Rostock. Math. Kolloq. **49**, 155–162 (1995)

Subject Classification (AMS)
primär 93D20,
sekundär 30C15

F. G. Boese

Stabilität dynamischer Systeme unter Parameterunsicherheit

Gewidmet den Herren Professoren
L. Berg, W. Engel, G. Pazderski *und* H.-W. Stolle.

ABSTRAKT. In den letzten fünfzehn Jahren etwa sind in einem Gebiet der Theorie der Stabiliät dynamischer Systeme bemerkenswerte Fortschritte gemacht worden. Ziel dieses Beitrages ist es, den interessierten mathematischen Nicht-Spezialisten darauf aufmerksam zu machen und eine bestimmte Entwicklungslinie nachzuzeichnen.

SCHLAGWORTE. Dynamische Systeme, asymptotische Stabilität, charakteristische Funktionen, intervallwertige Koeffizienten, Satz von Charitonow, lineare intervallwertige Parameter

1 Problem und Motivation

Von den Anwendungen ausgehend, ist es eher die Regel als die Ausnahme, daß die Dynamik der zu untersuchenden Systeme nur ungenau bekannt ist. Ein eingeschränkter Fall hiervon ist, daß nur Systemparameter unsicher sind. Eine Systemeigenschaft von Wichtigkeit ist die *asymptotische Stabilität* (im Sinne von Ljapunow) des betrachteten Systemzustandes. Im einfachsten Fall wird man (nach Linearisierung) auf die Differentialgleichung mit konstanten reellen Koeffizienten für den skalaren Zustand $x\ :\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ geführt

$$x^{(n)}(t) + a_1(p)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n(p) = 0, \qquad n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Die reellen Koeffizienten $a_k(p)$, $k = 1, \cdots, n$, sind stetige Funktionen eines reellen Parametervektors $p \in \mathbf{P} \subset \mathbf{R}^m$, wobei der Parameterraum $\mathbf{P}$ kompakt ist. Es ist bekannt, daß alle Lösungen von (1) genau dann asymptotisch stabil sind, wenn das zu (1) gehörige *charakteristische Polynom* f_p in der komplexen Variablen z

$$f_p(z) := z^n + a_1(p)z^{n-1} + \cdots + a_n(p), \qquad p \in \mathbf{P}, \qquad z \in \mathbf{C}, \tag{2}$$

ein *Hurwitz-Polynom* ist, d.h., wenn alle seine Nullstellen negativen Realteil besitzen. Im Hinblick auf (1) wird f_p dann *stabil* genannt. Ferner heisst die *Familie* $\mathcal{F}_{\mathbf{P}} := \{f_p : \ p \in \mathbf{P}\}$ von charakteristischen Polynomen *stabil*, falls jedes f_p, $p \in \mathbf{P}$, stabil ist. Das Problem der Entwicklung von *Stabilitätstests* für eine gegebene (nicht notwendigerweise polynomiale) Familie $\mathcal{F}$ von charakteristischen Funktionen ist das folgende:

Finde Unterfamilien $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ möglichst kleiner Mächtigkeit, so daß die Stabiliät von $\mathcal{F}'$ die von $\mathcal{F}$ nach sich zieht. (3)

Je kleiner die Mächtigkeit von $\mathcal{F}'$ ist, je weniger Tests sind auszuführen, um die Frage der Stabilität von $\mathcal{F}$ zu entscheiden.

In Verallgemeinerung der Hurwitz-Stabilität tritt an die Stelle der geforderten Nullstellenfreiheit in der rechten abgeschlossenen Halbebende $\mathbf{H} := \{z \in \mathbf{C} : \ \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$ der komplexen Ebene Nullstellenfreiheit in anderen Mengen $\mathbf{G} \subset \mathbf{C}$. Im Falle der Schur-Stabiliät ist $\mathbf{G}$ beispielsweis das abgeschlossende Äußere $\mathbf{G} := \{z \in \mathbf{C} : \ |z| \geq 1\}$ der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} : \ |z| < 1\}$. Die unterliegenden dynamischen Systeme sind dabei die linearen zeitdiskreten, die auch in der Numerik bedeutsam sind.

