10.4 Zum Lösen weiterer problemhafter Aufgaben

10.4.1 Allgemeine Orientierungen

a) Entwicklung von Einstellungen zum Verhalten bei auftretenden Problemen

- *nicht:* abwarten, noch mal erklären lassen
- *sondern:* sich selber helfen, bestimmte Methoden anwenden
- Konsequenzen: Aneignung allgemeiner Lernmethoden

b) Generelle Methoden zum Lernen neuen mathematischen Stoffes

- *nicht:* Vortrag/Erklärungen anhören, Texte mehrmals lesen
- *sondern:*
  - Herstellen von Bezügen zu vorhandenen Kenntnissen (Ist das auch ein…? Ist das was anderes als …?)
  - Bilden und Betrachten von Beispielen
  - Bilden und Lösen von Aufgaben

c) Generelle Methoden zum Bearbeiten problemhafter Aufgaben

- *nicht:* andere fragen (Wie rechnet man das?)
- *sondern:* sich selber eine geeignete Fragen stellen

10.4.2 Anwenden heuristischer Vorgehensweisen zum Bearbeiten weiterer problemhaften Aufgabenklassen

a) Allgemeinen Schrittfolge zur Problembearbeitung (Erst denken – dann rechnen!)

z. B. bei formalen Rechenaufgaben in gemischten Übungen oder bei Umkehraufgaben: TRAP-Methode (s. 8.1.e))

1. **T**yp erkennen: *Worum geht es in der Aufgabe?*

2. **R**egel überlegen: Rechenoperationen/Struktur erkennen;
Plan aufstellen: verschiedene Rechenwege durchdenken

3. **A**usführen der Rechnung

4. **K**ontrolle

b) Analogieprinzip

– *Kenne ich eine ähnliche Aufgabe, die ich bereits gelöst habe?*

– *Kann ich das Vorgehen beim Lösen dieser Aufgabe auf mein Problem übertragen?*

– Aber auch: *Ist das wirklich das Gleiche?*

c) Rückwärtsarbeiten

– Bei allen mehrschrittigen innermathematischen Bestimmungsaufgaben

- Satzgruppe des Pythagoras: geg.: $c = 15$ cm, $a = 10$ cm, ges.: h_c
- Trigonometrische Berechnungen
- Körperberechnungen

d) Arbeit mit Hilfsaufgaben

- Betrachten von Zahlenbeispielen beim Arbeiten mit Termen, insbesondere bei Spezial- und Sonderfällen
- Bilden/Betrachten von Hilfsaufgaben (Prototypen) zum Reaktivieren von Definitionen und Regeln
  - Addieren von Brüchen
  - Potenzen mit negativen Exponenten
  - Potenzgesetze

10.5 Zur Entwicklung des Wissens und Könnens im Arbeiten mit Größen (vgl. 5.1.2)

10.5.1 Entwicklung von Kenntnissen zu Größen und Einheiten

(1) Kl. 1 – 4:

- Geldwert: Euro (€), Cent
- Länge: Millimeter (mm), Zentimeter (cm), Meter (m), Kilometer (km)
- Zeit: Sekunde (s), Minute (min), Stunde (h), Tag (d)
- Masse: Gramm (g), Kilogramm (kg), Tonne (t)
- Rauminhalt: Milliliter (ml), Liter (l)

(2) Kl. 5 – 8:

- Länge: Dezimeter (dm)
- Zeit: Woche, Monat, Jahr
- Masse: Milligramm (mg), Dezitonne (dt)
- Flächeninhalt: Quadratmillimeter (mm^2), Quadratzentimeter (cm^2), Quadratdezimeter (dm^2), Quadratmeter (m^2), Ar (a), Hektar (ha), Quadratkilometer (km^2)
- Volumen: Kubikmillimeter (mm^3), Kubikzentimeter (cm^3), Kubikdezimeter (dm^3), Kubikmeter (m^3), Hektoliter (hl)

