 2006 wird diese Leitidee mit „Daten und Zufall“ bezeichnet.

Bei den Elementen der Wissenschaftsdisziplinen Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, die meist unter dem Sammelbegriff Stochastik zusammengefasst werden, handelt es sich um einen neuen Inhaltsbereich sowohl für den Mathematikunterricht als auch für die Lehrerbildung in der Grundschule. Deshalb gibt es gerade in diesem Bereich oft wenig gesicherte fachliche Grundlagen bei den Lehrkräften als auch wenige Erfahrungen sowie wissenschaftliche Untersuchungen im Unterricht. Analog zur Entwicklung des Geometrieunterrichts in der Grundschule, die erst in den fünfziger Jahren des 20. Jahrhunderts begann und sich über einen längeren Zeitraum erstreckte, befindet sich auch der Stochastikunterricht in der Grundschule erst in den Anfängen.

Unser Fortbildungskurs hat aus diesen Gründen zwei eng miteinander verbundene Ziele. Wir wollen zum einen fachwissenschaftliche Kenntnisse und Fähigkeiten bei den Kursteilnehmerinnen und Kursteilnehmern ausbilden bzw. vertiefen und zum anderen möglichst viele Hilfen und Anregungen für ihren aktuellen Unterricht zu diesem Thema geben. Dazu unterbreiten wir unter anderem Vorschläge für die stufenweise Entwicklung grundlegenden Wissens und Könnens in den Klassen 1-4 und stellen über die Broschüre hinaus zahlreiche ergänzende Unterrichtsmaterialien bereit.

In der Broschüre werden die fachlichen und fachdidaktischen Grundlagen des Stochastikunterrichts in der Primarstufe ausführlich an Beispielen dargestellt. Die oft anspruchsvollen Texte sind als Festigung und Vertiefung der in den Präsenzveranstaltungen behandelten Themen gedacht. Es werden in der Regel die Beispiele aufgegriffen, die auch in den Präsenzveranstaltungen betrachtet wurden.

Im Unterschied zu dem gegenwärtig noch dominierenden Vorgehen in den Schulbüchern und der fachdidaktischen Literatur einer fast ausschließlichen Orientierung auf Glückspielsituationen treten wir dafür ein, die stochastischen Situationen im Alltag von Schülerinnen und Schülern in den Mittelpunkt des Unterrichts zu stellen.

Wir bedanken uns bei dem Deutschen Zentrum für Lehrerbildung Mathematik für die Unterstützung bei der Erstellung dieser Broschüre sowie bei den Studentinnen Sandra Cordt und Christine Rönsch, die in ihren wissenschaftlichen Hausarbeiten zahlreiche Vorschläge entwickelt haben, die wir in unserer Broschüre benutzen konnten.

Rostock, den 21.08.2013

Grit Kurtzmann und Hans-Dieter Sill

# 1 Zur Modellierung stochastischer Situationen

## 1.1 Vorbemerkungen

### ***Was ist das Anliegen dieses Kapitels?***

Wir wollen Sie anregen und unterstützen, einen Stochastikunterricht in der Grundschule zu gestalten, der an die intuitiven Vorstellungen der Schüler anknüpft, eng mit ihrem täglichen Leben verbunden ist und einen ausgeprägten fachübergreifenden Charakter hat. Dazu wollen wir Sie in diesem Kapitel mit einer generellen Betrachtungsweise zu stochastischen Situationen vertraut machen. Diese gestattet es, den oft unverbundenen Umgang mit statistischen Daten und Aufgabenstellungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung in einer einheitlichen begrifflichen Weise zu verbinden.

Wir wollen damit weiterhin die engen Grenzen des heute in der Grundschule oft dominierenden Vorgehens überwinden, bei Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit fast ausschließlich Würfel oder Münzen zu werfen, Glücksräder zu drehen oder Objekte aus Behältnissen zu ziehen.

Weiterhin wollen wir einige Aspekte des Zufallsbegriffs diskutieren und Schlussfolgerungen zu seiner Verwendung im Unterricht ableiten.

Die in diesem Kapitel vorgenommenen Betrachtungen und angegebenen Beispiele sind *nicht* als ein möglicher Einstieg in die Behandlung der Stochastik in der Schule gedacht. Vielmehr sollten diese Betrachtungen und Begriffsbildungen im Laufe des gesamten Unterrichts in der Grundschule implizit bei der Behandlung der Themen zur Stochastik enthalten sein. Auch in dieser Broschüre kann in diesem Kapitel nur ein erster Eindruck von unserem Grundanliegen vermittelt werden, in den folgenden Kapiteln werden diese Gedankengänge immer wieder aufgegriffen.

### ***Was versteht man unter Stochastik?***

Der Begriff Stochastik ist im deutschen Sprachraum eine Sammelbezeichnung für die eigenständigen Gebiete der Beschreibenden Statistik und der Explorativen Datenanalyse auf der einen Seite und der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Beurteilenden Statistik auf der anderen Seite. Beide großen Wissenschaftsgebiete haben sich historisch relativ unabhängig voneinander entwickelt. Während die Erfassung und Aufbereitung von statistischen Daten eine sehr lange Geschichte hat und bis an den Beginn unserer Zeitrechnung zurück reicht, ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilenden Statistik eine sehr junge Disziplin, deren Anfänge zu Beginn des 19. Jahrhunderts liegen.

Oft wird auch die Kombinatorik zur Stochastik gezählt. Wenn es auch einigen Berührungspunkte gibt und kombinatorische Überlegungen bei der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten teilweise eine Rolle spielen, ist eine solche Zuordnung aus theoretischer und inhaltlicher Sicht nicht gerechtfertigt. Die Kombinatorik ist ein Teilgebiet der Diskreten Mathematik und eigenständige Disziplin. Inhaltlich geht es bei der Kombinatorik um das Abzählen bestimmter Konfigurationen. Im Unterschied zu stochastischen Situationen spielt bei kombinatorischen Situationen der Zufall keine Rolle.

In den Bildungsstandards für die Primarstufe werden Elemente der Kombinatorik in zutreffender Weise in die Leitidee "Zahlen und Operationen " eingeordnet.

### ***Was sind stochastische Situationen?***

Unter einer stochastischen Situation verstehen wir zum einen Situationen, in denen Daten entstehen oder ermittelt werden und zum anderen Situationen, in denen Ereignisse mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit entstehen, ermittelt oder vorhergesagt werden. Mit dem Begriff der stochastischen Situation wollen wir sowohl die Anwendungsbereiche der Statistik als auch der Wahrscheinlichkeitsrechnung erfassen.

Anstelle von stochastischen Situationen spricht man auch von Erscheinungen mit Zufallscharakter oder zufälligen Erscheinungen. Aufgrund der eingeschränkten Bedeutung des Zufallsbegriffs in der Mathematik (s. 1.2) wird der Begriff „Erscheinungen mit Zufallscharakter“ oft nur mit Situationen verbunden, die im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auftreten. Beim Umgang mit Daten wird meist nicht von einem zufälligen Charakter der Situation gesprochen. Deshalb verwenden wir die Bezeichnung „Erscheinungen mit Zufallscharakter“ nicht.

## 1.2 Zur Verwendung der Wörter „Zufall“ und „zufällig“

### 1.2.1 Fachliche Grundlagen

#### **Was bedeutet das Wort „Zufall“?**

Im Mathematikunterricht kommt man nicht an dem Wort „Zufall“ vorbei. Es tritt in den Bildungsstandards für die Sekundarstufe I sogar in der Bezeichnung „Daten und Zufall“ für eine Leitidee auf. In der Primarstufe sollen nach den Bildungsstandards „Zufallsexperimente“ behandelt werden, zu denen auch das Würfeln gezählt wird.

Wenn man mit Schülern über das Würfeln spricht, kommt schnell das Wort „Zufall“ ins Spiel und es kann sich die Frage ergeben, was denn eigentlich der Zufall ist. Die Antwort darauf ist nicht einfach, da das Wort „Zufall“ sehr viele Bedeutungen hat. Es lässt sich nicht wie andere Begriffe eindeutig erklären und schon gar nicht mit mathematischen Fachbegriffen.

#### **Bedeutungen von „Zufall“ und „zufällig“ in der Umgangssprache**

Im Folgenden wollen wir einige Bedeutungsaspekte zusammenstellen, die in der Umgangssprache auftreten und oft auch schon zum Sprachgebrauch von Schülerinnen und Schüler in der Primarstufe gehören. Dabei geht es sowohl darum, was als Zufall bzw. zufällig bezeichnet wird aber auch darum, was nicht als Zufall bzw. nicht als zufällig angesehen wird.

- (1) Man spricht vom Zufall, wenn etwas eingetreten ist, das sehr selten vorkommt.

*Beispiel, Worte einer Grundschülerin:*

„Meine Mutti hatte sich bei ihrer Arbeit in der Küche in den Finger geschnitten, sodass er genäht werden musste. Später stellte sich heraus, dass auch meine Omi sich am selben Tag in denselben Finger geschnitten hatte. Ich finde, das war ein trauriger Zufall.“

- (2) Man spricht vom Zufall, wenn etwas eingetreten ist, das nicht erwartet wurde.

*Beispiel, Worte einer Grundschülerin:*

„Ich sagte zu meiner Schwester: ‚Morgen schreiben wir eine Klassenarbeit. Hoffentlich ist unsere Lehrerin nicht da.‘ Am nächsten Morgen war sie wirklich nicht da und so fiel Arbeit aus. Das war ein ganz toller Zufall.“

- (3) Etwas, was man mit großer Wahrscheinlichkeit erwarten kann, wird nicht als zufällig bezeichnet.

*Beispiel (aus einer Befragung von Schülern dritter Klassen, Wenau, 1991):*

Kerstin und ihre Mutti haben sich nach der Arbeit um 16.00 Uhr vor dem Kaufhaus verabredet zum gemeinsamen Einkauf. Sie kommen Punkt 16.00 Uhr beide dort an. Kerstin begrüßt ihre Mutti: "Na, das ist ja ein Zufall, dass wir gleichzeitig hier sind." Stimmt das?  
Schülerantworten: 8 von 15: Nein, das ist kein Zufall, sie waren ja verabredet.

- (4) Wenn man ein Ereignis nicht vorhersehen konnte, so wird es als zufällig bezeichnet. Wenn man Ursachen für das eingetretene Ergebnis kennt, wird es als nicht zufällig bezeichnet.

*Beispiel: (Aussage von Schülern 8. Klassen, Schulz, 1987)*

In einen Autounfall verwickelt zu werden, ist aus der Sicht des Unschuldigen zufällig.

In einen Autounfall verwickelt zu werden, ist aus der Sicht des Schuldigen kein Zufall.

- (5) Wenn man das Ergebnis beeinflussen kann, wird es als nicht zufällig bezeichnet.

*Beispiel:*

Wenn ein guter Schüler sich auf eine Mathematikarbeit gründlich vorbereitet und dann eine gute Note erzielt sagt man: „Das war kein Zufall“.

- (6) Der Zufall wird nur als Ausdruck der Unkenntnis über die Ursachen für das eingetretene Ereignis angesehen.

*Beispiel, Worte einer Grundschülerin:*

„Ich finde, der Zufall ist ein Aberglaube, an denen sehr viele Menschen glauben. In Wirklichkeit sind das alles Gesetzmäßigkeiten“.

### **Bedeutungen von „Zufall“ und „zufällig“ in der Mathematik**

In der Mathematik, speziell in der Wahrscheinlichkeitsrechnung treten die Wörter „Zufall“ und „zufällig“ vor allem in Wortkombinationen und Wortverbindungen auf. Dazu gehören z. B. die Fachbegriffe Zufallsexperiment, zufälliges Ereignis, zufällige Auswahl und Zufallsstichprobe.

Bei diesen Begriffen haben die Wörter „Zufall“ bzw. „zufällig“ u. a. folgenden Bedeutungen, die sich von den umgangssprachlichen Verwendungen teilweise unterscheiden.

- (1) Das Wort „Zufall“ dient zur Bezeichnung der völligen Regellosigkeit, was oft durch die Wortverbindung „reiner Zufall“ noch unterstützt wird. Die Ergebnisse sind nicht vorhersehbar und können vom Menschen nicht beeinflusst werden. Man spricht von einer „zufälligen“ Auswahl, wenn für alle Objekte die gleiche Wahrscheinlichkeit besteht, ausgewählt zu werden.

*Beispiele:*

A: Das Werfen eines Würfels wird als Zufallsexperiment und die dabei auftretende Augenzahl als zufälliges Ereignis bezeichnet. Die Augenzahl ist nicht vorhersehbar und kann nicht vom Menschen beeinflusst werden.

B: Beim „blinden“ Ziehen einer Kugel aus einem undurchsichtigen Ziehungsbehälter haben alle Kugeln die gleiche Chance gezogen zu werden. Das Ziehungsergebnis ist nicht vorhersehbar und lässt sich durch den Menschen, der die Kugel zieht, nicht beeinflussen.

- (2) Sobald der Mensch die Ergebnisse des Vorgangs beeinflussen kann, wird diese Situation nicht mehr als „zufällig“ bezeichnet.

*Beispiele:*

A: Wenn eine Schülerin aufgefordert wird, eine beliebige Zahl von 1 bis 6 zu nennen, so wird dies nicht mehr als ein zufälliges Ereignis bezeichnet.

B: Wenn der Ziehungsbehälter durchsichtig ist oder man in den Behälter hinein sehen kann, wird das Ziehen nicht mehr als eine zufällige Auswahl und das Ziehungsergebnis nicht als ein zufälliges Ereignis bezeichnet.

Diese Bedeutungen sind im Denken der Mathematiker sowie vieler Fachdidaktikern und Lehrer fest verankert und beeinflussen in erheblichem Maße die Vorstellungen und damit den Umfang der Begriffe „Zufallsexperiment“ und „zufälliges Ereignis“. Im Gegensatz zu diesen engen Begriffsvorstellungen, die meist beim Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Rolle spielen, werden aber die Resultate und Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilenden Statistik in zahlreichen Wissenschaften wie der Medizin, der Soziologie, der Psychologie oder den Erziehungswissenschaften angewendet, in denen durchaus handelnde Person betrachtet werden, die Einfluss auf die Ergebnisse der Vorgänge haben. Man kann mit stochastischen Mitteln auch das Aufsagen von Zahlen zwischen eins und sechs sowie das Ziehen aus einer gläsernen Urne untersuchen.



## 1.2.2 Empfehlungen und Hinweise für den Unterricht in der Primarstufe

Wir empfehlen, in der Primarstufe die Bezeichnung „Stochastik“ nicht zu verwenden. Es ist ausreichend vom Umgang mit Daten und Wahrscheinlichkeiten sprechen.

Die Bezeichnung „stochastische Situation“ sollte ebenfalls nicht eingeführt werden, auch hier können mit den Wörtern Daten und Wahrscheinlichkeit diese Situationen charakterisiert werden.

Die Wörter „Zufall“ und „zufällig“ sollten im Primarstufenunterricht ausschließlich in ihren umgangssprachlichen Bedeutungen benutzt werden. Als Beitrag zur allgemeinen Bildung der Schülerinnen und Schüler können in der 4. Klasse die Vorstellungen und Kenntnisse zur Verwendung des Wortes „Zufall“ systematisiert und vertieft werden. Dabei geht es nicht darum, die Schüler von der Verwendung des Wortes „Zufall“ in seinen oben dargelegten Bedeutungen abzubringen, sondern diese im Sinne der Festigung der Prozessbetrachtung mit anderen Formulierungen zum Ausdruck zu bringen. Dabei sollten nur die umgangssprachlichen Bedeutungen thematisiert werden. Die besonderen Bedeutungen des Wortes Zufall bzw. zufällig in der Stochastik können erst Gegenstand des Unterrichts in der Sekundarstufe I sein.

Die Schüler könnten dazu die Aufgabe erhalten auf einen Zettel zu schreiben, was ihnen beim Wort Zufall einfällt. Jeder Schüler sollte mindestens einen vollständigen Satz, der das Wort Zufall oder zufällig enthält, aufschreiben. Ausgewählte Antworten der Schüler können dann an der Tafel nach den Bedeutungen gruppiert befestigt werden. Als eine Hausaufgabe könnte die Schüler auch aufgefordert werden, einen ihnen bekannten Erwachsenen zu fragen, was er unter Zufall versteht.

Es ist aus unserer Sicht nicht sinnvoll, in der Primarstufe mathematische Begriffe und Wortkombinationen mit „Zufall“ bzw. „zufällig“ einzuführen. Insbesondere halten wir die Bezeichnung „Zufallsexperiment“, die in den Bildungsstandards verwendet wird, aus diesem und auch aus weiteren Gründen nicht für sinnvoll.

Zur Beschreibung stochastischer Situationen im gesamten Mathematikunterricht schlagen wir die Verwendung eines Prozessmodells vor, dass im folgenden Abschnitt erläutert wird.

## 1.3 Zur Prozessbetrachtung stochastischer Situationen

### 1.3.1 Fachliche Grundlagen

#### ***Was ist das Ziel einer Prozessbetrachtung?***

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, stochastische Situationen systematisch zu untersuchen. Eine davon ist die Prozessbetrachtung, die insbesondere an der Universität Rostock entwickelt, im Unterricht erprobt und in Materialien für Lehrer und Schüler umgesetzt wurde.

Das Besondere der Prozessbetrachtung ist, dass nicht nur das betrachtet wird, was eingetreten ist, sondern auch der Prozess untersucht wird, in dessen Resultat diese Ergebnisse eintreten können.

Anstelle des Wortes „Prozess“ verwenden wir im Unterricht die Bezeichnung „Vorgang“, da dieses Wort in der Umgangssprache häufiger vorkommt und insbesondere für jüngere Schüler leichter zugänglich ist.

Die Prozessbetrachtung kann sowohl beim Umgang mit Wahrscheinlichkeiten als auch beim Arbeiten mit statistischen Daten verwendet werden und stellt somit eine gemeinsame begriffliche Grundlage für die beiden großen Teilgebiete der Stochastik dar.

Mit der Prozessbetrachtung und einem präformalen Wahrscheinlichkeitsbegriff können zahlreiche Bedeutungen und Verwendungen des Begriffes „Zufall“ in der Umgangssprache und in den Wissenschaften in neuer Weise formuliert werden.

## Was sind die Bestandteile einer Prozessbetrachtung?

### 1. Bestimmung des ablaufenden Vorgangs

Das Wort „Vorgang“ ist in der Umgangssprache eine Bezeichnung für etwas, was vor sich geht, abläuft oder sich entwickelt. Diese Bedeutung ist der Kern des von uns verwendeten Begriffs „Vorgang“. Somit ist ein unmittelbarer Anschluss an die inhaltlichen Vorstellungen der Schüler aus der Umgangssprache möglich.

Zu den Aspekten des Begriffs Vorgang, die im Stochastikunterricht in der Grundschule angelegt werden sollte, gehören weiterhin noch folgende Gedanken:

- Vorgänge treten in allen Bereichen des Lebens auf.  
*Beispiele:*
  - A: Arne würfelt.
  - B: Ein Baum wächst im Garten.
  - C: Claras Einstellungen zu Tieren entwickeln sich.
  - D: David schreibt eine Mathematikarbeit.
  - E: Eva überlegt, ob sie in der Arbeit die Aufgaben richtig gelöst hat.
- Jeder Vorgang hat einen Anfang und ein Ende.
- Man kann Vorgänge betrachten, die schon abgeschlossen sind (Arne hat gewürfelt.), die andauern (das Wachstum des Baumes, die Entwicklung der Einstellung von Clara zu Tieren) und noch bevor stehen (der nächste Wurf von Arne).
- Es gibt Vorgänge, die sehr kurz sind (Würfeln), die etwas länger dauern (Schreiben einer Arbeit) und die sehr lange dauern (Wachstum eines Baumes).
- Es gibt Vorgänge, deren Ergebnis man nicht beeinflussen kann (Würfeln), und Vorgänge, bei denen die beteiligten Personen das Ergebnis beeinflussen können (Schreiben einer Arbeit).
- Man muss unterscheiden zwischen dem, was abläuft und dem, was beim Ablauf eines Vorgangs eintreten kann.

*Beispiele:*

Was läuft ab?	Was kann eintreten?
A: Arne würfelt.	Arne kann eine 2 würfeln.
B: Ein Baum wächst im Garten.	Der Baum ist größer als 2 m.
C: Claras Einstellungen zu Tieren entwickeln sich.	Clara mag am liebsten Katzen.
D: David schreibt eine Mathematikarbeit.	David bekommt eine 2.
E: Eva überlegt, ob sie in der Arbeit die Aufgaben richtig gelöst hat.	Eva glaubt, dass sie alle Aufgaben richtig gelöst hat.

Nach dem Ablauf des Vorgangs sind bestimmte Zustände eingetreten (der Würfel liegt in einer bestimmten Lage auf dem Tisch), haben sich bestimmte Eigenschaften von Objekten oder von Personen herausgebildet (Claras Einstellungen zu Tieren), sind neue Objekte entstanden (die Arbeit von David) oder haben sich Gedanken im Kopf eines Menschen gebildet (die Vermutungen von Eva zur Richtigkeit ihrer Lösungen).

Diese Dinge existieren alle auf der Realebene (der Wirklichkeit) und sind unabhängig von Betrachtungen eines Menschen. Ein Baum wächst und die Einstellungen von Clara zu Tieren entwickeln sich auch ohne, dass dies näher betrachtet oder untersucht wird.

Erst im folgenden Schritt beginnt ein schrittweiser Prozess der Modellierung der Wirklichkeit.

## 2. Bestimmung eines zu betrachtenden Merkmals

Die nach Ablauf des Vorgangs entstandenen Zustände, Eigenschaften, Objekte oder Gedanken besitzen zahlreiche **Merkmale**. Man sagt auch, sie sind Träger von Merkmalen. Wenn der Vorgang mit Mitteln der Statistik oder der Wahrscheinlichkeitsrechnung näher untersucht werden soll, muss man sich zunächst entscheiden, welches Merkmal man betrachten will. Dabei gibt es oft mehrere Möglichkeiten.

*Beispiele:*

Was ist eingetreten?	Was interessiert mich?
A: Der Würfel liegt auf dem Tisch.	(1) Welche Augenzahl liegt oben? (2) Liegt eine 6 oben?
B: Der Baum ist jetzt 2 Jahre gewachsen.	(1) Wie hoch ist der Baum? (2) Ist der Baum größer als 2 m?
C: Clara hat bestimmte Einstellungen zu Tieren entwickelt.	(1) Welche der folgenden Tiere würde Clara gern als Haustier haben: Hund, Katze, Vogel, Hamster? (2) Wie sehr mag Clara Katzen?
D: David hat eine Arbeit geschrieben.	(1) Wie viele Punkte bekommt er? (2) Wie ist seine Leistung einzuschätzen?
E: Eva hat bestimmte Vermutungen zur Richtigkeit ihrer Lösungen in der Arbeit.	(1) Wie sicher ist sie sich bei jeder Aufgabe? (2) Wie sicher ist sie, dass alle Lösungen richtig sind?

## 3. Festlegung des Messverfahrens zur Bestimmung der Ausprägungen des Merkmals und Ermittlung der Ergebnisse

Nachdem man sich für ein interessierendes Merkmal entschieden hat, muss überlegt werden, wie man die konkrete Ausprägung (die Werte) des Merkmals bestimmen kann. Dazu werden Geräte, Skalen oder Methoden zum Messen benötigt. Manchmal ist es möglich, für ein Merkmal unterschiedliche Skalen zum Messen zu verwenden.

*Beispiele:*

Was ist eingetreten? Was interessiert mich?	Wie ermittle ich die Ausprägungen (Werte) des interessierenden Merkmals?
A: Der Würfel liegt auf dem Tisch. Mich interessiert die oben liegende Augenzahl.	Ich zähle die Punkte auf der oben liegenden Fläche.
B: Der Baum ist jetzt 2 Jahre gewachsen. Mich interessiert die Beschaffenheit des Baumes.	– Ich schätze die Beschaffenheit des Baumes mit einer fünfstufigen Skala ein. – Ich messe die Höhe und dem Umfang des Baumstammes und vergleiche mit Normwerten.
C: Clara hat Einstellungen zu Tieren entwickelt. Mich interessiert Ihr Lieblingstier.	– Ich nutze einen Fragebogen mit allen Tieren. – Ich frage Sie nach Ihrem Lieblingstier.
D: David hat eine Arbeit geschrieben. Mich interessiert seine Leistung in der Arbeit.	– Ich messe die Leistung mit einer Punkteskala. – Ich messe die Leistung mit der Notenskala.
E: Eva hat bestimmte Vermutungen zur Richtigkeit ihrer Lösungen in der Arbeit. Mich interessiert der Grad der Sicherheit ihrer Vermutungen.	– Ich messe den Grad der Sicherheit mit einer fünfstufigen Skala. – Ich messe den Grad der Sicherheit mit einer stetigen Skala von 0 % bis 100 %.

Nachdem die Messskala bzw. die Messmethode festgelegt wurde, können nun damit die konkreten Ausprägungen des Merkmals gemessen werden. Wir bezeichnen die dabei ermittelten Werte als **Ergebnisse des Vorgangs**. Bei statistischen Untersuchungen spricht man auch von **Daten oder Merkmalswerten**.

#### 4. Betrachtung der Bedingungen des Vorgangs

Wenn man die gemessenen Werte des Merkmals (z. B. die ermittelten Daten) oder die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse hinterfragen oder einschätzen will, müssen die **Bedingungen** betrachtet werden, die Einfluss auf den Vorgang haben. Man spricht anstelle von Bedingungen auch von **Einflussfaktoren**.

*Beispiele:*

Was ist eingetreten? Was interessiert mich?	Wovon hängt es ab, welches Ergebnis eintritt?
Der Baum ist jetzt 2 Jahre gewachsen. Mich interessiert die Beschaffenheit des Baumes.	<ul style="list-style-type: none"> <li>– vom Nährstoffgehalt des Bodens</li> <li>– von den Wasser- und Windverhältnisse</li> <li>– von der Baumart</li> </ul>
David hat eine Arbeit geschrieben. Mich interessiert seine Leistung in der Arbeit.	<ul style="list-style-type: none"> <li>– von seinen mathematischen Fähigkeiten</li> <li>– von seiner Vorbereitung auf die Arbeit</li> <li>– vom Anforderungsniveau der Aufgaben</li> </ul>

Die Bedingungen eines Vorganges können auf zwei verschiedenen Ebenen betrachtet werden, zum einen auf einer allgemeinen Ebene und zum anderen für einen konkreten Verlauf des Vorgangs.

*Beispiel:*

Das Wachstum eines Baumes wird durch allgemeine Bedingungen, wie den Nährstoffgehalt des Bodens, die Wasser- und Windverhältnisse oder die Baumart beeinflusst. Bei einem konkreten Baum an einem konkreten Standort müssen die Ausprägungen dieser Bedingungen betrachtet werden. Diese Ausprägungen sind die Ursachen für die Beschaffenheit des Baumes.

Mit der Einbeziehung von Bedingungen in die Prozessbetrachtung entstehen enge Bezüge zu den Betrachtungen von Gesetzen in den Naturwissenschaften, die auch stets nur unter bestimmten Bedingungen gelten.

#### 5. Betrachtung von Wiederholungen des Vorgangs

In der Statistik und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben wir es oft mit Massenerscheinungen und mehrfachen Wiederholungen eines Vorgangs zu tun. Bei unserer Prozessbetrachtung wird dagegen zunächst immer nur ein einzelner Vorgang in der bisher beschriebenen Weise untersucht.

Ob ein Vorgang wiederholt abläuft, ob mehrere Vorgänge parallel verlaufen oder ob Vorgänge überhaupt zusammengefasst werden können, wird von uns als ein extra zu untersuchendes Problem angesehen. Eine Zusammenfassung von Vorgängen zu einer Gesamtheit ist nur sinnvoll, wenn wesentliche Bedingungen gleich bleiben oder mindestens vergleichbar sind.

*Beispiele:*

Vorgang (V) Merkmal (M)	Wiederholungen Art der Wiederholungen	Bedingungen bei den Wiederholungen
V: Arne würfelt einmal. M: Augenzahl	Arne würfelt 60-mal. wiederholter Ablauf eines Vorgangs	Bei gleicher Unterlage und Wurftechnik können die Bedingungen als gleich angesehen werden.
V: Ein Baum wächst.	Alle Bäume eines Waldes	Wenn die Wachstumsbedingungen im gesam-

M: Höhe des Baumes	wachsen. paralleler Verlauf von Vorgänge	ten Wald und die Baumarten etwa gleich sind, können die Bedingungen als vergleichbar angesehen werden. Man kann z. B. die durchschnittliche Höhe der Bäume angeben.
V: David schreibt eine Mathematikarbeit. M: Note in der Arbeit	<p>a) David schreibt mehrere Arbeiten in einem Schuljahr. wiederholter Ablauf eines Vorgangs</p> <p>b) Alle Schüler der Klasse schreiben die gleiche Arbeit. paralleler Verlauf von Vorgängen</p>	<p>a) Die Bedingungen sind teilweise gleich (die mathematischen Fähigkeiten von David) und teilweise unterschiedlich (z. B. das jeweilige Thema der Arbeit). Mit dem Erteilen einer Jahresnote, werden die Bedingungen als vergleichbar angesehen.</p> <p>b) Die Bedingungen sind teilweise gleich (z. B. die gleiche Arbeit) und teilweise unterschiedlich (z. B. Fähigkeiten der Schüler). Mit der Angabe einer Durchschnittsnote für die Arbeit werden die Bedingungen als vergleichbar angesehen.</p>

Die Wiederholbarkeit eines Vorgangs unter gleichen Bedingungen ist also keine definierende Eigenschaft eines Vorgangs. Damit werden auch Vorgänge wie der Ablauf eines Fußballspiels oder die Gedanken eines Schülers zu seiner geschriebenen Arbeit als stochastische Situationen angesehen.

### Fälle bei einer Prozessbetrachtung

Bei einer Prozessbetrachtung können zwei verschiedene Fälle auftreten:

- Ein Vorgang hat bezüglich eines Merkmals nur ein mögliches Ergebnis
- Ein Vorgang hat bezüglich eines Merkmals mehrere mögliche Ergebnisse.

Dabei kann es sich durchaus um den gleichen Vorgang handeln.

*Beispiele :*

Vorgang, Bedingungen	Merkmal	Anzahl der Ergebnisse
Werfen eines Würfels auf einer glatten Unterlage	Endlage des Würfels (Seitenfläche, Kante, Ecke)	nur ein mögliches Ergebnis (Seitenfläche)
	obenliegende Augenzahl	6 mögliche Ergebnisse
Einem Lehrer fällt ein Stück Kreide aus der Hand.	Bewegungsrichtung der Kreide	nur ein mögliches Ergebnis (nach unten)
	Anzahl der Teilstücke nach dem Auftreffen auf dem Boden	viele mögliche Ergebnisse
Erhitzen von Wasser bis 100 °C unter Normalbedingungen	Wechsel des Aggregatzustand	nur ein mögliches Ergebnis (von flüssig zu gasförmig)

Der Fall, dass Vorgänge bezüglich eines Merkmals nur ein mögliches Ergebnis haben, kommt bei realen Erscheinungen selten vor. Bei der Modellierung von Erscheinungen in den Naturwissenschaften wird aber oft von geringen Abweichungen abgesehen und nur ein möglicher Wert betrachtet. Dies erleben die Schüler im Unterricht etwa bei der Durchführung von physikalischen Experimenten.