2 Der Satz von Charitonow

Im Jahre 1978 wurde von V. L. Charitonow [3] eine Polynomfamilie $\mathcal{F}$ behandelt, die eine Unterfamilie $\mathcal{F}'$ sehr kleiner Mächtigkeit ermöglicht. Es war dieser Satz, der die stürmische Entwicklung in diesem Feld auslöste, nachdem er nach Jahren der Nichtbeachtung Mitte der 80er Jahre einem grossen Kreis bekannt wurde, ja fast zum mathematischen Allgemeingut wurde.

Die betrachtete Familie $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{\mathbf{A}}$ ist die der reellen monischen Polynome mit intervallwertigen Koeffizienten,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathbf{A}} &:= \{f_a : \ a \in \mathbf{A}\}, \\
f_a(z) &:= z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_0, \quad a_k \in [\underline{a}_k, \bar{a}_k], \quad k = 0, 1, \cdots, n-1, \\
a &:= (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}), \\
\mathbf{A} &:= [\underline{a}_0, \bar{a}_0] \times [\underline{a}_1, \bar{a}_1] \times \cdots \times [\underline{a}_{n-1}, \bar{a}_{n-1}], \quad \underline{a}_k \leq \bar{a}_k, \quad k = 0, \cdots, n-1.
\end{aligned} \tag{4}$$

Anstelle der Darstellung von $\mathcal{F}_{\mathbf{A}}$ in (4) mittels Funktionen $f_a(z)$ mit punktwertigen Koeffizienten kann man sich mit Vorteil der Auffassung der Intervallmathematik bedienen. In dieser hat man es mit einer einzigen mengenwertigen Funktion $f_{\mathbf{a}}(z)$, der Intervallerweiterung von $f_a(z)$ bezüglich der Koeffizienten, zu tun,

$$\begin{aligned}
f_{\mathbf{a}}(z) &:= z^n + [\underline{a}_{n-1}, \bar{a}_{n-1}]z^{n-1} + [\underline{a}_{n-2}, \bar{a}_{n-2}]z^{n-2} + \cdots + [\underline{a}_0, \bar{a}_0], \\
\mathbf{a} &:= \left([\underline{a}_0, \bar{a}_0], [\underline{a}_1, \bar{a}_1], \cdots, [\underline{a}_{n-1}, \bar{a}_{n-1}]\right),
\end{aligned} \tag{5}$$

Die Menge $f_{\mathbf{a}}(z) \subset \mathbf{C}$ ist durch die Auswertungsvorschriften

$$[a,b] := \mathrm{conv}(\{a,b\}), \quad w \cdot [a,b] := [wa, wb], \quad \mathbf{A}+\mathbf{B} := \{a+b \in \mathbf{C} : \ a \in \mathbf{A},\, b \in \mathbf{B}\} \qquad (6)$$

wohlbestimmt. Durch conv in (6) wird der Menge $\mathbf{A} \subset \mathbf{C}$ ihre konvexe Hülle $\mathrm{conv}(\mathbf{A}) \subset \mathbf{C}$ zugeordnet. Das zu lösende Problem ist: Wie kann man entscheiden, ob $f_{\mathbf{a}}(z)$ nullstellenfrei in $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ ist? Eine Strategie zur Problemlösung ist in (3) angegeben.

Die Unterfamilie $\mathcal{F}'_{\mathbf{A}}$ wird von vier explizit bekannten Extremalpolynomen gebildet,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'_{\mathbf{A}} &:= \{\, f_{1,1}, f_{1,2}, f_{2,1}, f_{2,2} \,\}, \\
f_{1,1}(z) &:= \underline{a}_0 + \underline{a}_1 z + \bar{a}_2 z^2 + \bar{a}_3 z^3 + \underline{a}_4 z^4 + \cdots, \\
f_{2,1}(z) &:= \bar{a}_0 + \underline{a}_1 z + \underline{a}_2 z^2 + \bar{a}_3 z^3 + \bar{a}_4 z^4 + \cdots, \\
f_{1,2}(z) &:= \underline{a}_0 + \bar{a}_1 z + \bar{a}_2 z^2 + \underline{a}_3 z^3 + \underline{a}_4 z^4 + \cdots, \\
f_{2,2}(z) &:= \bar{a}_0 + \bar{a}_1 z + \underline{a}_2 z^2 + \underline{a}_3 z^3 + \bar{a}_4 z^4 + \cdots.
\end{aligned} \qquad (7)$$

