Auszug aus: Mathematik Mecklenburg-Vorpommern Klasse 7 Gymnasium Lösungsband. – Berlin: paetec, 1999, S. 14 - 17

Standpunkte und Hinweise zur Behandlung der Prozentrechnung

Bedeutung und Aspekte des Prozentbegriffes

Infolge der großen Bedeutung und vielfachen, z. T. auch missbräuchlichen Verwendung von Prozentangaben im Alltag sollten *reichhaltige Vorstellungen* zum Prozentbegriff entwickelt werden. Die Schüler müssen in der Lage sein, mit Prozentangaben im täglichen Leben auf Anhieb sicher umzugehen und die Bedeutungen sowie fehlerhafte Verwendungen sicher erkennen zu können. Im Unterschied zu vielen anderen Gebieten der Mathematik sollte man in Interesse eines lebensverbundenen Mathematikunterrichts auf die im gesellschaftlichen Leben üblichen Bezeichnungen und Betrachtungsweise Rücksicht nehmen.
Neben Aufgaben zur Berechnung von Prozentwerten, Prozentsätzen und Grundwerten, die sicher dominieren müssen, sollten mit Blick auf die Praxis auch vielfältige Aufgaben zur Interpretation von Prozentangaben und den daraus gezogenen Schlussfolgerungen angeboten werden. Insbesondere sind fehlerhafte Interpretationen und Schlussweisen zum Gegenstand der Untersuchungen zu machen. Auf Grund der Gemeinsamkeiten mit stochastischen Betrachtungen und Denkweisen wird damit auch ein Beitrag zur Entwicklung des stochastischen Könnens geleistet.

Man kann drei verschiedene *Sachsituationen* unterscheiden, in denen der Prozentbegriff verwendet wird.
a) Es wird der Anteil einer Größe betrachtet (prozentualer Anteil, Quote, Rate).
b) Es werden Vergleiche von Anteilen vorgenommen, die sich auf verschiedene Bezugsgrößen beziehen.
c) Es werden Veränderungen betrachtet (Steigerung, Senkung um ... auf, prozentuale Veränderung, Wachstumsrate).

Die *Bezeichnung "Prozent"* besitzt im Zusammenhang mit Aufgabenstellungen zwei inhaltlich unterschiedliche Bedeutungen:
a) eine Aufforderung zum Rechnen (Rechenvorschrift, Prozentoperator), meist mit dem Wort „von“ verbunden (z.B. 10 % von 180 DM),
b) die Angabe eines Rechenergebnisses bzw. Beschreibung einer Situation (Prozentangabe, Prozentzahl, Prozente), meist mit der Angabe der Bezugsgröße verbunden (z.B. 20 % der Schüler).

Die Bedeutungen stehen in enger Beziehung zu einander. Welcher Aspekt dominiert, wird oft erst aus dem Kontext klar. Der erste Aspekt steht in engem Zusammenhang mit der Berechnung von Prozentwerten und der zweite mit der Ermittlung von Prozentsätzen. Bei der Angabe statistischer Daten (prozentuale Häufigkeiten) wird oft von der Prozentschreibweise im Sinne des Aspektes b) Gebrauch gemacht. Beim Auftreten des Prozentzeichens im Alltag handelt es sich deshalb meist um Prozentangaben.

Eine Zahl mit einem Prozentzeichen *für sich* (z.B. nur „1 %“ ohne weitere Zusätze und Kontexte) ist mit Ausnahme der Bedeutung als Wahrscheinlichkeit inhaltlich ohne Sinn, da nicht erkenntlich wird, ob es sich um eine Rechenvorschrift handelt bzw. worauf sich diese Prozentangabe bezieht. Zur vollständigen Angabe einer Rechenvorschrift gehört die Angabe der Größe, von der der Prozentsatz bestimmt werden soll. Handelt es sich um eine Prozentangabe, muss zumindest aus dem Kontext hervorgehen, auf welche Größenangabe (Grundwert) sich die Prozentangabe bezieht.