Vorgänge, die bezüglich eines Merkmals mehrere Ergebnisse haben, werden auch als zufällige Vorgänge oder Vorgänge mit Zufallscharakter bezeichnet. Wie wir schon begründet haben, wollen wir die Wörter „Zufall“ und „zufällig“ einzeln oder in Zusammensetzungen im Mathematikunterricht zumindest in der Primarstufe nicht als mathematische Fachbegriffe verwenden und sprechen deshalb nur von „Vorgänge mit mehreren möglichen Ergebnissen“.

## 1.3.2 Hinweise für den Unterricht

### **Wie sollte eine Prozessbetrachtung in der Grundschule durchgeführt werden?**

Im stochastischen Anfangsunterricht schlagen wir eine Beschränkung der Aspekte einer Prozessbetrachtung auf folgende wesentlichen Bestandteile vor. Die Schritte können in Form von Fragen formuliert werden.

- |  |  |
|--|--|
| 1. Bestimmung des Vorgangs             | Was läuft ab?                          |
| 2. Bestimmung eines Merkmals           | Was interessiert mich?                 |
| 3. Bestimmung der möglichen Ergebnisse | Was kann eintreten?                    |
| 4. Bestimmung einiger Einflussfaktoren | Wovon hängt es ab, was eintreten kann? |

### **An welchen Beispielen sollte eine Prozessbetrachtung eingeführt werden?**

Die Prozessbetrachtung sollte an Beispielen eingeführt werden, die folgende Eigenschaften haben.

- Die Schüler kennen die Vorgänge aus ihrem unmittelbaren Erleben.
- Die Schüler können einige Ursachen für das Eintreten unterschiedlicher Ergebnisse erkennen.
- Zu den betrachteten Vorgängen lassen sich einfache statistische Erhebungen durchführen.
- Bei der Betrachtung der Vorgänge erfolgt keine Diskriminierung einzelner Schüler.

Zu den Vorgängen bzw. Merkmalen, die für eine Prozessbetrachtung aus verschiedenen Gründen *nicht oder weniger geeignet* sind gehören körperliche Entwicklungsprozesse (Körpergewicht), Entwicklung der Familiengröße (Anzahl der Kinder), Einkaufen (Wert der gekauften Produkte) oder Verpackungsvorgänge (z. B. Häufigkeit der Farbe der Schokolinsen in einer Tüte).

Eine Prozessbetrachtung sollte auch gelegentlich bei der Planung und Auswertung statistischer Untersuchungen vorgenommen werden. Dabei können der Prozess der Datenerhebung als auch der Prozess der Entstehung der Daten betrachtet werden.

### **Wie kann die Entwicklung gestuft werden?**

In der *Klasse 1* sollte an einfachen Beispielen von Vorgängen im Alltag eines Schüler aber auch aus dem Glücksspielbereich der Begriff „Vorgang“ erarbeitet werden. Dabei sollte es nur darum gehen, dass die Schüler an konkreten realen Vorgängen, die sie selbst oder Mitschüler betreffen, die verschiedenen Ergebnismöglichkeiten erkennen sowie einige Ursachen für unterschiedliche Ergebnisse nennen können.

In die *Klassen 2 und 3* sollte die Prozessbetrachtung nach der Einführung eines präformalen Wahrscheinlichkeitsbegriffs mithilfe der genannten Aufgabentypen im Rahmen von Themen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und zur Statistik gefestigt werden.

In der *Klasse 4* sollte die Bezeichnung „Vorgang mit mehreren möglichen Ergebnissen“ verwendet werden. In diesem Zusammenhang können Betrachtungen zu den Vorstellungen der Schüler zum Zufallsbegriff erfolgen (vgl. Kap. 1.3).

## 2 Statistische Untersuchungen

### 2.1 Vorbemerkungen

#### **Was sind statistische Untersuchungen?**

Im Alltag werden die meisten Menschen mit Ergebnissen aus Untersuchungen und zahlreichen grafischen Darstellungen von Daten konfrontiert. Dabei ist es einerseits wichtig, diese lesen zu können, aber andererseits auch sich mit diesen kritisch auseinanderzusetzen und zu interpretieren. Die Befähigung zum Umgang mit Daten ist ein langwieriger Lernprozess, der in der Schule schon ab der 1. Klasse gut entwickelt werden kann.

Der Ablauf einer statistischen Untersuchung kann in drei Phasen untergliedert werden:

1. Statistische Untersuchung planen
2. Durchführen der statistischen Untersuchung
3. Auswertung von Daten
  - 3.1. Darstellung
  - 3.2. Interpretation

In der Grundschule werden die Grundlagen für die Planung, Durchführung und Auswertung statistischer Untersuchungen gelegt. Ziel ist es, am Ende der vierten Klasse die Schüler zu befähigen, einfache statistische Untersuchungen mit den ihnen zur Verfügung stehenden Mitteln durchzuführen. In den folgenden Kapiteln werden die fachlichen Grundlagen für die zu entwickelnden Schülerkompetenzen beschrieben. Hinweise für den Einsatz im Unterricht vervollständigen jedes Kapitel. Dabei wird die Reihenfolge nach den Lerninhalten und nicht nach dem Ablauf einer statistischen Untersuchung gewählt.

#### **An welchem durchgängigen Beispiel werden die fachlichen Inhalte dargestellt?**

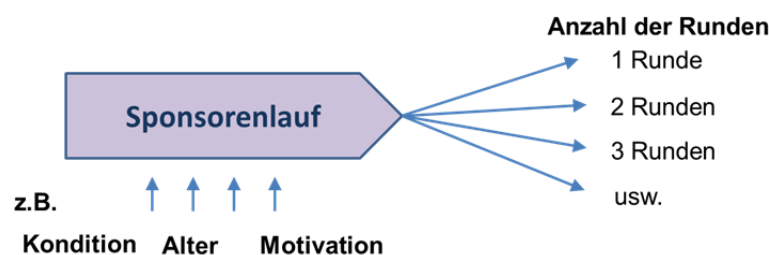
##### **Beispiel für den Einsatz in der Statistik**

Für die Vermittlung der fachlichen Inhalte wurde ein Beispiel gewählt, an welchem alle fachlichen Inhalte der Statistik dargestellt werden. Das Beispiel ist ein Sponsorenlauf in der Schule, der in vielen Schulen praktiziert wird. Ein Sponsorenlauf wird in der Regel wie folgt durchgeführt: Jeder Schüler läuft eine bestimmte Anzahl von Runden auf dem Sportplatz. Für die gelaufenen Runden bekommt er von vorher gesuchten Sponsoren (Eltern, Verwandte, Freunde) einen bestimmten Betrag, der dann an die Schule für einen bestimmten Zweck gesponsert wird.

##### **Prozessbetrachtung anhand des Beispiels**

Mithilfe des vorgegebenen Schemas können alle gestellten Fragen beantwortet werden. Wir betrachten den Vorgang „Sponsorenlauf“. Es interessiert hier das Merkmal „Anzahl der Runden“. Die Ergebnisse können 0 Runden, 1 Runde, 2 Runden usw. sein. Aufgrund des Alters der Schüler, der körperlichen Verfassung oder der Motivation können die Rundenzahlen variieren. Dies sind nur einige mögliche Bedingungen, die das Ergebnis beeinflussen können.

**Vorgang:** Ein Schüler nimmt am Sponsorenlauf teil.



## 2.2 Durchführung einer statistischen Untersuchung

### 2.2.1 Erfassung von Daten

#### 2.2.1.1 Fachliche Grundlagen

##### **Welche Grundbegriffe werden in allen statistischen Untersuchungen verwendet?**

Bei einer Datenerhebung werden interessierende Eigenschaften von Personen oder Objekten untersucht. Die Erhebung von Daten kann durch Befragungen, Beobachtungen oder Experimente erfolgen. Die Ergebnisse einer Datenerhebung müssen dabei immer objektiv, sicher und glaubwürdig sein. Mit dem Beispiel Sponsorenlauf kann folgende Befragung in der Klasse 2a durchgeführt werden: „Wie viele Runden bist du gelaufen?“ Zunächst wird bei der Erhebung der Daten das zu untersuchende **Merkmal** betrachtet (hier Anzahl der Runden). Es können verschiedene **Ergebnisse** auftreten (hier 0 1 2 usw.). Diese werden dann erfasst. Die einfachste Form der Datenerfassung ist die **Urliste**. Mit ihr werden die Daten während der Erhebung in der Reihenfolge des Auftretens notiert. Sie enthält eine Auflistung aller ermittelten Daten.

Die Schüler werden einzeln befragt, die Antworten werden jeweils nacheinander notiert:

*Beispiel:* 2 3 1 3 3 2 3 1 5 2 5 6 2 2 0 10 2 2 1 5

##### **Weitere Möglichkeiten der Datenerfassung**

Die Erfassung von Daten in einer Urliste ist eine unübersichtliche Darstellung. Sie wird aber immer dann erforderlich, wenn Daten erhoben werden, bei denen vorher mögliche Ergebnisse unbekannt sind. Sind diese bekannt, kann vor der Erhebung der Daten eine Tabelle (auch Häufigkeitstabelle genannt) angelegt werden.

Eine Urliste kann auch in eine **Häufigkeitstabelle** übertragen werden. Für das Erfassen bzw. Übertragen der Daten bietet sich eine **Strichliste** an. Dabei wird jedes Ergebnis mit einem senkrechten Strich erfasst. Der fünfte Strich wird quer gesetzt, sodass hier die Fünfer-Bündelung eine bessere Übersicht darstellt. Die Gesamtanzahl der einzelnen Ergebnisse wird dann als Zahl notiert. Diese wird als **absolute Häufigkeit** oder kurz **Häufigkeit** bezeichnet.

In unserem Beispiel könnte auch eine Häufigkeitstabelle angelegt und die Daten gleich damit erfasst werden. Zu den jeweiligen Ergebnissen werden die entsprechenden Häufigkeiten als Strichliste erfasst.

Anzahl der Runden	Strichliste	Häufigkeit
0		1
1		3
2		7
3		4
4		0
5		3
6		1
7		0
8		0
9		0
10		1

Die Strichliste wird nicht notwendig, wenn alle Befragten in einem Raum sind. Dann kann durch Auszählung der Stimmen gleich die Häufigkeit der Ergebnisse notiert werden. Diese kann nun schon zur



Auswertung der Daten genutzt werden. Zur besseren Veranschaulichung der Daten können graphische Darstellungen genutzt werden. (vgl. 2.2.3.1)

**Wie können unterschiedlich große Stichproben miteinander verglichen werden?**

Für den Vergleich unterschiedlich großer Stichproben wird die Berechnung der **relativen Häufigkeiten** erforderlich. Dadurch entstehen Anteile bzw. prozentuale Werte, die miteinander verglichen werden können. Die relative Häufigkeit ist der Quotient aus der absoluten Häufigkeit eines Ergebnisses und dem Umfang der Stichprobe. Sie kann als Bruch, Dezimalbruch oder auch in Prozent (dann auch als **prozentuale Häufigkeit** bezeichnet) angegeben werden.

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtanzahl}}$$

*Beispiel: Vergleich der Ergebnisse des Sponsorenlaufs beider zweiten Klassen:*

Klasse 2a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
absolute Häufigkeit	1	3	7	4	0	3	1	0	0	0	1
relative Häufigkeit	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{4}{20}$	0	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	0	0	$\frac{1}{20}$
proz. Häufigkeit	5 %	15 %	35 %	20 %	0 %	15 %	5 %	0 %	0 %	0 %	5 %

Klasse 2b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
absolute Häufigkeit	1	1	7	9	5	2	1	0	0	0	0
relative Häufigkeit	0	$\frac{1}{26}$	$\frac{7}{26}$	$\frac{9}{26}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{2}{26}$	$\frac{1}{26}$	0	0	0	0
proz. Häufigkeit	3,8 %	3,8 %	27 %	34,7 %	19,2 %	7,7 %	3,8 %	0 %	0 %	0 %	0 %

Da beide Klassen eine unterschiedliche Schüleranzahl haben, können für einen Vergleich nur die Anteile miteinander verglichen werden. Daraus ergibt sich hier, dass in der Klasse 2a 35 % der Schüler 2 Runden gelaufen sind und in der Klasse 2b nur 27 % der Schüler, obwohl die absoluten Häufigkeiten in beiden Klassen gleich sind.

**2.2.1.2 Hinweise für den Unterricht**

**Wie kann eine Datenerfassung in der Grundschule durchgeführt werden?**

**Datenerfassung im Anfangsunterricht**

Im Unterricht der Grundschule beginnt die Datenerfassung bei einfachen Befragungen mit zwei möglichen Ergebnissen, wie z. B. „Nimmst du am Sponsorenlauf teil?“ Jeder Schüler kann einen Steckwürfel oder einen Spielchip auf eines der Ergebnisse legen. Dabei erkennen die Schüler schnell, dass diese Form der Datenerfassung sehr unübersichtlich ist. Aus diesem Grund wird eine Möglichkeit der übersichtlichen Darstellung benötigt. Die Schüler könnten nun die Häufigkeiten in Fünfer-Bündel legen, damit besser gezählt werden kann. Aus dieser Bündelung sollte sich dann die Strichliste entwickeln. Hier kann von der Lehrkraft gefragt werden, wie gezählt werden kann, wenn keine Materialien vorhanden sind. Die Schüler werden dann auf die Finger kommen oder auch auf Striche an der Tafel. Dann kann zunächst die gleiche Befragung mithilfe der Striche an der Tafel durchgeführt werden. Es

wird schnell sichtbar, dass auch hier zum besseren Zählen die Striche gebündelt werden müssen. Dies kann zunächst durch Einkreisen von Fünfer-Bündeln erfolgen. Im nächsten Schritt wäre dann zu überlegen, wie gleich beim Zählen die Bündel festgelegt werden können und die Lehrkraft gibt dann die Variante der Strichdarstellung als einfachere Darstellung vor. Da zum einen die motorischen Fähigkeiten der Schüler im Anfangsunterricht noch nicht so ausgeprägt sind und zum anderen eine Strichliste erst durch die Bündelung mehrerer Häufigkeiten eine Verbesserung der Darstellung ist, empfiehlt sich hier die Einführung nach dem vollständigen Erschließen des 20er-Zahlenraumes. Eine andere Möglichkeit ist, dass die Darstellung einer Zahl mithilfe von Strichen den Schülern auch als eine Form der Zahldarstellung gezeigt werden kann. Beim Zählen von Objekten sollte sie deswegen eine Rolle spielen und auch schon hier eingeführt werden. Dabei muss deutlich werden, dass es einen Unterschied zwischen dem Zählen im Kopf und dem Erfassen der Anzahlen mittels der Strichliste gibt. Es geht hier nicht darum, die Gesamtanzahl zu ermitteln und danach diese als Strichbild darzustellen. Für das Erfassen der Anzahlen bieten sich verschiedene Zählbilder an.

### **Schwierigkeiten mit Strichlisten**

Bei der Erarbeitung der Strichliste müssen auch die motorischen Fähigkeiten der Schüler beachtet werden. Es kann durchaus zu Problemen bei der Erstellung einer Fünfer-Bündelung kommen. Hier sollte zunächst mit großen Strichen gearbeitet werden. Dabei ist die Lage des fünften Striches nicht entscheidend. Wichtig ist hier nur, dass er die anderen 4 Striche durchstreicht.

### **Umgang mit Urlisten**

Die Urliste kann später zur Erfassung von Daten mit vielen Ergebnissen eingeführt werden. Häufig wird sie in der zweiten Klasse zur Sammlung von Daten rund um das Wetter eingesetzt (z. B. Temperaturmessungen).

Für die Einführung ist sie sehr unübersichtlich und für die Schüler nicht gut erfassbar. Manchmal müssen aber vorhandene Urlisten in eine Häufigkeitstabelle übertragen werden. Dabei sollte der Schüler mit der Nichtschreibhand immer auf das erfasste Ergebnis tippen und dabei mit der Schreibhand den entsprechenden Strich in der Strichliste an der richtigen Stelle erstellen. Die Übertragung der Daten aus der Urliste in die Strichliste kann auch in Partnerarbeit erfolgen. Dabei liest ein Schüler die Daten vor und der andere füllt die Strichliste aus.

### **Einsatz von Häufigkeitstabellen**

Die Einführung einer Häufigkeitstabelle stellt eine neue Schwierigkeit für die Schüler da. Jetzt werden nicht mehr einzelne Objekte gezählt, sondern das zu zählende Objekt muss noch in einer Tabelle gefunden werden. Hier ist es sinnvoll, die Tabelle an der Tafel oder dann im Heft der Schüler vorzubereiten. Die Häufigkeitstabelle entsteht im Prozess der Datenerfassung. Hierzu sollte zunächst die erste Spalte mit den Ergebnissen erstellt werden. Nun werden in der zweiten Spalte die Daten mithilfe der Strichliste erfasst. Die Schüler müssen nun jeweils für das Auftreten eines Ergebnisses einen Strich in der entsprechenden Zeile erstellen. Nach Erfassung der Daten mithilfe der Strichliste ist diese Spalte abgeschlossen. Es kann wieder eine senkrechte Spaltentrennlinie gezogen werden. Dann wird die dritte Spalte mit den absoluten Häufigkeiten ausgefüllt werden. Dazu müssen die Fünfer-Bündel und die einzelnen Striche von jedem Ergebnis addiert werden. Die Gesamthäufigkeit wird als Ergebnis in die letzte Spalte als Zahl notiert. Dabei wird in der Grundschule noch nicht von der absoluten Häufigkeit gesprochen, denn es muss nicht zwischen der absoluten und relativen Häufigkeit unterschieden werden. Hier wird der Begriff Häufigkeit verwendet.

Da die Häufigkeitstabelle ein gewisses Abstraktionsvermögen der Schüler benötigt, sollte sie erst nach mehreren Übungen zur Strichdarstellung von Zahlen eingeführt werden.

### **Strichlisten und Urlisten im Beispiel Sponsorenlauf**

Mit dem Beispiel Sponsorenlauf kann die Anzahl der Runden von den Schülern in einer Häufigkeitstabelle erfasst werden. Dazu sollte eine Häufigkeitstabelle vorgegeben werden (1. Spalte: Namen der Schüler). Die Schüler können nun beim Lauf die Anzahl der Runden mithilfe der Häufigkeitstabelle

erfassen. Die zweite Möglichkeit der Datenerfassung (Urliste) kann von anderen Schülern parallel durchgeführt werden. Dabei können direkt beim Lauf die Namen der Schüler Runde für Runde nacheinander aufgeschrieben werden. Diese Daten müssen dann in eine Häufigkeitstabelle übertragen werden (siehe Umgang mit Urlisten).

### Umgang mit relativen Häufigkeiten

Eine Berechnung der relativen Häufigkeiten wird in der Grundschule nicht vorgenommen. Es könnte hier eine Vorbereitung erfolgen, dass man die entsprechenden Anzahlen der Schüler (Teilmenge, Gesamtmenge) nennt, um über das Verhältnis der einzelnen Merkmalsausprägung zur Gesamterhebung eine Aussage treffen zu können (4 von 20 Schülern sind 3 Runden gelaufen). Diese Angabe ist häufig in Lehrbüchern zu finden. Da die Schüler aber den Bruchbegriff noch nicht kennen, wird der Umgang mit der relativen Häufigkeit erst ab der 5.Klasse eine Rolle spielen.

## 2.2.2 Daten- und Skalenarten

### 2.2.2.1 Fachliche Grundlagen

#### *Welche Arten von Daten und Skalen können auftreten?*

Für die Darstellung von Daten und deren Interpretation müssen zunächst einige Vorüberlegungen gemacht werden, denn unterschiedliche Datenarten erfordern einen unterschiedlichen Umgang mit ihnen.

Bei einer statistischen Untersuchung wird zunächst das zu untersuchende Objekt mit dem interessierenden Merkmal betrachtet. Bei dem Sponsorenlauf ist der Vorgang des Laufens eines Schülers das zu untersuchende Objekt und es interessiert die Anzahl der gelaufenen Runden.

Weiterhin muss überlegt werden, mit welchem Messinstrument die Daten erfasst werden sollen oder mit anderen Worten, welche Skala zum Messen der Werte (der Ausprägungen des Merkmals) verwendet werden soll.

Mit einer **kategorialen Skala (Nominalskala)** werden **Kategorien** erfasst. Beispiele für Kategorien sind z. B. die Tierarten Katze, Hund, Pferd, ... beim Merkmal Lieblingstier oder die Ausprägungen männlich, weiblich beim Merkmal Geschlecht. Alle Kategorien stehen gleichberechtigt nebeneinander, man kann keine Rang- oder Reihenfolge angeben. Die mit einer kategorialen Skala erfassten Daten heißen **kategorialen Daten**.

Wird die Häufigkeit von Kategorien grafisch dargestellt, ist keine maßstäbliche Einteilung der Merkmalsachse notwendig. Die Reihenfolge der Kategorien auf der Achse ist beliebig, sie werden aber auf der Achse in der Regel in gleichen Abständen angeordnet. Berechnungen der meisten Kenngrößen sind mit kategorialen Daten nicht möglich.

Bei **ordinalen Skala (Rangskala)** stehen die Merkmalsausprägungen nicht mehr gleichberechtigt nebeneinander, sondern können in eine Reihenfolge gebracht werden. Die Daten, die mit ordinalen Skala erfasst werden, heißen **Rangdaten**. Zu den Rangdaten gehören z. B. die erreichten Platzierungen bei sportlichen Wettkämpfen, die Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten durch die Ausprägungen unmöglich, wenig wahrscheinlich, fifty-fifty, sehr wahrscheinlich, sicher. Auch Schulnoten zählen zu den Rangdaten.

Da der Abstand zwischen den einzelnen Daten nicht gleich ist, können bestimmte Berechnungen z. B. des arithmetischen Mittels aus mathematischer Sicht mit diesen Daten nicht vorgenommen werden.

Die dritte Messskala ist die **metrische Skala (Intervallskala)**. Diese Skala enthält ganze oder reelle Zahlen. Die damit erfassten Daten heißen **Messdaten**. Beispiele für Messdaten sind Temperaturen, Längen und Anzahlen.

Bei der Darstellung von Messdaten in einem Diagramm muss eine Einteilung der Achse mit gleichen

Abständen erfolgen. Alle Berechnungen zur Auswertung von Daten wie Mittelwerte und Streuung (vgl. 2.5, 2.6) können mit Messdaten durchgeführt werden.

Die Wahl des Messinstrumentes hat Auswirkungen auf die Art der Daten und damit auch auf die Erstellung von Diagrammen (Einteilung der Merkmalsachse) und die Berechnung statistischer Kenngrößen. Nur bei Messdaten muss ein Pfeil an die Merkmalsachse angetragen werden, da hier der Pfeil auf weitere mögliche Ergebnisse hinweist.

### ***Welche Arten von Merkmalen können unterschieden werden?***

Es werden **diskrete** und **stetige Merkmale** unterschieden. Ein Merkmal heißt diskret, wenn es nur endlich (oder abzählbar) viele Zahlenwerte annehmen kann oder nur in Kategorien angebar ist. Beispiele für diskrete Merkmale sind Anzahl der Geschwister, die Anzahl der Schüler in den Klassen einer Schule oder das Geschlecht. Ein stetiges Merkmal kann bei Verwendung einer geeigneten Skala (theoretisch) einen beliebigen Wert aus einem Intervall annehmen. Beispiele für stetige Merkmale sind die Körpergröße oder die Masse einer Schultasche.

## **2.2.2.2 Hinweise für den Unterricht**

### ***Müssen Grundschüler die verschiedenen Daten- und Merkmalsarten kennen?***

Diese Frage ist klar mit NEIN zu beantworten. Allerdings muss schon in der Grundschule die Grundlage für ein Verständnis der unterschiedlichen Merkmale gelegt werden. Dieses Grundverständnis wird beim Lesen und Zeichnen von Liniendiagrammen vermittelt (vgl. 2.2.4.1). Bei einigen Erhebungen werden in der Grundschule auch stetige Merkmale (Dauer des Frühstücks, Masse der Schultasche usw.) betrachtet. Hier sollte die Lehrkraft mögliche Ergebnisse vorgeben, damit die Schüler zum einen nicht bei der Auswertung der Daten zu viele Ergebnisse haben (die dann eventuell noch gruppiert werden müssten) oder die Schüler mit gebrochenen Zahlen umgehen müssen. Zum Beispiel bei der Dauer des Frühstücks werden nur ganze Minuten angegeben, die Schüler müssen ihre Werte auf- oder abrunden.

## **2.2.3 Möglichkeiten der grafischen Darstellung**

### **2.2.3.1 Fachliche Grundlagen**

Vor einer statistischen Erhebung und der damit verbundenen Sammlung von Daten und deren anschließende Auswertung muss überlegt werden, welche Form der Erfassung benutzt werden soll. Nicht jedes Diagramm eignet sich dabei für jede statistische Erhebung. Es werden zunächst folgende Arten von Diagrammen betrachtet: Streifendiagramm, Streckendiagramm, Kreisdiagramm, Flächendiagramm, Liniendiagramm und Bilddiagramm.

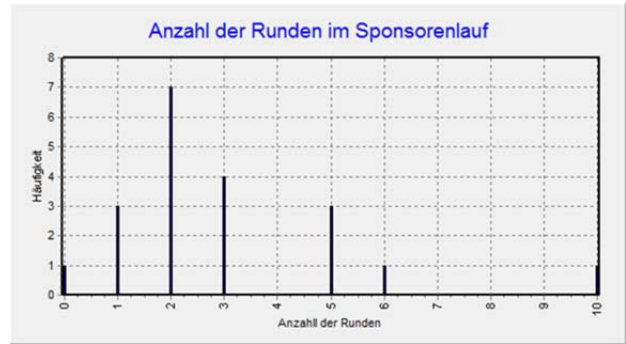
#### **Das Streifendiagramm und das Streckendiagramm**

In einem **Streckendiagramm** wird die Häufigkeit der Ergebnisse in einem rechtwinkligen Koordinatensystem als Strecke mit der entsprechenden Länge dargestellt. Das **Streifendiagramm** unterscheidet sich nur insofern von dem Streckendiagramm, dass statt der Strecke ein beliebig breiter Streifen benutzt wird. Die Strecken bzw. Streifen können sowohl senkrecht als auch waagrecht dargestellt werden. Am häufigsten sind die Ergebnisse auf der x-Achse und die Häufigkeiten auf der y-Achse dargestellt. Teilweise werden Streifendiagramme mit senkrechten Streifen auch **Säulendiagramm** und mit waagerechten Streifen **Balkendiagramm** genannt.

Streifendiagramm:



Streckendiagramm:



### Das Kreisdiagramm

In einem Kreisdiagramm werden die Anteile der Ergebnisse dargestellt. Somit können die einzelnen Anteile in der Grundgesamtheit in Beziehung gesetzt werden. Die Winkelgröße des jeweiligen Kreis-ausschnitts des Ergebnisses ist das Produkt aus der relativen Häufigkeit und  $360^\circ$ .

Für unser *Beispiel* ergeben sich dann folgende Winkelgrößen:

Rundenzahl der Klasse 2a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
absolute Häufigkeit	1	3	7	4	0	3	1	0	0	0	1
rel. Häufigkeit in %	5 %	15 %	35 %	20 %	0 %	15 %	5 %	0 %	0 %	0 %	5 %
Winkelgrößen	$18^\circ$	$54^\circ$	$126^\circ$	$72^\circ$	$0^\circ$	$54^\circ$	$18^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$18^\circ$

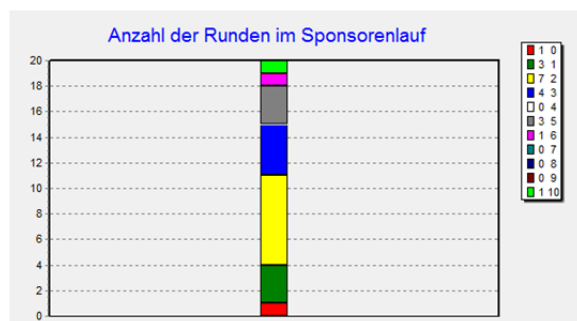


### Das Flächendiagramm

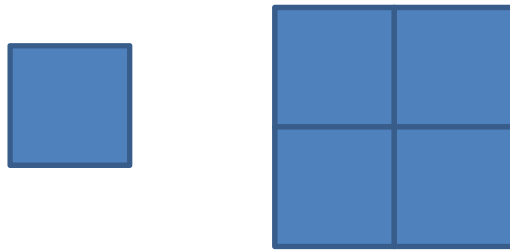
Es werden zwei Arten von Flächendiagrammen unterschieden. Zum einen können die Häufigkeiten als Anteile in einer Fläche (meist einem Rechteck) dargestellt werden.

Zum anderen können Häufigkeiten durch zu ihnen proportionale Flächen dargestellt werden.

Anzahl der Runden in einem Rechteck dargestellt



Anzahl von Teilnehmern als Flächen proportional zur Anzahl  
(Fläche links entspricht 1 Teilnehmer, Fläche rechts entspricht 4 Teilnehmern)



### Das Liniendiagramm

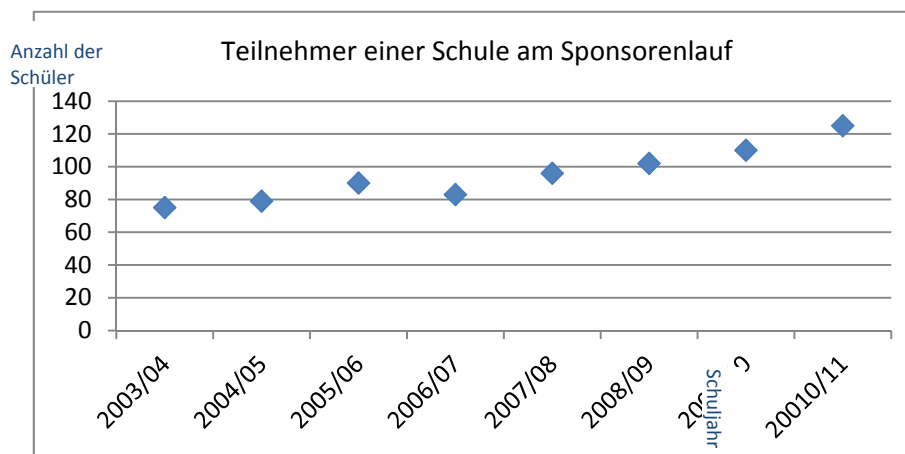
Das Liniendiagramm wird auch als **Kurvendiagramm**, **Streckenzug** oder **Entwicklungskurve** bezeichnet. Es gibt eine Entwicklung von Daten, meist über einem bestimmten Zeitraum, an. Hiermit soll besonders der Entwicklungstrend veranschaulicht werden.

In einem Liniendiagramm dürfen die Punkte nur verbunden werden, wenn es sich um ein stetiges Merkmal handelt.

*Beispiel:*

Teilnehmer einer Schule am Sponsorenlauf

Schuljahr	2003/04	2004/05	2005/06	2006/07	2007/08	2008/09	2009/10	2010/11
Anzahl	75	79	90	83	96	102	110	125










In diesem Beispiel können die einzelnen Werte nicht miteinander verbunden werden. Die Anzahl der Teilnehmer eines Jahres am Sponsorenlauf ist ein diskretes Merkmal.

### Das Bilddiagramm (auch Piktogramm)

Hier werden die Häufigkeiten durch Bilder, Symbole oder Zeichen veranschaulicht. Dabei werden passend zu den Merkmalen typische Bilder gewählt. Dabei steht ein Bild jeweils für eine bestimmte Anzahl eines Ergebnisses. Im Beispiel steht ein Bild für einen Schüler.