Nach den in (7) angegebenen ersten vier Unter- und Überstreichungen wiederholt sich das angegebene Muster jeweils. Mit den obigen Definitionen von $\mathcal{F}_{\mathbf{A}}$ und $\mathcal{F}'_{\mathbf{A}}$ gilt der

Satz 2.1 (von Charitonow) *$\mathcal{F}_{\mathbf{A}}$ von (4) ist genau dann stabil, wenn $\mathcal{F}'_{\mathbf{A}}$ von (7) stabil ist.*

Es bereitet keine Schwierigkeiten, die vier Polynome aus $\mathcal{F}'_{\mathbf{A}}$, etwa mittels der Routh'schen Kettenbruchentwicklung, auf Stabilität zu testen. Der uspründliche Beweis von Charitonow verwandte den Satz von Hermite-Biehler und ein bekanntes Induktionsargument nach dem Polynomgrad n. Heute sind die Beweise einfacher und von größerer Tragweite und nicht ohne ästhetischen Reiz. Vor einem Beweis werden seine Bausteine vorgestellt.

Lemma 2.2 *Ist $f(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ ein reelles Hurwitz-Polynom, so sind alle Koeffizienten a_k, $k = 0, \cdots, n-1$, positiv. Ferner ist $\arg[f(iy)]$ eine strikt wachsende Funktion in $y \in \mathbf{R}$ mit $\arg[f(0)] = 0$ und $\arg[f(+i\infty)] = n\pi/2$.*

Beide Eigenschaften sind wohlbekannt und folgen unschwer aus der faktorisierter Form von $f(z)$.

Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie holomorpher Funktionen. Als *Wertmenge* von $\mathcal{F}$ im Punkt z des Holomorphiegebietes wird das Bild von $\mathcal{F}$ unter der Auswertungsabbildung $E: \ \mathcal{F} \to \mathbf{C}$,

$$\mathbf{W}(z) := \{\, f(z) : \ f \in \mathcal{F}\,\} \qquad (8)$$

bezeichnet. Für die Spezialisierung $f(z) := f_{\mathbf{a}}(z)$ ist also $\mathbf{W}(z) := f_{\mathbf{a}}(z)$. Im Falle einer parametrischen Familie wie $\mathcal{F}_{\mathbf{A}}$ kann die Wertmenge auch als das Bild des Parameterraumes

$\mathbf{P}$, also des Intervalles $\mathbf{A}$ des Koeffizienten-Parameterraumes $\mathbf{R}^n$ im vorliegenden Fall, in $\mathbf{C}$ angesehen werden. Wie noch zu sehen sein wird, wird $\mathbf{W}(z)$ nur längs des Randes $\partial\mathbf{H}$ der rechten Halbebene $\mathbf{H}$, der imaginären Achse also, benötigt.

Es stellt sich heraus, daß in unserem Falle $\mathbf{W}(iy)$, $y \in \mathbf{R}$, achsenparallele Rechtecke in der komplexen w-Bildebene sind.

Lemma 2.3 *Für $y \geq 0$ gilt*

$$\mathbf{W}(iy) := \operatorname{conv}\left(\{f_{1,1}(iy), f_{2,1}(iy), f_{1,2}(iy), f_{2,2}(iy)\}\right). \tag{9}$$

Beweis: Für $f \in \mathcal{F} := \mathcal{F}_{\mathbf{A}}$ und $y \geq 0$ gilt mit $a_n := 1$ und positiven restlichen Koeffizienten $a_k > 0$

$$\begin{gathered}
\min_{f\in\mathcal{F}} \operatorname{Re}\{f(iy)\} \leq \operatorname{Re}\{f(iy)\} \leq \max_{f\in\mathcal{F}} \operatorname{Re}\{f(iy)\}, \\
\sum_{0\leq 2k\leq n} y^{2k} \min_{\underline{a}_{2k}\leq a_{2k}\leq \bar{a}_{2k}} \operatorname{Re}\{i^{2k}a_{2k}\} \leq \operatorname{Re}\{f(iy)\} \leq \sum_{0\leq 2k\leq n} y^{2k} \max_{\underline{a}_{2k}\leq a_{2k}\leq \bar{a}_{2k}} \operatorname{Re}\{i^{2k}a_{2k}\}, \\
\sum_{0\leq 2k\leq n} y^{2k} \min_{a_{2k}\in\{\underline{a}_{2k},\bar{a}_{2k}\}} (-1)^k a_{2k} \leq \operatorname{Re}\{f(iy)\} \leq \sum_{0\leq 2k\leq n} y^{2k} \max_{a_{2k}\in\{\underline{a}_{2k},\bar{a}_{2k}\}} (-1)^k a_{2k}, \\
\sum_{0\leq 2k\leq n} y^{2k}(-1)^k a_{2k,(k+1)\bmod 2} \leq \operatorname{Re}\{f(iy)\} \leq \sum_{0\leq 2k\leq n} y^{2k}(-1)^k a_{2k,k\bmod 2}, \\
\operatorname{Re}\{f_{1,j}(iy)\} \leq \operatorname{Re}\{f(iy)\} \leq \operatorname{Re}\{f_{2,j}(iy)\}, \qquad j = 1,2.
\end{gathered} \tag{10}$$

