4 Quadratische Gleichungen – quadratische Funktionen

Planungsvorschlag

Thema	h	Schwerpunkte und Bemerkungen
Rückblick	**1**	• Wiederholung der Quadratzahlen • Berechnen von Quadratwurzeln • Bestimmen von Beträgen, inhaltliches Lösen von Betragsgleichungen • Anwenden der binomischen Formeln zur Berechnung von Produkten und zum Faktorisieren von Summen • Beschreibung eines Zusammenhangs mit Funktionen, Darstellung von Funktionen, funktionale Betrachtungen
4.1 Quadratische Gleichungen und Gleichungen höheren Grades	**6**	• Einführen von „quadratische Gleichung“ und „Gleichung n-ten Grades“, identifizieren und realisieren dieser Gleichungen
Begriff der quadratischen Gleichung und Lösen quadratischer Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen	2	• Verwenden des Zusammenhangs von Quadrieren und Wurzelziehen für Gleichungen der Form $x^2 = a$ und $(x + a)^2 = b$, Anwendungen – Die Eindeutigkeit des Wurzelziehens sollte hervorgehoben werden. • Verwenden des Satzes: „Wenn das Produkt zweier Terme gleich Null ist, muss mindestens ein Faktor den Wert Null haben.“ zur inhaltlichen Lösung von Gleichungen der Form $x(x + a) = 0$, $(x + a)(x + b) = 0$ und der Form $x^2 + ax = 0$ • Verwenden binomischer Formeln zur Lösung von Gleichungen der Form $x^2 + ax + b = c$
Lösen quadratischer Gleichungen mit einer Lösungsformel		• Herleiten der Lösungsformel und Anwenden zur algorithmischen Lösung quadratischer Gleichungen • Aufstellen und Lösen quadratischer Gleichungen zur Bestimmung von Zahlen und zu geometrischen Sachverhalten • Vergleich der Lösungsverfahren • Quadratische Gleichungen mit Parametern
Der Satz des VIETA	3	• Herleiten des Satzes und Anwenden zum Aufstellen von Gleichungen, Lösen durch Probieren und zur Kontrolle
	1	• Lösen von Gleichungen höheren Grades durch inhaltliche Überlegungen
4.2 Quadratische Funktionen	**9**	• Vergleich linearer und quadratischer Zusammenhänge
Quadratische Funktionen mit der Gleichung $y = ax^2$	2	• Begriffe Parabel, Normalparabel, Scheitelpunkt, Darstellung und Eigenschaften der Funktion $y = ax^2$, Einfluss des Parameters auf den Graphen, Skizzieren, Finden von Gleichungen • Finden einer Funktion für einen Zusammenhang
Quadratische Funktionen mit der Gleichung $y = ax^2 + e$	2	• Darstellung und Eigenschaften der Funktion $y = ax^2 + e$, Einfluss des Parameters e auf den Graphen, Finden von Gleichungen • Anwenden der Merkmale zur Beschreibung von Eigenschaften einer Funktion • Bestimmen der Nullstellen der Funktion
Quadratische Funktionen mit der Gleichung $y = (x + d)^2 + e$	3	• Darstellung und Eigenschaften der Funktion $y = (x + d)^2 + e$, Einfluss der Parameters d und e auf den Graphen, Finden von Gleichungen zu gegebenen Eigenschaften, Anwenden der Merkmale zur Beschreibung von Eigenschaften einer Funktion • Einführen von Normalform
Quadratische Funktionen mit der Gleichung $y = x^2 + px + q$	2	• Berechnen des Scheitelpunktes • Berechnen von Nullstellen – Der Zusammenhang der x-Koordinate des Scheitelpunktes mit den Nullstellen • allgemeine Form der quadratischen Funktion • Bestimmen der Koordinaten der Schnittpunkte

