Rostock. Math. Kolloq. **49**, 11–24 (1995)

Subject Classification (AMS)
47H10

Manfred Krüppel

Ein asymptotischer Fixpunktsatz für Lipschitz-stetige Operatoren in uniform konvexen Banach-Räumen

Gewidmet den Herren Professoren
L. Berg, W. Engel, G. Pazderski *und* H.-W. Stolle.

ABSTRACT. For every uniformly convex Banach space X and for every $p > 1$ there exists a constant $\gamma_p > 1$ such that holds: If $C \subset X$ is nonempty, bounded closed and convex and $T : C \to C$ is a Lipschitzian mapping such that the Lipschitzian norms $\|T^n\|$ of the iterates T^n fulfil the inequality

$$\varliminf_{n\to\infty} (\|T\|^p + \|T^2\|^p + \ldots + \|T^n\|^p)/n < \gamma_p$$

then T has a fixed point in C. In Hilbert space $\gamma_2 \geq 2$ and in L^p-space with $p \geq 2$ the constant is $\gamma_p \geq 1 + 1/(2^{p-1} - 1)$.

Es sei C eine nichtleere, beschränkte, abgeschlossene und konvexe Teilmenge eines uniform konvexen Banach-Raumes X und $T : C \to C$ eine Lipschitz-stetige Abbildung. Mit $\|T\|$ bezeichnen wir die Lipschitz-Norm von T, d.h., es ist

$$\|T\| = \sup\left(\frac{\|Tx - Ty\|}{\|x - y\|} \; : \; x \neq y\right).$$

In der vorliegenden Arbeit wird das Problem untersucht, welche Bedingungen bzgl. der Lipschitz-Normen $\|T^n\|$ die Existenz eines Fixpunktes von T in C sichern. Unter Verwendung eines neuen Konvexitätsmoduls in uniform konvexen Banach-Räumen und einer Ungleichung für Banach-Limites beweisen wir einen Fixpunktsatz, der mehrere bekannte Fixpunktaussagen als Spezialfälle enthält (vgl. F.E. Browder [3], D. Göhde [7], W.A. Kirk [10], K. Goebel und W.A. Kirk [5], J.B. Baillon [1] und M. Krüppel [13]).

1 Der Konvexitätsmodul $d_p(\varepsilon)$

Der Banach-Raum X heißt uniform konvex, wenn zu jedem ε mit $0 < \varepsilon \le 2$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß für $\|x\| \le 1, \|y\| \le 1$ und $\|x - y\| \ge \varepsilon$

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \le 1 - \delta(\varepsilon)$$

gilt (vgl. G. Köthe [11], S. 353). Beispiele für uniform konvexe Banach-Räume sind die Hilbert-Räume sowie die Räume l^p und L^p für $1 < p < \infty$. Da jeder uniform konvexe Banach-Raum reflexiv ist, sind z.B. der Raum der summierbaren Funktionen L^1 und der Raum der stetigen Funktionen $C[0,1]$ nicht uniform konvex (vgl. G. Köthe [11] und E. Zeidler [17]).

In [13] wurde folgendes gezeigt: Ist X ein uniform konvexer Banach-Raum und p eine reelle Zahl mit $1 < p < \infty$, dann hat die für $0 < \varepsilon \le 2$ definierte Funktion

$$\delta_p(\varepsilon) = \inf \left(\frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2} - \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p \ : \ \|x\| \le 1,\ \|y\| \le 1,\ \|x-y\| \le \varepsilon \right)$$

die folgenden Eigenschaften:

(i) $\delta_p(\varepsilon) > 0$ für $\varepsilon > 0$,

(ii) $\delta_p(\lambda\varepsilon) \le \lambda^p \delta_p(\varepsilon)$ für $0 \le \lambda \le 1$.