In (10) ist $a_{2k,0} := \bar{a}_{2k}$ und $a_{2k,1} := \underline{a}_{2k}$. Für die Imaginärteile gilt die analoge Ungleichung

$$\operatorname{Im}\{f_{j,1}(iy)\} \leq \operatorname{Im}\{f(iy)\} \leq \operatorname{Im}\{f_{j,2}(iy)\}, \qquad j = 1,2. \tag{11}$$

Damit ist $\mathbf{W}(iy)$ als Teilmenge der rechten Seite von (9) erkannt. Ist nun für gegebenes $y \geq 0$ der Punkt $w \in \mathbf{W}(iy)$ gegeben, so lassen sich, wie man (10) entnehmen kann, Koeffizienten a_0 bis a_{n-1} so finden, daß w von der zugehörigen Funktion f_a angenommen wird, $w = f(iy)$. Damit ist die Gleichheit der beiden Mengen in (9) gezeigt. ∎

Unter passenden Voraussetzungen ändert sich die Anzahl der Nullstellen, die eine holomorphe, parameterabhängige Funktion $f_p(z)$ bei Parameteränderung $p \in \mathbf{P}$ in einem Bereich $\mathbf{G}$ hat, nur, wenn Nullstellen durch den Bereichsrand $\partial\mathbf{G}$ hindurchtreten. Das nächste Lemma klärt, unter welchen Vorausssetzungen das so ist.

Von $\mathbf{P}$ wird verlangt:

$\mathbf{P}$ ist eine kompakte, einfach zusammenhängende Menge eines topologischen Hausdorffraumes. (12)

Die Menge $\mathbf{G} \subset \mathbf{C}$ hat die Eigenschaften:

$$\begin{array}{ll} 1^0 & \mathbf{G} \text{ ist einfach zusammenhängend, beschränkt und abgeschlossen,} \\ 2^0 & \text{Die Randkurve } \partial\mathbf{G} \text{ besteht aus endlich vielen stückweise differenzierbaren Kurven.} \end{array} \tag{13}$$

Demnach kann $\partial\mathbf{G}$ höchstens endlich viele Ecken haben.

Von den Funktionen f_p der Familie $\mathcal{F} := \{ f_p(z) : \; p \in \mathbf{P} \}$ wird verlangt:

$$\begin{array}{ll} 1^0 & f_p(z) \text{ ist holomorph bezüglich } z \text{ in } \mathbf{G} \text{ für alle } p \in \mathbf{P}, \\ 2^0 & f_p(z) \text{ ist stetig bezüglich } p \text{ für } p \in \mathbf{P} \text{ für alle } z \in \mathbf{G}. \end{array} \tag{14}$$

Lemma 2.4 *Es sei $\mathcal{F} := \{f_p(z) : \; p \in \mathbf{P}\}$ eine parametrische Familie von in $\mathbf{G}$ holomorphen Funktionen. Dabei erfülle $\mathbf{P}$ (12), $\mathbf{G}$ (13) und die f_p (14). Dann hängt die Anzahl der Nullstellen von f_p in $\mathbf{G}$ nicht von $p \in \mathbf{P}$ ab, falls gilt:*

$$f_p(z) \neq 0 \quad \textit{längs} \quad \partial\mathbf{G} \quad \textit{für alle} \quad p \in \mathbf{P}. \tag{15}$$

Einen Beweis findet man in [2]. Die Stetigkeit von f_p im Parameter p führt über den Satz über die implizite Funktion zur Stetigkeit der Nullstellen in p.

