Auszug aus: Sill, H.-D. u. a.: Mathematik Mecklenburg-Vorpommern. Klasse 8. Gymnasium. Lehrermaterial. – Berlin: paetec-Verlag, 2004

Standpunkte und Hinweise zum Thema

Grundkonzeption

Das *Grundverhältnis* bei der Arbeit mit Termen, Gleichungen und Ungleichungen ist das Verhältnis von inhaltlichem und formalem bzw. von semantischem und syntaktischem Arbeiten. Es handelt sich um völlig unterschiedliche, entgegengesetzte Betrachtungs- und Arbeitsweisen. Trotzdem bedingen sie sich gegenseitig in folgender Hinsicht:

– Ein formales Arbeiten setzt inhaltliches Verständnis voraus.
  Z.B. muss der Schüler Formeln oder auch Gleichungen inhaltlich erfassen (z.B. Unbekannte, Parameter erkennen), um die geeigneten formalen Umformungen vornehmen zu können.
  Der Schüler muss den Sinn und die Verwendungsaspekte von Variablen und Gleichungen erfassen, um motiviert, zielorientiert und verständig formales Arbeiten in Angriff zu nehmen und einzuordnen.
– Inhaltliches Arbeiten erfordert formales Können.
  Z.B. sind beim inhaltlichen Lösen von Gleichungen, für die keine algorithmisch-kalkülmäßigen Lösungsverfahren vermittelt werden (und dies betrifft die Mehrzahl der im Mathematikunterricht vorkommenden Gleichungstypen) in der Regel einige Teilhandlungen (Umformungsschritte) auf formale Weise ausführen.

Eine wesentliche *Ursache* für die oft unbefriedigenden Leistungen der Schüler im Arbeiten mit Variablen, Termen und Gleichungen wird in dem nicht bewältigten Verhältnis von inhaltlichem und formalem Herangehen gesehen.

Der Entwicklung der Könnens im Arbeiten mit Variablen, Termen, Gleichungen und Ungleichungen wird ein dreistufiger Aufbau zu Grunde gelegt.

– *Stufe 1 (Dominanz des inhaltlichen Arbeitens),* bis Kl. 6:
  Verwendung von Variablen ohne Reflexion; Belegen und Berechnen von Termen beim Arbeiten mit Formeln; Struktur von Rechenausdrücken; nur inhaltliches Lösen von Gleichungen und Ungleichungen
– *Stufe 2 (Übergang zum formalen Arbeiten),* Kl. 7 und 8:
  Reflexion über Sinn, Aspekte und Konventionen der Verwendung von Variablen, Termen und Gleichungen; erste Fertigkeiten im Umformen von Termen; Vertiefung des inhaltlichen Lösens und Beginn des formalen Lösens von Gleichungen und z.T. Ungleichungen
– *Stufe 3(Dominanz des formalen Arbeitens),* Kl. 9 und 10:
  Vertiefen der Verwendungsaspekte von Variablen und Gleichungen; Festigung des inhaltliches Lösens und Anwendung auf weitere Gleichungstypen; Festigung und Erweiterung der Fertigkeiten im Umformen von Termen und im formalen Lösen von Gleichungen und Ungleichungen;

Zum Variablenbegriff

Der Variablenbegriff kann ebenso wie alle anderen algebraischen Grundbegriffe nur als *Wechselverhältnis* semantischer und syntaktischer (inhaltlicher und formaler) Aspekte erfasst werden. Jede einseitige Begriffsbildung (etwa Variable als anderes Wort für Platzhalter) sollte vermieden werden.

Die Schüler haben zur Klasse 7 Variable hauptsächlich unter inhaltlichen Sichtweisen kennen gelernt. Beim Arbeiten mit Termen und Lösen von Gleichungen und Ungleichungen erleben sie in den Kl. 7 und 8 den syntaktischen Variablenbegriff sowie weitere inhaltliche Aspekte. Eine Systematisierung und Zusammenfassung der unten genannten Aspekte des Variablenbegriffs sollte erst in Klasse 9 und 10 erfolgen.