(3) ab Kl. 9: sehr große und sehr kleine Einheiten, Systematisierung und Erweiterung der Kenntnisse zu Vorsilben, Rechnen mit Zehnerpotenzen

10.5.2 Entwicklung von Größenvorstellungen

- unmittelbare und mittelbare Größenvorstellungen
- für alle Einheiten und zu ausgewählten Teilen oder Vielfachen von Einheiten Aneignen von prototypischen Vergleichsobjekten
  Vorschläge: Broschüre SWK Größen
- Vorstellungen zu Anzahlen von Objekten, insbesondere große Zahlen durch geeignete Vergleiche ausbilden

10.5.3 Entwicklung des Könnens im Schätzen von Größen

- Schätzen dient der Ausbildung von Größenvorstellungen
- Vermittlung von Verfahrenskenntnissen zum Schätzen:
  1. Heranziehen geeigneter Vergleichsobjekte
     a) Repräsentanten für Einheiten bzw.
     b) Teile oder Vielfache von Einheiten der gleichen Größenart
  2. Zurückführen des Schätzens von Flächen und Volumina auf das Schätzen von Längen
- Aufgabentypen
  - Angeben bzw. Bewerten sinnvoller Einheiten
  - Schätzen von Größen bzw. Bewerten von Schätzungen (SWK Größen)

10.5.4. Entwicklung des Könnens im Umrechnen von Größen

- Kl. 1 – 4: rein inhaltliches Arbeiten
  - Komma als Sortentrennzeichen, Einheitentabelle
  - Orientierung an Einheitengleichungen:
    1 cm = 10 mm, 1 m = 100 cm, 1 km = 1000 m
    1 kg = 1000 g, 1 t = 1000 kg
    1 min = 60 s, 1 h = 60 min, 1 Tag = 24 h
- Kl. 5 – 8: formales Arbeiten unter Einbeziehung von Größenvorstellungen
  - Orientierung an Einheitengleichungen zur Ermittlung von Umrechungsz.
  - Verwenden der Kenntnisse zur dezimalen Schreibweise und zum Multiplizieren bzw. Dividieren mit Zehnerpotenzen
  - Vorschlag für eine Orientierungsgrundlage mit 5 Teilhandlungen:
    1. Vorstellen der Einheiten und Bestimmen der größeren Einheit
    2. Bestimmen der Rechenoperation
    3. Bestimmen der Umrechnungszahl
    4. Ausführen der Rechnung
    5. Kontrolle mit Größenvorstellungen
- Ab Kl. 9: Erweiterung formalen Arbeitens, Bewahrung inhaltlicher Aspekte
  - Verwendung der Bedeutung der Vorsilben
  - Verwendung der Kenntnisse zu Potenzgesetzen

10.5.5 Zum sichern Wissen und Können im Arbeiten mit Größen

Es sollten sichere Größenvorstellungen und sichere Fertigkeiten im Umrechnen zwischen zwei benachbarten der folgenden Einheiten ausgebildet werden:

- Währung: Cent, Euro
- Zeit: Sekunde, Minute, Stunde, Tag
- Masse: Gramm, Kilogramm, Tonne
- Länge: Millimeter, Zentimeter, Meter, Kilometer
- Flächeninhalt: Quadratzentimeter, Quadratmeter, Hektar, Quadratkilometer
- Rauminhalt: Kubikzentimeter/Kubikmillimeter, Liter, Kubikmeter

10.5.6 Zu den Begriffen Größe und Einheit

- Zahlreiche Bedeutungen des Wortes „Größe“,
- Physik: Eine Größe ist eine messbare Eigenschaft von Objekten.
- Mathematik: bis zum 19. Jahrhundert: „Zahlen und Größen“
  heute: mehrere Def., nicht: „Produkt aus Zahl und Einheit“,
  aktuellste Fassung (vom DIN): Größe als Funktion auf einer Trägermenge (Menge realer Objekte)
- Einheit: zwei Bedeutungen: „das Meter“ und „1 m“
- Unterscheidung von Größe und Größenangabe sinnvoll