(iii) Für beliebige $x, y \in X$ mit $\|x\| \le 1, \|y\| \le 1$ gilt

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p \le \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2} - \delta_p(\|x-y\|).$$

Weiter gilt (vgl. [13]): Für beliebige $x, y \in X$mit $\|x\| \le d$, $\|y\| \le d\,(d > 0)$ und $0 \le t \le 1$ ist

$$\|tx + (1-t)y\|^p \le t\|x\|^p + (1-t)\|y\|^p - 2\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(2^n t)\delta_p\left(\frac{\|x-y\|}{2^n d}\right) d,$$

wobei $\varphi(t)$ gleich dem Abstand des Punktes t vom nächsten ganzzahligen Punkt ist (Sägezahnkurve).

Bemerkung 1 Auf Grund der Parallelogrammgleichung erhält man für den Hilbert-Raum $\delta_2(\varepsilon) = (\varepsilon/2)^2$. In den Räumen l^p und L^p gilt (vgl. [13]):

$$\delta_p(\varepsilon) \ge (2^{p-1} - 1)(\varepsilon/2)^q \quad \text{für } 1 < p \le 2$$

und

$$\delta_p(\varepsilon) \ge (\varepsilon/2)^p \quad \text{für } 2 \le p < \infty,$$

wobei q der zu p konjugierte Exponent ist.

Definition 1 *Es sei p eine reelle Zahl mit $1 < p < \infty$. Für $0 < \varepsilon \leq 2$ definieren wir den Konvexitätsmodul $d_p(\varepsilon)$ durch*

$$d_p(\varepsilon) = \sup\{k(\varepsilon) : k(\varepsilon) \text{ ist konvex und } k(\varepsilon) \leq \delta_p(\varepsilon^{1/p})\}.$$

Auf Grund der Eigenschaften von $\delta_p(\varepsilon)$ und der Tatsache, daß das Supremum einer Menge konvexer Funktionen auch eine konvexe Funktion ist, ergeben sich für den Konvexitätsmodul $d_p(\varepsilon)$ die folgenden Eigenschaften:

(i) $d_p(\varepsilon)$ ist konvex, streng monoton wachsend und stetig für $0 < \varepsilon \leq 2^p$,

(ii) $0 < d_p(\varepsilon) \leq \delta_p(\varepsilon^{1/p})$,

(iii) $d_p(\lambda\varepsilon) \leq \lambda d_p(\varepsilon)$ für $0 \leq \lambda \leq 1$.

(iv) Ist $\|x\| \leq d, \|y\| \leq d$ mit $d > 0$ und $0 \leq t \leq 1$, dann gilt

$$\|tx + (1-t)y\|^p \leq t\|x\|^p + (1-t)\|y\|^p - 2\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(2^n t) d_p\left(\frac{\|x-y\|^p}{2^{np}d^p}\right) d^p.$$

Bemerkung 2 Ist $\delta_p(\varepsilon^{1/p})$ als Funktion von ε konvex, dann ist $d_p(\varepsilon) = \delta_p(\varepsilon^{1/p})$. Dies ist im Hilbert-Raum der Fall. Daher gilt im Hilbert-Raum $d_2(\varepsilon) = \varepsilon/4$. In den Räumen l^p und L^p erhalten wir (vgl. Bemerkung 1)

$$d_p(\varepsilon) \geq \frac{2^{p-1}-1}{2^q}\varepsilon^{q/p} \quad \text{für } 1 < p < 2$$

und

$$d_p(\varepsilon) \geq \frac{\varepsilon}{2^p} \quad \text{für } 2 \leq p < \infty,$$

wobei q wieder den zu p konjugierten Exponenten bezeichnet.