Eine Variable ist aus *syntaktischer Sicht* zunächst ein Buchstabe oder eine Kombination aus Buchstaben, Zahlen bzw. Zeichen, mit dem nach festgelegten Regeln umgegangen werden kann. Beispiele: x, y, x_1, h_a, A_g, v_{hin}, $\overline{x}$
Der Charakter des Variablen (Veränderlichen) ist ein inhaltlicher Aspekt. Die Eigenschaften eines Buchstabens variabel (veränderlich) zu sein, ergibt sich erst durch den Kontext seiner Verwendung.

Um die *Aspekte des Variablenbegriffs*, ihre unterschiedliche Verwendung und die verschiedene Sichtweisen auf den Umgang mit Variablen zu verdeutlichen, können zwei Problemstellungen diskutiert werden.
Wozu verwendet man Variable?

– Variable können Namen für feste Zahlen oder Größen sein, z.B. π, e, c (Lichtgeschwindigkeit), g.
– Variable werden zur Bezeichnung von Größen verwendet, z.B. m (Masse), v (Geschwindigkeit), a (Seitenlänge).
– Variable stehen für unbekannte Zahlen in Gleichungen und Ungleichungen, z.B. $3x = 12$
– Variable stehen für beliebige Elemente einer Menge, z. B. $a \cdot b = b \cdot a$, $a, b \in R$; $A = a \cdot b$

Was kann man mit ihnen anfangen?

– Für Variable kann man Zahlen oder Größen aus einem Grundbereich einsetzen.
– Mit Variablen kann man rechnen wie mit Zahlen unter Beachtung bestimmter spezieller Regeln und Vereinbarungen.
– Man kann die Veränderung einer Variablen und die Auswirkungen auf die Veränderung anderer Variable untersuchen.

Die Verwendung von *Variablen in der Geometrie* weist einige Besonderheiten auf:

– Punkte werden mit großen Buchstaben bezeichnet. Obwohl in der Regel die Lage der Punkte in der Ebene oder im Raum als beliebig anzusehen ist, dominiert doch in der Betrachtungsweise der statische Aspekt, d.h. die Punkte werden als fest angesehen und die Buchstaben sind Namen bzw. Bezeichnungen für eine konkretes Objekt.
– Auch die Bezeichnung für Geraden und Strahlen sind Bezeichnungen für Objekte und nicht für zahlenmäßige Eigenschaften von Objekten. Im Unterschied zu den Variablen in der Algebra kann man mit diesen Bezeichnungen keine arithmetischen Operationen ausführen (Es kann z.B. nicht die Summe $g + h$ der Geraden g und h gebildet werden.)
– Bei Strecken bzw. Seiten sowie Winkeln wird mit kleinen (lateinischen bzw. griechischen) Buchstaben sowohl das Objekt selbst als auch seine zahlenmäßige Eigenschaft (die Länge bzw. Größe) bezeichnet. Sind keine konkreten Seitenlängen oder Winkelgrößen gegeben, so haben diese Buchstaben offensichtlich einen variablen Charakter. Dies wird insbesondere deutlich, wenn sie Bestandteil einer Formel sind (z.B. $A = a \cdot b$; $\alpha + \beta = 180°$).
– Die Namen von geometrischen Objekten können als so genannte Wortvariable angesehen werden. So ist z.B. ist das Parallelogramm ABCD zwar eine ebene Figur mit bestimmten Eigenschaften, in seiner konkreten Gestalt aber variabel.
– In der Geometrie treten weiterhin als Variable die Größen Flächeninhalt und Volumen auf. Sie werden mit großen Buchstaben bezeichnet. In den entsprechenden Formeln sind diese Bezeichnungen gleichzeitig Namen für eine Term.