Wie schon im Falle der Hurwitz-Stabilität benötigt man Lemma 2.4 auch für nichtkompakte $\mathbf{G}$. Falls aber die Familie $\mathcal{F}$ nur Nullstellen in einem kompakten Teil von $\mathbf{G}$ hat, genügt es, nur $\mathbf{G}$ wie in (13) zu betrachten.

Beweis zum Satz von Charitonow

Ist $\mathcal{F}_{\mathbf{A}}$ stabil, so ist es auch $\mathcal{F}'_{\mathbf{A}}$, da letztere Familie zur ersteren gehört. Zu zeigen ist, daß auch die Umkehrung gilt. Aus $f_a(z)/z^n \to 1$ für $|z| \to \infty$ für alle $a \in \mathbf{A}$ folgt, daß mögliche Nullstellen von f_a in $\mathbf{H}$ in $\mathbf{H} \cap \mathbf{D}_R$, wobei R in $\mathbf{D}_R := \{z \in \mathbf{C} : \; |z| \leq R\}$ groß genug ist. Wir wählen nun $\mathbf{P} := \mathbf{A}$, $f_p := f_a$, $\mathbf{G} := \mathbf{H} \cap \mathbf{D}_R$ in Lemma 2.4. Ist R genügend groß, so ist (15) auf dem Halbkreis von $\partial\mathbf{H} \cap \mathbf{D}_R$ erfüllt. Wir zeigen, daß (15) auch längs des auf der imaginären Achse liegenden Stückes von $\partial\mathbf{G}$ gilt. Nach Voraussetzung gilt (15) für $f_a \in \mathcal{F}'_{\mathbf{A}}$. Zu zeigen ist dies auch für die restlichen f_a.

Da $f_a(z)$ reelle Funktionen sind, genügt es, $z := iy$, $y \geq 0$, zu wählen. Wir nehmen an, es gäbe ein $y \geq 0$ und eine Kante von $\mathbf{W}(iy)$, die den Ursprung der komplexen w-Bildebene im Inneren enthält. Da das Kantenendpunktpaar durch Hurwitz-Polynome $f_a \in \mathcal{F}'_{\mathbf{A}}$ gebildet

