Auszug aus:
Mathematik: Mecklenburg-Vorpommern. Klasse 7. Lösungsband, S. 8 – 11

Standpunkte und Hinweise zur Behandlung der Proportionalität

Behandlung von Zusammenhängen und Zuordnungen

Der Zuordnungsbegriff ist ein allgemeines mathematisches Modell, das erst im Zuge der mengentheoretischen Fundierung der Mathematik im 19. Jahrhundert entstand und eine Erfassung unterschiedlichster Zusammenhänge und Relationen innerhalb und außerhalb der Mathematik erlaubt. Den Schülern ist dieser Begriff in verschiedenen Zusammenhängen seit der Primarstufe begegnet (Vorgänger, Nachfolger einer Zahl, Original und Bildfigur bei Bewegungen, Zahlen und Punkte eines Zahlenstahls, Bruch - Reziprokes). Im Stoffgebiet Proportionalität soll ein weiterer Schritt in der Entwicklung des Zuordnungs- und damit des Funktionsbegriffes erfolgen. Die bisherigen, meist mehr impliziten und innermathematischen Verwendungen, sollen durch die explizite Verwendung des Begriffs bei der Betrachtung von Zusammenhängen von Größen ergänzt und angereichert werden.

Durch die ausschließlich mengentheoretische Betrachtungsweise von Größenbeziehungen als Zuordnung von Werten werden wesentliche Anwendungsaspekte in den Hintergrund gedrängt. In der Geschichte des Funktionsbegriffes ging es ebenfalls zunächst um das Erfassen von Zusammenhängen und Abhängigkeiten von Größen durch geschlossene mathematische Ausdrücke und die Betrachtung von Veränderungen der einen Größe bei Veränderung der anderen Größe (funktionale Betrachtungen). Diese Entwicklungsetappe der mathematischen Theorie wird auch dem Stoffgebiet Proportionalität zu Grunde gelegt.

Als zentraler Untersuchungsgegenstand wird deshalb der Zusammenhang von Größen gewählt. Die statische Betrachtung der Zuordnung von Größen wird zu Gunsten dynamischer Betrachtungen zur Art des Zusammenhangs der beiden Größen in den Hintergrund gedrängt. Die Betrachtung von Zusammenhängen und gegenseitigen Abhängigkeiten dient auch der Vorbereitung der Proportionalität

Zum Verhältnisbegriff

Die Proportionalität ist mathematisch mit dem Verhältnisbegriff verbunden. Direkte und umgekehrte Proportionalität können über die Gleichheit bestimmter Verhältnisse definiert werden. Der Proportionalitätsfaktor muss bei zahlreichen Anwendungen als ein Verhältnis aufgefasst werden. Zur Ermittlung eines fehlenden Wertes einer Größe kann eine Verhältnisgleichung aufgestellt werden. Es ist sogar möglich, sämtliche Berechnungsaufgaben auf das Aufstellen und Lösen von Verhältnisgleichungen zurückzuführen. Allerdings ist mathematisch auch eine Behandlung der Proportionalität als besondere Form einer funktionalen Abhängigkeit weitgehend ohne Verwendung des Verhältnisbegriffs und der Proportionen möglich.

Es muss unterschieden werden zwischen Verhältnissen gleichartiger Größen (Maßstab, Mischungsverhältnis, Chancenverhältnis, Verhältnis von Anzahlen) und dem Verhältnis verschiedenartiger Größen.

Unter proportionalem Denken wird meist Denken in Verhältnissen verstanden. Es wurde in zahlreichen psychologischen und didaktischen Untersuchungen eingehend erforscht. Dabei zeigte sich u.a., dass ein erheblicher Teil der Schüler bis zum Alter von etwa 15 Jahren große Probleme im Umgang mit Proportionen hat und die allgemeine Intelligenz hoch mit proportionalem Denken korreliert.

Bei aller Schwierigkeit des Verhältnisbegriffes und der altersbedingten Probleme im proportionalen Denken kann auf diesen mathematisch wichtigen und praktisch bedeutsamen Begriff nicht verzichtet werden. Es bietet sich an, im Anschluss an seine Entwicklung in der Bruchrechnung (erstmalig Bezüge zwischen Bruch, Quotient und Verhältnis verdeutlicht) eine weitere Etappe im Stoffgebiet Proportionalität zu konzipieren.