Thema	h	Schwerpunkte und Bemerkungen
4.3 Gemischte Aufgaben	**3**	Auswahl aus folgenden Schwerpunkten: • Untersuchungen zur Lösbarkeit und zur Anzahl der Lösungen quadratischer Gleichungen • Aufstellen von Gleichungen zu Lösungen • Lösen quadratischer Gleichungen durch Umformen in die Normalform und Anwendung der Lösungsformel • grafisches Lösen quadratischer Gleichungen • Aufstellen und Lösen quadratischer Gleichungen zu geometrischen Sachverhalten • Lösen von Sachaufgaben, die auf Gleichungssysteme mit quadratischen Gleichungen führen • Vertiefen der Kenntnisse zum Modellieren realer Sachverhalte • Untersuchen von beschleunigten Bewegungsvorgängen mit quadratischen Funktionen • Bestimmen von Funktionsgleichungen für gegebene Kurven • Anwenden quadratischer Funktionen zur Lösung von Optimierungsproblemen
Summe:	**19**	

Standpunkte und Hinweise zur Behandlung des Themas

Zur Reihenfolge der Behandlung von quadratischen Gleichungen und quadratischen Funktionen

Die quadratischen Gleichungen werden aus folgenden Gründen vor den quadratischen Funktionen behandelt:

– Auf diese Weise kann die Eigenständigkeit der Entwicklung des Könnens im Lösen von Gleichungen stärker hervorgehoben werden. Der mathematische Bezug zu den quadratischen Funktionen kann auch nach deren Behandlung erarbeitet werden.
– Das Lösen quadratischer Gleichungen ist einfacher als die Bearbeitung der oft komplexen Probleme im Zusammenhang mit quadratischen Gleichungen.
– Durch die Behandlung quadratischer Gleichungen können einige Elemente bei der Behandlung quadratischer Funktionen vorbereitet werden (Diskriminante, quadratische Ergänzung, Nullstellenberechnung).
– In der Kl. 8 wurden auch zuerst die linearen Gleichungen und dann die linearen Funktionen behandelt. Es wird in Kl. 9 eine möglichst weitgehende Analogie zwischen der Behandlung der Gleichungen bzw. Funktionen angestrebt.

Die Zusammenhänge zwischen quadratischen Gleichungen und quadratischen Funktionen werden im Abschnitt „Nullstellen quadratischer Funktionen“ erarbeitet und auch in den gemischten Übungen gefestigt. Auch deshalb werden beide Problemkreise in einem Kapitel behandelt.

Zum Verhältnis von inhaltlichem und algorithmischen Lösen quadratischer Gleichungen

Die Grundidee zur Weiterentwicklung des Könnens im Lösen von Gleichungen besteht in der Ausprägung des Wechselverhältnisses von inhaltlichem und kalkülmäßig-algorithmischen Lösen. Beide Lösungsverfahren werden vertieft und erweitert. Der Gegensatz zwischen beiden Vorgehensweisen wird zur Wirkung gebracht und in Richtung der Dominanz des inhaltlichen Lösens entwickelt, d.h., es sollte für den Schüler die Grundregel gelten: „Versuche jede Gleichung zuerst inhaltlich zu lösen.“ Die Schüler sind daran zu gewöhnen, die Lösungsformel erst anzuwenden, wenn sie die Gleichung nicht inhaltlich lösen können.

Es wird deshalb nicht die Behandlung einer Vielzahl von Gleichungstypen mit algorithmischen Methoden angestrebt. Diese Vorgehensweise ist zeitaufwendig und sehr anspruchsvoll, da die Schüler dazu alle Typen und Lösungsformeln lernen müssen, bei einer konkreten Gleichung immer zuerst den Typ identifizieren, die Parameter bestimmen und dann die Formel richtig anwenden müssen.
Als neue inhaltliche Lösungsverfahren werden eingeführt:

– Verwenden des Zusammenhangs von Quadrieren und Wurzelziehen zum Lösen von Gleichung wie $x^2 = 15$, $(x + 2)^2 = 7$
– Anwenden des Satzes „Wenn $a \cdot b = 0$, dann $a = 0$ oder $b = 0$“ zum Lösen von Gleichungen wie $x(x - 2) = 0$, $(x - 3)\cdot(x + 5) = 0$, $x^2 + 3x = 0$
– Anwenden der binomischen Formeln zum Lösen von Gleichungen wie $x^2 + 2x + 1 = 0$, $x^2 - 16 = 0$ (Bezug zu den anderen beiden vorherigen Verfahren möglich)
– Finden 1 Lösung durch Probieren auch mithilfe des Satzes des VIETA, Reduzieren des Grades durch Polynomdivision

Das Wurzelziehen sollte als nicht äquivalente Umformung gekennzeichnet werden. Der Zusammenhang zwischen der eindeutigen Rechenoperation Wurzelziehen und der Lösung einer quadratischen Gleichung $x^2 = a$ sollte erneut herausgestellt werden.