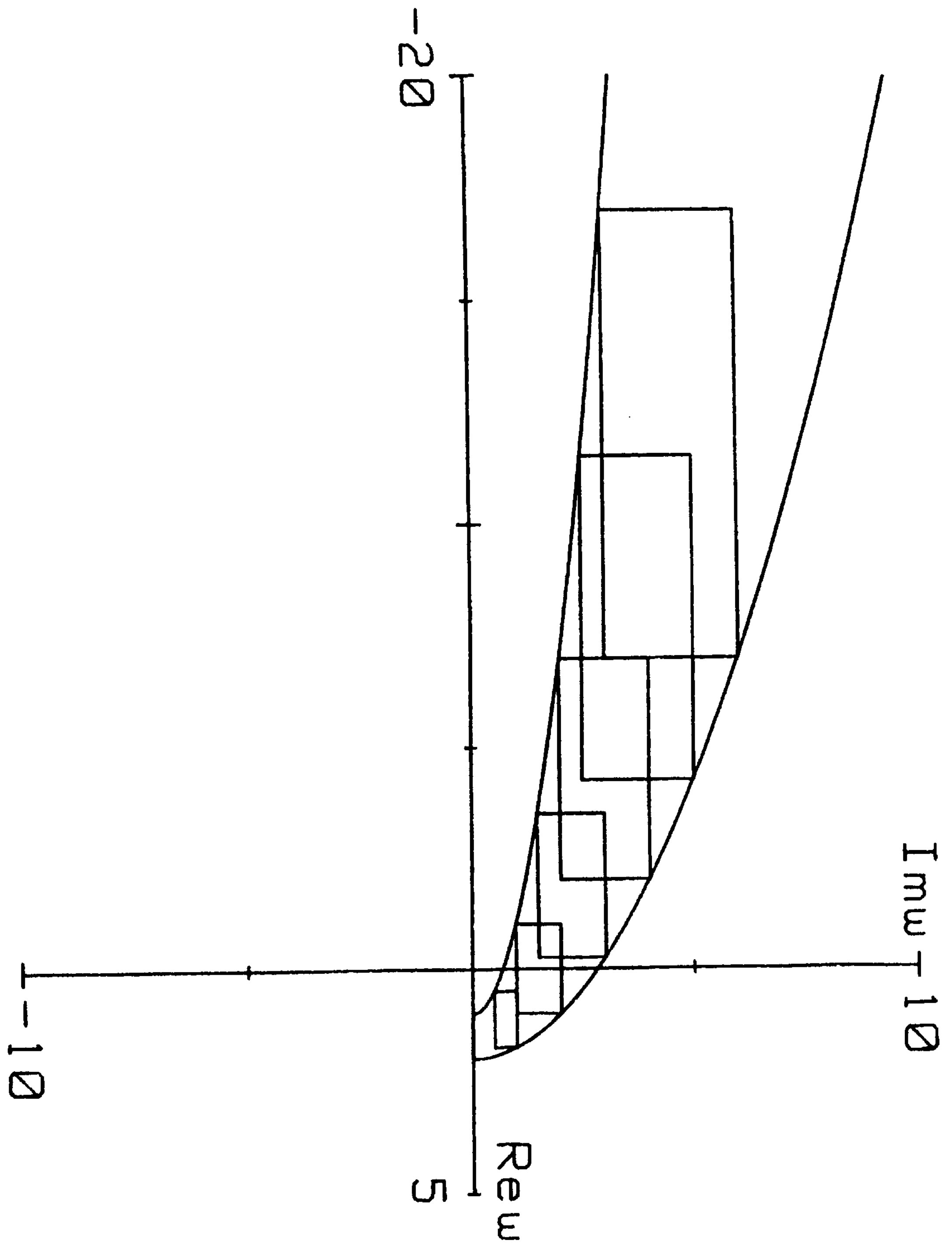

Fig. 1: Die Wertmengen $\mathbf{W}(iy) := [1-2y^2, 2-y^2] \times [iy, 2iy]$ für $y = k/2$, $k = 1(1)6$, für $f_{\mathbf{a}}(z)$ aus (16) nebst der Enveloppe-Parabeln $e_1(y) := 1+iy-2y^2$ und $e_2(y) := 2+i2y-y^2$.

wird, muß nach Lemma 2.2, für $\delta y > 0$ klein genug, die benachbarte Wertmenge $\mathbf{W}(iy + i\delta y)$ eine nicht achsenparallele Kante besitzen. Nach Lemma 2.3 kann das aber nicht sein, da $\partial\mathbf{W}(iy)$ für alle $y \geq 0$ ein achsenparalleles Rechteck ist. Wir müssen daher die Annahme fallen lassen, daß es ein $\mathbf{W}(iy)$ gibt, das den Ursprung $w = 0$ überdeckt. Nach Lemma 2.4 hat $\mathcal{F}_\mathbf{A}$ in $\mathbf{H}$ eine konstante Anzahl von Nullstellen. Da $\mathcal{F}'_\mathbf{A} \subset \mathcal{F}_\mathbf{A}$ stabil ist, ist es auch $\mathcal{F}_\mathbf{A}$.

■

Figur 1 zeigt für

$$f_\mathbf{a}(z) := [1,2] + [1,2]z + [1,2]z^2 \tag{16}$$

die Wertmengen

$$\mathbf{W}(iy) := [1 - 2y^2, 2 - y^2] \times [iy, 2iy] \tag{17}$$

für $y = k/2$, $k = 1(1)6$, in der w-Bildebene. Zusätzlich sind die Enveloppe-Parabeln $e_1(y) := 1 + iy - 2y^2$ und $e_2(y) := 2 + i2y - y^2$ gezeichnet. Ersichtlich überdeckt keine der Wertmengen den Ursprung $w = 0$. Aus der Positiviät der Koeffizientenintervalle in (16) folgt nach dem Hurwitz-Kriterium sofort die Stabiliät von $f_\mathbf{a}$ aus (16). Teilt man in (16) durch das führende Intervall, so erhält $f_\mathbf{a}$ die bisher vorausgesetzte monische Form

$$f_\mathbf{a}(z) := [1/2, 2] + [1/2, 2]z + z^2. \tag{18}$$

Wenn der führende Intervallkoeffizient den Ursprung von $\mathbf{R}$ nicht enthält, kann die Form (5) immer hergestellt werden. In den Fällen niedriger Grade $n < 6$ umfasst $\mathcal{F}'_\mathbf{A}$ weniger als 4 Extremalpolynome. Die Erweiterung auf komplexwertige Intervalle in Form von achsenparallelen Rechtecken in $\mathbf{C}$ wurde ebenfalls von Charitonow [4] vorgenommen,