Beispiel:

Anzahl der Runden im Sponsorenlauf

0 Runden	1 Runde	2 Runden	3 Runden	4 Runden	5 Runden	6 Runden	7 Runden	8 Runden	9 Runden	10 Runden
										

### 2.2.3.2 Hinweise für den Unterricht

**Wie sollten die Schüler an das Erstellen von Diagrammen herangeführt werden?**

#### Einsatz von Kreisdiagrammen

In vielen Lehrbüchern werden zur Ausbildung der Kompetenz des Lesens und Interpretierens von Diagrammen Kreisdiagramme benutzt. Hier sollen die Schüler an diese Diagrammform herangeführt werden, indem sie die einzelnen Abschnitte (auch Tortenstücke genannt) an der Größe erkennen. Sie müssen dabei die dazugehörigen Daten finden und können dann einschätzen, welche Ergebnisse am häufigsten vorkommen (größtes Tortenstück). Das selbstständige Erstellen von Kreisdiagrammen wird erst in der Sekundarstufe I mit der Kenntnis der Prozentrechnung erarbeitet und spielt in der Grundschule keine Rolle.

#### Entwicklungskonzept zur Kompetenz „Darstellen von Diagrammen“

Die Kompetenzen zum Darstellen von Daten in Diagrammen können dabei schrittweise in den einzelnen Klassenstufen entwickelt werden. Hierbei sollte immer zunächst anschaulich gearbeitet werden, um die Denkentwicklung des Schülers zu unterstützen. Die Entwicklung der Diagrammerstellung kann wie folgt ablaufen:

#### Diagramme in Klasse 1

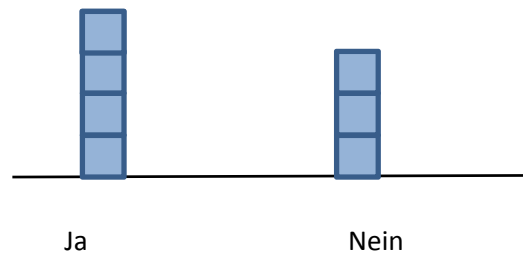
In dieser Klassenstufe sollte zunächst nur eine Diagrammart behandelt werden, um den Schülern zunächst den ersten Einblick in die Datenerfassung und Aufbereitung zu geben. Dabei ist die Behandlung der Strichliste und Häufigkeitstabelle im Vorfeld nicht zwingend notwendig. Als erste Diagrammart sollten die Schüler das Streifendiagramm kennenlernen. Dabei wird zunächst auf den Begriff „Streifendiagramm“ verzichtet.

Es sollte mit einfachen **Befragungen** mit nur **2 Ergebnissen** begonnen werden (z. B. Nimmst du am Sponsorenlauf teil? Hast du Haustiere? Kannst du schwimmen?). Die Schüler können die möglichen Ergebnisse schnell erfassen und ihre Entscheidung treffen. Die Daten können nun zunächst handelnd erfasst werden. Dazu bekommt jeder Schüler einen Steckwürfel und kann dann diesen auf das zutreffende Ergebnis legen. Eine andere Möglichkeit ist, dass sich die Schüler entsprechend ihrer Antworten gruppieren.

Die Steckwürfel bzw. Personen liegen bzw. stehen auf den entsprechenden Ergebnissen. Jetzt kann noch keine Aussage über die Häufigkeiten in den einzelnen Gruppen getroffen werden. Die Steckwürfel könnten nun zusammengesteckt werden. Es ergibt sich nun daraus die Höhe (später Länge des

Streifens im Diagramm). Auch die Schüler können sich hintereinander aufstellen, sodass aus der Länge der Schülerschlange Schlussfolgerungen gezogen werden können.

Mit derselben Befragung kann nun die Visualisierung in einem ersten „Streifendiagramm“ erfolgen. Dabei wird die waagerechte Achse mit den Ergebnissen als Gerade veranschaulicht und darunter werden die möglichen Ergebnisse notiert. Die Anzahl der Steckwürfel werden dann als Kästchen dargestellt (1 Kästchen = 1 Steckwürfel). Das Ausmalen der Kästchen kann auch durch Aufkleben von passenden Bildern ersetzt werden. Bei beiden Tätigkeiten kann es im Heft der Schüler durch ungenaues Arbeiten zu Fehlern kommen. Vorbereitete Merkmalsachsen auf größeren Kästchen können hier unterstützend wirken.



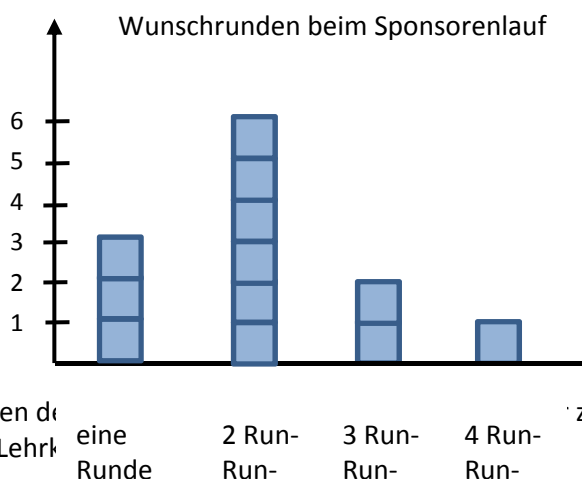
Statt der auszumalenden Kästchen für die entsprechende Häufigkeit der Ergebnisse können auch Kärtchen geklebt werden (mit dem jeweiligen Bild). Auf diese Art und Weise entsteht ein einfaches Bilddiagramm.

### Diagramme in Klasse 2

In der 2. Klasse werden die Kenntnisse zum Erstellen des Diagrammes weiterentwickelt. Die Befragung bzw. Sammlung von Daten erfolgt nun durch eine Auswahl von Merkmalen, die mehrere Ergebnisse besitzen. Hier könnten alle Fragen zu Lieblings-sachen, wie z. B. Lieblingsfarbe, Lieblingstier usw. benutzt werden. Es kann aber auch nach den zu erwartenden Runden im Sponsorenlauf gefragt werden.

Das Diagramm wird nun erweitert. Es enthält zum einen eine Überschrift als wesentliches Kriterium zur Lesbarkeit und zum anderen die senkrechte Achse, die die Häufigkeit angibt. Auf dieser wird schon die Achseneinteilung vorgenommen. Diese sollte aber noch kästchenweise aufgeteilt sein: 1 aufgetretenes Ergebnis = 1 Kästchen. Dabei wird hier für die Schüler nur der Begriff Achse oder für Häufigkeitsverteilungen auch Häufigkeitsachse verwendet. Die Bezeichnung als x- und y-Achse erfolgt erst in der Orientierungsstufe. Die senkrechte Achse wird notwendig, damit an ihr die Häufigkeiten der Ergebnisse abgelesen werden können.

Beispiel zur Frage: Wie viele Runden möchtest du beim Sponsorenlauf laufen?



Das Finden der zweiten Klasse schwierig und sollte zunächst von der Lehrkraft



### Diagramme in Klasse 3

In der dritten Klasse sollten dann die Schüler die Fähigkeit erlangen, selbst passende Überschriften zu Diagrammen zu erstellen. Dabei sollte von folgender Fragestellung ausgegangen werden, die auch beim Lösen von Sachaufgaben benötigt und kann hier trainiert werden. Es sollte die Frage gestellt werden: Worum geht es in der Befragung? Eine mögliche Schülerantwort wäre in unserem Beispiel: Es geht um die zu laufenden Runden im Sponsorenlauf. Daraus kann dann die Überschrift gebildet werden. Diese Teilhandlung kann mit verschiedenen Schaubildern und Diagrammen ohne Überschrift geübt werden.

Als nächstes kommt in dieser Klassenstufe die Benennung der Achsen als weiteres wesentliches Kriterium für die Lesbarkeit von Diagrammen hinzu. Das Diagramm ist nun mit allen wesentlichen Kriterien für dessen Lesbarkeit vollständig. Nun können weitere Diagrammart eingeführt werden. Dabei können zunächst am Streifendiagramm die Achsen verändert werden, sodass nun die Streifen waagrecht liegen. Die beiden Abbildungen werden miteinander verglichen. Es wird von den Schülern festgestellt, dass sich beide Diagramme nur in der Lage der Streifen unterscheiden. Da sich das Streckendiagramm nicht wesentlich (nur in der Breite der Streifen) von Streifendiagramm unterscheidet, kann es nun als weitere Diagrammart eingeführt werden. Dabei können auch wieder beide Diagrammart (Streifen- und Streckendiagramm) miteinander verglichen werden.

In Verbindung mit dem Sachunterricht und der Wetterbeobachtung wird das Liniendiagramm eingeführt. Hier sollten zunächst Diagramme gelesen werden, damit die Schüler mit dieser Diagrammart vertraut gemacht werden. Danach können auch Liniendiagramme erstellt werden (gemeinsame Temperaturmessung).

### Diagramme in Klasse 4

In der 4. Klasse wird mit größeren Datenmengen gearbeitet. Dabei macht es sich erforderlich, die Häufigkeitsachse anders einzuteilen, denn eine Achseneinteilung 1 Ergebnis = 1 Kästchen oder 1 cm reicht nun nicht mehr aus. Da eine richtige Achseneinteilung einigen Schülern auch in höheren Klassen Schwierigkeiten bereitet, sollte zunächst die Lehrkraft die Achseneinteilung vorgeben. Dies erfolgt mit der Angabe „1 cm steht für ...“. Dann erfolgen zunächst einfache Übungen zur Entwicklung dieser Teilhandlung wie z. B. Du hast eine 10 cm lange Achse. Teile diese in 100er Schritte ein. Ziel dieser Klassenstufe ist das sichere und vollständige Zeichnen eines Diagrammes aus den vorhandenen oder vorher erhobenen Daten. Dabei sind folgende Angaben in einem Diagramm wichtig. Die Fähigkeit der Achseneinteilung sollte hier erstes Grundverständnis beinhalten (gleiche Abstände). Das Bilddiagramm wird hier als eine weitere Möglichkeit der Darstellung größerer Datenmengen eingeführt. Hierbei wählen die Schüler die Bilder mit größeren Verhältnissen aus, z.B. 1 Bild steht für 100 Ergebnisse.

Bis zum Ende der Klassenstufe 4 sollten folgende Kompetenzen entwickelt sein:

- (1) Zeichnen eines Häufigkeitsdiagramms mit
  - Erstellen einer Überschrift (Titel des Diagrammes)
  - Beschriftung der beiden Achsen
- (2) Erstellen von Liniendiagrammen in vorgegebenen leeren Diagrammen
- (3) Erstellen von Bilddiagrammen bei größeren Häufigkeiten

## 2.2.4 Lesen und Interpretieren von Diagrammen, Fehler in Diagrammen

### 2.2.4.1 Fachliche Grundlagen

Das Erstellen und Lesen von Diagrammen hängen sehr eng miteinander zusammen. Das Lesen von Diagrammen und die richtige Interpretation der dargestellten Daten ist eine wesentliche Kompetenz für die Bewältigung des täglichen Lebens. In vielen Medien werden Daten in einer Auswertung manipuliert um die Informationen entsprechend einem bestimmten Anliegen darzustellen. Um diese Manipulationen erkennen zu können, muss verstanden worden sein, wie Diagramme gelesen werden müssen und worauf ein Leser achten muss. Die erste Manipulation kann in der Planung und Durchführung der Datenerhebung vorgenommen werden (vgl. 2.7). Auch am Diagramm können Manipulationen vorgenommen werden. Aus diesem Grund sollte bei einer Diagramminterpretation wie folgt vorgegangen werden:

1. Verschaffen eines groben Überblicks (Überschrift, Achsenbeschriftungen).
2. Beantwortung der Fragen: Was wurde untersucht? Welche Aussagen kann man dem Diagramm entnehmen?
3. Gibt es Einzelinformationen, die wesentlich sind? Welche Aussagen können gebündelt werden?

Folgende Merkmale sollte ein richtig erstelltes Diagramm aufweisen:

- Das Diagramm enthält eine neutrale, der Fragestellung entsprechende Überschrift.
- Die Achse mit der Darstellung der Häufigkeit muss **bei null beginnen** und ist **gleichmäßig eingeteilt**.
- Die Achse mit der Darstellung der Ergebnisse sollte **gleichmäßig eingeteilt** sein und **alle** Ergebnisse enthalten.
- Die vorhandenen Achsen müssen beschriftet sein.
- Werden Häufigkeiten durch Flächen oder Körper dargestellt, müssen Flächeninhalt bzw. Volumen proportional zu den Häufigkeiten sein.

### 2.2.4.2 Hinweise für den Unterricht

Mit dem in Kapitel 2.2.3.2 beschriebenen Entwicklungskonzept zum Zeichnen von Diagrammen sollten die Schüler ab der dritten Klasse in der Lage sein, ein Diagramm mit allen wesentlichen Bestandteilen zu erstellen. Die Umkehraufgabe zu dieser Aufgabe heißt demzufolge: „Überprüfe, ob folgendes Diagramm richtig erstellt wurde.“ bzw. „Schau dir das folgende Diagramm an. Welche wichtigen Angaben fehlen?“

Weitere Übungen zum Lesen und Interpretieren sollten die Entwicklung einzelne Teilhandlungen beim Erstellen von Diagrammen fördern. Diese Teilhandlungen sind: Finden von Überschriften zu Diagrammen, Benennung der einzelnen Achsen, Einteilung der Achse. Zum Lesen und Interpretieren von Diagrammen kann ein Merkblatt verwendet werden. Dadurch wird den Schülern eine gewisse Vorgabe zur Verfügung gestellt, die einen roten Faden in einer Gesamtinterpretation darstellt. Dieses Merkblatt kann auch zur Bewertung von erstellten Diagrammen als Grundlage einer Benotung benutzt werden.

Das Lesen von Diagrammen findet aber auch immer parallel zum Erstellen von Diagrammen statt. Die erstellten Diagramme können dann also auch von den Schülern gelesen und ausgewertet werden. Dabei können einfache Werte abgelesen werden (z. B. häufigstes Ergebnis, Ergebnis mit der geringsten Häufigkeit)

## 2.3 Auswertung statistischer Untersuchungen

### 2.3.1 Analyse von Häufigkeitsverteilungen

#### 2.3.1.1 Fachliche Grundlagen

##### *Was sind Häufigkeitsverteilungen?*

Zur statistischen Beschreibung von Daten mit einer damit verbundenen Auswertung werden Häufigkeitsverteilungen genutzt. Eine Häufigkeitsverteilung ist die Zuordnung der Häufigkeiten zu den einzelnen Ergebnissen. Diese können in Tabellen oder auch Diagrammen dargestellt werden.

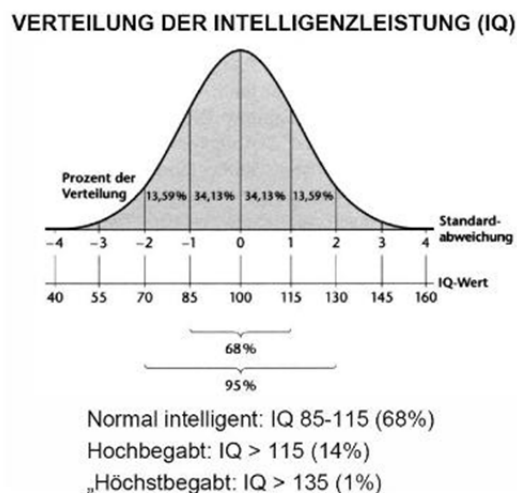
##### *Welche typischen Formen von Häufigkeitsverteilungen gibt es?*

Werden die Häufigkeitsverteilungen in einem Diagramm veranschaulicht, so kann man bestimmte Typen von Verteilungsformen unterscheiden. Die Verteilungsformen lassen sich nach folgenden Merkmalen charakterisieren.

- Ist die Verteilung eingipflig oder mehrgipflig?
- Ist die Verteilung linksschief, symmetrisch oder rechtsschief?
- Ist die Verteilung breitgipflig oder schmalgipflig?

Weiterhin können noch spezielle Formen von Verteilungen, wie eine glockenförmige Verteilung, eine Gleichverteilung, eine abnehmende oder zunehmende Verteilung unterschieden werden. Die grafische Darstellung einer bestimmten Verteilung gibt Hinweise auf den Lage der häufigsten Werte und die Streuung, welche in den folgenden Kapiteln genauer beschrieben werden.

Eine sehr bekannte Verteilung ist die Darstellung der allgemeinen Intelligenz des Menschen. Die dargestellte Verteilung heißt **Normalverteilung**. Sie ist glockenförmig und eingipflig.



Quelle: [http://www.hochbegabt.ch/images/products/165/Verteilung\\_p.jpg](http://www.hochbegabt.ch/images/products/165/Verteilung_p.jpg)

Im Vergleich zur Normalverteilung kann die Verteilung schmaler oder breiter (breitgipflig oder schmalgipflig) sein. Hieraus ist dann die Streuung (vgl. 2.3.3.1) ablesbar. Weiterhin kann die Verteilung einen oder mehrere Gipfel besitzen und linksschief bzw. rechtsschief sein, welches Aufschluss über die Anzahl bzw. die Lage des Maximums (der Maxima) gibt.

### ***Welche Kenngrößen der Häufigkeitsverteilungen gibt es?***

In der Datenauswertung wird zwischen den **statistischen Kenngrößen der Lage** und **der Streuung** unterschieden. Die Kenngrößen der Lage sind die Mittelwerte. Diese beschreiben die mittlere Lage der Häufigkeitsverteilung. Es gibt verschiedene Mittelwerte. Dazu gehören der **Modalwert**, das **arithmetische Mittel** und der **Median**, deren Verwendung von der Verteilungsform und der Datenart abhängig sind. Die Kenngrößen der Streuung beschreiben, wie die Werte um den Mittelwert verteilt sind, sie werden auch Streuungsmaße genannt.

## **2.3.2 Beschreibung und Exploration von Daten**

### **2.3.2.1 Fachliche Grundlagen**

#### ***Was ist der Unterschied zwischen der beschreibenden Statistik und der explorativen Datenanalyse (EDA)?***

Die **beschreibende Statistik** dient der komprimierten, übersichtlichen und prägnanten Beschreibung von vorliegenden Daten. Neben der grafischen Darstellung von Daten werden die statistischen Kenngrößen benötigt, die die gesamten Daten möglichst gut repräsentieren. Zu ihnen zählt man insbesondere die Mittelwerte und Streuungsmaße. Die Berechnung dieser Werte ist insbesondere bei größeren Datenmengen mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden.

Die **Explorative Datenanalyse (EDA)** ist ein erst in neuerer Zeit entwickeltes Teilgebiet der Statistik. Sie geht über die reine Beschreibung der Daten hinaus und ermöglicht es zusätzlich, nach unbekanntem Strukturen in Datenmengen zu suchen und auf diesem Wege Vermutungen über Zusammenhänge zu finden.

Die Besonderheit der EDA besteht aber auch darin, dass für die Ermittlung der verwendeten Kenngrößen und Diagramme ein vergleichsweise geringer Aufwand erforderlich ist. Wenn die Daten der Größe nach geordnet sind, können die Kenngrößen durch Abzählen ermittelt werden. Zu den Diagrammarten in der explorativen Datenanalyse zählen das **Stamm-Blätter-Diagramm** und der **Boxplot**. Für den Boxplot werden die statistischen Kenngrößen **Minimum**, **Maximum**, der **Median** und die **Viertelwerte** benötigt.

### **2.3.2.2 Hinweise für den Unterricht**

Von den statistischen Kenngrößen, die in der beschreibenden Statistik verwendet werden, können in der Primarstufe nur das arithmetische Mittel in einfachen Fällen, der Modalwert und die Spannweite ermittelt werden.

Es können in der Primarstufe auch Grundvorstellungen und Methoden zur Ermittlung des Medians vermittelt werden.

## **2.3.3 Methoden der Beschreibenden Statistik**

### **2.3.3.1 Fachliche Grundlagen**

#### ***Welchen Arten von statistischen Kenngrößen gibt es?***

Es wird zwischen den **Lagemaßen** und den **Streuungsmaßen** unterschieden. Die Lagemaße, die auch allgemein als Mittelwerte bezeichnet werden, charakterisieren die Lage prägnanter Werte. Dazu gehören das **arithmetische Mittel** und die **Modalwerte**.

Die Streuungsmaße charakterisieren die Breite und Konzentration der Daten um einen Mittelwert. Zu den Streuungsmaßen gehören die **Spannweite**, die **mittlere Abweichung**, die **Varianz** und die **Standardabweichung**.

**Wie kann das arithmetische Mittel berechnet und interpretiert werden?**

Das arithmetische Mittel ist der am häufigsten benutzte Mittelwert. In der Fachsprache werden die Begriffe Durchschnitt und arithmetisches Mittel meist als Synonyme verwendet.

Anstelle vom arithmetischen Mittel spricht man oft nur vom Mittelwert. Dies ist aus fachlicher Sicht nicht korrekt, da es mehrere Mittelwerte gibt. In der Umgangssprache ist es aber üblich, nur von Mittelwert zu sprechen, da andere Mittelwerte nicht als solche angesehen werden.

Das arithmetische Mittel kann nur bei Messdaten verwendet werden. Zur Berechnung wird die Summe aller Daten gebildet und dann diese Summe durch die Anzahl der Daten dividiert. Daraus ergibt sich das arithmetische Mittel  $\bar{x}$ .

**Allgemeine Berechnungsvorschrift:**

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Das bedeutet für unser Beispiel der Anzahl der Runden im Sponsorenlauf der Klasse 2a:

$$\bar{x} = \frac{0+1+1+1+2+2+2+2+2+2+2+2+3+3+3+3+5+5+5+6+10}{20} = 3$$

Es ist auch möglich aus der Häufigkeitstabelle die Häufigkeiten der Merkmalswerte abzulesen, diese mit dem jeweiligen Merkmalswert zu multiplizieren, die Summen zu addieren und durch die Anzahl zu dividieren.

**Berechnungsvorschrift mit absoluten Häufigkeiten:**

$$\bar{x} = \frac{H_1 \cdot x_1 + H_2 \cdot x_2 + \dots + H_n \cdot x_n}{n} \quad (H_i \text{ sind die absoluten Häufigkeiten})$$

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 10}{20} = 3$$

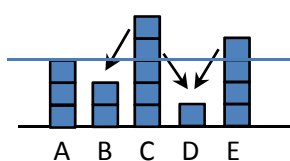
**Interpretation des arithmetischen Mittels als Ausgleichswert**

Das arithmetische Mittel kann auch als Ausgleichswert betrachtet werden. Dies ist dann möglich, wenn man die verschiedenen Anzahlen zumindest gedanklich gleichmäßig verteilen kann.

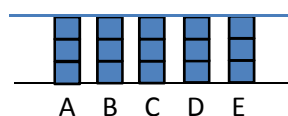
*Beispiel:*

5 Schüler wollen ihre gelaufenen Runden beim Sponsorenlauf gleichmäßig verteilen. Schüler A lief 3 Runden, Schüler B 2 Runden, Schüler C 5 Runden, Schüler D 1 Runde und Schüler E 4 Runden.

vorher:



nachher:

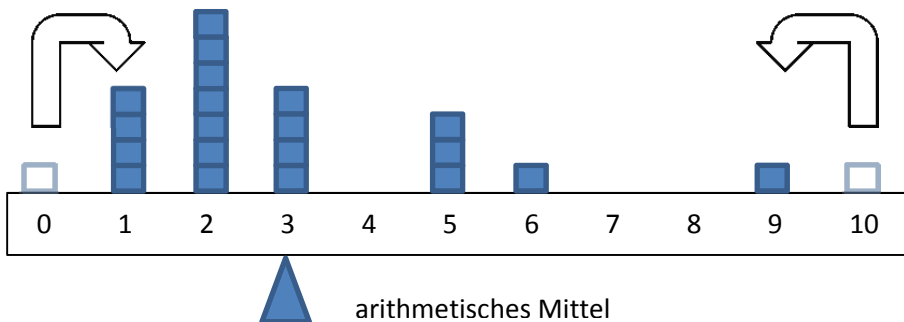


Durch das Verteilen ergibt sich dann an jeder Stelle eine gleiche Anzahl. Diese stellt das arithmetische Mittel der Werte dar.

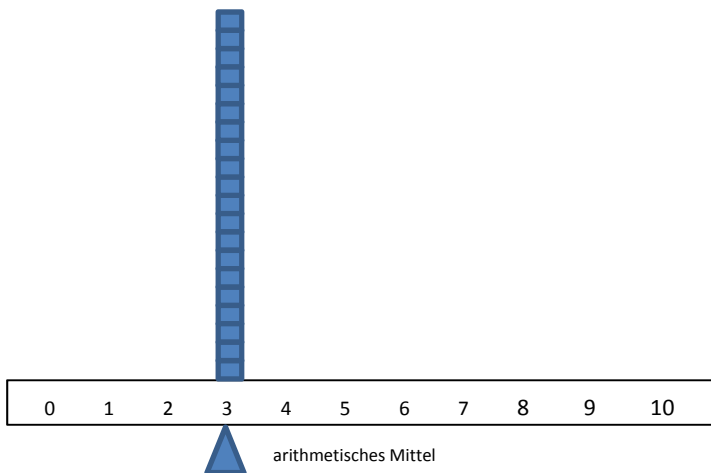
### Interpretation des arithmetischen Mittels als Ergebnis des Umstapelns der Werte

Durch gleichzeitige Annäherung der äußeren Werte jeweils um 1 ergibt sich nach wiederholter Abfolge dieser Handlung eine Häufung an der Stelle des arithmetischen Mittels. Bei dieser Tätigkeit muss darauf geachtet werden, dass jeweils zeitgleich zwei äußere Objekte um eine Stelle nach innen verschoben werden.

#### Schritt 1:

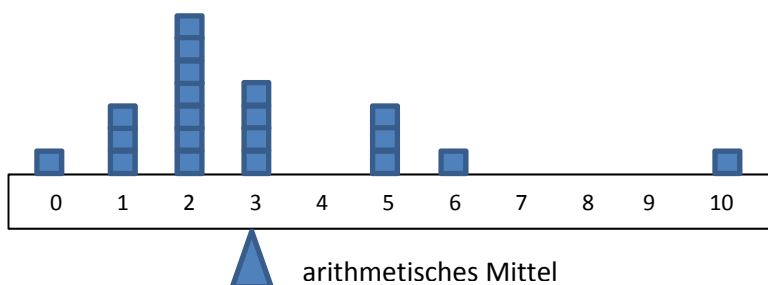


#### Letzter Schritt (Ablezen des arithmetischen Mittels):



### Interpretation des arithmetischen Mittels als Schwerpunkt einer Masseverteilung

Das arithmetische Mittel kann als Schwerpunkt einer Masseverteilung interpretiert werden. Alle Daten werden dafür mit gleichschweren Objekten auf einer Leiste in gleichen Abständen dargestellt. Die Leiste kann dann genau an der Stelle des arithmetischen Mittels ausbalanciert werden.



### Eigenschaften des arithmetischen Mittels

Das arithmetische Mittel liegt immer zwischen dem größten und kleinsten Wert der Verteilung. Dabei gibt es die Besonderheit, dass das Mittel nicht unbedingt als Wert unter den ermittelten Daten

auftauchen muss, so ist z. B. die Durchschnittsnote in einer Arbeit ist meist eine gebrochene Zahl. Diese Besonderheit kann zu Verständnisschwierigkeiten führen, wenn es sich bei den Daten um Anzahlen handelt. So ist z. B. nicht einfach zu verstehen, dass die durchschnittliche Augenzahl beim Würfeln 3,5 beträgt oder in einer Familie in Deutschland durchschnittlich 1,6 Kinder leben.

Eine weitere wesentliche Eigenschaft ergibt sich aus der Berechnungsvorschrift des arithmetischen Mittels und ist sehr gut bei der Veranschaulichung über die Masseverteilung sichtbar. Das arithmetische Mittel ist empfindlich gegenüber großen Abweichungen in den ermittelten Daten. Wenn von erhobenen Daten nur das arithmetische Mittel und nicht die dahinter stehenden Daten zur Auswertung zur Verfügung stehen, kann es bei sehr unsymmetrischen Verteilungen zu falschen Einschätzungen bzw. Interpretationen kommen.

### ***Was ist ein Modalwert und wie kann er ermittelt werden?***

Der Modalwert wird auch als **Modus** oder als **häufigster Wert** bezeichnet. Der Modalwert ist der Wert, der am häufigsten in der Verteilung vorkommt, wenn die Verteilung eingipflig ist. Bei mehrgipfligen Verteilungen gibt es auch mehrere Modalwerte.

Bei kategorialen Daten sind Modalwert die einzigen verwendbaren Mittelwerte.

Der oder die Modalwerte können aus einer Häufigkeitstabelle ermittelt werden, indem man die Werte mit den größten Häufigkeiten abliest.

### ***Welche Streuungsmaße gibt es und wie können sie ermittelt und interpretiert werden?***

Mittelwerte allein ermöglichen oft keine hinreichende Beschreibung einer Verteilung. Ein wesentlicher Aspekt zur Charakteristik einer Verteilung sind Aussagen darüber, wie sich die Werte um einen Mittelwert verteilen. Diese Eigenschaft wird allgemein als Streuung bezeichnet. Die Werte können wenig oder stark um einen Mittelwert streuen, man sagt die Streuung ist gering bzw. groß.

Mit folgendem häufig verwendeten Beispiel kann der Unterschied zwischen Mittelwert und Streuung gut verdeutlicht werden.

Die Tiefe eines Sees wurde an mehreren Stellen gemessen. Die Messwerte ergeben eine durchschnittliche Wassertiefe von 1,20 m. Es ergibt sich die Frage, ob ein Nichtschwimmer mit einer Körpergröße von 1,80 m unbedenklich im See baden kann. An dieser Frage wird sehr deutlich, dass der Durchschnitt allein hier nichts nützt. Für den Nichtschwimmer ist es wichtig, ob es eine Stelle im See gibt, an der er nicht mehr stehen kann, wie groß also die maximale Abweichung vom Mittelwert ist.

#### **Spannweite**

Das einfachste Streuungsmaß ist die Spannweite  $w$  einer Verteilung. Sie ist die Differenz aus dem größten und kleinsten Wert.

$$w = x_{\max} - x_{\min}$$

Zur Interpretation der Spannweite kann die Formulierung verwendet werden, dass sich die Werte maximal um die Spannweite  $w$  unterscheiden.

#### ***Beispiel:***

Für den Sponsorenlauf gilt:  $w = 10 - 0 = 10$ . Man kann damit zum Beispiel formulieren, dass die Unterschiede in den gelaufenen Runden bis zu 10 Runden betragen. Es ist auch möglich zu sagen, dass sich die Anzahlen der gelaufenen Runden um maximal 10 Runden unterscheiden.

### Mittlere lineare Abweichung

Die mittlere lineare Abweichung  $d$  ist ein Maß für die durchschnittlichen Abweichungen aller Messwerte vom Mittelwert. In der Regel wird hierfür das arithmetische Mittel benutzt. Da die Summe aller Abweichungen zum Mittelwert immer Null ergibt, wird die Summe der Beträge gebildet.