Handelt es sich um eine *Wahrscheinlichkeitsangabe*, so liegt lediglich ein Transformation des Intervalls $<0;1>$ auf das Intervall $< 0; 100>$ vor. Es soll weder ein Prozentwert berechnet noch ein Anteil zum Ausdruck gebracht werden. Man nutzt die Prozentschreibweise, um sich die Größe der Wahrscheinlichkeiten besser vorstellen zu können. Aus mathematischer Sicht ist diese Schreibweise sogar nicht korrekt, da Wahrscheinlichkeiten i.a. keine Verhältnisse und außerdem als Zahlen zwischen 0 und 1 definiert sind.
Die Verwendung der Prozentschreibweise zur Angabe von Wahrscheinlichkeiten sollte in der Prozentrechnung nicht behandelt werden, um die Schüler nicht unnötig zu verwirren.
Man kann allerdings auch die Wahrscheinlichkeitsangabe auf einen „Grundwert“, nämlich die Sicherheit (100%ige Sicherheit) beziehen. Die Angabe der Wahrscheinlichkeit drückt dann den Grad der Sicherheit aus. Möglich ist weiterhin eine fiktive Zahl von Wiederholungen des Vorgangs (Fälle), z.B. $p = 30\ \%$ heißt: in 30% aller Fälle tritt das Ereignis ein.

Für das *formale Rechnen* mit bzw. das Berechnen von Prozentangaben ist die Gleichsetzung von Prozentangaben mit den zugeordneten Dezimalbrüchen bzw. Hundertstelbrüchen von Vorteil, z.B.:
$1\ \% = \frac{1}{100} = 0{,}01$; $17{,}3\ \% = \frac{17{,}3}{100} = 0{,}173$. Diese Gleichsetzung sollte deshalb bei bestimmten Rechnungen vorgenommen werden, auch wenn dies inhaltlich nicht gerechtfertigt ist. Bei der Erklärung des Prozentbegriffes und bei den ersten Übungen zum Prozentbegriff (d.h. zum Verwenden von Prozentangaben) sollte diese

Gleichsetzung noch vermieden werden, um die Ausbildung der inhaltlichen Vorstellungen nicht zu behindern. Es ist ausreichend, die Gleichsetzung erst bei der Behandlung der Grundaufgaben der Prozentrechnung zu verwenden und auf die inhaltliche Problematik kurz hinzuweisen.

Zur Einführung des Prozentbegriffes

Bei der Einführung sollten folgende *Aspekte* des Prozentbegriffes beachtet werden:
– Die Bezeichnung „Prozent“ (d.h. ohne gleichzeitige Verwendung einer Zahl, einer Variablen oder weiterer Zusätze) kann als synonym zu den Sprechweisen *„pro hundert“* oder *„von hundert“* aufgefasst werden und ist in etwa in der Bedeutung des Prozentzeichens enthalten.
– Zu einer Prozentangabe gehört immer die Angabe einer *Bezugsgröße*.
– Hinter einer einzelnen Prozentangabe versteckt sich das *Verhältnis* zweier absoluter Zahlen, die Werte der Bezugsgröße und der Größe, die in Bezug gesetzt wird. Dieselbe Prozentangabe kann in den Dimensionen völlig unterschiedliche absoluten Zahlen verbergen, z.B. kann „50 % der Schüler“ sowohl 2 von 4 Schülern als auch 3746 von 5492 Schülern bedeuten.
Eine Prozentangabe ist also eine spezielle Form eines Verhältnisses.
– Mit Prozentangaben können *Anteile*, die sich auf unterschiedliche Bezugsgrößen (Grundwerte) beziehen, *verglichen* werden.
– Eine Prozentangabe kann einen Anteil bezeichnen; dann ist sie kleiner als 100 %. Ist die in Bezug gesetzte Größe größer als die Bezugsgröße, so ist die Prozentangabe größer als 100 %. und es wird eine Vervielfachung der Bezugsgröße zum Ausdruck gebracht.
– Prozentangaben bis 100 % liegen als Zahlenwerte zwischen 0 und 1. Man hat sie zur besseren Vorstellung auf den Bereich 0 bis 100 abgebildet (gestreckt, vergrößert).

Der Prozentbegriff kann mit der Erklärung von 1 % als „einer von hundert“ verbunden werden. Damit wird ein Bild für die Angabe „1 %“ aufgebaut, das inhaltlich richtig orientiert und auch praktisch oft verwendbar ist:
– Ich nehme an, es wären 100 Personen (oder auch Stück).
– Ich stelle mir davon eine Person (oder ein Stück) vor.
Ein Nachteil ist allerdings, dass mit dieser Erklärung nur ganzzahlige Prozentangaben anschaulich erfasst werden können.