$$\mathbf{a} := \left([\underline{a}_0, \bar{a}_0] \times i\,[\underline{b}_0, \bar{b}_0], [\underline{a}_1, \bar{a}_1] \times i\,[\underline{b}_1, \bar{b}_1], \cdots, [\underline{a}_{n-1}, \bar{a}_{n-1}] \times i\,[\underline{b}_{n-1}, \bar{b}_{n-1}] \right), \qquad \underline{a}_k \leq \bar{a}_k, \quad \underline{b}_k \leq \bar{b}_k. \tag{19}$$

Hierbei geht die Symmetrie zur imaginären Achse verloren. Das führt zu einem $\mathcal{F}'_\mathbf{A}$ mit 8 anstatt der 4 Extremalpolynomen im reellen Fall. Ist man ausschließlich am Beweis des Satzes von Charitonow interessiert, so läßt sich die Beweisanlage noch straffen.

3 Charakteristische Funktionen mit linearen Parametern

Im allgemeinen Falle von charakteristischen Funktionen mit reellen intervallwertigen linearen Parametern tritt an die Stelle von $f_\mathbf{a}(z)$ aus (5) die Funktion

$$\begin{aligned} f_\mathbf{p}(z) &:= f_0(z) + [\underline{p}_1, \bar{p}_1] f_1(z) + [\underline{p}_2, \bar{p}_2] f_2(z) + \cdots + [\underline{p}_n, \bar{p}_n] f_n(z), \\ \mathbf{p} &:= \Big([\underline{p}_1, \bar{p}_1], [\underline{p}_2, \bar{p}_2], \cdots, [\underline{p}_n, \bar{p}_n] \Big). \end{aligned} \tag{20}$$

Die $f_k(z)$, $k = 0, \cdots, n$ sind holomorph in einer Umgebung von $\mathbf{G}$.

Im generischen Fall ist die Wertmenge $\mathbf{W}(iy)$ zu $f_\mathbf{p}$ aus (20) ein konvexer, zentralsymmetrischer Polygonbereich mit $2n$ Seiten. Von diesem generischen Fall aus beurteilt, sind die im Satz von Charitonow auftretenden achsenparallelen Rechtecke hochgradig degeneriert. Alle in (20) auftretenden n Richtungen $\arg[f_k(iy)]$, $k = 1(1)n$, fallen in die reelle oder die imaginäre Richtung. Wächst $|f_0(z)|$ für $|z| \to \infty$ schneller als die $|f_k(z)|$, $k = 1(1)n$, so ist die Enthaltenseinsrelation $0 \notin \mathbf{W}(iy)$ im Falle der Hurwitz-Stabilität für $|y|$ aus einem beschränkten Intervall zu testen. Der Fall von zu testenden Unterfamilien $\mathcal{F}'$ mit endlicher Mächtigkeit ist eher als Ausnahme anzusehen. Eine eigene Theorie ist entstanden, um solche für die Praxis willkommenen Fälle aufzuspüren.

Buchdarstellungen des Gebietes sind jüngst von Barmish [1] und Kogan [5] vorgelegt worden.

Literatur

[1] **Barmish, R. B.** : *New Tools for Robustness of Linear Systems.* New York 1994

[2] **Boese, F. G.** : *On the stability of interval families of characteristic functions depending linearly on parameters.* J. Math. Anal. Appl. **188**, 2, 472-499 (1994)

[3] **Charitonow, V. L.** : *Über die asymptotische Stabilität der Gleichgewichtslage einer Familie linearer Differentialgleichungen.* Differentsial'nye Uravneniya **14**, 11, 2086-2089 (1978)

[4] **Charitonow, V. L.** : *Über eine Verallgemeinerung des Stabilitätskriteriums.* Isv. Akad. Nauk Kazakh. SSR Ser. Fiz. Mat. **1**, 53-57 (1978)

[5] **Kogan, J.** : *Robust Stability and Convexity.* Lecture Notes in Control and Information Sciences **201**, Berlin 1995

eingegangen: 11. Oktober 1995

Autor: Dr. F. G. Boese
Ganghoferstr. 81
D-81373 München
Germany

e-mail: gub@mpe-garching.mpg.de