Bemerkung 3 Ist $d(t)$ für $t > 0$ konvex, dann ist auch $f(t) = td(1/t)$ konvex. Hierzu ist für beliebige $t_1, t_2 > 0$ zu zeigen:

$$f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \leq \frac{f(t_1)+f(t_2)}{2}.$$

Da $d(t)$ konvex ist, gilt

$$d(tu + (1-t)v) \leq td(u) + (1-t)d(v)$$

für beliebige $u, v > 0$ und $0 < t < 1$. Setzen wir

$$t = \frac{t_1}{t_1+t_2},\ u = \frac{1}{t_1},\ v = \frac{1}{t_2},$$

so erhalten wir

$$d\left(\frac{2}{t_1+t_2}\right) \le \frac{t_1}{t_1+t_2}\, d\left(\frac{1}{t_1}\right) + \frac{t_2}{t_1+t_2}\, d\left(\frac{1}{t_2}\right)$$

und somit

$$f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) = \frac{t_1+t_2}{2}\, d\left(\frac{2}{t_1+t_2}\right) \le \frac{t_1 d\left(\frac{1}{t_1}\right) + t_2 d\left(\frac{1}{t_2}\right)}{2} = \frac{1}{2}\,[f(t_1)+f(t_2)],$$

d. h., $f(t)$ ist eine konvexe Funktion.

2 Der Banach-Limes

Zum Beweis des Fixpunktsatzes benötigen wir den Begriff des Banach-Limes (vgl. S. Banach [2], L.W. Kantorowitsch und G.P. Akilow [9], M. Krüppel [12], [14] und G.G. Lorentz [15]). Ein Banach-Limes ist ein auf dem Raum der beschränkten reellen Zahlenfolgen (x_n) definiertes lineares Funktional, das mit LIM x_n bezeichnet wird und die folgenden Eigenschaften besitzt:

1°. LIM x_n	$\ge 0,$	falls $x_n \ge 0$ für alle n.
2°. LIM $(ax_n + by_n)$	$= a\,\mathrm{LIM}\, x_n + b\,\mathrm{LIM}\, y_n$	
3°. LIM x_{n+1}	$= \mathrm{LIM}\, x_n$	
4°. LIM x_n	$= 1,$	falls $x_n = 1$ für alle n.

Als Folgerung aus den Eigenschaften 1° bis 4° ergibt sich die weitere Eigenschaft (vgl. [14])

5°. LIM $(x_n y_n)$	$= x_0\,\mathrm{LIM}\; y_n,$	falls $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ist .

Zum Beweis des Fixpunktsatzes im nächsten Abschnitt benötigen wir die folgende Ungleichung für Banach-Limites (vgl. Krüppel [14]): Ist $g(t)$ eine konvexe Funktion, dann gilt für jeden Banach-Limes

$$\mathrm{LIM}\; g(x_n) \ge g(\mathrm{LIM}\; x_n). \tag{1}$$

Diese Ungleichung steht in enger Beziehung zur Jensenchen Ungleichung für konvexe Funktionen (vgl. Natanson [16]).

3 Asymptotische Fixpunktsätze

Satz 1 *Es sei C eine nichtleere, beschränkte abgeschlossene und konvexe Teilmenge des uniform konvexen Banach-Raumes X und $T : C \to C$ eine Lipschitzstetige Abbildung.*

Genügt die Zahl $\gamma_p\,(p>1)$ der Gleichung

$$\frac{1}{\gamma_p} + 4\sum_{n=0}^{\infty} 2^n d_p\left(\frac{1}{2^{np+1}\gamma_p}\right) = 1 \tag{2}$$

und gilt für ein p

$$k_p := \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|T^k\|^p < \gamma_p,$$

dann hat T einen Fixpunkt in C.

Beweis: Ist $k_p < 1$, dann gibt es ein k mit $\|T^k\| < 1$ und T hat nach dem verallgemeinerten Fixpunktsatz von Banach einen Fixpunkt (vgl. z.B. Zeidler [17]).
Im folgenden sei $k_p \geq 1$. Den Beweis des Satzes werden wir in mehreren Schritten führen.

