

Hans-Dieter SILL, Rostock

Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Primarstufe

1. Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Neben seinem formalen Aspekt, der sich aus der axiomatischen Festlegung als ein Maß für bestimmte Mengen ergibt, hat der Wahrscheinlichkeitsbegriff zahlreiche inhaltliche Aspekte. Dazu gehören:

(1) Prozessaspekte (vgl. Sill 2010)

Wahrscheinlichkeiten bei realen Vorgängen (objektiver Aspekt)

- Wahrscheinlichkeiten geben den Grad der Möglichkeit des Eintretens von Ergebnissen in der Natur oder der Gesellschaft an.
- Wahrscheinlichkeiten werden durch das Denken des Subjektes, das den Vorgang betrachtet oder untersucht, nicht beeinflusst.
- Wahrscheinlichkeiten hängen von den Bedingungen des Vorgangs ab.

Wahrscheinlichkeiten bei Denkvorgängen (subjektiver Aspekt)

- Wahrscheinlichkeiten geben den Grad der Sicherheit der Ergebnisse von Denkvorgängen einer Person an, die als Aussagen (Hypothesen) über einen eingetretenen aber unbekanntem Zustand geäußert werden.
- Die Wahrscheinlichkeit der geäußerten Aussagen hängt von den Kenntnissen der Person und den ihr bekannten Informationen über den Zustand ab.
- Die Wahrscheinlichkeit kann sich bei weiteren Informationen, die die Person erhält, ändern.

(2) Darstellungsaspekte

- Die Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen können verglichen werden. Ein Ergebnis kann wahrscheinlicher oder genauso wahrscheinlich wie ein anderes sein. (komparativer Aspekt)
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses kann qualitativ in Worten angegeben werden (wenig wahrscheinlich, sehr wahrscheinlich u.a.).
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses kann durch seine Chancen als ein Verhältnis von Möglichkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten angegeben werden.
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses kann als eine Zahl von 0 bis 1 oder in Prozent von 0 % bis 100 % angegeben werden.

(3) Verwendungs- und Interpretationsaspekte

Eine Wahrscheinlichkeitsangabe kann verwendet (interpretiert) werden als

- Vorhersage zum künftigen Eintreten eines Ergebnisses,
- Ausdruck des Grades der Erwartung des Eintretens eines Ergebnisses vor dem Ablauf eines Vorgangs,
- Vorhersage der Häufigkeit eines Ergebnisses bei mehrmaligem Ablauf eines Vorgangs unter gleichen Bedingungen,
- Bewertung eines eingetretenen Ergebnisses nach einem Ablauf eines Vorgangs,
- Ausdruck des Grades der Sicherheit einer Person über ein eingetretenes aber unbekanntes Ergebnis.

Zu allen diesen Aspekten mit Ausnahme der Darstellung einer Wahrscheinlichkeit durch eine Zahl sollte und kann in der Primarstufe ein grundlegender Beitrag geleistet werden.

2. Phasen der Entwicklung des Begriffs in der Primarstufe

In der Primarstufe kann die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in folgenden Phasen erfolgen.

Klasse 1/2:

- Bewusstmachen der umgangssprachlichen Verwendungen der Wörter „wahrscheinlich“ und „Wahrscheinlichkeit“ sowie des Prognosecharakters von Wahrscheinlichkeitsaussagen
- Vergleichen der Wahrscheinlichkeiten zweier Ergebnisse, „A ist wahrscheinlicher als B“
- qualitative Schätzung der Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses durch wörtliche Beschreibung und Darstellung auf einer Wahrscheinlichkeitsskala

Klasse 3/4:

- Festigung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs durch
 - o Ableiten von Prognosen aus statistischen Daten
 - o Aufgaben zum subjektiven Aspekt des Wahrscheinlichkeitsbegriffs (s. o.)
 - o Einschätzen von Wahrscheinlichkeiten in Spielsituationen
- Betrachtungen zur Gleichwahrscheinlichkeit bei symmetrischen Objekten

- Angabe von Wahrscheinlichkeiten durch Chancen
- Experimente mit kleinen Stichproben zum Erleben der Streuung

Der Unterricht sollte durch Gestaltungsprinzipien gekennzeichnet sein, die in Kurtzmann/Sill 2012 dargelegt sind.

3. Bemerkungen zur aktuellen Situation in der Primarstufe

Seit dem KMK-Beschluss zu den Bildungsstandards für die Primarstufe im Jahre 2004, der Aussagen zu Elementen der Wahrscheinlichkeitsrechnung enthält, sind zahlreiche fachdidaktische Publikationen und Unterrichtsmaterialien entstanden. Diese enthalten viele geeignete Vorschläge und Möglichkeiten, den Schülerinnen und Schülern Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zu vermitteln. Allerdings treten auch eine Reihe von Problemen auf, von denen im Folgenden einige kurz genannt werden sollen.