Der Prozentbegriff kann nicht behandelt werden, ohne zumindest Aufgaben zur Bestimmung von Prozentsätzen und Prozentwerten zu lösen. Die Lösung dieser Aufgaben sollte mit der anschließenden Behandlung der Grundaufgaben abgestimmt sein, ohne die Verfahren erst ausführlich behandeln zu müssen. Der Einführung wird deshalb folgende *Konzeption* zu Grunde gelegt:
– Es erfolgt eine Beschränkung auf das *Rechnen mit bequemen Prozentsätzen*. Damit wird eine Vereinfachung der Rechnungen erreicht und so eine Konzentration auf das inhaltliche Verständnis gefördert. Bequeme Prozentsätze müssen ohnehin laut LP behandelt werden.
– Mit den bequemen Prozentsätzen werden Aufgaben zu *alle Grundtypen* gelöst. Damit wird die anschließende Behandlung vorbereitet.
– Die Lösung der Grundaufgaben mit bequemen Prozentsätzen wird auf das *Rechnen mit Brüchen* zurückgeführt. Dies sollte den Schülern vertraut sein (in der Bruchrechnung vorbereitet, Wiederholung sicher notwendig), sodass keine lange Erarbeitung von Verfahren erfolgen muss.
– Bei der ausführlichen und separaten Behandlung der Grundaufgaben wird auf diese Vorgehensweise aufgebaut.

Vorstellungen zu den Begriffen Prozentsatz, Prozentwert und Grundwert

Die Begriffe Grundwert, Prozentsatz und Prozentwert werden im täglichen Leben mit Ausnahme des Begriffs Prozentsatz und des analogen Begriffs Zinssatz kaum verwendet. Zum Lösen von Prozentaufgaben ist die Verwendung dieser Begriffe letztlich *nicht* erforderlich.
Ihre Einführung und ihr sicherer Gebrauch sollte deshalb nur eine Zwischenstufe bei der Entwicklung des Könnens im Lösen von Prozentaufgaben sein. Entscheidend ist, dass bei den Schülern klare inhaltliche Vorstellungen ausgebildet werden, sodass sie später auch ohne bewusste Verwendung dieser Bezeichnungen entsprechende Aufgaben lösen können.
Spätestens in den gemischten Übungen sollte auf ein formales Aufschreiben dieser Begriffe als Bezeichnung der gegebenen und gesuchten Größen verzichtet werden.

Bereits in den speziellen Übungen zu den Grundaufgaben sollten *vielfältige sprachliche Varianten* der Begriffe bei Aufgabenstellungen verwendet werden.

Der *Grundwert G* ist die Bezugsgröße für die Prozentangabe. Häufige Bezeichnungen für Bezugsgrößen sind die Begriffe Gesamtgröße, Gesamtzahl, Gesamtwert, Gesamtheit, Gesamtmenge u.a. Diese Begriffe stehen damit in enger begrifflicher Beziehung zu „Grundwert“ und sollten als Bezeichnungen für Grundwerte verwendet werden.

Die Bezeichnung Vergleichsgröße für den Grundwert ist nicht günstig, da „Vergleichen“ im Denken der Schüler auf Grund des bisherigen Unterricht und des Alltagsgebrauches mit der Untersuchung der Ordnungsrelation (größer, kleiner oder gleich) gekoppelt ist, während hier das Vergleichen im Bilden eines Verhältnisses besteht.

Der Begriff *Prozentsatz* (und vor allem Zinssatz) wird im Alltag meist als Bezeichnung für eine vollständige Prozentangabe verwendet (Der Zinssatz beträgt 4 %.), während in der Mathematik meist nur die Zahl vor dem Prozentzeichen gemeint ist (Der Prozentsatz/Zinssatz p ist 4.)
Im Interesse einer Übereinstimmung der Begrifflichkeit sollten im Mathematikunterricht die Begriffe Prozentsatz und Zinssatz wie im täglichen Lebe verwendet und auch von dem Prozentsatz 4 % gesprochen werden.
Mit Blick auf die Formeln der Zinsrechnung wird als Formelsymbol für den Prozentsatz die Bezeichnung p% verwendet, obwohl eine solche Notation den Gepflogenheiten im Umgang mit Termen nicht entspricht (% ist kein selbstständiges mathematisches Zeichen und keine Einheit).
Zu Unterscheidung von Zahl vor dem Prozentzeichen und Prozentsatz wird die Bezeichnung *Prozentpunkt* verwendet.