Die Berechnung erfolgt mit folgender Formel:

$$d = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$$

#### Beispiel:

Die Schüler zweier 3. Klassen sägen im Werkunterricht Holzleisten. Jede Leiste soll 20,0 cm lang sein, d.h. es soll auf Millimeter genau gearbeitet werden. Es werden in jeder der beiden Klassen jeweils 7 Leisten zur Kontrolle nachgemessen, die zufällig aus dem Stapel der gesägten Leisten entnommen werden. Dabei ergeben sich folgende Werte:

Klasse 3a: 19,6 cm; 20,0 cm; 19,7 cm; 20,4 cm; 19,9 cm; 20,3 cm; 20,1 cm

Klasse 3b: 19,2 cm; 21,1 cm; 20,7 cm; 20,8 cm; 19,3 cm; 20,0 cm; 18,9 cm

Das arithmetische Mittel der 7 Werte beträgt in beiden Klassen genau 20 cm. Um festzustellen, welche Klasse genauer gearbeitet hat, werden die mittleren linearen Abweichungen berechnet:

Klasse 3a:

$$d = \frac{1}{7} \cdot (|19,6 - 20| + |20,0 - 20| + |19,7 - 20| + |20,4 - 20| + |19,9 - 20| + |20,3 - 20| + |20,1 - 20|) \text{ cm}$$

$$d = \frac{1}{7} \cdot (0,4 + 0 + 0,3 + 0,4 + 0,1 + 0,3 + 0,1) \text{ cm}$$

$$d = \frac{1}{7} \cdot 1,6 \text{ cm}$$

$$d \approx 0,23 \text{ cm}$$

Es wird deutlich, dass die durchschnittlichen Abweichungen vom arithmetischen Mittel mit 23 mm und damit die Streuung gering sind.

Klasse 3b:

$$d = \frac{1}{7} \cdot (|19,2 - 20| + |21,1 - 20| + |20,7 - 20| + |20,8 - 20| + |19,3 - 20| + |20,0 - 20| + |18,9 - 20|) \text{ cm}$$

$$d = \frac{1}{7} \cdot (0,8 + 1,1 + 0,7 + 0,8 + 0,7 + 0 + 1,1) \text{ cm}$$

$$d = \frac{1}{7} \cdot 5,2 \text{ cm}$$

$$d \approx 0,74 \text{ cm}$$

Hier ist die mittlere lineare Abweichung mit 0,74 cm größer als in Klasse 3a. Somit ist festzustellen, dass die Klasse 3a genauer gearbeitet hat.

Dieses Beispiel wurde genutzt, um die Berechnung der mittleren linearen Abweichung zu verdeutlichen. Bei dieser geringen und übersichtlichen Anzahl der Messergebnisse sind Schlussfolgerungen auch ohne Berechnung der mittleren linearen Abweichung möglich. Bereits durch die Ermittlung der Spannweite werden schon die Unterschiede zwischen den Klassen deutlich. Die Messwerte in der



Klasse 3a unterscheiden sich nur um bis zu 8 mm, während die Unterschiede in den Längen der Leisten in der Klasse 3b bis zu 2,2 cm betragen.

### Varianz

Ein weiteres wichtiges Streuungsmaß ist die Varianz  $s^2$ . Hier wird nicht die Summe der Beträge der Abweichungen vom arithmetischen Mittel gebildet, sondern die Summe der Quadrate der Abweichungen. Die Varianz und die daraus leicht zu berechnende Standardabweichung sind in der Praxis die am häufigsten verwendeten Streuungsmaße. Die Verwendung der Quadrate anstelle der Beträge ergibt sich aus innermathematischen Überlegungen.

Die Formel für die Berechnung der Varianz lautet:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Die Verwendung des Nenners  $n - 1$  ergibt sich ebenfalls aus innermathematischen Gründen. Darauf soll im Sinne einer unkomplizierten Behandlung hier nicht weiter eingegangen werden.

Für das Beispiel der Klasse 3a erhält man:

$$s^2 = \frac{1}{6} [(19,6 - 20)^2 + (20,0 - 20)^2 + (19,7 - 20)^2 + (20,4 - 20)^2 + (19,9 - 20)^2 + (20,3 - 20)^2 + (20,1 - 20)^2] \text{ cm}^2$$

$$s^2 = \frac{1}{6} [0,16 + 0 + 0,09 + 0,16 + 0,01 + 0,09 + 0,01] \text{ cm}^2$$

$$s^2 = \frac{1}{6} [0,52] = 0,087 \text{ cm}^2$$

### Standardabweichung

Die Varianz hat durch das Quadrieren der Werte nicht die gleiche Dimension wie die Werte der Verteilung. Aus diesem Grund wurde zusätzlich noch ein weiteres Streuungsmaß eingeführt, die Standardabweichung  $s$ . Diese ergibt sich als Wurzel aus der Varianz.

Für die Klasse 3a beträgt damit die Standardabweichung  $s = \sqrt{0,087 \text{ cm}^2} \approx 0,29 \text{ cm}$

Im Unterschied zur mittleren Abweichungen, bei der alle Abstände vom Mittelwert gleich gewichtet werden, werden bei der Standardabweichung die Abstände vom Mittelwert quadriert, was zur Folge hat, dass große Abweichungen stärker und kleinere Abweichungen kaum ins Gewicht fallen.

Eine Interpretation der Varianz bzw. der Standardabweichung ist direkt nur mit Mitteln der mathematischen Statistik möglich. Man kann in der Sekundarstufe I lediglich verschiedene Standardabweichungen zum gleichen Mittelwert vergleichen.

### 2.3.3.2 Hinweise für den Unterricht

Die Berechnung des arithmetischen Mittels kann erst nach der Einführung und sicheren Operationsvorstellung der Division als Möglichkeit der Auswertung von Daten genutzt werden. Das bedeutet, dass Vorstellungen zum arithmetischen Mittel ab der 3. Klasse entwickelt werden könnten. Eine Schwierigkeit ist der Umgang mit den gebrochenen Zahlen im Ergebnis. Aus diesem Grund müssen zur Berechnung des arithmetischen Mittels immer Daten gesucht werden, die ein ganzzahliges arithmetisches Mittel haben.

Zu den drei inhaltlichen Interpretationen des arithmetischen Mittels (Ausgleichswert, Ergebnis beim Umstapeln der Werte und Schwerpunkt) können bereits in der Primarstufe erste Vorstellungen ausgebildet werden. Dabei sollte zunächst mit der Interpretation des arithmetischen Mittels als Ausgleichswert begonnen werden. Dies sollte auf spielerische Art erfolgen. Man kann dazu in der 3. Klas-

se mit der Bedeutung als Ausgleichswert beginnen im Sinne einer gerechten Verteilung. Dies entspricht auch der Operationsvorstellung der Division als gleichmäßiges Verteilen. Dieser Zusammenhang sollte den Schülern verdeutlicht werden, indem einfach mit Steckwürfeln oder realen Objekten gearbeitet wird.

Die Entwicklung der Vorstellungen zum arithmetischen Mittel als Schwerpunkt einer Masseverteilung sollte auch handelnd erfolgen. Hier kann zunächst ein Lineal oder eine Leiste benutzt werden, auf der Steckwürfel in gleichen Abständen platziert werden. Dazu sollte durch Nägel oder andere Vorrichtungen (aufgeklebte Steckwürfel) eine Fixierung der Würfel in gleichen Abständen möglich sein. Das Lineal/die Leiste wird dann mit den darauf befindlichen Steckwürfeln ausbalanciert. Hier ist eventuell Partnerarbeit angebracht. Die Schüler können spielerisch erfahren, was passiert, wenn sich Werte der Verteilung verändern. Auch das Problem mit Ausreißern kann hier experimentell erprobt werden. Mit den Steckwürfeln kann dann auch das Umstapeln ausprobiert werden. Dabei muss das arithmetische Mittel nicht immer ganzzahlig sein. Bei dieser Interpretation ist die Annäherung an die nächstliegende ganze Zahl gut erkennbar.

Der Modalwert kann schon in der Auswertung von Daten ab der 1. Klasse benutzt werden. Dabei sollte man nicht den Begriff Modalwert verwenden, sondern nach dem oder den Ergebnissen fragen, die am Häufigsten vorkommen.

Die Spannweite kann ebenfalls beginnend mit den ersten Beispielen bei Messdaten in die Auswertung der Daten einbezogen werden. Die Bezeichnung Spannweite sollte dabei nicht verwendet werden. Man kann einfach von dem Unterschied zwischen dem größten und kleinsten Wert sprechen und dazu diese Werte zuerst bestimmen.

Die mittlere Abweichung, Varianz und Standardabweichung sind kein Gegenstand für den Mathematikunterricht in der Primarstufe. Die Grundidee der Streuung kann durch die Betrachtung der Spannweite angelegt werden. Außerdem kann hier ein erstens Verständnis für den Begriff der Streuung entwickelt werden, wenn das arithmetische Mittel einer Verteilung berechnet wird. In der Auswertung der Daten kann der Durchschnitt mit den anderen Werten verglichen werden, um hier Aussagen zu treffen, ob die erhobenen Daten dicht am Durchschnitt liegen oder ob einige Daten weit vom errechneten Durchschnitt entfernt sind.

## 2.4 Methoden der Explorativen Datenanalyse

### 2.4.1 Fachliche Grundlagen

#### **Welche statistischen Kenngrößen werden in der EDA vor allem verwendet?**

In der EDA werden Mittelwerte und Streumaße verwendet, die aus der Reihe der geordneten Daten direkt abgelesen werden können. Häufig werden 5 Werte zur Beschreibung einer Häufigkeitsverteilung herangezogen, die man auch als 5-Zahlen-Zusammenfassung bezeichnet. Diese fünf Zahlen bzw. Werte sind der **Median** als Lagemaß, der **kleinste** und der **größte Wert** (Minimum und Maximum) und die **Viertelwerte** (Quartile), die jeweils die Mediane der unteren Hälfte und der oberen Hälfte der Verteilung darstellen. Mit dem kleinsten und größten Wert der Verteilung kann die Spannweite ermittelt werden und mit den Viertelwerten wird die **Vierteldifferenz** (Quartilsabstand) als ein weiteres Streuungsmaß angegeben.

#### **Wie kann der Median ermittelt und interpretiert werden?**

Der Median  $\tilde{x}$  wird auch als **Zentralwert**, **mittlerer Wert** oder **50%-Wert** bezeichnet. Er gibt an, wo die Mitte einer der Größe nach geordneten Datenmenge liegt. Das bedeutet, dass die Hälfte der Daten kleiner oder gleich und die Hälfte der Daten größer oder gleich dem Median sind. Zur Bestimmung des Medians werden die Daten zunächst geordnet. Dann kann dieser durch Auszählen bestimmt werden.

Es sind hier allerdings 2 Fälle zu unterscheiden.

1. Anzahl der Daten ist ungerade.

Der Median ist der mittlere Wert der geordneten Daten

2. Anzahl der Daten ist gerade.

Der Median ist das arithmetische Mittel aus den beiden mittleren Werten der geordneten Daten. Im Gegensatz zum arithmetischen Mittel ist der Median robust gegen Ausreißwerte.

Am *Beispiel der Sponsorenlauf* soll die Ermittlung des Medians verdeutlicht werden. Dabei werden jetzt die Einnahmen einer Klasse bei sehr spendablen Sponsoren betrachtet:

Einnahmen in Euro (geordnete Folge der Werte):

12 12 14 17 19 19 22 23 23 23 24 24 25 25 25 25 28 29 35 35 42 45 55  
 $\downarrow$   
 $\tilde{x} = 24$

Da es 23 Werte sind und die Anzahl somit ungerade ist, ist der Median der 12. Wert. Es liegen 11 Werte links und 11 Werte rechts vom Median, der durch Abzählen ermittelt werden kann.

Die Robustheit des Medians gegen Ausreißerwerte kann durch folgende Überlegungen verdeutlicht werden: Wenn der maximale Wert nicht 55 € sondern 155 € betragen würde, bliebe der Median trotzdem unverändert bei 24 €. Dies gilt auch, wenn der geringste Betrag nicht 12 € sondern nur 1 € betragen würde.

Der Median von 24 € kann in dem Beispiel in folgender Weise interpretiert werden: Mindestens die Hälfte der Sponsoren hat bis 24 € und mindestens die Hälfte der Sponsoren hat 24 € mehr gespendet.

### **Wie können die Viertelwerte ermittelt und interpretiert werden?**

Die Viertelwerte sind die Mediane der oberen und unteren Hälfte einer Verteilung. Auch hierfür ist keine Berechnung erforderlich. Die Werte können wieder aus der geordneten Datenreihe abgelesen werden. Bei einer ungeraden Anzahl von Werten kann der Median zu beiden Hälften gerechnet werden. Es ist aber auch üblich, die beiden Hälften ohne den Median zu betrachten, was die Ermittlung der Viertelwerte in diesem Fall noch einfacher macht und im Folgenden verwendet wird.

Der untere Viertelwert wird auch als 25%-Wert und der obere als 75%-Wert bezeichnet.

*Beispiel:* Einnahmen beim Sponsorenlauf

In beiden Hälften sind ohne den Median jeweils 11 Werte. Diese werden durch den jeweils 6. Wert wieder in zwei Hälften geteilt, so dass fünf Werte über und fünf Werte unter diesem mittleren Wert in jeder Hälfte liegen. Diese mittleren Werte sind dann die Viertelwerte der Verteilung.

12 12 14 17 19 19 22 23 23 23 24 24 25 25 25 25 28 29 35 35 42 45 55  
 Unterer Viertelwert: 19    Median    Oberer Viertelwert: 29

Somit wird die geordnete Verteilung durch den Median und Viertelwerte in vier Teile zerlegt. Damit können die Viertelwerte in diesem Beispiel durch folgende Formulierungen näherungsweise interpretiert werden: Mindestens ein Viertel der Sponsoren hat bis zu 19 € und mindestens ein Viertel hat 29 € oder mehr gespendet.

### **Wie kann die Vierteldifferenz ermittelt und interpretiert werden?**

Die Vierteldifferenz ist ein Maß für die Streuung der Verteilung. Sie ergibt sich aus der Differenz zwischen dem oberen und dem unteren Viertelwert und ist somit ebenfalls leicht zu ermitteln.

*Beispiel: Einnahmen beim Sponsorenlauf*

Die Differenz aus dem oberen und unteren Viertelwert beträgt  $29 \text{ €} - 19 \text{ €} = 10 \text{ €}$ . Da zwischen dem unteren und oberen Viertelwert die Hälfte der Werte liegen, kann für unser Beispiel folgende Formulierung verwendet werden: Mindestens die Hälfte der Sponsoren hat 19 € bis 29 € gespendet.

**Wie kann die 5-Zahlen-Zusammenfassung grafisch veranschaulicht werden?**

Zur grafischen Veranschaulichung der charakteristischen 5 Zahlen für die Verteilung wird ein **Boxplot (Kastenschaubild)** verwendet. Mit dieser grafischen Darstellung kann die Verteilung der Daten gut dargestellt werden, da die Lage des Median und die Streuung um den Median deutlich sichtbar ist. Der Boxplot kann waagrecht oder senkrecht gezeichnet werden.

Zum Zeichnen eines Boxplot muss zunächst eine (waagerechte oder senkrechte) Skala gezeichnet werden. Dann wird ein Rechteck (Kasten) für die mittleren 50 % der Werte, also vom unteren bis zum oberen Viertelwert gezeichnet. In dem Rechteck wird der Median als Strecke eingetragen. Anschließend werden Strecken (die so genannten Antennen) zu beiden Seiten bis zum minimalen bzw. maximalen Wert gezeichnet.

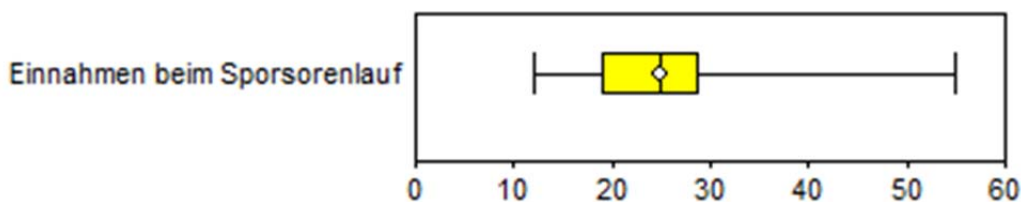
*Beispiel: Einnahmen beim Sponsorenlauf*

Für die Erstellung eines Boxplots wird die 5-Zahlen-Zusammenfassung benötigt.

Minimum: 12 €, unterer Viertelwert: 19 €, Median: 24 €, oberes Quartil: 29 €, Maximum: 55 €.

**12** 12 14 17 19 **19** 22 23 23 23 24 **24** 25 25 25 25 28 **29** 35 35 42 45 **55**

Damit ergibt sich dann folgende grafische Darstellung, die mit dem Programm VU-Statistik erstellt wurde. Der Rahmen um das Diagramm, die Farbe des Kastens und die Markierung auf dem Median wurden vom Programm automatisch erzeugt und sind normalerweise nicht erforderlich.



**Wie können die Werte im Boxplot interpretiert werden?**

In dem Beispiel wird deutlich, dass die Verteilung um den Median nicht symmetrisch ist. Der Median liegt nicht in der Mitte des Kastens und die Werte im unteren Viertel liegen dichter beieinander als die Werte im oberen Viertel.

Für den Boxplot können nur die folgenden Aussagen getroffen werden, die wieder exemplarisch an dem Beispiel dargestellt sind:

- Die geringste Einnahme beträgt 12 Euro. (Minimum)
- Die höchste Einnahme beträgt 55 Euro. (Maximum)
- Die Einnahmen liegen zwischen 12 Euro und 55 Euro
- Mindestens  $\frac{1}{4}$  der Werte sind kleiner oder gleich 19 Euro. (unterer Viertelwert)
- Die Hälfte der Werte sind kleiner oder gleich 24 Euro. (Median)
- 75% der Werte sind kleiner oder gleich 29 Euro. (oberer Viertelwert)

### Was ist ein Stamm-Blätter-Diagramm und wie kann es angefertigt werden?

Ein **Stamm-Blätter-Diagramm** (Stängel-Blätter-Diagramm, Stamm-Blatt-Diagramm) kann sowohl als Tabelle als auch als Diagramm angesehen werden. Es ist eine der in der explorativen Datenanalyse neu entwickelten Methoden. Im Stamm-Blätter-Diagramm kann die Verteilung der Daten sehr anschaulich dargestellt werden. Im Gegensatz zum Boxplot bleiben hier die Ursprungsdaten erhalten und können so in der Auswertung mit berücksichtigt werden. Auch die Werte der 5-Zahlen-Zusammenfassung können gut abgelesen werden, die Streuung der Daten wird ebenfalls gut sichtbar.

Für die Erstellung eines Stamm-Blätter-Diagramms werden die Daten in zwei Gruppen von Stellenwerten aufgeteilt. Bei zweistelligen Zahlen verwendet man die Zehner und die Einer. Die Zehner bilden in diesem Fall den „Stamm“ und die Einer die „Blätter“. Die Zahlen für den Stamm werden von unten nach oben geschrieben und die Einer nach einem senkrechten Strich jeweils in einer Zeile mit der entsprechende Zehnerstelle.

Bei dreistelligen Zahlen können als „Stamm“ die Hunderter und Zehner und als „Blätter“ die Einer verwendet werden. Es können aber auch als Stamm die Hunderter und als Blätter die Zehner und Einer, also zweistellige Zahlen verwendet werden.

*Beispiel: Einnahmen beim Sponsorenlauf*

5	<u>5</u>
4	2 5
3	5 5
2	2 3 3 3 4 <u>4</u> 5 5 5 5 8 <u>9</u>
1	<u>2</u> 2 4 7 9 <u>9</u>

Die unterstrichenen Werte sind die Werte aus der 5-Zahlen-Zusammenfassung. In der Darstellung wird auch ersichtlich, dass die Werte oberhalb des Medians stärker streuen als nach unten.

### 2.4.2 Hinweise für den Unterricht

Mit der sogenannten „lebendigen Statistik“ können inhaltliche Vorstellungen zu den Werten der EDA entwickelt werden. Nachdem die Daten der Größe nach geordnet wurden, können der größte, kleinste und mittlere Wert bestimmt werden. Die Werte können mit den Schülern spielerisch veranschaulicht werden, indem jeder Schüler einen Wert repräsentiert.

Als Einstiegsbeispiel können die Körpergrößen der Schüler dienen. Die Schüler sind in diesem Fall die natürlichen Träger der Werte. Wie im Sportunterricht stellen sich die Schüler der Größe nach auf. Von der Lehrkraft werden in Vorbereitung 3 Schilder vorbereitet, welche die Begriffe „größter Wert“, „kleinster Wert“ und „mittlerer Wert“ enthalten. Ist die Anzahl der Schüler gerade müssten dann die 2 Schüler, die den Werten entsprechen das Schild gemeinsam festhalten. Die Berechnung des arithmetischen Mittels von diesen Werten ist hier noch nicht erforderlich.

In folgenden Unterrichtsstunden sollten dann auch andere Daten „lebendig“ dargestellt werden. Nachdem die Daten geordnet worden, erhalten die Schüler Schilder mit den einzelnen Werten und müssen sich dann entsprechend der Ordnung der Werte aufstellen. Jeder Schüler verkörpert praktisch einen Wert. Dann können wieder die drei Schilder mit den Begriffen „größter Wert“, „kleinster Wert“ und „mittlerer Wert“ verteilt werden, nachdem diese Werte bestimmt wurden. Das arithmetische Mittel muss dabei nicht berechnet oder ermittelt werden.

Sind die Schüler an diese Darstellung der Daten gewöhnt, könnte auch noch eine Skala auf dem Fußboden eingezeichnet werden, an der sich die Schüler dann an der entsprechenden Stelle hinstellen. Damit wird dann auch die Streuung der Daten deutlich.

## 2.5 Gruppierung von Daten

### 2.5.1 Fachliche Grundlagen

#### **Was bedeutet die Gruppierung von Daten und wann müssen Daten gruppiert werden?**

Treten bei einer statistischen Untersuchung viele unterschiedliche Daten auf (z.B. Masse der Schultaschen oder Werte im Weitsprung aller Schüler) ist es zur Veranschaulichung der Daten oft sinnvoll, die Werte in Klassen bzw. Gruppen einzuteilen. Eine Klassenbildung ist vor oder nach einer Datenerhebung möglich. Ein typisches Beispiel ist die EU-Verordnung der Einteilung der Hühnereier.

Gewichtsklasse	Bezeichnung	Gewicht
S	klein	unter 53 g
M	mittel	53 g bis unter 63 g
L	groß	63 g bis unter 73 g
XL	sehr groß	über 73 g

#### **Wie erfolgt die Klassenbildung?**

Eine Klassenbildung erfolgt durch die Festlegung der Klassenbreiten und Klassengrenzen. Die Klassen müssen nicht gleich breit sein und es sind auch offene Klassen möglich (siehe Beispiel Gewichtsklassen der Hühnereier). Bei der Gruppierung von Messdaten muss beachtet werden, dass es sich nach der Gruppierung immer noch um Messdaten handelt und für die Darstellung der Daten nur ein Histogramm sinnvoll ist. Bei ordinalen oder kategorialen Daten ist nach der Gruppierung auch eine Darstellung mit Streifendiagrammen möglich.

Nach Wahl der Klassenbreite und der Klassengrenzen müssen die Klassenmitten berechnet werden, da diese für das Erstellen eines Histogramms bzw. zur Berechnung des arithmetischen Mittels notwendig sind.

Das Bilden von Klassen mit anschließendem Erstellen eines Histogrammes und Berechnen des arithmetischen Mittels soll mit folgendem Beispiel dargestellt werden.

*Beispiel:*

Einnahmen im Sponsorenlauf (in Euro)

Euro	12	14	17	19	22	23	24	25	28	29	35	42	45	55
Anzahl	2	1	1	2	1	3	2	4	1	1	2	1	1	1

In dem Beispiel muss nun überlegt werden, wie viele Werte zu einer Klasse zusammengefasst werden. Es soll im Folgenden die Klassenbildung mit den Klassenbreiten  $b = 5, 10$  und  $15$  gezeigt werden.

Klassenbreite: 5 Euro

Klasse	Klas- senmitte	Häu- figkeit
0 - < 5 <sup>1</sup>	2,5	0
5 - < 10	7,5	0
10 - < 15	12,5	3
15 - < 20	17,5	3
20 - < 25	22,5	6
25 - < 30	27,5	6
30 - < 35	32,5	0
35 - < 40	37,5	2
40 - < 45	42,5	1
45 - < 50	47,5	1
50 - < 55	52,5	0
55 - < 60	57,5	1

Klassenbreite: 10 Euro

Klasse	Klas- senmitte	Häu- figkeit
0 - < 10	5	0
10 - < 20	15	6
20 - < 30	25	12
30 - < 40	35	2
40 - < 50	45	2
50 - < 60	55	1

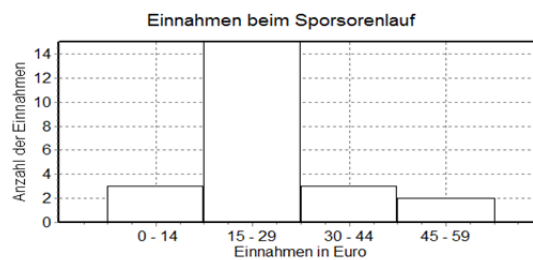
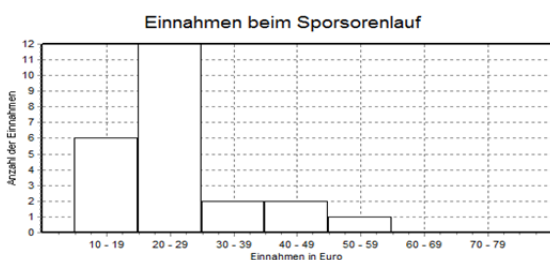
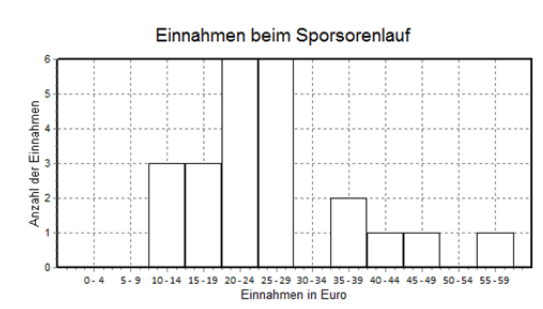
Klassenbreite: 15 Euro

Klasse	Klas- senmitte	Häu- figkeit
0 - < 15	7,5	3
15 - < 30	22,5	15
30 - < 45	37,5	3
45 - < 60	52,5	2

**Darstellung gruppierter Daten**

Die Darstellung gruppierter Messdaten erfolgt in einem **Histogramm**. Im Gegensatz zu einem Streifendiagramm, in dem die Breite der Streifen beliebig ist, sind die einzelnen Flächen im Histogramm ein Maß für die Häufigkeit in der jeweiligen Klasse. Der Flächeninhalt der Rechtecke im Histogramm, die sich berühren müssen, ist das Produkt aus Höhe und Klassenbreite. Der Flächeninhalt aller Rechtecke entspricht der Gesamtzahl der Daten. Zur Vereinfachung werden in der Praxis oft gleichbreite Klassen gewählt.

Mit größer werdender Klassenbreite wird der Informationsverlust immer größer. Dafür kann die charakteristische Form der Verteilung aber deutlicher werden. Um beide Aspekte gleichzeitig zu berücksichtigen, gibt es Kriterien für eine optimale Klassenbreite.



2 \_\_\_\_\_

<sup>1</sup> Die Schreibweise - < soll bedeuten: bis weniger als

### Berechnung des arithmetischen Mittels

Auch das arithmetische Mittel kann aus den gruppierten Daten berechnet werden. Hierzu werden die Klassenmitten benötigt, die in den Tabellen schon mit erfasst wurden. Nun werden die Klassenmitten mit der Häufigkeit der Klasse multipliziert und die Produkte aller Klassen addiert. Die Summe wird durch die Gesamthäufigkeit dividiert.

Für unser Beispiel mit der Klassenbreite  $b = 5$  Punkte ergibt sich folgende Rechnung

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 2,5 + 0 \cdot 7,5 + 3 \cdot 12,5 + 3 \cdot 17,5 + 6 \cdot 22,5 + 6 \cdot 27,5 + 0 \cdot 32,5 + 2 \cdot 37,5 + 1 \cdot 42,5 + 1 \cdot 47,5 + 0 \cdot 52,5 + 1 \cdot 57,5}{23} = 26,6$$

Das auf diese Weise berechnete arithmetische Mittel unterscheidet sich von dem tatsächlichen arithmetischen Mittel, das 26,10 € beträgt. Dieser Unterschied entsteht durch den Informationsverlust infolge der Gruppierung der Daten.

### 2.5.2 Hinweise für den Unterricht

In der Grundschule wird die Gruppenbildung schon in Ansätzen eingeführt. Häufig werden mehrere Ergebnisse mit sehr geringen Häufigkeiten mit dem Begriff „sonstige“ zusammengefasst. Dies ist eine Gruppierung, die oft schon bei der Erstellung von Diagrammen benutzt wird. Den Schülern sollte hier bewusst gemacht werden, dass unter der Rubrik „sonstige“ verschiedene Ergebnisse stecken und demzufolge auch die Häufigkeit des Ergebnisses größer sein kann als alle anderen. Hier kann durch gezielte Teilhandlungen eine Gruppierung, wie sie dann erst in der Orientierungsstufe benutzt wird, vorbereitet werden. Sollten in Verbindung mit anderen Unterrichtsfächern oder Projekten Daten gesammelt worden sein, die eine Gruppierung erforderlich machen, sollte die Gruppierung von der Lehrkraft vorgenommen werden und anschließend diese in kategoriale bzw. ordinale Daten überführt werden, so dass die Schüler die gewohnten Streifendiagramme zeichnen können.

## 2.6 Schlussfolgerungen und Prognosen aus Daten

### 2.6.1 Fachliche Grundlagen

#### **Wie können Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung miteinander verbunden werden?**

Aus vorher erhobenen Daten können nun mithilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung Prognosen für zukünftige Ereignisse ermittelt werden.

Für das Beispiel des Sponsorenlaufes kann dies zu folgenden Überlegungen führen:

Prognose: Wie wahrscheinlich ist es, dass mehr als die Hälfte der Klasse im nächsten Jahr 10 Runden und mehr laufen? Antwort: wenig wahrscheinlich

Schlussfolgerung: Die Schule möchte mehr Gelder beim Sponsorenlauf einnehmen. Welche Maßnahmen können getroffen werden? Antwort: Länge der Runden verkürzen

Aus vorhandenen Daten können Schlussfolgerungen für zukünftige Ereignisse gezogen werden.

### 2.6.2 Hinweise für den Unterricht

Erst nachdem der präformale Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Primarstufe eingeführt und gefestigt wurde, können nun aus vorher erhobenen Daten Prognosen bzw. Schlussfolgerungen getroffen werden. Dabei kann neben dem Gespräch über Bedingungen der entstandenen Verteilungen auch einfache Schlussfolgerungen auf zukünftige Ereignisse bzw. Prognosen mithilfe der qualitativen Schätzung von Wahrscheinlichkeiten erfolgen.



## 2.7 Planung einer statistischen Untersuchung

### 2.7.1 Grundgesamtheit und Stichprobe

#### 2.7.1.1 Fachliche Grundlagen

Ziel einer statistischen Untersuchung ist es, Informationen über interessierende Eigenschaften von Personen oder Objekten zu erhalten. Die Gewinnung statistischer Daten wird auch **Erhebung** genannt. Dabei können nicht immer alle Objekte untersucht oder Personen befragt werden (**Vollerhebung**). Aus diesem Grund kann eine Auswahl aus der **Grundgesamtheit** (alle Personen oder Objekte) getroffen werden. Diese Auswahl wird als **Stichprobe** bezeichnet. Mit der Auswertung der Stichprobe können dann Rückschlüsse auf die Grundgesamtheit gezogen werden, wenn es sich um eine repräsentative Stichprobe handelt. Dies ist z.B. von den Hochrechnungen bei Wahlen bekannt. Eine Stichprobe ist repräsentativ, wenn die Verhältnisse in der Stichprobe denen in der Grundgesamtheit entsprechen und insbesondere alle statistischen Kenngrößen näherungsweise übereinstimmen. Eine repräsentative Stichprobe kann durch eine zufällige Auswahl von Elementen der Grundgesamtheit gewonnen werden.