Zur Behandlung von speziellen Begriffen und Sätzen

Es wird ein minimales Begriffssystem angestrebt. Nicht behandelt werden die Begriffe „rein quadratische Gleichung“ und „gemischt quadratische Gleichung“. Der Begriff „Diskriminante“ und die Bezeichnung D wird im Zusammenhang mit der Lösungsformel eingeführt, da er zur Verkürzung der Sprech- und Schreibweise auch bei den quadratischen Funktionen verwendet werden kann.

Der Satz des VIETA sollte nur als Zusatz behandelt werden. Damit wird dann aber auch eine weiter inhaltliche Lösungsmethode, das geeignete Zerlegen der Koeffizienten, möglich.

Zur quadratischen Ergänzung

Das Lösen quadratischer Gleichungen mit quadratischen Ergänzung sollte aus folgenden Gründen nicht geübt werden.

- Es ist ein inhaltliches Lösungsverfahren mit beschränkter Anwendbarkeit und erfordert einen hohen Rechenaufwand, ist also stark fehleranfällig.
- Die Normalform der quadratischen Gleichung kann effektiver mit der Lösungsformel gelöste werden. Das Verfahren der quadratischen Ergänzung bringt keinen Zeit- oder Rechenvorteil wie bei anderen inhaltlichen Lösungsverfahren.
- Die Schüler müssen zum Anwenden der Lösungsformel befähigt werden, da dies die allgemeine Erwartung ist.
- Ein zu langes Arbeiten mit der quadratischen Ergänzung behindert das Gewöhnen an die Lösungsformel.

Die quadratische Ergänzung wird lediglich beim Herleiten der Lösungsformel benötigt. Hier kann sie problemhaft erarbeitet werden.

Beziehungen von linearen und quadratischen Funktionen

Um die Kenntnisse der Schüler zu Funktionen systematisch aufzubauen und miteinander zu verbinden, sollte die Möglichkeit genutzt werden, folgende Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu linearen Funktionen herzustellen.

- Die quadratischen Funktionen sollten analog zur Einführung der linearen Funktionen nicht aus innermathematischer Sicht, sondern über die Betrachtung realer Zusammenhänge gewonnen werden.
- Die Graphen beider Funktionen sind besondere geometrische Linien (Kurven) die einen eigenen Namen haben (Gerade bzw. Parabel). Mit den Funktionsgleichungen können deshalb auch diese Kurven dargestellt werden.
- In den Funktionsgleichungen treten neben den Variablen x und y weitere Variable auf, die Parameter heißen. Bei linearen Funktionen sind dies m und n und bei quadratischen a, d, e, p und q. Von ihnen hängt der Verlauf der Graphen ab.
- Es gibt eine Normalparabel aber keine „Normalgerade“, da alle Graphen linearer Funktionen die gleiche geometrische Form haben. Bezüglich der Lage im Koordinatensystem spielt aber bei den linearen Funktionen der Graph von $y = x$ die Rolle der Normalparabel.
- Der Parameter m bewirkt wie der Parameter a eine Streckung bzw. Stauchung des Graphen bezüglich der x-Achse (Im Unterschied zur zentrischen Streckung ist dies eine Geradenstreckung). Bei $y = mx$ kann dies auch als Drehung um den Koordinatenursprung aufgefasst werden.
- Unterscheiden sich Anstiege m und Parameter a je zweier linearer bzw. quadratischer Funktionen $y = mx$ und $y = ax^2$ nur um das Vorzeichen, gehen die Graphen der Funktionen durch Spiegelung an der x-Achse auseinander hervor.
- Die Parameter n und e haben gleiche Bedeutung. Sie geben Richtung und Weite der Verschiebung bezüglich der y-Achse an.
- Der Graph der Funktion $y = x + d$ entsteht analog zum Graphen von $y = (x + d)^2$ durch Verschiebung des Graphen von $y = x$ bzw. $y = x^2$ um $-d$ in x-Richtung.
- Im 1. Quadranten gilt für beide Funktionen bei positivem m und positivem a: Wenn x wächst, wächst auch y. Allerdings ist bei konstantem Zuwachs von x der Zuwachs von y bei einer linearen Funktion auch immer konstant, während er bei einer quadratischen Funktion zunimmt je größer der Ausgangswert von x ist.