Für den *Prozentwert* wird die Bezeichnung W verwendet. Die Bezeichnung P für Prozentwert entspricht zwar der Konvention der Verwendung des ersten Buchstabens für eine Abkürzung, es können aber Verwechslungen mit p auftreten, obwohl diese Gefahr durch die Verwendung von p% für den Prozentsatz geringer sein dürfte. Für die Bezeichnung W im Sinne von Wert spricht jedoch auch, dass eine damit verbundene inhaltliche Kopplung mit dem Grundwert G den Zusammenhängen besser entspricht als die Kopplung mit „Prozent“

Die Begriffe Prozentsatz, Prozentwert und Grundwert werden bereits bei der Einführung des Prozentbegriffes benötigt.

Orientierungen zum Lösen der Grundaufgaben der Prozentrechnung

Es können u.a. folgende Verfahren zum Lösen der drei Grundaufgaben unterschieden werden:

a) Verwenden einer einheitlichen Formel (Verwenden einer Verhältnisgleichung oder Verwenden der Formel zur Berechnung von Prozentwerten) für alle Grundaufgaben, jeweils Umstellen der Grundformel bei jeder Grundaufgabe
b) Verwenden eines einheitlichen Operatormodells (z.B. $G \xrightarrow{\cdot \frac{p}{100}} W$) zum Lösen jeder Grundaufgabe,
c) Verwenden einer speziellen Formel für jede Grundaufgabe
d) Lösen aller Grundaufgaben durch Rückführung auf 1 %
e) Lösen aller Grundaufgaben durch Arbeiten mit dem Dreisatz
f) Rückführung des Lösens aller Grundaufgaben auf das Rechnen mit Brüchen, insbesondere bei bequemen Prozentsätzen
g) Verwenden je eines TR-Algorithmus unter Benutzung der Prozenttaste

Das Verfahren a) ist für den sicheren und unvorbereiteten Umgang mit Prozentangaben im Beruf und Alltag wenig geeignet, da zu viele Kenntnisse und Teilhandlungen zum Lösen einer einzelnen Aufgabe erforderlich sind. Es müssen jeweils die Begriffe Prozentwert, Prozentsatz und Grundwert beherrscht und in dem vorliegenden Sachverhalt identifiziert werden, die Verhältnisgleichung bekannt sein sowie das Umstellen der Verhältnisgleichung nach der gesuchten und das Einsetzen der gegebenen Größen beherrscht werden. Zum Lösen einer Aufgabe sind in der Regel schriftliche Arbeiten erforderlich. Auch die praktizierte Verwendung von Tabellen verringert die Anforderungen nicht entscheidend, es muss dann auch immer etwas aufgeschrieben werden. Weiterhin wurden mit diesem Vorgehen kaum inhaltliche Vorstellungen entwickelt, sondern ein rein formales Arbeiten begünstigt.

Mit dem *Operatormodell b)* wird die Beziehung zur Bruchrechnung gut hergestellt. Es bewegt sich aber auch auf einer formalen Ebene, benötigt Begriffe und Symbole sowie Kenntnisse im Arbeiten mit Pfeilbildern.

Das Verfahren c) führt sicher am schnellsten zum Erfolg, da nach Identifizierung des Aufgabentyps nur in eine fertige Formel eingesetzt werden muss. Es setzt jedoch voraus, dass die Begriffe und Formeln sicher beherrscht werden.

Das Verfahren d) unterscheidet sich in der Vorgehensweise bei den Überlegungen und schriftlichen Darstellungen für die Berechnung von Prozentwerten und Grundwerten nicht vom Dreisatz e). Bei der Berechnung von Prozentsätzen gibt es Unterschiede.

Die Verfahren d) und e) benötigen keine Kenntnis von Formeln und Begriffen und sind deshalb für ein inhaltliches Arbeiten gut geeignet.