Im engen Zusammenhang mit der direkten Proportionalität werden Betrachtungen zum Verhältnis der einander entsprechenden Werte der Größen angestellt. Neben der Erarbeitung der Gleichheit dieser Verhältnisse als ein notwendiges Merkmal für direkte Proportionalität wird das Verhältnis (der Proportionalitätsfaktor) selbst interpretiert, allerdings nur, wenn es sich um ein Verhältnis verschiedenartiger Größen handelt. In diesem Fall bedeutet der (ausgerechnete) Wert des Verhältnisses der Zahlenwerte der Größen, wie viel von der Größe im Zähler einer Einheit der Größe im Nenner entspricht. Dies wird durch die Verwendung von „pro" zum Ausdruck gebracht. Durch das Verhältnis wird praktisch eine Normierung der einen Größe in Bezug auf die andere vorgenommen. Dabei kann das Verhältnis auch umgekehrt werden, was zu einer neuen Betrachtungsweise und Aussage führt.

Diese Betrachtungen erfordern kein proportionales Denken, da keine Verhältnisse verglichen werden. Sie lassen sich an die im Stoffgebiet Bruchrechnung vermittelten Beziehungen zwischen Bruch und Quotient

($a : b = \frac{a}{b}$) anknüpfen und stellen eine inhaltliche Grundlage für die Prozentrechnung dar. Da sie sowohl für den schnellen Umgang mit vorliegenden Wertepaaren in der Praxis, für das Verständnis der direkten Proportionalität als auch für die Dreisatzrechnung von Bedeutung sind, sollte diese Art der Bildung, Berechnung und Interpretation von Verhältnissen als sichere Grundfertigkeit ausgebildet werden.

Das Vergleichen unterschiedlicher Verhältnisse und damit das Arbeiten mit Verhältnisgleichungen sollte nur am Rande behandelt werden, da es inhaltlich verzichtbar ist und auf große Verständnisschwierigkeiten stößt. Bei der notwendigen Reaktivierung der Proportionalität in der 9. und 10. Klasse sollte eine entsprechende Erweiterung erfolgen.

Behandlung der direkten Proportionalität

Es wird in der Regel die Bezeichnung „proportional" verwendet, d.h. auf den Zusatz „direkt" verzichtet. Dies entspricht dem üblichen Sprachgebrauch in der Mathematik, den Naturwissenschaften und dem späteren Mathematikunterricht.

Mit „proportional" wird sowohl die Eigenschaft eines Zusammenhangs bzw. einer Zuordnung als auch eine Relation zwischen Größen bezeichnet. Die Formulierung „A ist proportional zu B" ist in den Naturwissenschaften üblich und drückt eine dynamische Beziehung zwischen den Größen aus. Auf das Zeichen ~ wird verzichtet, da es zu Verwechslungen führen kann (rund, ähnlich) und nicht unbedingt benötigt wird.

Als wesentliches Merkmal eines proportionalen Zusammenhangs wird die Konstanz (Gleichheit) eines bestimmten Verhältnisses herausgestellt. Verhältnis wird dabei im oberen Sinne als Bezug auf eine Einheit angesehen. (z.B. Preis pro kg, Verbrauch pro 100 km, Weg pro Stunde). Dies braucht nicht allgemein formuliert, sondern kann an Beispielen verdeutlicht werden. Analog zu den Bedingungen eines gesetzmäßigen Zusammenhangs in den Naturwissenschaften ist die Gleichheit des Grundverhältnisses die Bedingung für die Proportionalität des Zusammenhangs.

Beispiele:
- Der Preis für ein Getränk ist proportional zur Anzahl der Flaschen, wenn sich der Preis pro Flasche nicht ändert, unabhängig wie viel man kauft.
- Der Preis für ein Waschmittel ist nicht proportional zur gekauften Menge, da der Preis pro kg bei größeren Verpackungen geringer ist.
- Der Weg ist proportional zur Zeit, wenn die Geschwindigkeit konstant bleibt.
- Der Fahrpreis eines Taxis ist nicht proportional zur Kilometerzahl, da der Preis pro km nicht gleich bleibt.

Wenn sich die Gleichheit des Verhältnisses der Größen nicht aus dem Sachverhalt ergibt oder noch überprüft bzw. erst gefunden werden muss, müssen die Quotienten der zugeordneten Werte der Größen ermittelt werden. Die so überprüfte Quotientengleichheit dient also zum Nachweis der Proportionalität.