Finden von Funktionen zu Zusammenhängen

Im naturwissenschaftlichen Unterricht, insbesondere im Physikunterricht werden Funktionen häufig verwendet, um auf der Grundlage von Messreihen eine Gleichung für einen Zusammenhang zwischen Größen zu finden. Es bietet sich an, dieses Problem exemplarisch für Bewegungsvorgänge bei der Behandlung der Funktion $y = ax^2$ zu diskutieren. Dabei können gleichzeitig der kausale Aspekt des Funktionsbegriffes und die Sprechweisen: „Die Größe y hängt von der Größe x ab.“ bzw. „Die Größe y ist eine Funktion der Größe x.“ vertieft werden.

Für quadratische Funktionen gibt es im Unterschied zu den linearen Funktionen viel weniger Zusammenhänge zwischen Größen, die damit in für Schüler verständlicher Weise beschrieben werden können. Das Hauptanwendungsfeld sind die beschleunigten Bewegungen, die im Physikunterricht allerdings erst in der 10. Klasse behandelt werden.

Zur Bestimmung der Koordinaten des Scheitelpunktes quadratischer Funktionen aus der Normalform

Zur Bestimmung der Scheitelpunktskoordinaten aus der Normalform gibt es drei Möglichkeiten:

– Überführung in die Scheitelpunktsform mithilfe der quadratischen Ergänzung
– Verwenden der allgemeinen Formeln zur Berechnung der Koordinaten
– Berechnen der x-Koordinate mit dem Term $-\frac{p}{2}$ und der y-Koordinate als Funktionswert $f(-\frac{p}{2})$.

Die erste Möglichkeit sollte nicht verwendet werden, da bei der Behandlung quadratischer Gleichungen keine Fertigkeiten im Bestimmen der quadratischen Ergänzung ausgebildet wurden und die Rechnungen zudem sehr fehleranfällig sind. Wenn ein Tafelwerk zur Verfügung steht, können die allgemeinen Formeln verwendet werden, was in Vorbereitung der Abschlussprüfungen sinnvoll ist. Am Einfachsten ist die Verwendung der dritten Möglichkeit. Die Berechnung des Term $-\frac{p}{2}$ ist bei der Lösungsformel für quadratische Gleichungen geübt worden. Der Zusammenhang mit der Lösungsformel ist grafisch leicht einsichtig, wenn die Nullstellen existieren und die Berechnung von Funktionswerten ist ohnehin eine notwendige Grundhandlung. Die dritte Möglichkeit lässt sich auch auf den Fall der allgemeinen Form einer quadratischen Funktion übertragen. Die x-Koordinate des Scheitelpunktes ist in diesem Fall $-\frac{b}{2a}$.
Bei Anwendung dieser Vorgehensweise sollte zuerst die Nullstellenberechnung vorgenommen werden. Die dabei zu berechnenden Terme $-\frac{p}{2}$ bzw. $-\frac{b}{2a}$ können dann als x-Koordinate des Scheitelpunktes verwendet werden.

Lösung von Extremwertaufgaben

Mithilfe der Eigenschaften quadratischer Funktionen können ohne die Hilfsmittel der Differentialrechnung auf elementare Weise Extremwertaufgaben gelöst werden. Die Schüler können so bereits an diesen wichtigen Aufgabentyp in der Abiturstufe herangeführt werden, da bereits die wesentliche Betrachtungsweisen beim Lösen dieser Aufgaben auftreten. Es sollte allerdings keine spezielle Schrittfolge erarbeitet werden, sondern auch in diesem Fall eine Orientierung an den 5 allgemeinen Schritten beim Lösen einer Sachaufgabe erfolgen. Die entscheidende Lösungsidee ist das Transformationsprinzip, das bereits beim grafischen Lösen linearer Gleichungssystem verwendet wurde.