Das Verfahren f) setzt voraus, dass die Schüler in der Bruchrechnung mit entsprechenden Aufgabentypen sicher vertraut gemacht wurden:

Das Verfahren g) ist rein formal und an eine Prozenttaste auf einem TR gebunden

Allen Verfahren ist gemeinsam, dass alle drei Grundaufgaben in (im Prinzip) gleicher Weise gelöst werden sollen. Dies entspricht jedoch *nicht* den inhaltlichen Zusammenhängen. Während die Berechnung von Prozentwerten und Grundwerten einen gemeinsamen Denkrahmen haben (Es soll jeweils der Wert einer Größe ermittelt werden, der einem bestimmten Prozentsatz entspricht.), läuft die Berechnung von Prozentsätzen auf prinzipiell andere Überlegungen hinaus: Es ist das Verhältnis zweier Werte einer Größe zu bestimmen.

Wegen der Bedeutung der Prozentrechnung und der damit verbundenen Notwendigkeit einer ständigen Verfügbarkeit des Könnens im Umgang mit Prozentangaben sollten inhaltlich orientierte Verfahren, die ohne Begriffe und Formeln auskommen, im Mittelpunkt stehen.

Es können zwei *Aufgabentypen* unterschieden werden:
a) Es ist eine Prozentangabe gegeben (Berechnung von Prozentwerten und Grundwerten).
b) Es ist eine Prozentangabe gesucht (Berechnung von Prozentsätzen).

Entsprechend diesen Aufgabentypen sollten *zwei Verfahren* behandelt werden. Beim Rechnen mit bequemen Prozentsätzen werden die Aufgaben auf das Rechnen mit Brüchen zurückgeführt.

Typ A: Eine Prozentangabe ist gegeben.
Die Aufgabe wird durch Rückführung auf 1 % bzw. mit dem Dreisatz gelöst.

Typ B: Eine Prozentangabe ist gesucht.
1. Es ist der Wert (die Bezugsgröße) zu bestimmen, auf den sich die Prozentangabe beziehen soll.
2. Es wird der Quotient aus dem gegebenem Wert und der Bezugsgröße gebildet und als Dezimalbruch dargestellt.
3. Dem Dezimalbruch wird der entsprechende Prozentsatz zugeordnet.

Die Rückführung auf ein 1% bzw. der Dreisatz brauchen als Verfahren nicht bezeichnet und schematisiert zu werden.

Das Rechnen mit beliebigen Prozentsätzen kann analog zur Arbeit mit bequemen Prozentsätzen auch durch Rückführung auf die Bruchrechnung erfolgen. Z.B. 7,8 % von 632 DM heißt $\frac{7{,}8}{100}$ von 632 DM = $\frac{7{,}8}{100} \cdot 632\,\mathrm{DM}$.

Es sollten als Ergänzung auch *Formeln* verwendet werden, wenn die Schüler die inhaltlichen Verfahren sicher beherrschen, da damit
– die Zusammenhänge und Begriffe gut dargestellt und gefestigt,
– funktionale Betrachtungen vorgenommen und
– die Schüler auf das Arbeiten mit Variablen und Gleichungen vorbereitet werden können.

Es sollte eine *Grundformel* angegeben und die anderen jeweils daraus hergeleitet werden.
Da die Schüler die Umformungsregeln für Gleichungen erst in Klasse 8 kennen lernen, können die Umformungen nur inhaltlich erfolgen.
Um das Umstellen sowie das Arbeiten mit den Formeln zu vereinfachen, sollte die folgende Form gewählt werden:

in Worten:	Prozentwert = Prozentsatz · Grundwert
mit Variablen:	$W = p\% \cdot G$

Eine besondere Schwierigkeit in der Prozentrechnung ist wie auch in der Bruchrechnung ist die unterschiedliche Verwendung des *Wortes „von“*.
a) „von“ als Multiplikation: z.B. 3 % von 20 m; 3/10 von 18 kg; die Hälfte von 3 DM
b) „von“ als Division: z.B. 3 m von 20 m; 0,3 kg von 18 kg; 0,5 DM von 3 DM
Bei a) geht es um die Berechnung eines Prozentwertes. Vor dem „von“ steht eine Prozentangabe oder ein Bruch, beides ist als Operator aufzufassen.
Bei b) soll ein Verhältnis berechnet werden. Vor und hinter dem „von“ stehen Größen der gleichen Art.
Diese Unterschiede sollten nicht explizit verdeutlicht, aber bei der Bildung der Aufgaben beachtet werden.

Es sollten keine Verfahren zur Verwendung einer *Prozenttaste auf TR* angegeben. Der TR wird sollte als Hilfsmittel zur Lösung der sich durch die Überlegungen ergebenden Rechenaufgaben genutzt werden.