Die Wachstumseigenschaften (Verhalten der einen Größe bei Verdoppeln Halbieren usw. der anderen) können auch zum Nachweis der Proportionalität verwendet werden, wenn die Ermittlung eines Verhältnisses schwierig oder nicht angebracht ist (z.B. Wachstum eines Menschen im Laufe seines Lebens u.a. zeitliche Prozesse). Ansonsten werden sie als wesentliche Eigenschaft eines erkannten proportionalen Zusammenhangs herausgestellt, die Grundlage für die Berechnung von interessierenden Wertepaaren ist.

Die Eigenschaften der grafischen Darstellung eines proportionalen Zusammenhangs werden an Beispielen erarbeitet, da sie für die naturwissenschaftlichen Fächer bei der Untersuchung von Messreihen benötigt werden.

Auf eine Charakterisierung durch eine Gleichung und damit auf die Behandlung des Proportionalitätsfaktors kann verzichtet werden.

Behandlung der umgekehrten Proportionalität

Bei der umgekehrten Proportionalität handelt es sich um einen nichtlinearen Zusammenhang. Die Funktion $f(x) = x^{-1}$ wird erst im Rahmen der Potenzfunktionen in der 9. oder 10. Klasse als Spezialfall behandelt. Die Kenntnisse über die funktionale Charakterisierung und die grafische Darstellung dieser Funktion werden im Unterschied zur linearen Abhängigkeit im Falle direkter Proportionalität im folgenden Mathematikunterricht also kaum benötigt.

Auch bei umgekehrt proportionalen Zusammenhängen zwischen Größen sind die Bedingungen zu beachten, unter denen ein solcher Zusammenhang nur gilt. Sie werden oft nicht genannt bzw. nicht beachtet. Es ist also auch die Frage zu beantworten „Was bleibt gleich?".

In den meisten Fällen geht es bei Aufgaben zur umgekehrten Proportionalität um den Zusammenhang zwischen drei Größen, wobei eine das Produkt der beiden anderen und konstant ist. Beispiele dafür sind:
- Berechnung von Zeiten für einen gleichen Weg bei verschiedenen Geschwindigkeiten
- Aufteilen einer Menge in gleich große Teilmengen unterschiedlicher Größe
- Gleichmäßige Verteilung eines Betrages auf eine unterschiedliche Anzahl von Personen

Bei diesen Aufgaben ist es sinnvoll, direkt das Produkt zweier Größen zu betrachten und die gesuchte Größe aus der Gleichheit der Produkte zu berechnen.

Es gibt aber auch praktisch bedeutsame Sachverhalte, in denen zwei Größen umgekehrt proportional zueinander sind und das Produkt der beiden *nicht* durch eine Formel gegeben oder vom Sachverhalt her zu berechnen ist. Zu diese Sachverhalten gehören:
- gleichmäßige Verteilung einer Arbeit auf „Arbeitsverrichter“ mit gleicher Leistung
- Gleichmäßige Verteilung eines Vorrates auf „Verbraucher“ mit gleichem Einzelverbrauch
- Füllen/ Lehren eines Behälters durch Rohre/ Pumpen gleicher Größe/ Leistung

Bei allen diesen Aufgabengruppen ist es sinnvoll, funktionale Betrachtungen zur Bestimmung der gesuchten Größe anzuwenden, d.h. z.B. zu fragen, wie sich die Zeit zum Füllen des Wasserbeckens ändert, wenn mehr Rohre vorhanden sind. Nachdem die gegenläufige (umgekehrte) Richtung der Veränderung erkannt wurde, ist die sich daraus ergebene Vermutung der umgekehrten Proportionalität durch quantitative dynamische Betrachtungen zu bestätigen. Es ist als ausreichend anzusehen, wenn eine Verdoppelung und eine Halbierung der einen Größe, also z.B. der Anzahl der Rohre untersucht wird. Weiterhin ist nach den Bedingungen für das Vorliegen diese Zusammenhangs zu fragen. Danach erst kann der Schluss (die Rückführung) auf eine Einheit (Wie lange dauert es bei einem Rohr) und anschließend auf ein Vielfaches dieser Einheit erfolgen.