#### 2.7.1.2 Hinweise für den Unterricht

Im Unterricht sollte bei der Planung einer statistischen Untersuchung oder Befragung auf das Thema Grundgesamtheit und Stichprobe eingegangen werden. In den Klassen 1 und 2 werden Daten in der Regel als Vollerhebung gesammelt. Ab der Klassenstufe 3 können größere statistische Untersuchungen geplant werden. Dazu sollen die Schüler den Unterschied zwischen einer Vollerhebung und einer Stichprobe kennenlernen. Die Begriffe Grundgesamtheit und Vollerhebung werden an dieser Stelle nur inhaltlich vermittelt ohne das Begriffswort zu nennen. Auch eine Vermittlung einer inhaltlichen Vorstellung darüber, wie eine repräsentative Stichprobe ermittelt werden kann, ist möglich.

### 2.7.2 Fragenstellungen

#### 2.7.2.1 Fachliche Grundlagen

Statistische Daten können auf unterschiedlicher Art und Weise gewonnen werden. Dies kann eine mündliche oder schriftliche Befragung aber auch eine Beobachtung sein. Zunächst muss überlegt werden, welche Daten erhoben werden sollen. Es kann sich dabei um nur eine Fragestellung oder um ein Fragenpaket (Fragebogen) handeln. Der Zweck der Untersuchung kann hierfür unterschiedlich sein. Meistens geht es um die Beschreibung eines Istzustandes oder der Überprüfung von Theorien. Ein Fragebogen ist oft sehr komplex. Es können damit Zusammenhänge zwischen 2 oder mehrerer Merkmalen untersucht werden.

Bei der Entwicklung von Fragestellungen wird zwischen offenen und geschlossenen Fragen unterschieden. Bei offenen Fragen kann der Befragte die Antwort frei wählen. Ist die Formulierung der Frage nicht klar und eindeutig, kann unter Umständen eine Vielzahl an Antworten entstehen. Für eine geschlossene Frage muss der Fragensteller die möglichen Antworten vorgeben, so dass er sich über den Vorgang, das interessierende Merkmal und die möglichen Ergebnisse im Vorfeld informieren muss.

Deswegen sollte der Fragensteller sich vor der Formulierung einer Frage vor allem über die mögliche Antworten Gedanken machen. Aus diesem Grund kann bei der Erstellung eines Fragebogens wieder nach dem bewährten Schema vorgegangen werden:

1. Welchen Vorgang möchte ich untersuchen?
2. Welches Merkmal interessiert mich?
3. Welche Ergebnisse sind möglich?

Nun kann eine Frage entwickelt werden. Fragen müssen klar und verständlich formuliert werden. Dabei sollten nur Begriffe verwendet werden, die den Befragten verständlich sind beziehungsweise die klar definiert werden und nicht frei interpretiert werden können. Weiterhin muss überprüft werden, ob die vorgegebenen Antworten vollständig sind und sich einander ausschließen. Es muss überlegt werden, ob Mehrfachnennungen erlaubt sind. Dies hat dann Auswirkungen auf die Gesamtanzahl der Antworten und damit auf verschiedene Interpretationsmittel.

### 2.7.2.2 Hinweise für den Unterricht

Die Erstellung eines Fragebogens spielt in der Grundschule noch keine Rolle. Kinder können aber am Ende ihrer Grundschulzeit selbst einfache sie interessierende Fragen stellen und versuchen zu überlegen, welcher Vorgang betrachtet werden muss und welche Ergebnisse auftreten können. Dabei wird zunächst von Daten innerhalb der Klasse ausgegangen und dann überlegt, wie diese Daten mit anderen verglichen werden können. Zum Vergleich können von der Lehrkraft aussagekräftige statistische Untersuchungen vom statistischen Bundesamt herausgesucht werden. Z. B. wird nach den Berufswünschen der Schüler gefragt und dann könnten diese Daten mit der Häufigkeit der auftretenden Berufe in Deutschland verglichen werden. Da diese Vergleiche sehr schwierig in Vorbereitung und Durchführung sind, wäre hier die Projektform geeignet.

## 2.7.3 Fehler bei der Planung von statistischen Untersuchungen

### 2.7.3.1 Fachliche Grundlagen

Die folgenden Zitate sollen auf das Kapitel einstimmen:

Benjamin Disraeli: "There are three kinds of lies: lies, damned lies and statistics." (Es gibt drei Arten von Lügen: Lügen, verdammte Lügen und Statistik)

Winston Churchill: "Ich glaube nur den Statistiken, die ich selbst gefälscht habe."

A. Lang: „Menschen lügen mit Statistik, sie benutzen die Statistik wie ein Betrunkener einen Laternenpfahl: vor allem zur Stütze unseres Standpunktes und weniger zum Beleuchten eines Sachverhaltes“

Viele uns zur Verfügung stehende Statistiken sind bewusst manipuliert. Hauptschwerpunkte der Manipulation sind Zahlenmanipulationen, Ausnutzung von mangelndem Hintergrundwissen und irreführende Darstellung der Daten. Im Kapitel 2.2.4.1 wurde schon auf Fehler beim Erstellen von graphischen Darstellungen hingewiesen. Im Folgenden werden wesentliche Fehler ohne Anspruch auf Vollständigkeit aufgezählt.

**Zahlenmanipulationen:** Häufig wird durch fehlende Angaben oder falsche Wahl von Bezugsgrößen. Wer wird bei der Arbeitslosenstatistik als „arbeitslos“ gezählt? Oder was bedeutet es, wenn die Aussage getroffen wird: Im Krankenhaus sterben mehr Menschen als zu Hause?

**Falsche Angaben der Befragten:** Wenn die Befragten bewusst falsche Angaben machen, wird das Ergebnis der Umfrage durch diese verfälscht. In der Grundschule kann bei Schülern dieses häufig unbewusst passieren, wenn z. B. der Freund ein Lieblingstier wählt, wählt der Schüler dann entsprechend auch dieses aus. Durch eine anonyme Befragung kann dieses Problem oft behoben werden.

**Formulierung von Fragestellungen:** Fragestellungen dürfen nicht so gestellt werden, dass die Antwort nicht ehrlich sein kann. Wann zum Beispiel gefragt wird: Schlagen sie ihre Kinder? Werden sie wohl kaum die Antwort ja erwarten.

**Fehlende Erläuterung von in der Umfrage verwendeten Begriffen:** Häufig werden Daten in Zeitschriften visualisiert und mit entsprechenden Fachbegriffen erläutert. Diese müssen aber auch definiert werden, sonst entsteht bei den Lesern ein falsches Bild. Ein Beispiel dazu ist die Angabe des

Durchschnittseinkommens. Hier ist ohne Erläuterung nicht klar, ob es sich um das Netto- oder Bruttoeinkommen handelt.

**Nichtrepräsentative Umfrage:** Es können gezielt Personengruppen für eine Befragung ausgewählt werden, um somit ein mögliches Wunschergebnis zu erhalten. Wenn zum Beispiel am Flughafen die Frage gestellt wird: 'Reisen sie gern?' Wird diese sicher von sehr vielen mit Ja beantwortet werden. Anders fällt das Ergebnis vielleicht auf der Straße aus.

## 3 Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

### 3.1 Zum präformalen Wahrscheinlichkeitsbegriff

#### 3.1.1 Fachliche Grundlagen

##### ***Welche umgangssprachliche Bedeutung haben die Begriffe „wahrscheinlich“ und „Wahrscheinlichkeit“?***

Um Aussagen über die Ergebnisse eines Vorgangs zu formulieren, ist in vielen Fällen die Verwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs sinnvoll. Dabei ist es nicht erforderlich, bereits über die formalen Aspekte des Begriffs zu verfügen, also zum Beispiel Wahrscheinlichkeiten als Zahlen zwischen 0 und 1 auffassen zu können. Mit den folgenden inhaltlichen Aspekten kann beim Schüler ein präformaler Wahrscheinlichkeitsbegriff aufgebaut werden, der sich dann im weiteren Verlauf der Entwicklung des Begriffs durch die formalen Aspekte anreichern lässt.

Erste inhaltliche Vorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff können aus der umgangssprachlichen Verwendung von „wahrscheinlich“ und „unwahrscheinlich“ gewonnen werden. Dabei ist allerdings zu beachten, dass das Wort „wahrscheinlich“ als Adverb meist die Bedeutung von „sehr wahrscheinlich“ hat bzw. für Ereignisse<sup>2</sup> mit einer Wahrscheinlichkeit größer als  $1/2$  steht und das Wort „unwahrscheinlich“ für Ereignisse mit geringer Wahrscheinlichkeit verwendet wird.

##### *Beispiel:*

Die Aussage „Ich werde wahrscheinlich morgen zu Besuch kommen.“ bedeutet im Alltag, dass man mit ziemlicher Sicherheit kommen wird.

Diese Bedeutung kann aber bewusst gemacht werden, da die Wortkombinationen „sehr wahrscheinlich“, „wenig wahrscheinlich“ „sehr unwahrscheinlich“ auch im Sprachgebrauch vorhanden sind.

Auch zum Wort „Wahrscheinlichkeit“ selbst gibt es umgangssprachliche Verwendungen. Damit können mehrere Abstufungen zum Ausdruck gebracht werden. Man spricht z. B. von sehr großer, großer, geringer oder sehr geringer Wahrscheinlichkeit.

Die Angabe von Wahrscheinlichkeiten künftiger Ereignisse drückt das Erwartungsgefühl für das mögliche Eintreten des Ereignisses aus. Eintretene Ereignisse können durch die Angabe von Wahrscheinlichkeiten bewertet werden. Dabei werden oft die Wörter „Glück“ oder „Pech“ verwendet.

##### *Beispiel:*

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fünfer im Lotto ist sehr gering und man kann deshalb dieses Ereignis in der Regel nicht erwarten. Wenn es tatsächlich eingetreten ist, kann man von einem sehr großen Glück sprechen und sich darüber sehr freuen.

Weiterhin treten in der Umgangssprache auch Wahrscheinlichkeitsvergleiche auf. Man sagt, dass etwas wahrscheinlicher ist, eine größere Wahrscheinlichkeit hat als etwas anderes bzw. weniger wahrscheinlich ist oder eine geringere Wahrscheinlichkeit hat oder das beide die gleiche Wahrscheinlichkeit haben bzw. gleichwahrscheinlich sind.

##### ***Wie können Vergleiche von Wahrscheinlichkeiten durchgeführt werden?***

Vergleiche von Wahrscheinlichkeiten möglicher Ergebnisse können auf der Grundlage folgender Überlegungen erfolgen.

2 \_\_\_\_\_

<sup>2</sup> In diesem Kapitel werden die Wörter „Ergebnis“ für etwas, was sich nach Ablauf eines Vorgangs ergeben hat, und „Ereignis“ für etwas, was sich in einer stochastischen Situation ereignet hat, nicht weiter unterschieden. (vgl. S. 18)

### **Vergleich der Anzahl der jeweils möglichen Ergebnisse bei einer Gleichverteilung**

Geeignet sind Vorgänge mit Zufallsgeneratoren, bei denen die möglichen Ergebnisse den Schülern bekannt sind. Die Schüler müssen die Anzahlen der jeweils günstigen Ergebnisse bestimmen und vergleichen.

*Beispiel:*

Es wird mit einem Spielwürfel gewürfelt. Was ist wahrscheinlicher?

A: Es wird eine 6 gewürfelt.

B: Es wird keine 6 gewürfelt.

### **Vorstellen des künftigen Verlaufs eines Vorgangs, der den Schüler betrifft**

Bei diesen Aufgaben sollen die Wahrscheinlichkeiten möglicher Ergebnisse von Vorgängen verglichen werden, die den Schüler selber betreffen. Die Lösungen dieser Aufgaben sind daher auch nur individuell einzuschätzen. Der Vorteil ist, dass der Schüler die Einflussfaktoren gut beurteilen kann, da sie seine eigene Person betreffen. Zur Schätzung der Wahrscheinlichkeit muss sich der Schüler einen künftigen Verlauf des Vorgangs vorstellen und eine Prognose über das zu erwartende mögliche Ergebnis abgeben.

*Beispiel:*

Vergleiche die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ergebnisse. Was ist wahrscheinlicher?

A: Bei einem Weitsprung kommst du über 2 m.

B: Bei einem Weitsprung kommst du nicht über 2 m.

### **Anwenden von Kenntnissen der Schüler zu naturwissenschaftlichen Zusammenhängen**

Bei diesen Aufgaben müssen die Schüler ihre Kenntnisse aus dem Sachkundeunterricht oder dem Alltag anwenden. Bei den Aufgaben geht es um die Interpretation stochastischer Zusammenhänge, um die es sich bei den meisten naturwissenschaftlichen und auch gesellschaftswissenschaftlichen Zusammenhängen handelt. Deshalb sind Aussagen zur Wahrscheinlichkeit möglicher Ergebnisse oft sachgerechter als Aussagen ohne Verwendung von Wahrscheinlichkeiten.

Die Art der Aufgabenstellung kann deshalb auch genutzt werden, um die Kenntnisse der Schüler zu diesem Zusammenhang zu festigen oder auch überprüfen.

Die Schüler erleben gleichzeitig, dass mit Wahrscheinlichkeiten zahlreiche Sachverhalte ausgedrückt werden können.

*Beispiel:*

Leonie putzt sich jeden Morgen nach dem Frühstück und jeden Abend nach dem Abendessen die Zähne. Was ist wahrscheinlicher?

A: Leonie bekommt keine Zahnschmerzen.

B: Leonie bekommt Zahnschmerzen.

### **Schlüsse aus Daten bei Auswahl eines beliebigen Elementes der Grundgesamtheit**

Es geht in diesem Fall um Daten, die in der Klasse, der Schule oder im Umfeld der Schüler erhoben wurden. Die Wahrscheinlichkeitsaussagen betreffen deshalb auch nur Elemente dieser speziellen Population. Zu den erhobenen Daten muss eine stochastische Situation vorhanden sein, in der Aussagen über eine beliebige aber unbekannte Person getroffen werden. Dies kann zum einen dadurch erfolgen, dass eine Person zufällig, z. B. durch ein Losverfahren ausgewählt wird. Es ist auch eine Situation möglich, in der über eine beliebige Person aus der Population gesprochen wird.

Zum Vergleich der Wahrscheinlichkeiten müssen die Häufigkeiten der möglichen Ergebnisse verglichen werden.

*Beispiel:*

Bei einer Befragung in einer 3. Klasse nach dem Lieblingstier haben sich folgende Häufigkeiten ergeben. Jeder durfte nur ein Tier nennen.

Lieblingstier	Katze	Hund	Vogel	sonstige Tiere
Anzahl der Schüler	8	4	6	6

Es wird über die Schüler in dieser Klasse gesprochen. Was ist wahrscheinlicher?

A: Das Lieblingstier eines Schülers dieser Klasse ist ein Hund.

B: Das Lieblingstier eines Schülers dieser Klasse ist ein Vogel.

### Prognostische Überlegungen auf der Grundlage von Daten zu naturwissenschaftlichen Zusammenhängen

Bei diesen Aufgaben geht es um Prognosen auf der Grundlage von Daten zu Zusammenhängen mit einem großen Allgemeinheitsgrad. Deshalb haben diese Prognosen auch einen größeren Anwendungsbereich als Daten zu speziellen Grundgesamtheiten.

Bei dem Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten künftiger Ereignisse müssen absolute Häufigkeiten des bisherigen Auftretens der Ereignisse verglichen werden.

*Beispiel:*

Die Tabelle enthält die Ergebnisse langjährige Wetterbeobachtungen in Binz auf der Insel Rügen für die Monate Juli und August. Es handelt sich um Durchschnittswerte.

	Juli	August
Sonnenstunden pro Tag	8 Stunden	7 Stunden

Deine Großeltern planen, den nächsten Urlaub in Binz zu verbringen und überlegen, ob sie im Juli oder August dorthin fahren. Sie wollen möglichst viel Sonne haben.

In welchem der beiden Monate Juli und August ist die Wahrscheinlichkeit für viele Sonnenstunden größer?

### Wie kann die Gleichwahrscheinlichkeit von Ergebnissen begründet werden?

Ein spezieller Fall, der beim Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten auftreten kann, ist die Gleichwahrscheinlichkeit zweier möglicher Ergebnisse eines Vorgangs. Dieser Fall ergibt sich insbesondere bei der Arbeit mit Zufallsgeneratoren. Mit diesem Spezialfall sind bei der Entwicklung eines präformalen Wahrscheinlichkeitsbegriffs folgende Probleme verbunden:

- Die Gleichwahrscheinlichkeit gibt es nur auf der *Modellebene*. So sind zum Beispiel bei einer 1-Euro-Münze die beiden Seiten unterschiedlich geprägt, sodass es zu einer zwar minimalen aber doch vorhandenen unterschiedlichen Masseverteilung in der Münze kommt. Auch bei einem normalen Spielwürfel, wie er üblicherweise bei Glücksspielen verwendet wird, ist die Masse durch die unterschiedliche Zahl der Vertiefungen für die Augenzahlen nicht homogen verteilt. An Würfeln in Spielcasinos werden deshalb sehr hohe Anforderungen an die Homogenität gestellt.
- Neben diesen Abweichungen in der physikalischen Struktur des geworfenen Objekts sind in der Realität auch weitere Bedingungen des Vorganges zu beachten. Dazu gehören beispielsweise die verwendete Wurftechnik, die jeweilige Unterlage und andere Faktoren, die zu einer Abweichung von der Gleichverteilung führen können.

Aus diesen Gründen ist die Gleichwahrscheinlichkeit immer eine Modellannahme für die Arbeit auf der theoretischen Ebene. Die Berechtigung dieser Annahme muss jeweils durch Betrachtung der Eigenschaften der tatsächlichen Objekte sowie der Bedingungen des Vorgangs begründet oder experimentell nachgewiesen werden.

Im stochastischen Anfangsunterricht ist es notwendig, eventuelle intuitive Fehlvorstellungen bei einigen Schülern zu verändern. So glauben etwa viele Kinder auf der Grundlage ihrer eigenen persönlichen Erfahrungen in Glücksspielen, dass die einzelnen Augenzahlen beim Werfen mit einem Würfel eine unterschiedliche Wahrscheinlichkeit haben. Deshalb sollten das Sammeln eigener Erfahrungen

und geeignete Überlegungen im Unterricht erfolgen, wozu auch geeignete Experimente durchgeführt werden können.

Bei der Durchführung von Experimenten zur Gleichverteilung mit einem Spielwürfel müssen allerdings folgende Probleme beachtet werden:

- Eine genaue Gleichverteilung aller Augenzahlen gibt es auch bei einer großen Anzahl von Wiederholungen nicht.
- Es kann bei den Experimenten durchaus auch der Fall eintreten, dass einige Augenzahlen bei einer bestimmten Anzahl von Wiederholungen die gleiche Häufigkeit haben. Diese werden sich dann bei weiteren Wiederholungen aber wieder unterscheiden.
- Ein weiteres Problem dieser Experimente besteht darin, dass mit der meist erfolgten Zusammenfassung der Würfelresultate aller Schüler die intuitiven Vorstellungen von vorhandenen persönlichen Glückszahlen nicht ausgeräumt werden können. Jeder Schüler kann ja eine andere Glückszahl haben und bei einer Zusammenfassung können sich die Ergebnisse dann ausgleichen.

Ein direkter Nachweis der Gleichverteilung ist also mit zahlreichen Problemen verbunden. Eine andere Möglichkeit, Kenntnisse und Einsichten zur Gleichverteilung auszubilden bzw. auch zu korrigieren, sind indirekte Vorgehensweisen. Diese könnten in folgender Weise erfolgen.

#### **Anregen geeigneter Überlegungen**

Eine mögliche Fragestellung bei der Untersuchung entsprechender Objekte wie Würfel oder Münze lautet: „Aus welchen Gründen sollte ein Ergebnis wahrscheinlicher als ein anderes sein?“

Oder besser noch konkreter: „Aus welchen Gründen sollte der Würfel eher eine 4 als eine 6 zeigen?“

Diese indirekte Überlegung hat auch in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung als Prinzip vom unzureichenden Grund eine Rolle gespielt. Das Prinzip besagt, dass man an dem Modell der Gleichwahrscheinlichkeit von Ergebnissen festhält, wenn man keinen ausreichenden Grund hat, an diesem Modell zu zweifeln.

Mit diesen Fragestellungen kann man aber sicher nicht alle Schüler überzeugen. Dass ein Würfel sehr symmetrisch ist, können Schüler durchaus einsehen ohne daraus auf die Gleichwahrscheinlichkeit zu schließen. Die Fehlintuitionen beruhen ja vor allem auf subjektiven, mystischen oder animistischen Vorstellungen. So glauben manche Schüler, dass bestimmte Wesen die Ergebnisse zufälliger Vorgänge beeinflussen.

#### **Experimente zum indirekten Nachweis der Gleichwahrscheinlichkeit**

Im Unterricht oder als Hausaufgabe würfelt jeder Schüler 60-mal mit einem Spielwürfel. Anschließend ermittelt er, welche Augenzahl am häufigsten und welche am seltensten aufgetreten sind. Daraus kann dann die Hypothese abgeleitet werden, dass bei diesem Schüler mit dem verwendeten Würfel diese Augenzahlen immer am häufigsten bzw. am seltensten auftreten.

In einer nächsten Unterrichtsstunde oder einer weiteren Hausaufgabe wird das Experiment nun unter den beiden Hypothesen zur häufigsten und seltensten Augenzahl wiederholt. Diese Hypothesen werden dann entweder bestätigt oder es ergeben sich neue Hypothesen, was in der Regel zu erwarten ist.

Das Experiment sollte noch ein drittes Mal in einer weiteren Stunde oder Hausaufgabe mit den aktuellen Hypothesen wiederholt werden.

Bei der Auswertung der Ergebnisse aller Schüler im Klassenverband lassen sich dann folgende Erkenntnisse gewinnen:

- Wenn man sehr oft, etwa 60-mal, mit einem Würfel würfelt, gibt es immer Augenzahlen, die besonders selten oder besonders häufig auftreten.
- Es sind aber, auch bei ein und demselben Schüler und demselben Würfel immer andere Augenzahlen, die besonders selten oder besonders häufig auftreten.
- Man kann also nicht sagen, welche Augenzahl bei einem Schüler am wahrscheinlichsten oder am unwahrscheinlichsten ist.

Dabei kann es allerdings vorkommen, dass bei einem Schüler zwar nicht eine Augenzahl aber bestimmte Augenzahlen besonders häufig auftreten, sodass auch mit diesem Experiment nicht die letzten Zweifel an der Gleichverteilung ausgeräumt werden können.

### **Sind „sicher“, „möglich“ und „unmöglich“ Fachbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung?**

Die drei Wörter sind für sich genommen keine Fachbegriffe, sondern können nur im Zusammenhang mit den sie kennzeichnenden Substantiven als Fachbegriffe betrachtet werden.

Das Wort „sicher“ hat als Adjektiv in der Umgangssprache folgende Bedeutungen:<sup>3</sup>

1. ungefährdet, gefahrlos; geschützt; Sicherheit bietend  
Beispiele: ein sicheres Verkehrsmittel, ein sicherer Arbeitsplatz, „sicher ist sicher“.
2. zuverlässig  
Beispiele: Das weiß ich aus sicherer Quelle; ein sicheres Einkommen
3. aufgrund von Übung, Erfahrung keine Fehler machend:  
Beispiele: ein sicheres Urteil, eine sichere Hand, ein sehr sicherer Autofahrer
4. keine Hemmungen habend, zeigend; selbstsicher  
Beispiele: Ein sicheres Auftreten, sie wirkt jetzt viel sicherer.
5. ohne jeden Zweifel bestehend oder eintretend; gewiss  
Beispiele: ein sicherer Sieg; ein sicher wirkendes Schmerzmittel; die Belohnung ist ihm sicher
6. keinerlei Zweifel habend  
Beispiele: Ich bin sicher, dass er noch kommt; er ist sich seiner selbst sehr sicher

Als Adverb hat das Wort „sicher“ folgende Bedeutungen.

1. höchstwahrscheinlich, mit ziemlicher Sicherheit  
Beispiele: Sicher kommt er bald; er hat es sicher vergessen; du hast sicher davon gehört
2. gewiss, sicherlich, ohne Zweifel  
Beispiel: Das ist sicher richtig.

Nur in der adjektivischen Bedeutung 5 und der adverbialen Bedeutung 2 geht es um Situationen, in denen ein Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit 1 eintreten kann.

Fachbegriffe in der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind die Wortkombinationen „sicheres Ereignis“ und „unmögliches Ereignis“, die Kombination „mögliches Ereignis“ wird in der Regel nicht verwendet. Die Begriffe sicheres und unmögliches Ereignis werden zu den zufälligen Ereignissen gezählt. Aus inhaltlicher Sicht gehören sie nicht zu dieser Menge. Ein sicheres und ein unmögliches Ereignis haben keinen zufälligen Charakter.

Man könnte ein sicheres bzw. unmögliches Ereignis als Grenzfall eines zufälligen Ereignisses bezeichnen. Ebenso könnte man auch ein Rechteck der Grenzfall eines Quaders bezeichnen, wenn die Höhe des Quaders gleich Null ist. Genauso wenig, wie man ein Rechteck als Quader bezeichnet, sollte ein sicheres oder unmögliches Ereignis in der Schule als ein zufälliges Ereignis bezeichnet werden. Die Zuordnung dieser Ereignisse zur Menge der zufälligen Ereignisse erfolgt allein aus theoretischen Gründen.

Ausgelöst durch Formulierungen in den Bildungsstandards für die Primarstufe gibt es in der didaktischen Fachliteratur und in Unterrichtsmaterialien insbesondere für die Klassen 1-4 zahlreiche Vorschläge zum Umgang mit den Begriffen sicher und unmöglich. Dabei werden dann oft Aussagen formuliert, die offensichtlich wahr oder falsch sind. Dabei gibt es auch viele, eigentlich unsinnige Formulierungen.

*Beispiele für Aussagen, die als sicher erkannt werden sollen:*

- Jede Woche hat sieben Tage.

3 \_\_\_\_\_

<sup>3</sup> Duden: Deutsches Universalwörterbuch, 5. überarb. Aufl., Mannheim, 2003



- Ich bin ein Kind.
- Im Sommer haben wir Ferien.

*Beispiele für Aussagen, die als unmöglich erkannt werden sollen:*

- Ein Affe fliegt über mein Haus.
- In der Federtasche ist ein Hund.
- In einem Aquarium sehe ich einen Elefanten.

Die Bewertung solcher Aussagen ist durchaus nicht immer eindeutig. So kann etwa ein Affe über ein Haus fliegen, wenn er sich in einem Flugzeug befindet oder in der Federtasche kann ein Hund sein, wenn es sich um einen kleinen Plastikhund handelt. Man kann sogar einen Elefanten in einem Aquarium sehen, wenn ein Spielzeugelefant dort hinein eingefallen ist.

Solche Diskussionen mögen ja durchaus lustig und anregend für Grundschüler sein, sie tragen aber nicht dazu bei, stochastisches Wissen und Können auszubilden.

Neben der Tatsache, dass Betrachtungen zu dem, was sicher und unmöglich ist, relativ unfruchtbar sind, zeigen die Beispiele aber auch, dass eine Analyse von Erscheinungen mit zufälligem Charakter schwierig und mehrdeutig wird, wenn man sich nur mit Aussagen zu den Resultaten beschäftigt und nicht die Prozesse betrachtet, die hinter diesen Erscheinungen stehen.

### **Wie kann mit einer Wahrscheinlichkeitsskala gearbeitet werden?**

Ein wichtiger nächster Schritt bei der Herausbildung eines präformalen Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist die qualitative Schätzung von Wahrscheinlichkeiten. Dies wird auch als Normierung des Erwartungsgefühls bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ereignisses wird nicht mehr nur mit der Wahrscheinlichkeit eines anderen Ereignisses verglichen, sondern als absoluter Wert geschätzt. Diese Schätzung kann in Worten oder auch zahlenmäßig erfolgen. Der Schätzwert wird dabei zwischen den Wahrscheinlichkeiten für ein unmögliches Ereignis und ein sicheres Ereignis oder zwischen 0 bis 1 bzw. zwischen 0 % bis 100 % eingeordnet. Zur enaktiven und ikonischen Repräsentation dieser geistigen Handlung hat sich eine Wahrscheinlichkeitsskala bewährt, die auf eine Idee von Tamás Varga zurückgeht. Varga verwendet einen senkrechten Strich ohne weitere Markierungen, auf der die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse durch einen kleinen Kreis gekennzeichnet werden.

Durch die Verwendung einer Wahrscheinlichkeitsskala erhält der präformale Wahrscheinlichkeitsbegriff bereits einen stetigen Charakter, denn im Prinzip kann jeder Punkt der Skala markiert werden.

Zur verbalen Beschreibung der Wahrscheinlichkeiten in dem offenen Intervall von 0 bis 1 können unterschiedliche Abstufungen und Begriffsbildungen verwendet werden. Man findet in der Literatur folgende Vorschläge:

- ein Begriff für das ganze Intervall: „wahrscheinlich (möglich)“  
Bei diesem Zugang gibt es allerdings das Problem, dass die Bezeichnung „wahrscheinlich“ im üblichen Sprachgebrauch nicht das gesamte Intervall abdeckt, sondern eher Wahrscheinlichkeiten in der oberen Hälfte.
- Zwei Begriffe für die Teilintervalle von 0 bis 0,5 und 0,5 bis 1:  
„weniger wahrscheinlich“, „eher wahrscheinlich“
- „wahrscheinlich“, „unwahrscheinlich“, „möglich“  
Bei diesen Begriffsbildungen tritt das Problem auf, dass Ereignisse, die wahrscheinlich oder unwahrscheinlich sind, auch als möglich bezeichnet werden können, sodass es sich nicht um eine Einteilung in drei, sondern nur in zwei Intervalle handelt.
- kleine, mittlere, große Wahrscheinlichkeit

Neben diesen eher sehr groben Abstufungen bietet der übliche Sprachgebrauch aber auch noch feinere Unterscheidungen, insbesondere im Bereich der Enden des Intervalls. Dazu gehören die folgenden Bezeichnungen:

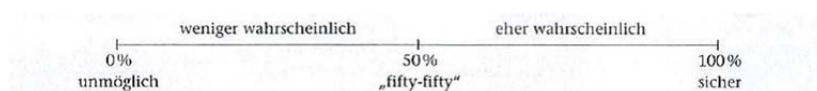
fast unmöglich, sehr unwahrscheinlich, unwahrscheinlich, eher wahrscheinlich, sehr wahrscheinlich, hoch wahrscheinlich, fast sicher

Ein besonderes Problem ist die Bezeichnung des Mittelpunktes der Skala. Es ist in vielen Fällen sinnvoll, diesen Punkt zu beschriften, um die öfter auftretende Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$ , etwa beim Wurf einer Münze, darstellen zu können.

Zur Bezeichnung dieses Punktes sind Wörter wie „möglich“ oder „wahrscheinlich“ nicht geeignet, da sie ein bestimmtes Intervall angeben.