Werden Variable zur *Bezeichnung von Größen* verwendet, ist zu unterscheiden, ob nur die Zahl oder die gesamte Größenangabe gemeint ist. Variable in Formeln bezeichnen immer die Größe mit Zahl und Einheit. Bei Rechnungen mit Formeln sollten auch mit Blick auf den naturwissenschaftlichen Unterricht deshalb in der Hauptrechnung immer konsequent die Einheiten mitgeführt werden. Nur in Nebenrechnungen, die bei Einsatz eines Taschenrechners kaum noch anfallen dürften, kann auf die Einheiten verzichtet werden.

Als *Bezeichnungen für Variable* sollte bei den Aufgaben eine möglichst große Vielfalt angestrebt werden. Es sollten sowohl kleine als auch große Buchstaben (vor allem für zusammengesetzte Terme) verwendet werden. Auch an die Benutzung von Indizes sind die Schüler zu gewöhnen (etwa T_1 und T_2 für Terme), da auch dies öfter bei Sachaufgaben sowie in der Mathematik selbst benötigt wird.
Durch die Vielfalt der Bezeichnungen wird deutlich, dass unabhängig von der konkreten Bedeutung der Variablen mit ihnen nach den gleichen formalen Regeln gearbeitet werden kann.

Die Schüler sollte jedoch auch schon an bestimmte *Konventionen beim Gebrauch von Bezeichnungen* in bestimmten Sachgebieten gewöhnt werden, z.B.:
A (Flächeninhalt), G (Grundwert), P (Punkt, Wahrscheinlichkeit, Leistung), e (Elementarladung, Eulersche Zahl), g (Grundseite, Fallbeschleunigung), h (Höhe), l (Länge).

Besondere Probleme gibt es beim Buchstaben p, der für den Prozentsatz, die Wahrscheinlichkeit, als Parameter in quadratischen Gleichungen, zur allgemeinen Darstellung einer rationalen Zahl, einen Hypotenusenabschnitt und den Druck verwendet wird.

Zum Termbegriff

Der Begriff Term ist für die Verständigung beim Arbeiten mit Termen, Gleichungen und Ungleichungen wichtig. Seine *formale Erklärung* ist allerdings aus folgenden Gründen kaum möglich:

– Die Abgrenzung von anderen mathematischen Ausdrücken ist nur mit großem Aufwand möglich. Eine Gegenüberstellung mit Gleichungen und Ungleichungen ist unvollständig, da z.B. die den Schülern bekannten mathematischen Ausdrücke $4 \mid 12$, $P(x;y)$, $g \perp h$, $n \in N$ u.a. weder Terme noch Gleichungen bzw. Ungleichungen sind. Mit dem Ausschluss von Relationszeichen ist das meiste erfasst, aber auch nicht alles, z.B. P(x;y)).
– Eine induktiv-rekursive Definition, wie sie in der Mathematik erfolgt, ist ebenfalls sehr aufwändig und muss in Klasse 7 unvollständig bleiben, da die Schüler einige mathematische Zeichen, wie f(x), sin x, n! noch nicht kennen. Rekursive Definitionen sind den Schülern zudem nicht bekannt und schwer verständlich.

Bei der *Erklärung des Termbegriffes* wird von den Vorstellungen der Schüler über Gleichungen ausgegangen. Die Schüler haben bisher zahlreiche Gleichungen kennen gelernt, sodass sie ausreichende Vorstellungen über die möglichen mathematischen Ausdrücke auf den Seiten einer Gleichung haben, die nun mit dem Begriff Term bezeichnet werden. Sie denken dann auch sofort an einzelne Variable, an einzelne Zahlen und Größenangaben. Weiterhin sollen die Vorstellungen der Schüler durch die Angabe weiterer Beispielen und auch Gegenbeispielen ausgebildet werden.

Es sind jedoch keine umfangreichen Übungen mit Beispielen und Gegenbeispielen erforderlich. Der Begriff kann durch seinen ständigen Gebrauch gefestigt werden.

Als Bezeichnungen für Terme sollten u. a. große Buchstaben (auch mit Indizes) gewählt werden. Dies steht in guter Übereinstimmung mit den großen Buchstaben für die Größen Flächeninhalt und Volumen. Es wird die Vorstellung vermittelt, dass sich hinter den großen Buchstaben Ausdrücke mit Variablen verbergen.