1) Es sei (n_i) eine solche Teilfolge der natürlichen Zahlen, daß

$$k_p = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i} \|T^k\|^p \tag{3}$$

und LIM irgendein Banach-Limes. Es sei u ein festes Element aus C. Für alle x aus C definieren wir

$$r(x) := \operatorname*{LIM}_i \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i} \|x - T^k u\|^p. \tag{4}$$

Offensichtlich ist die Funktion $r(x) \geq 0$. Wir zeigen, daß $r(x)$ stetig und konvex ist.
Stetigkeit: Nach der Dreiecksungleichung ist

$$\|x - T^k u\|^p \leq (\|y - T^k u\| + \|x - y\|)^p.$$

Setzen wir $a = \|y - T^k u\|$ und $b = \|x - y\|$, dann gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung: $(a+b)^p = a^p + bp\xi^{p-1}$ mit einer Zahl $\xi \in (a, a+b)$. Bezeichnet d den Durchmesser der beschränkten Menge C, dann erhalten wir wegen $\xi < a + b \leq 2d$

$$\|x - T^k u\|^p \leq \|y - T^k u\|^p + \|x - y\|)p(2d)^{p-1}.$$

Somit ist

$$\frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i} \|x - T^k u\|^p \leq \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i} \|y - T^k u\|^p + \|x - y\|p(2d)^{p-1}.$$

Auf Grund der Eigenschaften 1° und 2° eines Banach-Limes erhalten wir:

$$r(x) \leq r(y) + \|x - y\|\, p(2d)^{p-1}.$$

Vertauschen wir x und y, so folgt

$$|r(x) - r(y)| \leq p(2d)^{p-1}\|x - y\|,$$

d.h., die Funktion $r(x)$ ist auf C sogar Lipschitz-stetig.
Konvexität: Nach der Dreiecksungleichung und der Jensenschen Summationsungleichung für konvexe Funktionen (vgl. [16], S. 344) gilt für $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned}\|tx + (1-t)y - T^k u\|^p &= \|t(x - T^k u) + (1-t)(y - T^k u)\|^p \\ &\leq (t\|x - T^k u\| + (1-t)\|y - T^k u\|)^p \\ &\leq t\|x - T^k u\|^p + (1-t)\|y - T^k u\|^p.\end{aligned}$$

Durch Summation bekommen wir

$$\frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\|tx + (1-t)y - T^k u\|^p \leq t\frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\|x - T^k u\|^p + (1-t)\frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\|y - T^k u\|^p.$$

Nach den Eigenschaften 1° und 2° eines Banach-Limes ergibt sich

$$r(tx + (1-t)y) \leq tr(x) + (1-t)r(y).$$

Die Funktion $r(x)$ ist also nichtnegativ, stetig und konvex. Auf Grund der Reflexivität des uniform konvexen Banach-Raumes X existiert daher ein $z = z(u) \in C$ mit $r(z) \leq r(x)$ für alle $x \in C$ (vgl. etwa E. Zeidler [17], S. 94).

2) Behauptung: Ist $r(z) = 0$, dann gilt $Tz = z$.

2.1) Zunächst zeigen wir: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n, so daß sowohl $\|z - T^n u\| < \varepsilon$ als auch $\|z - T^{n+1}u\| < \varepsilon$ gilt. Ist dies nämlich nicht der Fall, dann enthält die Menge $M = \{n : \|z - T^n u\| \geq \varepsilon\}$ von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mindestens eine Zahl. Folglich gilt für alle n

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|z - T^k u\|^p \geq \frac{1}{n}\,\frac{n-1}{2}\varepsilon^p.$$

Wir erhalten daher

$$\operatorname*{LIM}_i \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\|z - T^k u\|^p \geq \varliminf_{i\to\infty}\frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\|z - T^k u\|^p \geq \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Dies steht im Widerspruch zu $r(z) = 0$.

2.2) Sei (ε_k) eine streng monoton fallende Nullfolge. Nach 2.1) gibt es zu ε_k ein n_k derart, daß

$$\|z - T^{n_k}u\| < \varepsilon_k \quad \text{und} \quad \|z - T^{n_k+1}u\| < \varepsilon_k$$

gilt. Wegen $\varepsilon_k \to 0$ folgt

$$\lim_{k\to\infty} T^{n_k}u = z \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} T^{n_k+1}u = z.$$

Auf Grund der Stetigkeit von T ist

$$z = \lim_{k\to\infty} T^{n_k+1}u = \lim_{k\to\infty} T(T^{n_k}u) = Tz.$$

Folglich gilt $Tz = z$.