Behandlung von Sachaufgaben zur Proportionalität

Es wird darauf verzichtet, eine vollständige Orientierungsgrundlage zu vermitteln, die sämtliche Möglichkeiten und Einzelschritte für das Lösen von Sachaufgaben zur direkten und indirekten Proportionalität erfasst. Eine solche Handlungsvorschrift wäre auf Grund des begrenzten Aufgabenfeldes zwar möglich, ist aber aus folgenden Gründen nicht zweckmäßig.
- Diese Vorschrift ist infolge der zahlreichen Verzweigungen sehr unübersichtlich. Deshalb ist ein erheblicher Aufwand bis zur sicheren Beherrschung erforderlich. Ohne eine sichere Beherrschung zum Lösen der Aufgaben ist sie aber relativ sinnlos, da die Schüler nur verunsichert werden und sich selbst eine Orientierung aufbauen müssen.
- Durch eine solche Vorschrift kann bei den Schülern der Eindruck entstehen, dass das Lösen von Sachaufgaben zur Proportionalität in den Bereich der algorithmisierbaren Tätigkeiten gehört, während es von den tatsächlichen Anforderungen und Lösungsverläufen als Spezialfall einer Sach- und Anwendungsaufgabe und damit als Problembearbeitungsprozess anzusehen ist.
- Von den verschiedenen Möglichkeiten, die Proportionalität festzustellen und die fehlenden Werte zu berechnen, wird in solchen Schemata meist nur eine genannt, um die Vorschriften nicht unübersichtlich zu machen. Damit wird die Ideenfindung und Lösungsvielfalt stark eingeschränkt.
- Das Problem der notwendigen Bedingungen zum Vorliegen eines proportionalen bzw. umgekehrt proportionalen Zusammenhangs wird in solchen Vorschriften meist nicht erfasst, da sie dann noch umfangreicher würden.
- Bei vielen Aufgaben, insbesondere zur umgekehrten Proportionalität, sind mehrere Lösungswege möglich, die in der Vorschrift nicht erfasst werden können.

Die Orientierungen zum Lösen von Aufgaben zur Proportionalität sollten in die 4 Schritte der Problembearbeitung sowie in die Orientierungen zum Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben, die die Schüler aus dem bisherigen Unterricht kennen, eingeordnet werden. Dazu sollten spezielle Hinweise zum Finden von Lösungsideen gegeben werden.

Verwendung des Dreisatzes

Es wird nicht unterschieden zwischen dem Dreisatz bei direkter und umgekehrter Proportionalität. Es wird vielmehr das gemeinsame beider Berechnungsweisen herausgestellt, das auch für andere Stoffgebiete (z.B. Prozentrechnung) Bedeutung hat :
Der so genannte erste Satz bedeutet ein Ausgehen vom Gegebenen (Vorwärtsarbeiten).
Der wesentliche Gedanke des zweiten „Satzes“ besteht in der Rückführung auf eine Einheit einer der Größen (bzw. ein geeignetes Vielfaches dieser Einheit). Dabei orientiert man sich im Sinne eines zielgerichteten Arbeitens an der Größe, von der zwei Werte bekannt sind und auch an dem konkreten dritten Wert. Die Rückführung erfolgt bei der direkten Proportionalität durch gleichmäßige Veränderung der einander zugeordneten Werte in gleicher Richtung und bei der indirekten Proportionalität durch gleichmäßige

Veränderung in umgekehrter Richtung.
Der dritte „Satz“ (oder auch zweite „Satz“ eines „Zweisatzes“) beinhaltet den Übergang von der ermittelten Einheit der einen Größe (und dem ihr zugeordneten Wert der anderen Größe) zu einem bestimmten Vielfachen dieser Größe.
Die Anwendung des Dreisatzes bzw. das so genannte isomorphe Schließen beim Lösen von Sachaufgaben ist eine elementare und grundlegende Lösungsmethode, die durch die Schüler bereits im Stoffgebiet Proportionalität sicher angeeignet werden sollte. Das Arbeiten mit dem Dreisatz wird deshalb möglichst bereits zu Anfang des Stoffgebietes eingeführt und im Laufe seiner Behandlung ständig gefestigt werden. Der Schwerpunkt der Anwendung des Dreisatzes liegt auf den Aufgaben zur direkten Proportionalität.