Konventionen beim Arbeiten mit Termen

Die Schüler müssen erfassen, dass in der Algebra (im Unterschied zu Geometrie) die Buchstaben nicht die zu Grunde liegende konkreten Objekte, sondern gewisse Zahlen oder Größen erfassen, die diesen Objekten zugeordnet sind. Dies kann im Zusammenhang mit der Übersetzung von Texten beim Lösen von Sachaufgaben geschehen.

Ein algebraischer Ausdruck kann sowohl einen Prozess als auch das Resultat des Prozesses darstellen. Der Term $2 + x$ kann z.B. sowohl als Aufforderung zur Rechnung bzw. nicht ausgeführte Rechnung als auch als Endergebnis einer Termumformung angesehen werden. Diese Betrachtungsweisen spielen vor allem beim Umformen von Termen und beim Übersetzen von Texten eine Rolle.

Auf Grund der möglichen Missverständnisse sollte auf die Konvention des Weglassens des Multiplikationszeichens ausführlich mit Aufgaben eingegangen werden. Insbesondere ist die Beziehung $x = 1x = 1 \cdot x$ und $-x = (-1)x = (-1) \cdot x$ zu verdeutlichen. Eine Gegenüberstellung mit der bei Zahlen üblichen Addition von nebeneinander stehenden Zeichen ist sinnvoll.

Zur Bestimmung der Struktur von Termen

Die Analyse von Termstrukturen ist eine wichtige Voraussetzung für das Lösen von Gleichungen und Umformen von Termen. Die Schüler sollen in der Klasse 7 mit dem prinzipiellen Vorgehen zur Bestimmung der Struktur eines Terms vertraut gemacht werden. Dabei erfolgt eine Beschränkung auf einfache Termstrukturen

Die Erschließung der Struktur eines Terms sollte von „außen nach innen“ erfolgen, d.h. zunächst wird die äußere Struktur bestimmt. Die Teilterme können durch große Buchstaben abgekürzt werden, z.B.

Term:	$ax + b$	$a - bx$	ax	$\frac{x}{a}$
äußere Struktur:	$A + B$	$A - B$	$A \cdot B$	$A : B$

Es ist nicht erforderlich, sofort die gesamte Struktur des Terms zu erfassen. Das „Erschließen“ des Terms kann schrittweise erfolgen. Dieses Vorgehen lässt sich im Prinzip auch für komplexere Terme anwenden, die in späteren Klassenstufen behandelt werden

Wenn die äußere Struktur durch mehrere Rechenoperationen der gleichen Stufe gebildet wird, sind auch mehrere Teilterme zu betrachten. Differenzen sollten zudem stets als Summen gedeutet werden, z.B. Term: $x + 3x - 4$; äußere Struktur: $A + B + C$.

Neben der Verwendung von großen Buchstaben für die Teilterme sollte eine grafische Veranschaulichungen zur Strukturanalyse verwendet werden. Dies ist durch Einkringeln der Termbestandteile möglich.

Um die Schüler bei der Strukturanalyse weiter zu unterstützen, sollten sie aufgefordert werden, die letzte auszuführende Rechenoperation zu bestimmen. Damit wird ein Bezug zu den Vorrangregeln hergestellt, die ja die Entscheidungsgrundlagen für die Strukturanalyse sind.

Zum Belegen von Variablen

Das Ersetzen von Variablen durch Zahlen, Größen oder andere Terme ist eine *Grundhandlung*, die für viele komplexe Handlungen von Bedeutung ist (Arbeit mit Formeln, Probe bei Gleichungen, Arbeit mit Funktionsgleichungen).