Es erfolgt bis auf sehr wenige Ausnahmen eine ausschließliche Beschränkung auf Vorgänge, bei denen Objekte geworfen, Glücksräder gedreht, Karten oder aus Behältern bzw. Beuteln Objekte gezogen werden. Damit im Zusammenhang stehen Probleme im Verständnis des Begriffs „Zufallsexperiment“. Dieser Begriff, der kein notwendiger Bestandteil der mathematischen Theorie ist, wird bei seiner Verwendung in Fachbüchern mehr oder weniger explizit auf der theoretischen Ebene angesiedelt und damit als ein Modell für reale Vorgänge, also keineswegs nur für Glücksspielsituationen, angesehen. Mit dieser Beschränkung wird den Schülerinnen und Schülern ein sehr einseitiges Bild von der Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs vermittelt. Dabei besitzen die Begriffe „wahrscheinlich“ und „Wahrscheinlichkeit“ in Verbindung mit weiteren konkretisierenden Zusätzen ein sehr breites Anwendungsfeld im Alltag der Schülerinnen und Schüler. Es können damit z. B. sowohl Alltagserfahrungen als auch Kenntnisse zu naturwissenschaftlichen Zusammenhängen in verständlicher und geeigneter Weise ausgedrückt werden. Es können Wahrscheinlichkeitsaussagen aus statistischen Daten gewonnen oder Aussagen zu Ergebnissen von Vorgängen, die die eigene Person betreffen, stochastisch formuliert werden.

In vielen Fällen wird versucht, bereits Begrifflichkeiten und Probleme zu vermitteln bzw. zu diskutieren, die für Grundschüler noch gar nicht fassbar sind und auch die Lehrkräfte meist fachlich überfordern. Dabei treten dann auch gelegentlich fachliche Unkorrektheiten auf. Beispiele dafür sind:

- Die Wörter „sicher“ und „unmöglich“, die als Adverbien nicht zu mathematischen Fachsprache gehören, stehen oft viel zu sehr im Mittelpunkt und werden teilweise mit den Begriffen „wahr“ und „falsch“ gleichgesetzt.

- Es wird nicht oder nicht deutlich zwischen den Begriffen Chancen und Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses unterschieden. Die Chancen (Odds) eines Ereignisses sind in der Mathematik das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses zur Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses. Der Wertebereich von Chancen ist die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen. Damit können Chancen nicht auf einer Wahrscheinlichkeitsskala veranschaulicht werden. Die Angabe von Chancen bietet im Falle einer diskreten Gleichverteilung eine geeignete Möglichkeit zur Quantifizierung einer Wahrscheinlichkeitsaussage.
- Es wird teilweise versucht, den Unterschied zwischen Ergebnissen und Ereignissen, die Unabhängigkeit von Ereignissen und auch die relative Häufigkeit zu thematisieren.
- Es wird versucht, die Gleichverteilung der Augenzahlen beim Würfeln oder das Gesetz der großen Zahlen experimentell nachzuweisen.
- Die zahlreichen Aspekte des Zufallsbegriffs werden selten und dann nur sehr einseitig betrachtet.
- Fast generell wird das Problem der Augensumme beim Werfen mit zwei Würfeln behandelt, das im Falle der Nichtunterscheidbarkeit der Würfel selbst Mathematikern Schwierigkeiten bereitet hat und sinnvollerweise als zweistufiger Vorgang unter Verwendung einer Zufallsgröße modelliert werden sollte.

4. Zusammenfassung

Die Bildungsstandards sind in sehr kurzer Zeit von einer kleinen Gruppe von Vertretern der Bundesländer entwickelt worden. Eine gründliche fachdidaktische Diskussion in Expertenkreisen oder gar eine unterrichtliche Erprobung neuer Inhalte fand nicht statt. Leider ist ein Aufgreifen vieler vorher entwickelter und erprobter Vorschläge in der Didaktik nicht zu erkennen. Analog zu den Elementen der Geometrie, die ebenfalls einen längeren Prozess ihrer Implementierung in der Primarstufe durchlaufen haben, sollte nun nach fast zehnjähriger Praxis eine Bilanzierung und Weiterentwicklung der Bildungsstandards zur Stochastik erfolgen.

Literatur

- Kurtzmann, G., Sill, H.-D. (2012): Vorschläge zu Zielen und Inhalten stochastischer Bildung in der Primarstufe sowie in der Aus- und Fortbildung von Lehrkräften. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: WTM-Verlag
- Sill, H. D. (2010): Zur Modellierung zufälliger Erscheinungen. In: Stochastik in der Schule 30 2010 (Heft 3), S. 2-13.