10.6 Entwicklung des Könnens im Arbeiten mit Näherungswerten und sinnvoller Genauigkeit

10.6.1 Runden und Überschlagen

a) Runden

- Regeln bei Ziffer 5:
  - Schule: stets aufrunden
  - Wissenschaft:
    Geradezahlregel,
    5 durch Aufrunden entstanden: $\dot{5}$, aufrunden
    5 durch Abrunden entstanden: $\underline{5}$, abrunden
- Runden ist nicht transitiv.
- Runden von Dezimalbrüchen heißt Abschneiden

b) Überschlagen und Abschätzen

- Überschlag stets im Kopf
- Überschlag oft nicht nach Rundungsregeln
- Abschätzen (Angabe einer oberen oder unteren Schranke), dient Entwicklung des funktionalen Denkens

10.6.2 Näherungswerte und sinnvolle Genauigkeit

- Begriff sinnvolle Genauigkeit: Bei allen Rechnungen mit Näherungswerten muss überlegt werden, ob es sinnvoll ist, alle ermittelten Ziffern im Ergebnis anzugeben.
- Beispiele für sinnlose Genauigkeit
- fachliche Grundlagen:
  - Die Differenz $x - x^*$ zwischen dem **wahren Wert** x einer Größe und einem **Näherungswert** x^* heißt **wahrer Fehler**. Eine obere Schranke A_{x^*} für $|x - x^*|$ heißt **absoluter Fehler** des Näherungswertes. Das Verhältnis $\frac{A_{x^*}}{|x|}$ heißt **relativer Fehler** des Näherungswertes.
  - Eine Ziffer eines Näherungswertes heißt **gültig,** wenn sie mit der entsprechenden Ziffer im wahren Wert übereinstimmt.
  - Eine Ziffer heißt **zuverlässig**, wenn der absolute Fehler kleiner als die Hälfte ihres Stellenwertes ist.
  - **Wesentlich** (geltend, signifikant, tragend) heißen alle Ziffern, die zuverlässig sind, außer den Nullen links von der ersten von Null verschiedenen Ziffer.
  - Angabe der Genauigkeit: explizit oder implizit (Dezimalstellen)

10.6.3 Prinzipien und Methoden zur Angabe von Ergebnissen mit sinnvoller Genauigkeit

(1) Überlegungen zur sinnvollen Genauigkeit sind vor allem bei den meisten ***Sach- und Anwendungsaufgaben*** erforderlich.

(2) Wichtiger als die Anwendung formaler Regeln sind ***inhaltliche Betrachtungen*** zum konkreten Sachverhalt.

(3) Die sinnvolle Genauigkeit eines Ergebnisses hängt ab von

1. der ***Vorgabe der Genauigkeit*** in der Aufgabenstellung oder durch den Lehrer,
2. den Anforderungen an die Genauigkeit, die sich ***aus dem Sachverhalt*** ergeben,
3. der ***Genauigkeit der Ausgangsgrößen*** (vgl. (4)),
4. der ***Güte*** *des* verwendeten mathematischen ***Modells,***
5. der ***Genauigkeit*** des verwendeten ***Rechenhilfsmittels.***

(4) Zur rechnerischen Ermittlung einer sinnvollen Genauigkeit, die sich aus der Genauigkeit der Ausgangsgrößen ergibt, sollten folgende Methoden verwendet werden:

1. Verwenden von Fragezeichen für unbekannte Ziffern

Bsp.: $\underline{3{,}44? \cdot 0{,}78?}$ — Aufgabe: A = 3,44 m · 0,78 m

$$
\begin{array}{r}
2408? \\
2752? \\
+\quad ???? \\
\hline
2{,}6?????
\end{array}
$$

TR-Ergebnis: $A = 2{,}6832\ m^2$

Sinnvolles Ergebnis: $A \approx 2{,}7\ m^2$

2. Methode der Wertschranken

Aufgabe: Bestimme den Flächeninhalt einer Lehrbuchseite mit den Maßen:

a = 17,1 cm b = 24,1 cm.