Zur Veranschaulichung des Belegens von Variablen kann die Variable als Fach (oder Schubfach, Kasten, Schachtel) aufgefasst werden, in das Zahlen, Größen oder andere Variable bzw. Terme hineingelegt werden können. Arbeiten mit Variablen bedeutet also in diesem Sinne ein Hantieren mit leeren Fächern. Ein Term ist in diesem Modell eine Verknüpfung von Fächern bzw. ein Befehl zum Umgehen mit dem möglichen Inhalt der Fächer. Termumformungen heißt umformulieren von Befehlen. Mit diesen Betrachtungen kann ein Zugang zum Verständnis von Variablen und Termen erreicht werden. Es werden aber nur rein syntaktische Aspekte erfasst. Das Modell sollte nicht übermäßig strapaziert werden, z.B. ist es nicht sinnvoll Fächer in Fächer zu legen oder einen Term als Schrank mit Fächern zu deuten.

Zur Veranschaulichung des Belegens von Variablen ist weiterhin eine Verwendung von Applikationen möglich.

Bedeutung des inhaltlichen Lösens von Gleichungen und Ungleichungen

Das inhaltliche Lösen ist auch nach der Behandlung algorithmisch-kalkülmäßiger Lösungsverfahren weiterhin eine Lösungsmöglichkeit. die bei einfachem Zahlenmaterial und einfachen Gleichungsstrukturen sinnvoll anzuwenden ist. Analog zum Herangehen an die Lösung numerischer Aufgaben (Erst überprüfen, ob eine Lösung im Kopf möglich ist und dann erst schriftlich oder mit dem Taschenrechner rechnen) sollte auch für algebraische Aufgaben eine entsprechende Einstellung und Gewohnheit zur Überprüfung rationeller, inhaltlicher Lösungsmöglichkeiten entwickelt werden.
Es ist allerdings der Gefahr zu begegnen, dass bei zu starker Betonung inhaltlichen Lösens, die Motivation für das kalkülmäßige Lösen verloren geht. Es ist sinnvoll, bei der Erstfestigung der Umformungsregeln einfaches Zahlenmaterial zu verwenden, so dass oft auch eine Lösung im Kopf möglich wäre. Um diese Gefahr zu verringern sollte das algorithmisch-kalkülmäßige Lösen deutlich als ein anderes Herangehen abgesetzt werden, das zuerst an einfachen Beispielen, die zur Kontrolle auch inhaltlich gelöst werden können, einzuüben ist, bevor es dann seine Tragfähigkeit und Überlegenheit an schwierigen Gleichungen zeigen kann. Erst nach Beherrschung des kalkülmäßigen Lösens sollte das Lösungsverfahren wieder freigestellt werden.
Es sollten möglichst solche Aufgaben gewählt werden, die nicht ohne weiteres im Kopf zu bewältigen sind.

Von den Verfahren zum inhaltlichen Lösen von Gleichungen, die in der 5 und 6. Klasse eingeführt wurden, ist besonders das Zerlegen der Zahlen und das Umkehren der Rechnung auch weiterhin von Bedeutung. Für das inhaltliche Lösen von Ungleichungen ist dagegen besonders das systematische Probieren und mit Einschränkungen das Umkehren der Rechnung geeignet, während ein Zerlegen von Zahlen nicht weiterhilft.

Entwicklung eines syntaktischen Gleichungsbegriffes

Die Schüler haben das *Gleichheitszeichen* bis zur Klasse 7 vor allem als gerichtetes Zeichen (von links nach rechts) kennen gelernt, d.h. die beiden Seiten der Gleichungen haben verschiedene Bedeutung:

- Lösen von Rechenaufgaben: $2 \cdot 4 = 12$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- Bestimmen des kgV: kgV(6; 8) = 24
- Lösen von Gleichungen mit einer Variablen: $8 \cdot x + 13 = 37$; $(x - 2{,}25) : 0{,}5 = 8$
- Angabe der Lösung einer Gleichung: $x = 3$
- Umrechnen von Größen: 3,4 km = 3400 m
- Arbeiten mit Umfangs- und Inhaltsformeln: $u = 2 \cdot (a + b)$; $A = a \cdot b$
- Angabe von Zuordnungen (oft mit Entspricht-Zeichen): 4 kg $\hat{=}$ 7,96 DM
- beim Lösen von Prozentaufgaben: $W = p\,\% \cdot G$
- beim Arbeiten mit dem Taschenrechner Gleichheitszeichen - Taste als Ergebnistaste

Auf der linken Seite einer Gleichung steht in solchen Fällen,

- was berechnet werden soll (die Aufgabe),
- eine Rechnung mit einer Unbekannten,
- die Unbekannte,
- die Größe, die umgerechnet werden soll,
- eine Größe, die mit Hilfe der Formel berechnet werden kann,
- die Größe, der eine andere zugeordnet werden soll.