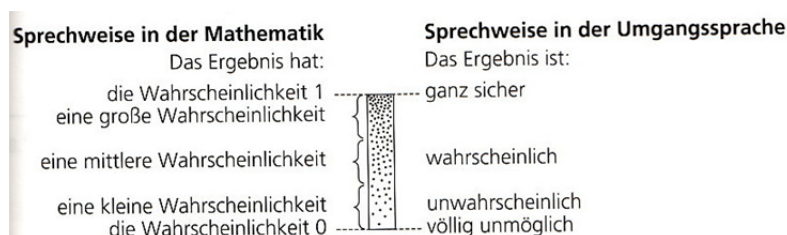
Eine Möglichkeit ist die Angabe der Chancen für das Ereignis in der Form 1 : 1 oder, wie es auch durchaus üblich ist mit „fifty-fifty“. Da viele Schüler bereits den Prozentbegriff aus dem Alltag kennen, ist auch eine Bezeichnung mit 50 % bzw. 50%ige Wahrscheinlichkeit möglich. Die Enden der Skala könnten dann auch mit 0 % und 100 % beschriftet werden.

In Worten kann die Wahrscheinlichkeit auch so ausgedrückt werden: „Die Chancen für das Eintreten oder Nichteintreten des Ereignisses sind gleich groß.“



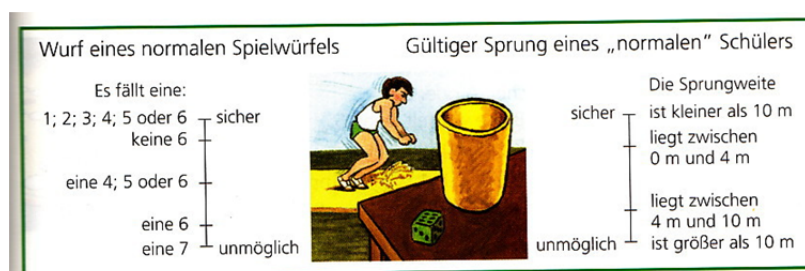
Neue Wege Kl. 6, S. 219

Beim Verwenden einer Skala ist weiterhin zu entscheiden, ob diese horizontal oder vertikal gehalten bzw. bezeichnet wird. Für die vertikale Lage spricht, dass damit das Rechts-Links-Problem umgangen wird und große bzw. kleine Wahrscheinlichkeiten oben (groß) bzw. unten (klein) platziert werden.



Duden Mathematik Kl. 5, 1997, S. 65

Ein weiterer Vorteil der senkrechten Darstellung ist, dass dann die Ereignisse einfacher neben der Skala notiert werden können.



Duden Mathematik Kl. 5, 1997, S. 65

Für eine horizontale Lage spricht, dass man die Wahrscheinlichkeit mit Stiften kennzeichnen kann und bei einer Beschriftung mit Buchstaben ein geringerer Platz benötigt wird.

Zur gegenständlichen Realisierung einer Skala reicht es aus, ein Lineal zu verwenden und die Wahrscheinlichkeiten mit einer Büroklammer oder einer Wäscheklammer zu kennzeichnen. Diese Skala kann dann auch leicht in der senkrechten Lage gehalten und zu einem schnellen Vergleich der Ergebnisse in der Klasse hochgehalten werden.

Wir empfehlen, für eine genauere qualitative Angabe der Wahrscheinlichkeit folgende Formulierungen zu verwenden.

Wert, Intervall	mögliche Beschreibungen
100 %	ganz sicher, ohne jeden Zweifel, gewiss
95 % - 100 %	fast sicher, mit großer Sicherheit, höchstwahrscheinlich, hoch wahrscheinlich
80 % - 95 %	sehr wahrscheinlich, (umgangsspr.: wahrscheinlich), mit ziemlicher Sicherheit
60 % - 80 %	eher wahrscheinlich
40 % - 60 %, darin 50 %	etwa 1 : 1, etwa 50 : 50, etwa fifty-fifty 1 : 1, 50 : 50, fifty-fifty
20 % - 40 %	eher unwahrscheinlich
5 % - 20 %	sehr unwahrscheinlich
0 % - 5 %	fast unmöglich
0 %	völlig unmöglich, ausgeschlossen

Die Wahrscheinlichkeitsskala wird z. T. auch als Wahrscheinlichkeitsstreifen bezeichnet. Für die Bezeichnung „Skala“ spricht, dass eine Skala ein lineares begrenztes Gebilde ist, also dem Intervall  $[0, 1]$  entspricht, während ein Streifen ein ebenes, eigentlich unbegrenztes Objekt ist. Für den Unterricht in der Primarstufe ist die Bezeichnung „Streifen“ aber trotzdem sinnvoll, da die gegenständlichen Formen Streifen sind und das Wort „Skala“ eher schwierig ist.

### **Welche Aufgabentypen sind zum Schätzen von Wahrscheinlichkeiten geeignet?**

Es können im Prinzip die gleichen Arten zufälliger Vorgängen wie beim Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

Als ein weiterer Aufgabentyp kann der Einfluss von Bedingungen auf die Wahrscheinlichkeit untersucht werden. Dazu können Faktoren genannt werden, die Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit der möglichen Ergebnisse des Vorgangs haben und es soll eingeschätzt werden, ob die Wahrscheinlichkeit bei diesen Faktoren größer oder kleiner wird. Die Aufgabenstellung kann auch als Lückentext erfolgen.

Weiterhin können Aufgaben zum Bestimmen von Chancenverhältnissen oder zur Konstruktion von Zufallsgeneratoren bei gegebenen Chancenverhältnissen gestellt werden.

### **Aufgaben zu Vorgängen, die die eigene Person betreffen**

*Beispiele:*

Schätze die Wahrscheinlichkeit der folgenden Möglichkeiten und markiere sie auf der Wahrscheinlichkeitsskala.

- A: Beim Weitsprung springst du über 2 m.
- B: In der nächsten Deutscharbeit schreibst du eine Zwei.
- C: Du kannst länger als 5 min die Luft anhalten.
- D: Am kommenden Wochenende schaust du länger als 5 h Fernsehen.

### **Aufgaben zur Interpretation von Daten zu Vorgängen in speziellen Populationen**

*Beispiele:*

Bei einer Befragung in einer Klasse zu den Zeiten für das Frühstück gab es folgende Ergebnisse.

Zeiten für das Frühstück in Minuten	kein Frühstück	weniger als 5	5 bis 10	10 bis 15	mehr als 15
Anzahl der Schüler	2	4	8	6	4

Ergänze die folgenden Wahrscheinlichkeitsaussagen zu diesen Daten.

- In dieser Klasse ist die Wahrscheinlichkeit, und dass ein Schüler 5-10 min für das Frühstück braucht am .....
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler in dieser Klasse kein Frühstück isst, .....
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler weniger als 5 min für das Frühstück braucht ist ..... als die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler dieser Klasse 10-15 min für das Frühstück braucht.

### Aufgaben zu naturwissenschaftlichen Zusammenhängen

(1) Fülle die Lückentexte aus:

Wenn ich mir regelmäßig die Zähne putze, wird die Wahrscheinlichkeit ....., dass ich Zahnschmerzen bekomme.

Wenn ich viele Süßigkeiten esse, wird die Wahrscheinlichkeit ....., dass ich Zahnschmerzen bekomme.

(2) Anna hat im Garten Gras gesät und überlegt, wovon es abhängt, dass möglichst viele Grassamen keimen. Wird die Wahrscheinlichkeit, dass viele Grassamen keimen größer oder kleiner?

- Anna hat die Erde nach dem Aussäen der Grassamen fest angedrückt.
- In den ersten Wochen nach dem Aussäen der Grassamen bleibt die Erde immer etwas feucht.
- In den ersten Wochen nach dem Aussäen der Grassamen ist die Erde öfter trocken.
- Anna hat vor dem Aussäen den Boden gedüngt.

a) Schätze die Wahrscheinlichkeit der folgenden Möglichkeiten und markiere sie auf der Wahrscheinlichkeitsskala. (s. Tab. 2, S. 45)

A: In diesem Juli wird die Sonne mehr als 3 h pro Tag scheinen.

B: In diesem Juli wird die Sonne weniger als 3 h pro Tag scheinen.

C: In diesem Juli wird die Sonne mehr als 13 h pro Tag scheinen.

### Was ist der Unterschied zwischen der Wahrscheinlichkeit und den Chancen eines Ergebnisses?

Anstelle von Wahrscheinlichkeit wird im Alltag auch oft von den Chancen gesprochen. Zur qualitativen Beschreibung des Maßes der Erwartung für ein Ereignis können beide Begriffe in gleicher Weise verwendet werden. Wenn die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis groß ist, sind auch die Chancen für das Eintreten dieses Ereignisses groß und umgekehrt. In der didaktischen Literatur werden diese Begriffe deshalb auch teilweise synonym verwendet.

Bei der mathematischen Beschreibung dieser Begriffe treten aber wesentliche Unterschiede hervor. In der Mathematik versteht unter den Chancen (engl. Odds) für das Eintreten eines Ereignisses A das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit von A zur Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses. Die Chancen eines Ereignisses werden mit  $O(A)$  bezeichnet.

$$O(A) = \frac{P(A)}{1 - P(A)} = \frac{P(A)}{P(\bar{A})}$$

Im Falle der Gleichverteilung entspricht diesem Verhältnis das Verhältnis der Anzahl der für A günstigen zur Anzahl der für A nicht günstige Möglichkeiten. Aus den Chancen als Verhältnis für eine Ereignis A kann die Wahrscheinlichkeit von A berechnet werden und umgekehrt.

*Beispiele:*

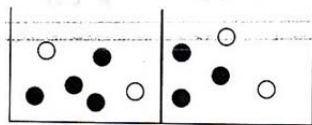
- (1) Beim Würfeln betragen die Chancen 1 : 5 für die Augenzahl 6, 2 : 4 für eine durch 3 teilbare Zahl und 5 : 1 für eine Zahl größer als 1.
- (2) Betragen für ein Ereignis A die Chancen 3 : 5, so gilt für seine Wahrscheinlichkeit  $P(A) = 3/8$ .
- (3) Ist für ein Ereignis A die Wahrscheinlichkeit  $P(A) = 5/8$ , so sind die Chancen für A 5 : 3.

Mit der Angabe von Chancen als Verhältnisses kann im propädeutischen Stochastikunterricht die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses quantitativ charakterisiert werden, ohne dass dazu den Bruchbegriff benötigt wird. Es ist außerdem viel einfacher, in einer realen Situation das Verhältnis von günstigen zu ungünstigen Ergebnissen zu erkennen als das Verhältnis der günstigen Ergebnisse zu allen Ergebnissen.

*Beispiele:*

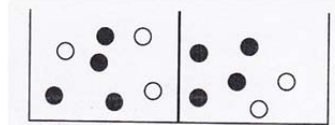
- (1) Sind auf einem Glücksrad mit 8 gleichgroßen Feldern 3 rote und 5 grüne vorhanden und ist Rot die Gewinnfarbe, so kann ohne Verwendung von Brüchen festgestellt werden, dass die Chancen für einen Gewinn 3 : 5 stehen.
- (2) Umgekehrt kann die Aufgabe gestellt werden, das Glücksrad so zu färben, dass die Chancen für einen Gewinn 5 : 3 stehen.
- (3) Neubert (2012) hat den Vergleich von Gewinnwahrscheinlichkeiten am Beispiel der folgenden Urnen vorgeschlagen. Die Aufgabenstellung lautet bei allen Urnen: Wenn Du eine weiße Kugel ziehst, gewinnst du. Aus welcher Urne würdest Du ziehen? Begründe deine Entscheidung! (S. 95 f.)

Aufgabe 1



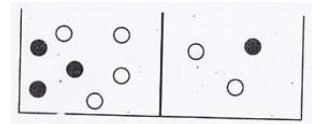
Urne 1    Urne 2  
Chancen:    2 : 4    2 : 3

Aufgabe 2



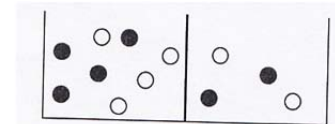
Urne 1    Urne 2  
Chancen:    3 : 4    2 : 4

Aufgabe 3



Urne 1    Urne 2  
Chancen:    4 : 3    2 : 1

Aufgabe 4



Urne 1    Urne 2  
Chancen:    4 : 4    2 : 2

Mit den Verhältnissen können die Chancen für das Ziehen einer weißen Kugel aus den beiden Urnen gut verglichen werden.

So kann etwa für die Aufgabe 3 Folgendes festgestellt werden:

Für die Urne 1 stehen die Chancen für das Ziehen einer weißen Kugel 4 : 3, das ist nur etwas besser als 1 : 1 (fifty-fifty).

Bei Urne 2 sind die Chancen für das Ziehen einer weißen Kugel doppelt so groß wie für das Ziehen einer schwarzen Kugel.

Also muss man Urne 2 gewählt werden.

Mit der Angabe von Chancen für ein Ereignis als Verhältnis wird zugleich der Verhältnisbegriff vorbereitet.

Mit der Angabe von Chancen kann weiterhin ein multiplikativer Vergleich der Wahrscheinlichkeiten vorgenommen werden.

*Beispiel:*

Die Chancen, dass man beim Werfen eines Würfels eine der Zahlen von 1 bis 5 bekommt stehen 5 : 1. Keine 6 zu würfeln ist damit fünfmal so wahrscheinlich, wie eine 6 zu bekommen.

Allgemein gilt: Ist  $O(A) = P(A) : P(\bar{A}) = k : 1$ , so ist  $P(A) = k \cdot P(\bar{A})$ .

Es gibt weiterhin folgende Eigenschaften und Beziehungen für die Chancen eines Ereignisses  $O(A)$ .

- (1) Strebt  $P(A)$  gegen 1, so strebt  $O(A)$  gegen unendlich.
- (2) Strebt  $P(A)$  gegen 0, so strebt  $O(A)$  auch gegen 0.
- (3)  $O(\bar{A}) = \frac{1}{O(A)}$
- (4) Ist  $O(A) = O(B)$ , so ist auch  $P(A) = P(B)$ .

Aus der Eigenschaft (1) ergibt sich, dass die Chancen eines Ereignisses nicht auf einer Wahrscheinlichkeitsskala dargestellt werden können, was in der Literatur z. T. geschieht.

Aus der Eigenschaft (4) folgt, dass bei gleichen Gewinnchancen auch die Gewinnwahrscheinlichkeiten gleich sind. Um zu beurteilen, ob ein Spiel fair ist, müssen also nur die Gewinnchancen der Spieler verglichen werden.

***Kann auch eine Vermutung (Hypothese) eine Wahrscheinlichkeit besitzen?***

Es ist in der Umgangssprache üblich, Wahrscheinlichkeitsaussagen über eingetretene aber unbekanntere Ergebnisse zutreffen. In diesem Fall verwendet man oft Formulierung der Art: „sich sicher sein“, „sich sehr sicher sein“, „sich unsicher sein“, „sich sehr unsicher sein“. Es wird aber auch das Wort „Wahrscheinlichkeit“ verwendet, um den Grad der Sicherheit um Ausdruck zu bringen.

*Beispiel:*

Wenke ist mit ihrem Fahrrad gestürzt und hat Schmerzen im rechten Unterarm. Ihre Mutter sagt: "Ich bin mir nicht sicher, ob du dir vielleicht den Arm gebrochen hast." Sie gehen zum Arzt und der stellt nach der ersten Untersuchung fest: "Du hast mit großer Wahrscheinlichkeit nur eine Verstauchung. Wir machen zur Sicherheit aber noch eine Röntgenaufnahme." Nach der Röntgenaufnahme sagt der Arzt zu Wenke und ihrer Mutter: „Jetzt können wir ganz sicher sein, dass der Arm nicht gebrochen ist.“

Auch bei der Arbeit mit Zufallsgeräten können solche Aufgaben formuliert werden.

*Beispiel*

Es wurde mit einem normalen Spielwürfel gewürfelt, du kennst aber das Ergebnis nicht. Schätze jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass eine 6 gewürfelt wurde, wenn du nacheinander Folgendes erfährst.

- A: Die gewürfelte Augenzahl ist gerade.
- B: Die gewürfelte Augenzahl ist auch durch drei teilbar.
- C: Die gewürfelte Augenzahl ist größer als fünf.

Die Verwendung von Wahrscheinlichkeiten für Hypothesen ist in der Stochastik durchaus umstritten. Oft wird die Wahrscheinlichkeit ausschließlich als ein Häufigkeitsmaß aufgefasst und nur bei Ereignissen verwendet, die im Prinzip beliebig oft wiederholbar sind. Da dies für Hypothesen, die von Menschen aus seiner aktuellen persönlichen Sicht aufgestellt werden, nicht zutrifft, gibt es den Begriff der Hypothesenwahrscheinlichkeit in einer Richtung der Stochastik nicht.

Diese gegensätzlichen Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffes können aus Sicht einer Prozessbeobachtung als Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen zweier unterschiedlicher Arten von zufälligen Vorgängen aufgefasst werden:

Typ A: Vorgänge, die noch nicht beendet sind, d.h. die noch gar nicht angefangen haben bzw. deren Ablauf noch andauert, z.B. Werfen eines Würfels, Wachstum von Getreideähren,

Typ B: Vorgänge, die bereits abgelaufen sind („Die Würfel sind gefallen.“), deren Ergebnisse aber nicht oder nur teilweise bekannt sind, z.B. Diagnose einer Krankheit, Fehlersuche in einem defekten Gerät, Beurteilung der Güte eines Würfels, Überlegungen zur Note in der gerade geschriebenen Arbeit

Bei Vorgängen vom Typ A wird mit der Angabe von Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen deren mögliches Eintreten bewertet.

Bei Vorgängen vom Typ B läuft ein Erkenntnisprozess ab, der die Bestimmung des eingetretenen aber unbekanntes Zustandes zum Gegenstand hat und zu dessen Bedingungen die vorhandenen Informationen der Person, die diese Überlegungen anstellt, gehören. Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses gibt in diesem Fall an wie sicher sich die Person ist, dass das Ergebnis eingetroffen ist bzw. der jeweilige Zustand vorliegt. Mit der Zunahme von Informationen ändert sich in der Regel die Wahrscheinlichkeitsschätzung der Person.

Da beide Fälle der Verwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs im Alltag und auch in den Wissenschaften sinnvoll sind, sollten die Schüler auch mit beiden Fällen vertraut gemacht werden.

In der Literatur wird im Fall A oft von *objektiven* Wahrscheinlichkeiten und im Fall B von *subjektiven* Wahrscheinlichkeiten gesprochen.

### 3.1.2 Hinweise für den Unterricht

#### ***Welche inhaltlichen Vorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff können bereits in der Primarstufe ausgebildet werden?***

Ohne bereits eine Quantifizierung der Wahrscheinlichkeit als Bruch oder Dezimalbruch vorzunehmen, können bei einem Einsatz der vorgeschlagenen Aufgaben bereits reichhaltige Vorstellungen zum Begriff der Wahrscheinlichkeit in der Primarstufe ausgebildet werden. Dazu gehören folgende Gedanken.

- Aussagen zur Wahrscheinlichkeit möglicher Ergebnisse sind in vielen Bereichen verwendbar.
- Die Angabe einer Wahrscheinlichkeit ist ein Maß für das Erwartungsgefühl zum Eintreten des möglichen Ergebnisses.
- Ist ein Ereignis eingetreten, kann mit der Wahrscheinlichkeit seines möglichen Eintretens eine Bewertung erfolgen.
- Die Wahrscheinlichkeiten von möglichen Ergebnissen können verglichen werden.
- Wahrscheinlichkeiten möglicher Ergebnisse können geschätzt und auf einer Skala zwischen den Endpunkten „sicher“ und „unmöglich“ an beliebigen Punkten eingetragen werden.
- Wahrscheinlichkeiten können durch die Angabe von Chancen beschrieben werden.
- Die Wahrscheinlichkeit ist auch ein Maß für die Sicherheit, ob ein unbekanntes Ergebnis eingetreten ist. Je mehr Informationen man über das eingetretene Ergebnis erhält, umso sicherer kann man sein.

#### ***In welchen Phasen sollte in der Primarstufe die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs erfolgen?***

Ausgangspunkt für die Entwicklung des mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs beim Schüler in den Klassen 1 und 2 sollten die intuitiven Vorstellungen der Schüler zum Begriff „wahrscheinlich“ als etwas mit ziemlicher Sicherheit Eintretendes sein. Mit der Frage "Was ist wahrscheinlicher?" werden diese Vorstellungen erweitert und führen zum Vergleich von Wahrscheinlichkeiten.

Nach dem Umgang mit den Begriffen "gleichwahrscheinlich" sowie "mehr oder weniger wahrscheinlich" erfolgt der Übergang zur qualitativen Charakterisierung des Erwartungsgefühls durch den Begriff

"Wahrscheinlichkeit". Wahrscheinlichkeit als Maß für die Erwartung des Eintretens eines Ereignisses lässt sich innerhalb der Extreme "unmöglich" und "sicher" z. B. durch die Ausprägungen sehr geringe Wahrscheinlichkeit (unwahrscheinlich), geringe Wahrscheinlichkeit (wenig wahrscheinlich), mittlere (50%ige) Wahrscheinlichkeit, sehr hohe Wahrscheinlichkeit (sehr wahrscheinlich) charakterisieren. Zur Visualisierung und Darstellung der Lösung der Aufgaben kann man eine Wahrscheinlichkeitskala (Wahrscheinlichkeitsstreifen) verwenden, auf der Punkte markiert werden, die den geschätzten Wahrscheinlichkeiten entsprechen.

In den Klassen 3 und 4 sollten dann Wahrscheinlichkeiten durch Chancen beschrieben und Wahrscheinlichkeiten von Vermutungen thematisiert werden. Weiterhin können Erfahrungen zum Verhältnis von Wahrscheinlichkeit und absoluten Häufigkeiten durch Experimente gesammelt werden (s. 3.2.2)

## 3.2 Zu Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

### 3.2.1 Fachliche Grundlagen

#### **Was sind Wahrscheinlichkeiten und wie werden sie bezeichnet?**

Eine Wahrscheinlichkeit ist aus mathematischer Sicht eine Funktion, die einem Ereignis eine Zahl aus dem Intervall von 0 bis 1 zuordnet. Zur Bezeichnung von Wahrscheinlichkeiten wird in der Regel der Buchstabe P (probabilitas (lat.), probability (engl.), probabilité (franz.)) verwendet. In der funktionalen Schreibweise wird traditionell ein großes P benutzt und in Klammern das Ereignis angegeben, dem die Wahrscheinlichkeit zugeordnet wird. Dabei kann das Ereignis in Worten oder als großer Buchstabe, der zur Abkürzung für die Aussage steht, angegeben werden.

Bei der Angabe einer Wahrscheinlichkeit ohne Nennung des Ereignisses wird ein kleines p benutzt. Dabei muss aus dem Zusammenhang hervorgehen, welches Ereignis gemeint ist.

#### *Beispiel:*

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von „Kopf“ beim Werfen einer idealen Münze ist 0,5.  
Schreibweisen:

- $P(\text{Es fällt „Kopf“}) = 0,5$
- $P(K) = 0,5$  mit K: Es fällt „Kopf“.
- Es ist  $p = 0,5$  für das Auftreten von „Kopf“ beim Werfen einer idealen Münze.

#### **Wie hat sich der Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Mathematik entwickelt?**

In den Anfängen der Entstehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung hatte der Begriff Wahrscheinlichkeit zahlreiche inhaltliche Aspekte. Nach Gigerenzer u.a. (Das Reich des Zufalls, Berlin: Spektrum, 1999) war die klassische Interpretation der Wahrscheinlichkeit gekennzeichnet „durch:

- (1) die fruchtbare Verschmelzung des subjektiv und des objektiv verstandenen Wahrscheinlichkeitsbegriffs;
- (2) einen entschiedenen Determinismus, der die Existenz realer Zufälligkeit bestritt ... ;
- (3) das Ziele der gemischten Mathematik, Modelle von Phänomenen zu bilden; und
- (4) vor allem mit der Gleichsetzung der Theorie mit derjenigen Form praktischer Rationalität, die Vernünftigkeit genannt wurde.“

*Thomas Bayes* (um 1702 - 1761) englischer Mathematiker und presbyterianischer Pfarrer entwickelte die Idee der inversen Wahrscheinlichkeiten, d. h. der Wahrscheinlichkeiten von Ursachen der beobachteten Ergebnisse. Der Satz von Bayes ist Grundlage der modernen Bayes-Statistik, die einen **subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff** beinhaltet (s. S. 13).

*Pierre-Simon Laplace* (1749 – 1827) prägte den so genannten **klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff**, in dem er die Wahrscheinlichkeit als Verhältnis von Anzahlen bei gleich möglichen Ereignissen definierte. Alle Bemühungen, die „Gleichmöglichkeit“ mathematisch exakt zu erfassen, sind allerdings gescheitert.



*Richard von Mises* (1883-1953) versuchte, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als Grenzwert von relativen Häufigkeiten zu definieren. Man spricht in diesem Sinne von **statistischen oder frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff**. Auch dieser Ansatz zur mathematischen Fundierung hat sich nicht als haltbar erwiesen, da der mathematische Konvergenzbegriff nicht anwendbar ist.

*Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow* (1903 – 1987) hatte als Erster die Idee, sich völlig von inhaltlichen Vorstellungen und Erklärungen durch andere Begriffe zu lösen und den Begriff Wahrscheinlichkeit als mathematisch nicht definierbaren Grundbegriff auszufassen. Wie andere Grundbegriffe (Menge, Zahl) legte er den Wahrscheinlichkeitsbegriff axiomatisch fest und schuf damit die so genannte axiomatische „Definition“ der Wahrscheinlichkeit; man spricht dabei von einem **axiomatischen Wahrscheinlichkeitsbegriff**. Eine mathematische Grundlage dieses Zugangs ist die Theorie messbarer Mengen.

Die Wahrscheinlichkeit wird nach Kolmogorow heute in der Mathematik als ein Maß in etwa folgender Weise axiomatisch festgelegt.

### **Axiome von Kolmogorow**

Es sei  $S$  eine messbare Menge (Potenzmenge im diskreten Fall oder Borel-Menge im stetigen Fall) und  $A$  eine beliebige Teilmenge von  $S$ . Dann heißt  $P$  ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** auf  $S$ , wenn gilt:

(1)  $0 \leq P(A) \leq 1$

(2)  $P(S) = 1$

(3)  $\sigma$ -Additivität, z. B.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  für  $A \cap B = \emptyset$

Während also in den Anfängen der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Wahrscheinlichkeitsbegriff noch eine Vielzahl inhaltlicher Aspekte besaß, wird er heute in der mathematischen Theorie ledig auf einen formalen Aspekt reduziert. Was eine Wahrscheinlichkeit darüber hinaus bedeutet, kann mit mathematischen Begriffen nicht erklärt werden.

Ein solcher Zugang zum Wahrscheinlichkeitsbegriff und viele damit verbundenen Begriffsbildungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung können kein Inhalt des Mathematikunterrichts in der Primar- und Sekundarstufe I sein. Bei jedem Schüler und auch beim künftigen Mathematiker muss ein reichhaltiges System von Gedanken zu inhaltlichen Aspekten des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ausgebildet werden, wie es im Kap. 3.1 bereits in Anfängen umrissen wurde.

### **Welche Probleme sind mit den Begriffen „zufälliges Ereignis“ bzw. „zufälliges Ergebnis“ verbunden?**

In der Fachwissenschaft und in vielen Schulbüchern ist der Begriff „zufälliges Ereignis“ bzw. „zufälliges Ergebnis“ ein Grundbegriff beim Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Damit sind aus Sicht eines Lernenden folgende Gedanken und Probleme verbunden:

- Das Wort „zufällig“ besitzt eine große Anzahl von umgangssprachlichen Verwendungen. Auch in der Mathematik selbst hat das Wort „zufällig“ eine unterschiedliche Bedeutung. Etwa bei dem Begriff Zufallsstichprobe oder zufällige Auswahl steht es für die Gleichwahrscheinlichkeit aller Elemente der Stichprobe, ausgewählt zu werden. Da die Gleichwahrscheinlichkeit gerade zu Beginn der Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein häufiger Anwendungsfall ist, können hier durchaus fehlerhafte Bezüge hergestellt werden, indem man dies als ein generelles Merkmal ansieht.
- Das Wort Ereignis bezeichnet in der Umgangssprache einen besonderen Vorgang, Vorfall, Geschehnis (ein historisches Ereignis, das Theaterstück war ein Ereignis, die Geburt eines Kindes als ein freudiges Ereignis).
- Mit Ereignis wird immer etwas Einzelnes (ein einzelner Vorgang, ein einzelner Vorfall) bezeichnet.

Auf der Modellebene der Fachwissenschaft ist ein zufälliges Ereignis eine Menge von (ganz normalen) Ergebnissen und hat damit weder den Charakter von etwas Zufälligem, etwas Besonderem noch von etwas Einzelem. Die obigen Vorstellungen treffen also im Allgemeinen nicht zu.

Das Wort Ergebnis ist umgangssprachlich die Folge einer Handlung, einer Anstrengung oder einer Unterlassung bzw. etwas, was durch Rechnung, Messung, Auszählung oder ähnliche Prozesse ermittelt wird. Einem Schüler ist das Wort in der Kombination „Ergebnis einer Rechnung bzw. einer Aufgabe“ vertraut. Für ein Ergebnis gibt es in der Regel erkennbare Ursachen. Deshalb muss die Wortkombination „zufälliges Ergebnis“ für einen Lernenden unverständlich bleiben.

Aus diesen Gründen sollte bei Vorschlägen zur Propädeutik der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Begriffe „zufälliges Ereignis“ oder „zufälliges Ergebnis“ verzichtet werden. Man sollte nur von möglichen Ergebnissen eines Vorgangs sowie von möglichen Ereignissen nach Ablauf eines Vorgangs sprechen.

### ***Sollte zwischen Ergebnissen und Ereignissen unterschieden werden?***

Eine Unterscheidung beider Begriffe ist bei einem mengentheoretischen Aufbau nicht notwendig, da der Ausgangspunkt eine Menge  $S$  ist, die als Menge der möglichen Ergebnisse oder Ereignisse bezeichnet werden kann.

In einigen Fachbüchern und in allen Schulbüchern werden aber beide Begriffe unterschieden. **Ergebnisse** sind dann die unmittelbar beobachteten und nicht weiter zerlegbaren Resultate eines Vorgangs, wie es auch der Prozessbetrachtung entspricht. Ergebnisse können damit die möglichen durch Beobachtung oder Messung zu ermittelnden Daten, also Messdaten, Rangdaten oder Kategorien sein. Handelt es sich bei den Prozessen um Denkvorgänge, so sind die möglichen Ergebnisse alle denkbaren Vermutungen bzw. Hypothesen, die eine Person äußern kann. Ergebnisse sind also reale Zustände, Objekte oder geäußerte Gedanken.

*Beispiele:*

- a) Vorgang: Werfen eines Würfels; Ergebnisse: oben liegende Augenzahlen von 1 bis 6
- b) Vorgang: Weitsprung eines Schülers; Ergebnisse: alle messbaren Werte von 0 m bis 5 m
- c) Vorgang: Überlegungen eines Schülers zur Note in der gerade geschriebenen Arbeit; Ergebnisse: alle Noten von 1 bis 6

Für einige Aufgabenstellungen, insbesondere zum Berechnen von Wahrscheinlichkeiten mit Formeln ist es erforderlich, Aussagen über die eingetretenen Ergebnisse zu formulieren und diese zu bezeichnen. Dazu sollte der Begriff „**Ereignis**“ verwendet werden. Angesichts der erwähnten umgangssprachlichen Verwendung dieses Wortes muss dazu eine neue Bedeutung des Wortes als Fachbegriff in der Stochastik erarbeitet werden. Ausgehend von den umgangssprachlichen Formulierungen: „etwas ist eingetreten“, „es hat sich etwas ereignet“ muss den Lernenden bewusst gemacht werden, dass Ereignisse in der Stochastik keine besonderen Vorfälle oder Vorgänge sind, sondern Zusammenfassungen mögliche Ergebnisse eines Vorgangs beinhalten und Aussagen über bestimmte Arten oder Eigenschaften von Ergebnissen treffen. Ereignisse sind in diesem Sinne Aussagen über Ergebnisse eines Vorgangs.