Lösung mit TR:

$A = a \cdot b$ $A = 17{,}1\ cm \cdot 24{,}1\ cm$ $A = 412{,}11\ cm^2$

Wertschrankenberechnungen:

$17{,}05\ cm \le a < 17{,}15\ cm$

$24{,}05\ cm \le b < 24{,}15\ cm$

$410{,}0525\ cm^2 \le A < 414{,}1725\ cm^2$ oder $410\ cm^2 \le A < 415\ cm^2$

$A = 412{,}1125\ cm^2 \pm 2{,}06\ cm^2$ oder $A = 412{,}5\ cm^2 \pm 2{,}5\ cm^2$

$A \approx 412\ cm^2$, d.h. $411{,}5\ cm^2 \le A < 412{,}5\ cm^2$ oder

$A \approx 410\ cm^2$, d.h. $405\ cm^2 \le A < 415\ cm^2$

sinnvolle Antwort: $A \approx 412\ cm^2$

3. Methode der Fehlerfortpflanzung

Aufgabe: Mit einem LKW sollen 35 gleiche Stahlträger, die eine Masse vom je 286 kg haben, transportiert werden. Wie groß ist die Masse der Ladung?

Lösung mit TR: $35 \cdot 286\ \text{kg} = 10010\ \text{kg} = 10{,}010\ \text{t}$

Fehlerfortpflanzung:

$35 \cdot (286 \pm 0{,}5)\ \text{kg} = 10010\ \text{kg} \pm 35 \cdot 0{,}5\ \text{kg} = (10010 \pm 17{,}5)\ \text{kg}.$

Antwort: $m \approx 10{,}0\ \text{t}$

4. Methode der Ziffernzählung

Regeln:

(1) Bei der ***Addition und Subtraktion*** von Näherungswerten sind im Resultat nur so viele ***Dezimalstellen*** beizubehalten, wie in dem Ausgangswert mit kleinster Anzahl von Dezimalstellen vorhanden sind.

(2) Bei der ***Multiplikation und Division*** von Näherungswerten sollte ***die Gesamtzahl der Ziffern*** im Ergebnis nur so groß sein, wie Ausgangswert mit kleinster Gesamtzahl von Ziffern hat. Dabei werden alle links stehenden Nullen nicht mitgezählt.

Bsp.: $A = 3{,}44\ \text{m} \cdot 0{,}78\ \text{m} = 2{,}6832\ \text{m}^2$

Der Wert 0,78 m hat zwei Ziffern (außer der linken Null), also: $A \approx 2{,}7\ \text{m}^2$

10.6.4 Hinweise zum Einsatz der Verfahren

a) Das ***Verwenden von Fragezeichen*** für unbekannte Ziffern sollte nur zur Motivation verwendet werden, da es mathematisch nicht korrekt ist.

b) Die ***Methode der Wertschranken*** ist nur anwendbar, wenn der Term monoton bezüglich jedes Ausgangswertes ist. Sie ist sehr aufwändig.

c) Die ***Methode der Fehlerfortpflanzung*** ist nur anwendbar, wenn in der Rechnung nur ein Näherungswert auftritt. Sonst sind Mittel der Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher erforderlich (totales Differential als Näherung für absoluten Fehler).

d) Die ***Methode der Ziffernzählung*** sollte als Hauptmethode im Unterricht verwendet werden. Die anderen Methoden sollten vor allem zur Vorgabe einer sinnvollen Genauigkeit durch den Lehrer verwendet werden.

e) Die ***Regeln der Ziffernzählung*** sind mathematisch mit Methoden der Stochastik begründbar.
Sie gelten nur für Rechnungen auf einer Stufe.
Die Regel (2) gilt auch für das Berechnen von Quadrat- und Kubikwurzeln.
Bei Rechnungen mit mehreren Schritten sollten nach Möglichkeit erst das Endergebnis gerundet werden.
Ist ein Runden von Zwischenergebnissen sinnvoll, sollte eine Ziffer mehr beibehalten werden als die Regeln angeben.