Auf der rechten Seite steht dann

- das Ergebnis der Rechnung mit den Zahlen oder der Unbekannten,
- die Lösung der Gleichung,
- die umgerechnete Größe,
- eine Rechenausdruck mit Größen,
- eine Größe, die der links stehenden zugeordnet werden kann.

Diese gerichtete Auffassung des Gleichheitszeichen ist im Schüler fest verankert und hat auch weiterhin beim Arbeiten mit Formeln, beim Rechnen mit dem Dreisatz, z.T. auch beim Lösen von Gleichungen (Ordnen: Unbekannte links) ihre Bedeutung. Es ist also nicht erforderlich und lernpsychologisch ohnehin kaum möglich, die bisherigen Vorstellungen abzulegen und von nun an völlig neue zu entwickeln. Die Schüler brauchen nicht vergessen, was sie bisher gelernt und geglaubt haben. Die bisherigen Vorstellungen zu Gleichungen sind eine mögliche und in vielen Fällen durchaus sinnvolle Betrachtungsweise.

In folgenden Fällen haben die Schüler die beiden Seiten der Gleichung als *gleichberechtigt* erlebt:

- beim Formulieren von Rechengesetzen: $a + b = b + a$
- als Quotienten- oder Produktgleichheit $\frac{x\text{ DM}}{3\text{ kg}} = 1{,}99\frac{\text{DM}}{\text{kg}}$; $4 \cdot x = 6 \cdot 12$
- beim Auftreten von Gleichungen mit der Variablen auf beiden Seiten: $x + x = x \cdot x$

Das *Anwenden von Umformungsregeln* zum Lösen von Gleichungen setzt aber eine rein syntaktische Auffassung der Gleichung voraus. Die Schüler müssen sich in diesem Fall von der Links-Rechts- bzw. Aufgabe-Resultat-Auffassung lösen und Gleichungen als rein formale Zeichenketten ansehen. Analogiebeziehungen zum Arbeiten eines Taschenrechners oder PC sind möglich.
Die syntaktische oder formale Betrachtung einer Gleichung sollte neben die inhaltliche Betrachtungsweise als eine völlig andersartige gestellt werden, deren Sinn in einer formalisierten Arbeitsweise besteht, was viele Schüler ja durchaus anstreben. Damit ergeben sich wesentliche Erleichterungen beim Arbeiten mit Termen und beim Lösen von Gleichungen, allerdings erst, wenn man die formalen Regeln auch beherrscht.
Die syntaktische oder formale Auffassung wird oft den Schüler erstmalig bewusst, wenn die Variable auf beiden Seiten der Gleichung auftritt, also ein Ordnen erforderlich ist. Dies ist deshalb ein Knotenpunkt der Entwicklung.

Es ist nicht erforderlich, die syntaktische Auffassung auch für Gleichungen ohne Variable zu auszubilden. Dass z.B. $3 = 4$ auch eine Gleichung im formalen Sinne ist, ist zwar überraschend, erstaunlich oder auch lustig, für Schüler aber kaum verständlich zu machen und für das formale Umgehen mit Gleichungen ohne größere Bedeutung. Dementsprechend wird die Bezeichnung von Zahlen als Terme möglichst vermieden.

Grundbegriffe der Gleichungslehre

Der Begriff *Aussage* ist den Schülern aus dem Alltag bekannt und wurde in den bisherigen Lehrbüchern der Klassen 5 bis 7 sehr häufig verwendet. Es kann also davon ausgegangen werden, dass die Schüler hinreichende Vorstellungen zum Begriff Aussage besitzen.