*Beispiele:*

- a) Vorgang: Werfen eines Würfels; Ereignis: Es fällt eine gerade Zahl.
- b) Vorgang: Weitsprung eines Schülers; Ereignis: Der Schüler springt weiter als 2 m.
- c) Vorgang: Überlegungen eines Schülers zur Note in der gerade geschriebenen Arbeit; Ereignis: „Ich bekomme mindestens eine 3.“

### ***Welche Rolle sollte das Arbeiten mit Mengen spielen?***

Wie auch bei anderen mathematischen Disziplinen basiert ein exakter Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf mathematischen Grundlagen aus der Mengenlehre und auch der Maßtheorie. Diese Tatsache alleine rechtfertigt es aber nicht, dass in der Schule auch mengentheoretische Be-

trachtungen erfolgen müssen. Im Folgenden sollen einzelne Aspekte dieser fachwissenschaftlichen Grundlagen und ihrer möglichen Berücksichtigung im Stochastikunterricht diskutiert werden.

**Zur mengentheoretischen Definition der Begriffe Ereignis und Elementarereignis**

Es ist in vielen Fachbüchern üblich, den Begriff Ereignis als Teilmenge der Ergebnismenge zu definieren. Diese formale Definition ist für das inhaltliche Verständnis und auch die sprachliche Formulierung von Ereignissen wenig geeignet. Der Begriff Ereignis sollte bei seiner Einführung wie oben beschrieben inhaltlich erklärt werden.

Zur Vereinfachung der Schreibweise und zur Verkürzung der Darstellung ist allerdings eine Mengenschreibweise durchaus sinnvoll und sollte auch gelegentlich verwendet werden, etwa wenn die Ergebnisse als Zahlen dargestellt werden können. Die Menge aller Ergebnisse sollte dann als **Ergebnismenge** bezeichnet werden.

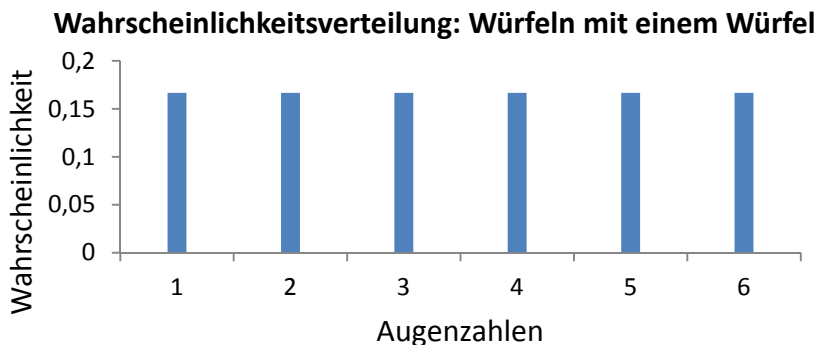
*Beispiel:*

Werfen eines Würfels; Ergebnisse: Augenzahlen von 1 bis 6; Ereignis: A: Es fällt eine gerade Zahl.  
 Ergebnismenge:  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$       Ereignis  $A = \{2, 4, 6\}$

**Was ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?**

Unter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung versteht man eine Funktion, die jedem Ergebnis des Vorgangs eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.

*Beispiel:*



**Welche Eigenschaften gelten für das elementare Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten?**

Für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten gelten folgende Aussagen und Beziehungen:

- (1) Wahrscheinlichkeiten sind Werte zwischen 0 und 1. Zur besseren Veranschaulichung der Größe einer Wahrscheinlichkeit werden diese auch in Prozent angegeben, z. B. 0,5 = 50 %.
- (2) Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse eines Vorgangs ist 1 (100 %).  
*Bsp.:* Ein Schüler schätzt die Wahrscheinlichkeit seiner Noten in der gerade geschriebenen Arbeit. Es sei  $A_i$  : Ich bekomme die Note  $i$ . ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ).  
 Dann gilt:  $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) = 1 = 100 \%$
- (3) Ist  $\bar{A}$  das zu  $A$  entgegengesetzte Ereignis, so gilt:  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .  
*Bsp.:* Es sei  $A$ : Beim Würfeln fällt eine 6. Dann ist  $\bar{A}$  : Beim Würfeln fällt keine 6.  
 Dann gilt:  $P(\bar{A}) = 1 - 1/6 = 5/6$

**Wie kann man Wahrscheinlichkeiten bei einer Gleichverteilung berechnen?**

Hat ein Vorgang  $n$  mögliche Ergebnisse und sind alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich, so gilt für ein Ereignis  $A$  (**Laplace-Formel**):

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

**Beispiele:**

Es wird mit einem Würfel gewürfelt. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Die Augenzahl ist gerade.	$A = \{2, 4, 6\}$	$P(A) = 0,5$
B: Die Augenzahl ist ungerade.	$B = \{1, 3, 5\}$	$P(B) = 0,5$
C: Die Augenzahl ist eine Primzahl.	$C = \{2, 3, 5\}$	$P(C) = 0,5$
D: Die Augenzahl ist eine Quadratzahl.	$D = \{1, 4\}$	$P(D) = 2/6$
E: Die Augenzahl ist durch 2 und durch 3 teilbar.	$E = \{6\}$	$P(E) = 1/6$
F: Die Augenzahl ist durch 2 oder durch 3 teilbar.	$F = \{2, 3, 4, 6\}$	$P(F) = 4/6$
G: Die Augenzahl ist Teiler von 60.	$G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$P(G) = 1$
H: Die Augenzahl ist mindestens 3.	$H = \{3, 4, 5, 6\}$	$P(H) = 4/6$
I: Die Augenzahl ist als Summe zweier gerader Zahlen darstellbar.	$I = \{2, 4, 6\}$	$P(I) = 0,5$
J: Die Augenzahl ist als Summe zweier ungerader Zahlen darstellbar.	$J = \{4, 6\}$	$P(J) = 2/6$
Z: Die Augenzahl ist größer als 6.	$Z = \emptyset$	$P(Z) = 0$

**Wie ist das Verhältnis von Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit**

Untersuchungen zur relativen Häufigkeit von Ergebnissen insbesondere in langen Versuchsserien sind für die Vertiefung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs von großer Bedeutung. Diese sind in der Schule aber erst in der Sekundarstufe I nach Einführung der gebrochenen Zahlen möglich. In der Grundschule können erste Vorstellungen durch Betrachtung von absoluten Häufigkeiten ausgebildet werden (s. 3.2.2)

Der Vergleich von Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten ist nur für die Verwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes für den Typ A von zufälligen Vorgängen von Bedeutung (s. S. 14). Beim Typ B ist eine Ermittlung von Häufigkeiten nicht möglich, da der Vorgang ja beendet ist und es um Betrachtungen zu den eingetretenen Ergebnissen geht. Im Folgenden soll nur der Typ A betrachtet werden.

Eine Wahrscheinlichkeitsangabe hat in diesem Fall immer einen prognostischen und theoretischen Charakter. Es ist eine allgemeine Aussage über eine Eigenschaft eines realen Vorgangs, die Prognosen für seine möglichen Ergebnisse gestattet. Wahrscheinlichkeitsaussagen sind Betrachtungen auf der Theorieebene, die nicht unmittelbar das konkrete Geschehen betreffen.

Eine relative Häufigkeit ist dagegen ein empirischer Wert, der sich auf der Grundlage von konkreten Ergebnissen durchgeführter oder abgelaufener Vorgänge ergibt. Die Angabe von absoluten oder relativen Häufigkeiten ist an eine konkrete Anzahl von Wiederholungen des Vorgangs und damit an tatsächliche Ereignisse gebunden.

**Beispiel:**

Wird bei einem Wetterbericht eine Regenwahrscheinlichkeit angegeben, so ist dies eine Prognose, die auf der Grundlage von Wettermodellen und aktuellen Wetterdaten entstanden ist. Auf der Grundlage von Wetterdaten über einen längeren Zeitraum an einem Ort kann die absolute bzw. relative Häufigkeit von Regentagen für einzelne Monate bestimmt werden.

Ein zentraler Satz in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist das Gesetz der großen Zahlen, das bereits von Jakob Bernoulli im Jahre 1689 formuliert wurde. Es beschreibt den Zusammenhang von Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit eines Ereignisses. Dabei wird allerdings vorausgesetzt, dass der Vorgang in dessen Resultat das Ereignis entstanden ist, beliebig oft unter gleichen Bedingungen wie-

derholt werden kann. Ein prototypisches Beispiel für einen solchen Vorgang ist das Werfen einer Münze. Für viele andere Vorgänge in der Natur oder der Gesellschaft trifft diese Voraussetzung allerdings nur näherungsweise zu. Das Gesetz besagt, dass mit größer werdender Anzahl der Wiederholung eines Vorgangs unter den gleichen Bedingungen die Schwankungen der relativen Häufigkeit um die Wahrscheinlichkeit immer geringer werden. Dies wird auch als Stabilität der relativen Häufigkeit oder stochastische Konvergenz bezeichnet. Diese Konvergenz darf nicht mit der numerischen Konvergenz einer Zahlenfolge gleichgesetzt werden. So kann man nicht formulieren, dass sich die relative Häufigkeit immer mehr der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit annähert.

Ein Beweis oder eine Begründung des Gesetzes der großen Zahlen mit mathematischen Mitteln ist in der Schule nicht möglich. Oft wird deshalb versucht, diesem Zusammenhang durch Experimente zu verdeutlichen. Dabei muss allerdings eine sehr große Zahl von Wiederholungen des Vorgangs durchgeführt werden, um den Effekt der stochastischen Konvergenz beobachten zu können. Dies ist sinnvoll nur mit Software möglich, die eine Simulation des Vorgangs erlaubt.

### **Wie können Wahrscheinlichkeitsangaben interpretiert werden?**

Mit einer Wahrscheinlichkeit kann angegeben werden, wie **sicher sich eine Person ist**, dass ein bestimmtes aber unbekanntes Ergebnis nach Ablauf eines zufälligen Vorgangs eingetreten ist. Die Wahrscheinlichkeitsangabe ist an die Person gebunden, die die Aussage macht und hängt von den Informationen ab, die die Person über das unbekanntes Ergebnis hat. Mit der Zunahme von Informationen kann sich die von der Person angegebene Wahrscheinlichkeit ändern.

*Beispiel:*

Nach einem Sportunfall hat ein Schüler Schmerzen im Fußgelenk. Der Arzt macht eine erste Untersuchung und ist sich danach zu 80 % sicher, dass es sich um eine Bänderdehnung handelt. Nach einer Röntgenaufnahme bestätigt sich, dass keine Knochenverletzung vorliegt. Seine erste Diagnose hält der Arzt nun mit 95%iger Sicherheit für richtig.

Mit einer Wahrscheinlichkeit kann den **Grad der Erwartung** des Eintreffens eines bestimmten Ergebnisses bei einem *künftigen Ablauf* des Vorgangs zum Ausdruck gebracht werden. Daraus lassen sich Schlussfolgerungen für Entscheidungen ableiten.

*Beispiel:*

In Wetterberichten wird die Wahrscheinlichkeit angegeben, dass es am nächsten Tag regnen wird. Bei einer Regenwahrscheinlichkeit von 90 %, kann man mit ziemlicher Sicherheit mit Regen rechnen und es ist z.B. die Mitnahme eines Schirms zu empfehlen.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ermöglicht **Vorhersagen über die zu erwartende Häufigkeit** der betreffenden Ergebnisse, wenn der zufällige Vorgang unter gleichen Bedingungen sehr oft wiederholt wird.

*Beispiel:*

Auf Grund der Herstellungsbedingungen von Billiguhren sind etwa 10 % der produzierten Uhren fehlerhaft und haben nur eine geringe Lebensdauer. Ein Großhändler kauft 10 000 Stück der Uhren und muss mit etwa 1000 fehlerhaften Uhren rechnen.

### **Wie können sehr kleine oder sehr große Wahrscheinlichkeiten veranschaulicht werden?**

Um sich bei sehr kleinen oder sehr großen Wahrscheinlichkeiten eine *Vorstellung von der Größe der Wahrscheinlichkeit* verschaffen, kann das folgende Gedankenexperiment verwendet werden.

- Man stellt sich ein Ziehungsgerät mit Kugeln vor, mit dem eine Kugel zufällig ausgewählt werden kann (analog den Geräten zur Ziehung der Gewinnzahlen beim Spiel 6 aus 49). Zufällige Auswahl bedeutet, dass alle Kugeln die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, gezogen zu werden.

- Man packt in Gedanken schwarze und weiße Kugeln in den Ziehungsbehälter, sodass die Wahrscheinlichkeit des Ziehens einer schwarzen Kugel der vorzustellenden Wahrscheinlichkeit entspricht. Man wähle möglichst kleine Anzahlen und stelle sich die Zahl der Kugeln vor.
- Nun stellt man sich vor, dass eine Ziehung durchgeführt wird und eine schwarze Kugel gezogen werden soll.
- Zur Anwendung der Häufigkeitsinterpretation stelle dir vor, dass die Ziehung so oft wiederholt wird, wie es der Gesamtzahl der Kugeln entspricht. Die Anzahl der schwarzen Kugeln ist dann eine Vorhersage für die zu erwartende Anzahl des Auftretens des Ereignisses bei diesen Wiederholungen. Sie vermittelt ebenfalls eine Vorstellung von der Größe der Wahrscheinlichkeit.

vorzustellende Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A	Anzahl der schwarzen Kugeln	Anzahl der weißen Kugeln	Anzahl der Ziehungen	zu erwartende Anzahl des Auftretens von A
$P(A) = 10^{-4} = \frac{1}{10000}$	1	9 999	10 000	1
$P(A) = 0,95 = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$	19	1	20	19

### Wie kommt man zu Wahrscheinlichkeiten?

Zusammenfassend sollen die Möglichkeiten genannt werden, eine Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis zu bestimmen.

#### 1. Subjektive Schätzung der Wahrscheinlichkeit auf der Grundlagen von persönlichen Erfahrungen, Kenntnissen oder Vorstellungen

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann von einer Person auf der Grundlage von Kenntnissen dieser Person über Bedingungen des Vorgangs geschätzt werden. Die Vorschläge zur Ausbildung eines präformalen Wahrscheinlichkeitsbegriffs beruhen in der Mehrzahl auf solchen subjektbezogenen Schätzungen. Dabei kann es sich um die Schätzung von Wahrscheinlichkeiten künftiger Ergebnisse handeln, wie etwa die Wahrscheinlichkeit zum Würfeln einer Sechs oder für das morgige Wetter, aber auch um die Wahrscheinlichkeiten von bereits eingetretenen aber unbekanntem Ergebnissen, wie etwa die Wahrscheinlichkeit für die Ursachen einer defekten Fahrradlampe.

#### 2. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit auf der Grundlage von Modellannahmen

Der für die Schule bedeutsamste Fall ist die Annahme einer Gleichverteilung das heißt, der gleichen Wahrscheinlichkeit für alle möglichen Ergebnisse eines Vorgangs. Das prototypische Beispiel ist das Würfeln mit einem normalen Spielwürfel. Unter der Annahme, dass aufgrund des symmetrischen Aufbaus des Würfels die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Augenzahlen gleich ist, kann die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Augenzahl ermittelt werden. Weiterhin lassen sich aus dieser Modellannahme auch die Wahrscheinlichkeiten für weitere Ereignisse berechnen.

#### 3. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit auf der Grundlage von Daten aus Beobachtungen oder von Experimenten zum wiederholten Ablauf des Vorgangs unter gleichen Bedingungen

Wenn es nicht möglich ist, über sinnvolle Modellannahmen zu Wahrscheinlichkeiten zu kommen, müssen diese auf der Grundlage von Daten näherungsweise experimentell bestimmt werden. Ein dafür in der Schule oft verwendetes Beispiel ist das Werfen von nichtsymmetrischen Objekten zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für die verschiedenen möglichen Endlagen der Objekte. Solche Experimente haben meist eine sehr geringe praktische Relevanz und sind in ihrer Durchführung problematisch, wie etwa des Werfen von Reißzwecken oder gar von Nutella-Brotchen.

#### 4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit aus anderen Wahrscheinlichkeiten

Mit Regeln und Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung können aus den auf die bisherigen Weisen ermittelten Wahrscheinlichkeiten für meist elementare Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten für weitere Ereignisse berechnet werden. Eine Möglichkeit ist die Anwendung von Pfadregeln zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten für zusammengesetzte Ergebnisse (s. Kap. 3.3).

### 3.2.2 Hinweise für den Unterricht

#### **Wie können Experimente zum Verhältnis von Wahrscheinlichkeit und Häufigkeiten im Anfangsunterricht durchgeführt werden?**

Es gibt eine Reihe von Vorschlägen zur Durchführung von Experimenten mit Zufallsgeneratoren. Neben Experimenten zur Gleichwahrscheinlichkeit (s. S. 5 f.) geht es dabei um Untersuchungen zur Stabilität der relativen Häufigkeit und um Experimente zu Gewinnchancen.

Mit der ausschließlichen Betrachtung einer Folge von relativen Häufigkeiten kann das Gesetz der großen Zahlen nicht vollständig erfasst werden. Hinzu kommt, dass die Schüler solche Beobachtungen sehr selten im Alltag erleben. Weitaus häufiger erleben sie eine relativ geringe Anzahl von Wiederholungen eines Vorgangs, aus der sie Schlussfolgerungen über die Wahrscheinlichkeit ableiten. Deshalb sollte ein Experiment durchgeführt werden, mit dem die Schwankungsbreite der relativen Häufigkeit bei einer bestimmten kleinen Anzahl von Wiederholungen erlebt werden kann.

Ein mögliches Experiment zum Verhältnis von Wahrscheinlichkeit und absoluten Häufigkeiten könnte in folgender Weise durchgeführt werden.

1. Es wird das Werfen von Münzen (oder Wendeplättchen) untersucht.
2. Als Chancen für das Ergebnis „Zahl“ ergibt sich durch Symmetrieüberlegungen: 1 : 1
3. Es werden nun von den Schülern Vorhersagen für die Anzahl der Ergebnisse „Zahl“ bei 10 Würfeln formuliert. Dies könnten sein:
  - Es sind 5 zu erwarten.
  - Es können aber auch mehr oder weniger sein
4. Jeder Schüler notiert als Vermutung den kleinsten und größten Wert, den er erwartet.
5. Es werden 10 Würfe in Partnerarbeit durchgeführt, ein Schüler wirft und der andere führt eine Strichliste.
6. Die Ergebnisse aller Gruppen werden an der Tafel in einer Strichliste/Häufigkeitstabelle gesammelt und es kann noch ein Streifendiagramm erstellt werden.
7. Als Erkenntnis kann dann erarbeitet werden, dass die Abweichungen vom erwarteten Wert 5 größer als gedacht sind.

## 3.3 Mehrstufige Vorgänge

### 3.3.1 Fachliche Grundlagen

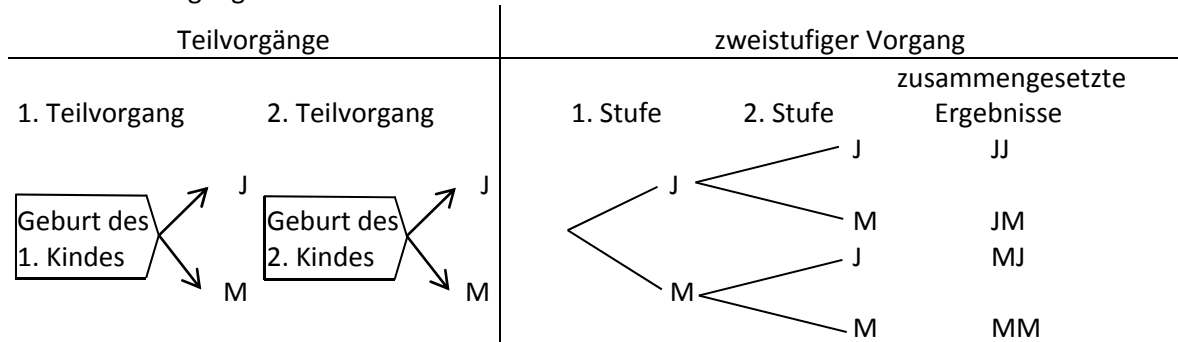
#### **Was ist ein mehrstufiger Vorgang und wie kann man ihn veranschaulichen?**

Um die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen zu berechnen, die sich aus Ergebnissen mehrerer Vorgänge zusammensetzen, kann man diese als Teilvorgänge bzw. als **Stufen** eines **mehrstufigen Vorgangs** auffassen.

Die möglichen Ereigniskombinationen können in einem **Baumdiagramm** dargestellt werden. Jeder Pfad des Diagramms entspricht einem zusammengesetzten Ereignis.

*Beispiel:*

Die Geburt zweier Kinder kann man als Zusammensetzung zweier Teilvorgänge ansehen, die nacheinander ablaufen. Jedes Ergebnis des ersten Teilvorganges kann mit jedem Ergebnis des zweiten Teilvorganges kombiniert werden.



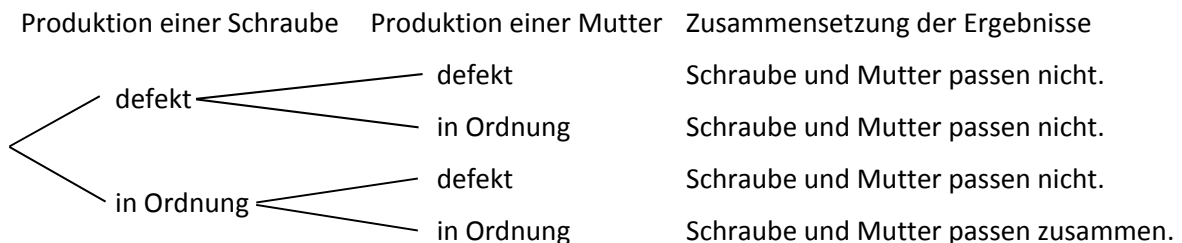
Ein mehrstufiger Vorgang kann aus *gleichen* oder *verschiedenen* Teilvorgängen bestehen, die *nacheinander* oder *gleichzeitig* ablaufen.

Mehrstufiger Vorgang	Verlauf und Art der Teilvorgänge	ein mögliches Ergebnis
zweimaliges Werfen einer Münze	Der gleiche Teilvorgang läuft zweimal nacheinander ab.	(W; Z)
Werfen von zwei Münzen	Zwei gleiche Teilvorgänge laufen gleichzeitig ab.	(Z; W)

Um die möglichen Ergebniskombinationen zu veranschaulichen, werden auch bei gleichzeitigem Verlauf der Teilvorgänge diese im Baumdiagramm stets nacheinander angeordnet.

**Beispiel:**

Bei der Herstellung von Schrauben und Muttern in einem Betrieb laufen die beiden Produktionsprozesse parallel ab. Ihre Ergebnisse bezüglich des Merkmals „fehlerhaft oder nicht“ können aber nacheinander angeordnet werden



Um einen mehrstufigen Vorgang zu untersuchen und in einem Baumdiagramm darzustellen, kann man in folgenden Schritten vorgehen.

1. Ich stelle mir den Sachverhalt vor und bestimme die Teilvorgänge, die nach einander ablaufen („Was passiert zuerst *und* was passiert dann *und* was danach....“) bzw. die gleichzeitig ablaufen („Was passiert *und* was passiert gleichzeitig *und* was passiert noch gleichzeitig ...“).
2. Ich bestimme für jeden Teilvorgang das jeweils betrachtete Merkmal sowie alle möglichen Ergebnisse des Teilvorganges bezüglich des Merkmals
3. Ich ordne die Teilvorgänge nacheinander an, möglichst dem zeitlichen Ablauf entsprechend.
4. Ich zeichne ein Baumdiagramm, in dem jedes Ergebnis des 1. Teilvorganges Ausgangspunkt für alle Ergebnisse des 2. Teilvorganges ist. Gibt es mehr als zwei Teilvorgänge, ist wieder jedes Ergebnis des 2. Teilvorganges Ausgangspunkt für alle Ergebnisse des 3. Teilvorganges usw.
5. Jedes Pfadende entspricht einem zusammengesetzten Ergebnis, das ich in Kurzform hinter die Pfadenden schreibe.

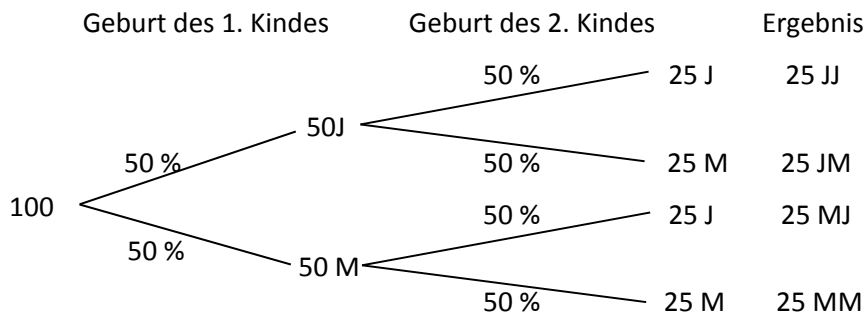


**Wie kann die Wahrscheinlichkeit zusammengesetzter Ergebnisse berechnet werden?**

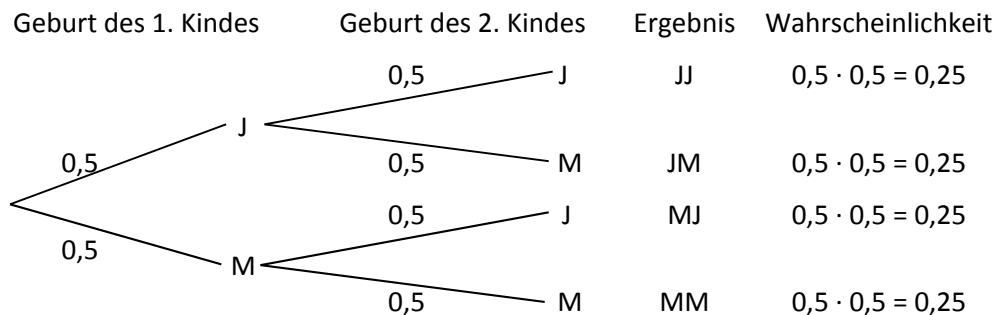
Um Regeln zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Vorgängen zu finden, kann die Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit verwendet werden.

*Beispiel:*

Die Wahrscheinlichkeit für die Vererbung des Merkmals männlich oder weiblich ist etwa 50 %. Bei 100 Familien wird deshalb bei etwa 50 als erstes Kind ein Junge und bei ebenfalls 50 als erstes Kind ein Mädchen geboren. Von diesen 50 bekommen jeweils 25 als zweites Kind einen Jungen und ebenfalls 25 als zweites Kind ein Mädchen. Dies kann in einem Baumdiagramm als zweistufiger Vorgang veranschaulicht werden, wobei an den Pfadenden jeweils die zu erwartenden absoluten Häufigkeiten eingetragen werden.



25 sind die Hälfte von 50 und ein Viertel von 100. Die Wahrscheinlichkeit für jede der 4 Möglichkeiten beträgt also  $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$ . Um die Wahrscheinlichkeit für ein zusammengesetztes Ereignis zu berechnen, können an jeden Pfad eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten für das jeweilige Ereignis des Teilvorgangs geschrieben werden.



**1. Pfadregel:**

In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit für ein zusammengesetztes Ergebnis gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.

Man kann folgende Rechenkontrollen verwenden:

1. Bei einer Verzweigung des Baumes ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller weiterführenden Pfade gleich 1.
2. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse des mehrstufigen Vorgangs ist 1.

Oft werden mehrere Ergebnisse zu einem Ereignis zusammengefasst. Dann kann man die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse addieren.

*Beispiel:*

Die Wahrscheinlichkeit für ein Geschwisterpaar in einer Familie mit 2 Kindern beträgt 0,5.

**2. Pfadregel:**

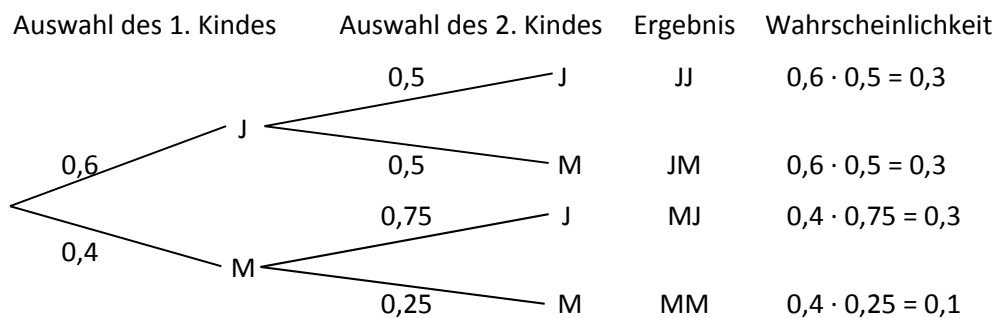
Bilden mehrere zusammengesetzte Ergebnisse ein Ereignis, so ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse.

**Was bedeutet es, dass zwei Ereignisse voneinander stochastisch abhängig sind?**

Bei Vorgängen, die nacheinander ablaufen kann die Anzahl der möglichen Ergebnisse bzw. die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse des einen Vorgangs vom Verlauf des anderen Vorgangs abhängig sein.

*Beispiel:*

Aus einer Gruppe mit 3 Jungen und 2 Mädchen werden nacheinander 2 Kinder ausgelost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Mädchen ausgelost werden?



Nach der Auswahl des 1. Kindes sind nur noch 4 Kinder in der Gruppe. Je nachdem, ob zuerst ein Junge oder ein Mädchen ausgelost wurde, sind es noch zwei Jungen und zwei Mädchen bzw. drei Jungen und ein Mädchen. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der zweiten Auswahl ein Mädchen ausgelost wird, hängt also von dem Ergebnis der ersten Auswahl ab.

Zwei Ereignisse heißen **stochastisch abhängig voneinander**, wenn das Eintreten des einen Ereignisses Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit des anderen Ereignisses hat. Ansonsten heißen sie **stochastisch unabhängig voneinander**.

**Woran erkennt man, ob zwei Merkmale eines Objektes voneinander abhängig sind?**

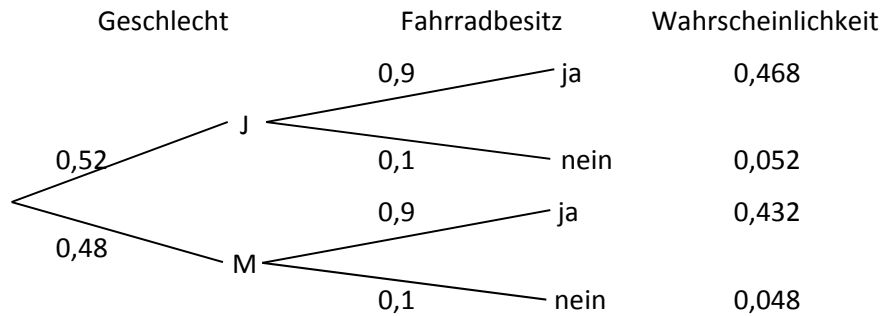
Bei statistischen Erhebungen werden an einem Objekt oft *zwei* Merkmale untersucht. Hängt die Wahrscheinlichkeit der Ausprägung des einen Merkmals von der Ausprägung des anderen Merkmals ab, so sagt man in diesen Fall, dass das eine Merkmal vom anderen abhängig ist.