Auf den Begriff *Aussageform* kann verzichtet werden, da er keine neuen Einsichten vermittelt, die nicht auch ohne ihn ausgedrückt werden können. Im späteren Mathematikunterricht wird er ebenfalls nicht benötigt.

Die Begriffe *Lösung, lösen und erfüllen* sind den Schülern aus den Klassen 1 bis 7 bekannt und können im Bisherigen Sinne verwendet werden.

Die Angabe eine *Lösungsmenge* sollte nur erfolgen, um die Schüler an die Mengenschreibweise mit geschweiften Klammern zu erinnern (Kl. 6 Teilbarkeit). Lösungsmengen sollten nur angegeben werden, wenn mehrere diskrete Lösungen vorhanden sind. Es ist allerdings auch eine Aufzählung möglich, z.B. $x = -1; 2; 3{,}5; 5$.

Betrachtungen zum *Grundbereich* sind bei einigen Anwendungen wichtig, um die erhaltenen Lösungen auf Brauchbarkeit zu untersuchen. Dies ergibt sich aber meist aus dem vorliegenden Sachverhalt. Umfangreiche Übungen zum Lösen von Gleichungen in verschiedenen Grundbereichen werden nicht für erforderlich gehalten. Auch eine Angabe des Grundbereiches bei jeder Gleichung ist nicht notwendig, es reicht ein genereller Hinweis, dass immer der umfassende Grundbereich gemeint ist. Wichtig ist jedoch, die Schüler daran zu gewöhnen, zu Beginn der Lösung einer Gleichung oder Ungleichung immer mögliche Einschränkungen des Grundbereiches zu überprüfen, die sich aus Einschränkungen bei Rechenoperationen (Nenner verschieden Null, Radikand größer Null) ergeben. Die ist insbesondere für die Anwendung der Umformungsregeln von Bedeutung.
Es muss mit Blick auf den Begriff der Äquivalenz von Gleichungen und die Umformungsregeln jedoch die Einsicht vermittelt werden, dass zu jeder Gleichung prinzipiell die Angabe eines Grundbereiches gehört.

Umformungsregeln für Gleichungen

Die Umformungsregeln werden unter Verwendung eines Waagemodells erarbeitet, da diese inhaltliche Interpretation einer Gleichung für das Lösen von Gleichungen ausreichend ist und mit dem Modell ein wesentlicher Aspekt (auf beiden Seiten das Gleiche machen) veranschaulicht werden kann. Allerdings muss eine Beschränkung auf positive Zahlen erfolgen.

Die Umformungsregeln werden gleich für Terme und nicht extra für Zahlen formuliert, da dies mathematisch nicht erforderlich ist und beim Lösen von Gleichungen und insbesondere beim Umstellen von Gleichungen oft mit Termen operiert werden muss. Die Regeln werden zudem kürzer und lassen sich einfacher merken.

Oft wird in Lehrbüchern das Multiplizieren und Dividieren mit Termen sogar explizit als nichtäquivalente Umformung bezeichnet, obwohl dann auch in diesen Büchern damit gearbeitet wird. Diese Auffassungen hängen mit der fehlerhaften Verwendung des Begriffes Äquivalenz von Gleichungen zusammen. So sind die Gleichungen $x = 11$ und $x^2 = 11x$ im Grundbereich $x \in R$, $x \neq 0$ zueinander äquivalent. Die Gleichungen $x(x - 5) = 0$ und $x = 0$ sind ebenfalls im Grundbereich $x \in R$, $x \neq 5$ zueinander äquivalent.

Die Umformungsregeln werden im Sinne des Erlaubten formuliert, um den Hilfscharakter zum Lösen von Gleichungen zu verdeutlichen.

Es muss den Schülern bewusst werden, dass die Umformungsregeln für beliebige Gleichungen gelten. Deshalb sollten auch andere Gleichungstypen in die Übungen einbezogen werden.

Um das Finden und Verstehen der Umformungsregeln noch deutlicher vom Lösen von Gleichungen abzuheben, wird bei der Erarbeitung und bei den Übungen zu den Umformungsregeln von einer Gleichung der Form $x = a$ ausgegangen, die dann schrittweise zu komplexeren Gleichungen umgeformt wird. Damit erleben die Schüler gleichzeitig, wie Gleichungen entstehen. Dabei können dann auch andere Gleichungstypen gewonnen werden.

Mit den Umformungsregeln allein ist ein Lösen von Gleichungen nicht möglich. Wichtiger ist die Vermittlung einer Strategie zum Anwenden der Regeln. Deshalb wird eine Schrittfolge zum Lösen von Gleichungen vermittelt, die ein zielgerichtetes Vorgehen ermöglichen soll.

Um die Schüler auf eine geeignete Auswahl der Rechenoperation zum weiteren Isolieren der Variablen zu orientieren und eine geeignete Sprechweise einzuführen, kann die Formulierung „aufheben der letzten Rechenoperation“ verwendet werden. Diese Formulierung ist in der Mathematik üblich und dürfte den Schülern auch schon begegnet sein (Addition und Subtraktion heben sich gegenseitig auf.) Nach dem „Deutschen Universalwörterbuch hat „aufheben“ folgende drei Bedeutungsaspekte:

- etwas vom Boden aufnehmen; sich erheben, aufstehen; in die Höhe heben, erheben
- aufbewahren, etwas in guter Obhut haben
- nicht länger bestehen lassen; rückgängig machen; außer Kraft setzen; den gleichen Wert, die gleiche Wirkung wie etwas Entgegengesetztes haben und es dadurch ausgleichen; offiziell beenden

Der dritte Aspekt entspricht etwa dem, was beim „Aufheben“ einer Rechenoperation gemeint ist.
Mit der Bezeichnung „aufheben“ wird außerdem im Unterschied zu dem üblichen „beseitigen“ oder “auf die andere Seite bringen“ verdeutlicht, dass das Störende keineswegs verschwindet, sondern zu(r) Null oder zu(r) Eins gemacht („gerade gebogen“) wird und erst die Null als Summand bzw. die Eins als Faktor weggelassen werden kann.

Es kann sofort der TR zugelassen werden, da er beim Lösen von Gleichungen wenig hilft.

Umstellen von Formeln

Ein wichtiges Ziel bei der Erweiterung des Gleichungsbegriffes ist die Einbeziehung von Formeln in die Betrachtungen zu Gleichungen. Für Schüler sind Formeln zwar auch Gleichungen aber etwas anderes als z.B. Gleichungen mit einer Unbekannten oder Gleichungen als Rechenaufgaben. Formeln sind aus formaler Sicht Gleichungen mit mehreren Variablen (und damit auch als Funktionen mehrerer Veränderlicher aufzufassen). Werden Formeln umgeformt, können sie als Gleichungen mit Parametern angesehen werden.

Aus Sicht der späteren Anwendungen der Algebra, vor allem in den nachfolgen Bildungsbereichen, hat das Umstellen von Formeln zumindest den gleichen, wenn nicht sogar einen höheren Stellenwert als das Lösen von Gleichungen. Es sollte deshalb von Anfang an ausreichend berücksichtigt werden.

Als Bezeichnungen für die betrachtete Handlung sind folgende möglich: „Umstellen der Formel nach ...“, „Auflösen der Formel nach ...“, „Umformen der Formel“.

Mit den ersten beiden Formulierungen kann das Ziel besser angegeben werden. Es wird „umstellen“ verwendet, da es etwas deutlicher als „auflösen“ auf die Handlungen orientiert.

Das Umstellen von Formeln stellt höhere Anforderungen an die Schüler, als das Lösen einer Gleichung, da mehrere Variable zu betrachten und unterschiedlich zu behandeln sind. Aufgaben zum Umstellen von Formeln sollten deshalb vorrangig in entfalteter Form unter Einsatz grafischer Mittel (farbiges Markieren der Größe, nach der umgestellt werden soll) gelöst werden. Das Umstellen von Formeln wird dabei als Anwendung der Umformungsregeln behandelt.