*Beispiel:*

Bei 14-jährigen wurden die Merkmale „Geschlecht“ und „Besitz eines eigenen Fahrrades“ untersucht. Die Ergebnisse der Befragung können in einer **Vierfeldertafel** dargestellt werden.

	eigenes Fahrrad	kein eigenes Fahrrad	Summe
Jungen	468	52	520
Mädchen	432	48	480
Summe:	900	100	1000

Die Befragung kann auch als ein zweistufiger Vorgang bei einem beliebigen Teilnehmer der Befragung aufgefasst werden, der aus den Teilvorgängen „Entstehung des Geschlechts“ und „Besitz eines Fahrrades“ besteht. Die entsprechenden relativen Häufigkeiten der Befragung werden nun als Wahrscheinlichkeiten für die Merkmalskombinationen bei einem beliebigen Teilnehmer gedeutet.



Aus beiden Darstellungen ist erkennbar, dass der Besitz eines eigenen Fahrrades nicht vom Geschlecht abhängig ist.

Vierfeldertafel:

Der Anteil der Fahrradbesitzer ist bei Jungen und Mädchen mit 90 % gleich groß.

Baumdiagramm:

Die Pfadwahrscheinlichkeiten beim zweiten Teilvorgang hängen nicht von den Ergebnissen des ersten Teilvorgangs ab.

### 3.3.2 Hinweise für den Unterricht

#### *Sollten mehrstufige Vorgänge im Anfangsunterricht vorkommen?*

In Publikationen und Schulbüchern zum Stochastikunterricht in der Primarstufe ist sehr oft das Betrachten der Augensumme beim gleichzeitigen Werfen von zwei Würfeln enthalten, teilweise wird dies sogar als eines der ersten Beispiele vorgeschlagen. Die damit verbundenen Probleme werden allerdings oft nicht betrachtet. Das gleichzeitige Werfen von zwei Würfeln kann zunächst in unterschiedlicher Weise modelliert werden. Es wird in der Grundschoolliteratur meist als ein einziger Vorgang betrachtet, der dann bei der Untersuchung der Augensumme 11 unterschiedliche Ergebnisse hat. Um die Wahrscheinlichkeiten dieser Ergebnisse zu ermitteln bzw. zu vergleichen, werden dann kombinatorische Überlegungen angestellt. Dabei stößt man schnell auf das Problem, dass etwa die Augenzahl 3 auf zwei unterschiedliche Weisen entstehen kann, indem der erste Würfel eine 1 unter zweite eine 2 bzw. der erste einer 2 unter zweite eine 1 zeigen. Werden zwei nicht unterscheidbare Würfel verwendet, wie es im Alltag meist üblich ist, so ist der Unterschied zwischen diesen beiden Würfelergbnissen nicht sichtbar. In der Literatur werden deshalb in der Regel zwei verschiedenfarbige Würfel verwendet. Doch auch mit diesem Trick gelingt es oft kaum, alle Schüler zu den erwarteten Einsichten zu bringen, wie Prediger in einem Fallbeispiel zeigen konnte (Prediger 2005). Doch selbst wenn dies gelingen sollte, bleibt die Frage offen, wie man das naheliegende Problem der nicht unterscheidbare Würfel im Anfangsunterricht bewältigen will.

Das gleichzeitige Werfen von zwei Würfeln lässt sich bei genauer Betrachtung sinnvollerweise als zweistufiger Vorgang des zweimaligen Werfen eines Würfels modellieren. Damit entfallen dann die schwierigen Betrachtungen zur Unterscheidung der Würfel und man kann mit einem Baumdiagramm leicht die Menge der 36 gleichwahrscheinlichen Ergebnisse veranschaulichen, woraus sich dann die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensumme oder auch anderer Zufallsgrößen ergeben.

Die Gleichwertigkeit des gleichzeitigen Werfens von zwei Würfeln und des zweimaligen Werfens eines Würfels lässt sich mit folgenden Überlegungen und Handlungen überzeugend nachweisen.

1. Man schüttelt einen Würfelbecher mit zwei Würfeln und stellt sich in Gedanken vor, dass man sich in diesem Becher befindet und beide Würfel beobachten kann. Dabei könnte man sehen, dass sich die Würfel zwar ständig gegenseitig berühren aber dadurch wird die von ihnen am Schluss angezeigten Augenzahlen nicht so beeinflusst, dass einige Augenzahlen eine größere Wahrscheinlichkeit haben.

2. Nun stellt man sich in Gedanken einen Würfelbecher mit zwei Kammern vor, in denen sich jeweils ein Würfel befindet.
3. Im nächsten Schritt, der nun auch real ausführbar ist, wird gleichzeitig mit zwei Würfelbechern mit je einem Würfel gewürfelt und wieder erkennt man die Gleichwertigkeit zur Ausgangssituation.
4. Nun ist es nicht mehr schwer, auf einen Würfelbecher zu verzichten und mit nur einem Würfelbecher und einem Würfel zweimal nacheinander zu würfeln.

Der mathematische Hintergrund des oft so bezeichneten Augensummenspiels sind mehrstufige Vorgänge und das Arbeiten mit Zufallsgrößen ist. Beides sind Gegenstände, die erst in der 8. oder 9. Jahrgangsstufe thematisiert werden. Wir empfehlen deshalb, das Augensummenspiel nicht vor der Behandlung mehrstufiger Vorgänge in den Unterricht einzubeziehen.

### 3.4 Berechnen und Interpretieren von Erwartungswerten

#### **Was ist eine diskrete Zufallsgröße?**

Ein betrachtetes Merkmal eines Vorgangs heißt auch **Zufallsgröße**, wenn die Merkmalswerte reelle Zahlen oder Größen sind. Zufallsgrößen werden mit großen Buchstaben bezeichnet.

Wenn die Zufallsgröße nur endlich (oder abzählbar) viele Werte annehmen kann, heißt sie **diskret**.

Oft werden den Ergebnissen eines Vorgangs Zahlenwerte zugeordnet, um damit eine unterschiedliche Wichtung der Ergebnisse vorzunehmen. So wird bei finanziellen Überlegungen und Entscheidungen als Zufallsgröße oft der Gewinn bzw. der Verlust betrachtet, der beim Eintreten der jeweiligen Ergebnisse entsteht.

#### *Beispiel:*

Eine Unfallversicherung erhebt einen jährlichen Versicherungsbeitrag von 60 Euro. Jeder Unfall verursacht der Versicherung im Durchschnitt Kosten von etwa 5000 Euro.

In dieser stochastischen Situation geht es um den Vorgang des Unfallgeschehens einer versicherten Person. Als Merkmal wird betrachtet, ob die Person einen Unfall erleidet oder nicht und die möglichen Ergebnisse sind dementsprechend Unfall bzw. kein Unfall. Diesen Ergebnissen wird als Zufallsgröße  $X$  der Gewinn der Versicherung zugeordnet.

mögliche Ergebnisse	Zufallsgröße $X$ : jährlicher Gewinn der Versicherung
kein Unfall	60 €
Unfall	- 5000 €

#### **Was ist der Erwartungswert einer Zufallsgröße?**

Der Erwartungswert  $E$  einer Zufallsgröße  $X$  ist die Summe der Produkte aus den Werten der Zufallsgröße und den Wahrscheinlichkeiten der Werte.

Der Erwartungswert gibt den Wert der Zufallsgröße an, der beim einmaligen Ablauf des Vorgangs zu erwarten ist. Dies ist ein Wert, der bei einem einzelnen Vorgang oft gar nicht eintreten kann. Daraus lässt sich aber der zu erwartende Wert bei mehrfacher Wiederholung berechnen.

#### *Beispiel:*

Aufgrund der Daten zum Unfallgeschehen ist der Unfallversicherung bekannt, dass in der Personengruppe, zu der Versicherte gehört, innerhalb einer Jahresfrist etwa 0,5 % der Versicherten verunglücken. Diese relative Häufigkeit kann als Wahrscheinlichkeit für einen Unfall eines Versicherten im nächsten Jahr angesehen werden. Damit lässt sich der Erwartungswert des jährlichen Gewinns der Versicherung pro Versichertem berechnen:

mögliche Ergebnisse	Zufallsgröße X: Gewinn der Versicherung	Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse
kein Unfall	60 €	0,995
Unfall	- 5000 €	0,005

$$E(X) = 60 \text{ €} \cdot 0,995 + (- 5000 \text{ €}) \cdot 0,005 = 34,70 \text{ €}$$

Pro Versicherten kann die Versicherung einen jährlichen Gewinn von 34,70 € erwarten. Bei 200 000 Versicherten ergibt sich ein jährlicher Gesamtgewinn von 6,940 Mill. Euro, aus dem dann natürlich auch die Betriebskosten zu bestreiten sind.

**Welcher Zusammenhang besteht zwischen Erwartungswert und arithmetischem Mittel**

Der Erwartungswert ist wie die Wahrscheinlichkeit ein theoretischer Wert, die eine Prognose für den künftigen Verlauf zufälliger Vorgänge erlaubt, wenn sich die Bedingungen nicht ändern.

Werden die Daten des tatsächlichen Verlaufs des Vorganges ausgewertet, so entspricht die relative Häufigkeit der eingetretenen Ergebnisse ihrer erwarteten Wahrscheinlichkeit und das arithmetische Mittel der Werte der Zufallsgröße entspricht ihrem Erwartungswert.

Der Erwartungswert ist also das zu erwartende arithmetische Mittel der Werte der Zufallsgröße bei mehrfacher Wiederholung des Vorgangs.

*Beispiel:*

Ein Obsthändler handelt mit Orangen. Er weiß aus Erfahrung, dass bei einem bestimmten Lieferanten etwa 70 % von ausgezeichneter, 20 % noch von guter und 10 % von minderwertiger Qualität sind.

Der Händler kauft die Orangen für 1 € pro Kilogramm. Die Orangen mit ausgezeichneter Qualität verkauft er für 2,49 € pro Kilogramm und die von guter Qualität für 1,49 € pro Kilogramm. Die minderwertigen verkauft er nicht.

Bei der Lieferung von 500 kg Orangen des Lieferanten stellt er im Laufe des Verkaufs fest, dass 340 kg von ausgezeichneter Qualität, 105 kg von guter Qualität und 55 kg minderwertig waren.

Wie groß ist der Erwartungswert des Gewinns des Händlers und wie groß ist der durchschnittliche Gewinn pro Kilogramm bei dem Verkauf der Lieferung?

Ergebnisse: Qualitätsgruppen	Werte der Zufallsgröße: Gewinn G in $\frac{\text{Euro}}{\text{kg}}$	Wahrscheinlichkeit
sehr gut	1,49	0,70
gut	0,49	0,20
minderwertig	- 1	0,10

Der Erwartungswert der Zufallsgröße Gewinn beträgt:

$$E(G) = 1,49 \frac{\text{Euro}}{\text{kg}} \cdot 0,70 + 0,49 \frac{\text{Euro}}{\text{kg}} \cdot 0,20 + (-1 \frac{\text{Euro}}{\text{kg}}) \cdot 0,10 = 1,041 \frac{\text{Euro}}{\text{kg}}$$

Der Obsthändler kann also theoretisch für jedes gelieferte Kilogramm Orangen einen Gewinn von etwa 1,04 Euro erwarten. Bei 500 kg beträgt die Gewinnerwartung 520,50 €.

Für die konkrete Lieferung ergibt sich folgende Situation.

Qualitätsgruppen	Menge in kg	relative Häufigkeit
sehr gut	340	0,68
gut	105	0,21
minderwertig	55	0,11

Daraus ergibt sich folgender durchschnittliche Gewinn pro eingekauftes Kilogramm.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{500 \text{ kg}} \left( 340 \text{ kg} \cdot 1,49 \frac{\text{Euro}}{\text{kg}} + 105 \text{ kg} \cdot 0,49 \frac{\text{Euro}}{\text{kg}} + 55 \text{ kg} \cdot \left( -1 \frac{\text{Euro}}{\text{kg}} \right) \right) \\ &= 0,68 \cdot 1,49 \frac{\text{Euro}}{\text{kg}} + 0,21 \cdot 0,49 \frac{\text{Euro}}{\text{kg}} + 0,11 \cdot \left( -1 \frac{\text{Euro}}{\text{kg}} \right) \\ &= 1,0061 \frac{\text{Euro}}{\text{kg}} \end{aligned}$$

Das arithmetische Mittel  $\bar{x}$  liegt unter dem Erwartungswert E, da der Anteil der Orangen mit sehr guter Qualität um 2 % geringer und der Anteil mit guter Qualität dafür nur 1 % größer als erwartet war. Der Gewinn des Händlers beträgt nach dem Verkauf der Äpfel 503,05 €.

### Wie kann der Erwartungswert verändert werden?

Ohne dass sich der zufällige Vorgang selbst ändert, kann man oft eine Veränderung des Erwartungswertes der Zufallsgröße durch Veränderung ihrer Werte erreichen.

*Beispiel:*

Wenn der Obsthändler auch die minderwertigen Orangen zum Einkaufspreis, also für 1 Euro pro Kilogramm verkauft, erhöht sich der zu erwartende Gewinn auf 1,141 Euro pro kg:

$$E(G) = 1,49 \frac{\text{Euro}}{\text{kg}} \cdot 0,7 + 0,49 \frac{\text{Euro}}{\text{kg}} \cdot 0,2 + 0 \frac{\text{Euro}}{\text{kg}} \cdot 0,1 = 1,141 \frac{\text{Euro}}{\text{kg}}$$

Der Erwartungswert ändert sich ebenfalls, wenn sich durch Veränderung der Bedingungen des Vorgangs die Wahrscheinlichkeitsverteilung ändert.

*Beispiel:*

Wenn der Obsthändler den Zulieferer wechselt, könnte sich auch die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Qualitätsgruppen ändern. Bei einer Wahrscheinlichkeitsverteilung wie in der Tabelle angegeben, erhöht sich bei gleichen Preisen der Erwartungswert des Gewinns auf 1,191 Euro pro Kilogramm.

Qualitätsgruppen	Gewinn in $\frac{\text{Euro}}{\text{kg}}$	Wahrscheinlichkeit
sehr gut	1,49	0,85
gut	0,49	0,05
minderwertig	- 1,-	0,10

$$E(G) = 1,49 \frac{\text{Euro}}{\text{kg}} \cdot 0,85 + 0,49 \frac{\text{Euro}}{\text{kg}} \cdot 0,05 + \left( -1 \frac{\text{Euro}}{\text{kg}} \right) \cdot 0,1 = 1,191 \frac{\text{Euro}}{\text{kg}}$$

## 4 Methoden zum Lösen kombinatorischer Aufgaben

### 4.1 Zur Rolle der Kombinatorik

Das Lösen kombinatorischer Aufgaben wird in der Schule oft noch als ein Bestandteil des Stochastiklehrgangs angesehen. Dies führt dann oft dazu, dass weniger Zeit für Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik zur Verfügung stehen. Diese Situation entspricht weder der Stellung der Kombinatorik als Wissenschaft noch den aktuellen Orientierungen in zentralen Plänen.

Die Kombinatorik ist kein Bestandteil der Wissenschaftsdisziplin Stochastik. Im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat die Kombinatorik die Funktion einer Hilfsdisziplin, indem sie geeignete Abzählverfahren zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bereitstellt.

In den aktuellen Bildungsstandards für die Primarstufe und den mittleren Schulabschluss wird das Lösen kombinatorischer Aufgaben in die Leitidee Zahl eingeordnet.

Die Kombinatorik auch eine eigenständige Bedeutung. Es gibt zum einen eine Reihe von Alltagsproblemen, die kombinatorische Fähigkeiten erfordern. Darüber hinaus lassen sich Beiträge zu folgenden Zielen leisten:

- Entwicklung geistiger Beweglichkeit
- Festigung des Rechnens mit natürlichen Zahlen
- Entwicklung von Vorstellungen über mögliche Größenordnungen bei kombinatorischen Problemstellungen.

Die Mehrzahl der kombinatorischen Aufgaben in den Schullehrbüchern sind Sach- bzw. Anwendungsaufgaben. Eine nähere Betrachtung zeigt jedoch, dass viele Aufgabenstellungen lebensfremd oder praxisirrelevant sind. Bei der Berechnung der Anzahlen werden häufig reale Voraussetzungen oder Einschränkungen nicht beachtet. Es ist allerdings bei tatsächlichen Anwendungen oft schwierig, alle Bedingungen zu berücksichtigen und die Aufgabenstellung eindeutig zu interpretieren. Man sollte deshalb bei der Einführung der Lösungsmethoden und Rechenregeln zunächst bewusst auf Praxisnähe verzichten und formale, eindeutige Sachverhaltsvorgaben verwenden, die durchaus auch reizvoll sein können, wenn man sie geschickt einbettet. Bei der Bearbeitung der übrigen Aufgabenstellungen ist in der Regel eine Diskussion des realen Sachverhaltes erforderlich, um dem Anspruch der Lebensnähe Genüge zu tun.

Kombinatorische Aufgaben wirken in der Regel auf Kinder in der Primarstufe sehr anregend. Wenn die Kinder die Chance zum eigenständigen Lösen bekommen, sind sehr unterschiedliche Vorgehensweisen zu beobachten. Dies betrifft genau so die Darstellung des Lösungsweges. Deshalb sollten nach der Formulierung der Fragestellung die Schüler Möglichkeiten und Darstellungsformen selbst suchen und anschließend ihre Lösungswege vorstellen.

### 4.2 Fachliche Grundlagen

#### 4.2.1 Systematisches Probieren

In einfachen Fällen kann man alle Möglichkeiten durch ein geeignetes systematisches Vorgehen und Aufschreiben ermitteln. Systematisches Probieren kann die Verwendung von Zählregeln vorbereiten.

*Beispiel:*

Wie viel Möglichkeiten gibt es, drei gleichgroße aber verschiedene Bücher nebeneinander ins Regal zu stellen?

Werden die Bücher mit A, B, C bezeichnet, erhält man nach dem Prinzip: Festhalten eines Buches auf dem ersten Platz, Variation der Plätze der beiden übrigen, die sechs Möglichkeiten

**A B C   A C B   B C A   B A C   C A B   C B A**

Es sind aber auch andere Überlegungen und Darstellungen möglich. So kann man das Buch A nacheinander auf die Plätze 1, 2 und 3 Stellen und dann jeweils die anderen beiden Bücher einordnen. Dies führt zu folgender Lösung:

A B C   A C B   B A C   C A B   B C A   C B A

### 4.2.2 Verwenden von kombinatorischen Baumdiagrammen

Bereits beim systematischen Probieren ist das Verwenden von kombinatorischen Baumdiagrammen möglich. Baumdiagramme bereiten weiterhin die Anwendung von Zählregeln und ebenso die Pfadregeln und die damit verbundenen Baumdiagramme der Wahrscheinlichkeitsrechnung vor.

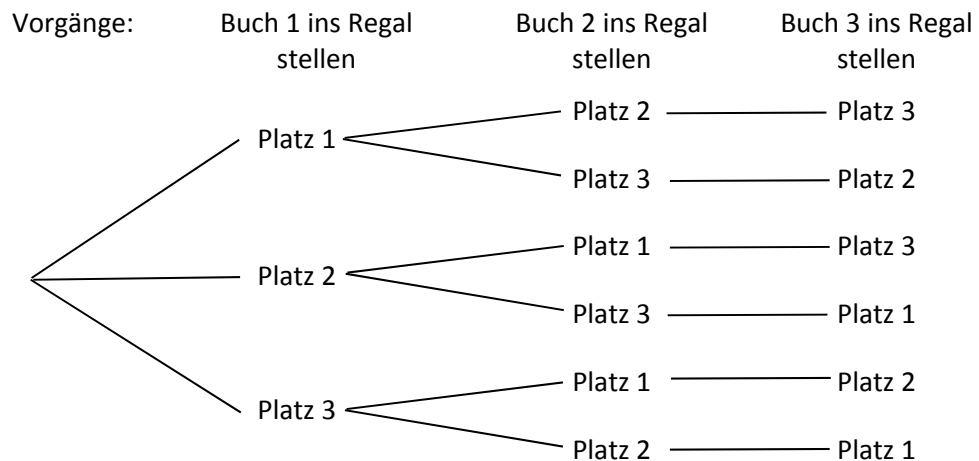
Baumdiagramme sind in der Kombinatorik allerdings nur einsetzbar, wenn die Gesamtzahl der Möglichkeiten gering ist.

Für das Aufstellen von Baumdiagrammen können bereits Gedanken der Prozessbetrachtung verwendet werden. Dazu kann überlegt werden, welche Entscheidungsprozesse nacheinander ablaufen, um eine Möglichkeit zu erzeugen. In einigen Fällen sind unterschiedliche Folgen von Entscheidungsprozessen möglich. Ein Baumdiagramm kann von rechts nach links oder von oben nach unten gezeichnet werden.

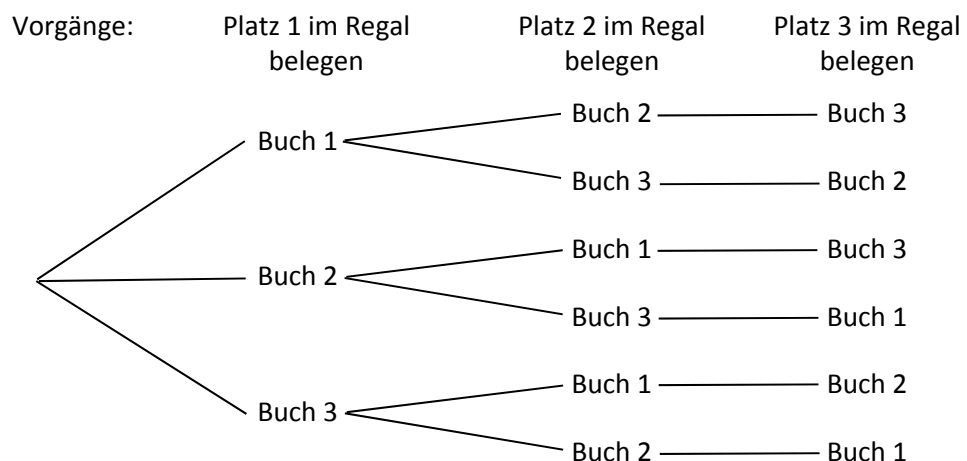
*Beispiel:*

Wie viel Möglichkeiten gibt es, drei gleichgroße aber verschiedene Bücher nebeneinander ins Regal zu stellen?

1. Variante: Es wird von den Büchern ausgegangen, sie werden schrittweise ins Regal gestellt.



2. Variante: Es wird von den Plätzen ausgegangen, sie werden schrittweise mit Büchern belegt.





### 4.2.3 Verwenden von Zählregeln

Mit Hilfe der *Zählregeln*, auch *Zählprinzipien* genannt, lassen sich kombinatorische Aufgaben lösen, ohne ein Begriffs- oder Formelsystem zu benötigen. Die Überlegungen bleiben sehr nahe am Sachverhalt, eine Verallgemeinerung oder Typisierung der Aufgaben ist nicht erforderlich. In der Schulpraxis hat sich dieser Weg als der effektivste herausgestellt.

Es gibt mehrere Zählregeln. Die **Produktregel** ist dabei die wichtigste, da sie am häufigsten auftritt und Grundlage der anderen Regeln ist. Sie kann in folgender Weise formuliert werden:

Kann zur Erzeugung eines möglichen Ergebnisses eine Folge von Handlungen angegeben werden, die nacheinander ausgeführt werden müssen und die voneinander unabhängig sind, so ist die Gesamtzahl aller möglichen Ergebnisse gleich dem Produkt der Anzahl der möglichen Ergebnisse bei jeder Handlung. Es dürfen keine Mehrfachzählungen vorkommen.

Zur Anwendung der Produktregel sollte ein Schüler in folgenden Schritten vorgehen:

1. Ich stelle mir vor, dass eine der Möglichkeiten verwirklicht werden soll.
2. Ich überlege, welche Handlungen zur Verwirklichung einer Möglichkeit nacheinander ausgeführt werden müssen.
3. Ich überprüfe, ob die Möglichkeiten bei einer Handlung in Abhängigkeit vom Ergebnis der vorherigen Handlung unterschiedlich sind.
4. Ich bestimme die Anzahl der möglichen Ergebnisse bei jeder einzelnen Handlung.
5. Ich berechne das Produkt der ermittelten Anzahlen und erhalte die Gesamtzahl der Möglichkeiten.

Bis zur sicheren Beherrschung der Produktregel sollte zumindest andeutungsweise stet ein Baumdiagramm verwendet werden. Anschließend sollte stets eine Tabelle erstellt werden.

Bei einer tabellarischen Darstellung sind zwei unterschiedliche Anordnungen möglich, die den beiden Möglichkeiten der Darstellung von Baumdiagrammen entsprechen.

*Beispiel:*

Eva hat Geburtstag. Sie will eine Hose und ein T-Shirt anziehen und hat zwei Hosen und drei T-Shirts zur Auswahl, die alle zueinander passen.

Wie viele Möglichkeiten der Zusammenstellung hat sie?

Baumdiagramm:

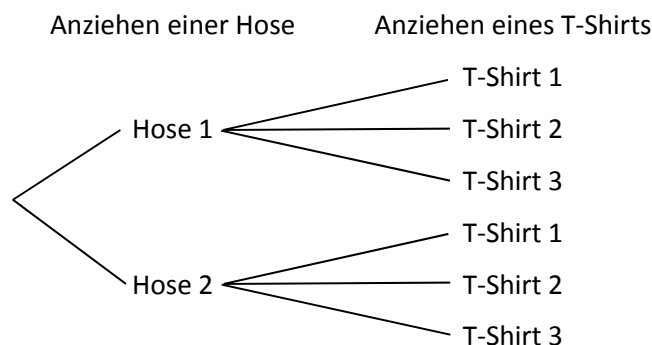


Tabelle:

Handlungsfolge:	1. Anziehen einer Hose	2. Anziehen eines T-Shirts
Anzahl der Entscheidungsmöglichkeiten:	2	3

Gesamtzahl der Möglichkeiten:  $2 \cdot 3 = 6$

Die Tabelle kann auch in anderer Form dargestellt werden. Diese Form ist günstiger, wenn die Zahl der aufeinanderfolgenden Handlungen größer ist.

Handlungsfolge	Anzahl der Entscheidungsmöglichkeiten
1. Anziehen einer Hose	2
2. Anziehen eines T-Shirts	3

Gesamtzahl der Möglichkeiten:  $2 \cdot 3 = 6$

Probleme bei der Anwendung der Produktregel ergeben sich, wenn die Entscheidungsfolge nicht dem natürlichen Handlungsablauf entspricht bzw. wenn auch Folgen in Betracht kommen, bei denen die Entscheidungen voneinander nicht unabhängig sind.

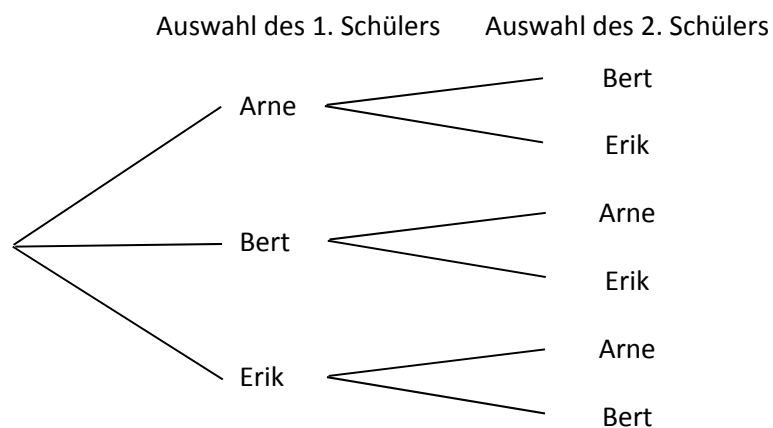
In einigen Fällen kommt es bei der Anwendung der Produktregel zu **Mehrfachzählungen**. Das bei Mehrfachzählungen zu verwendende Zählprinzip wird häufig als **Quotientenregel** bezeichnet und könnte so formuliert werden:

Wurde bei Anwendung der Produktregel jede der ermittelten Möglichkeiten  $n$  mal gezählt, so ist die Gesamtzahl der Möglichkeiten durch  $n$  zu dividieren.

*Beispiel:*

Von den drei Schülern Arne, Bert und Erik sollen zwei ausgewählt werden. Wie viele Möglichkeiten zur Auswahl gibt es?

Baumdiagramm:



Aus dem Baumdiagramm ist zu erkennen, dass jede der Möglichkeiten zweimal gezählt wurde. Deshalb muss das Produkt der Möglichkeiten durch zwei geteilt werden. Es gibt nur die drei Möglichkeiten Arne und Bert, Arne und Erik sowie Bert und Erik

Tabelle:

Handlungsfolge	Anzahl der Entscheidungsmöglichkeiten
1. Auswahl des 1. Schülers	3
2. Auswahl des 2. Schülers	2

Mehrfachzählungen: jede Möglichkeit zweimal

Gesamtzahl der Möglichkeiten:  $(2 \cdot 3) : 2 = 3$

Die Aufgabe lässt sich auch ohne Baumdiagramme und Zählregeln lösen, indem man sich überlegt, dass ein Schüler übrig bleiben muss, wofür es drei Möglichkeiten gibt.

### 4.2.4 Verwendung von Modellen

Bei der Modellierung eines kombinatorischen Problems muss zunächst das geeignete Modell gefunden, d.h. der Problemtyp bestimmt werden. Nach einer Identifizierung der Parameter des Modells kann eine Formel zur Berechnung verwendet werden. Diese anspruchsvolle Methode ist nur für die oberen Klassen des Gymnasiums geeignet.

Es gibt verschiedene Modelle. Didaktisch überholt aber immer noch oft in Lehrbüchern und Nachschlagewerken zu finden ist die Verwendung der so genannten klassischen Grundaufgabentypen **Permutationen, Kombinationen, Variationen mit und ohne Wiederholung**, auf die hier nicht weiter eingegangen wird.

Für die Schule geeigneter ist die Arbeit mit einem **Urnenmodell**. Es ist allerdings nur auf Auswahlprobleme anwendbar. Das kombinatorische Problem muss in ein Urnenproblem (Ziehen von  $k$  Kugeln aus einer Urne mit  $n$  Kugeln) übersetzt werden. Es sind 3 Fälle zu unterscheiden.

a) Ziehen ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge  $A = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$

b) Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge  $A = n^k$

c) Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge (Ziehen auf einen Griff)  $A = \binom{n}{k}$

## 4.3 Hinweise für den Unterricht

In der Primarstufe sollten kombinatorischer Aufgaben nur durch systematisches Probieren gelöst werden. Dabei können auch Baumdiagramme als eine spezielle Methode des systematischen Vorgehens verwendet werden.

Dies setzt allerdings voraus, dass nur solche Aufgaben gestellt werden, bei denen alle Möglichkeiten mit einem vertretbaren Aufwand dargestellt werden können.

Das Bilden von Produkten bei kombinatorischen Problemstellungen ist eine Operationsvorstellung der Multiplikation. Dies sollte an einfachen Aufgaben exemplarisch behandelt werden, ohne eine Verallgemeinerung zur Produktregel der Kombinatorik vorzunehmen. Dazu sind dann auch Überlegungen zur Unabhängigkeit der einzelnen Handlungen und zu Mehrfachzählungen erforderlich, die in der Primarstufe nur als Zusatz thematisiert werden sollten.