3) Im folgenden sei $r(z) > 0$. Wir zeigen, daß für alle $x \in C$ gilt:

$$\frac{r(z)}{r(x)} + 4\sum_{n=0}^{\infty} 2^n d_p\left(\frac{\|z-x\|^p}{2^{np+1}r(x)}\right) \leq 1. \tag{5}$$

Zum Nachweis gehen wir von der Eigenschaft (iv) der Funktion $d_p(\varepsilon)$ aus. Danach gilt für jedes $x \in C$ und $t \in (0,1)$ die Ungleichung

$$\|tx + (1-t)z - T^k u\|^p \leq t\|x - T^k u\|^p + (1-t)\|z - T^k u\|^p - 2\sum_{n=0}^{m} \varphi(2^n t) d_p\left(\frac{\|z-x\|^p}{2^{np}m_k}\right) m_k,$$

wobei m eine beliebige natürliche Zahl ist und m_k den Bedingungen $\|x - T^k u\|^p \leq m_k$ und $\|z - T^k u\|^p \leq m_k$ genügt. Dies ist sicher erfüllt für $m_k = c(\|x - T^k u\|^p + \|z - T^k u\|^p)$ mit $c = 2r(x)/(r(x)+r(z))$, wobei wir beachten, daß $c \geq 1$ ist wegen $r(x) \geq r(z)$. Summieren wir von $k = 1$ bis $k = n_i$, dividieren durch n_i und bilden dann den Banach-Limes bzgl. i, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Eigenschaften 1° und 2° eines Banach-Limes

$$r(tx + (1-t)z) \leq tr(x) + (1-t)r(z) - \operatorname*{LIM}_i \frac{2}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\sum_{n=0}^{m} \varphi(2^n t) d_p\left(\frac{\|z-x\|^p}{2^{np}m_k}\right) m_k.$$

Vertauschen wir die Reihenfolge der Summationen im letzten Term, dann erhalten wir wegen der Eigenschaft 2° eines Banach-Limes

$$\operatorname*{LIM}_i \frac{2}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\sum_{n=0}^{m} \varphi(2^n t) d_p\left(\frac{\|z-x\|^p}{2^{np}m_k}\right) m_k = \sum_{n=0}^{m} \varphi(2^n t) \operatorname*{LIM}_i \frac{2}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i} d_p\left(\frac{\|z-x\|^p}{2^{np}m_k}\right) m_k.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$M_i = \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i} m_k.$$

Da mit $d_p(\varepsilon)$ auch $f(\varepsilon) = d_p(c/\varepsilon)/\varepsilon$ konvex ist (vgl. Bemerkung 3 in Abschnitt 1), gilt nach der Jensenschen Summationsungleichung

$$\frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i} d_p\left(\frac{\|z-x\|^p}{2^{np}m_k}\right) m_k \geq d_p\left(\frac{\|z-x\|^p}{2^{np}M_i}\right) M_i.$$

Nochmals wegen der Konvexität der Funktion $f(\varepsilon) = d_p(c/\varepsilon)\varepsilon$ gilt nach der Ungleichung (1) für Banach-Limites für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\operatorname*{LIM}_i d_p\left(\frac{\|z-x\|^p}{2^{np}M_i}\right) M_i \geq d_p\left(\frac{\|z-x\|^p}{2^{np}\operatorname*{LIM}_i M_i}\right)\operatorname*{LIM}_i M_i.$$

Wegen $m_k = c(\|x - T^k u\|^p + \|z - T^k u\|^p)$ und der Definition von $r(x)$ ist

$$\operatorname*{LIM}_i M_i = \operatorname*{LIM}_i c\left(\frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\|x - T^k u\|^p + \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\|z - T^k u\|^p\right) = c(r(x) + r(z)).$$

Wegen $c = 2r(x)/(r(x)+r(z))$ ist also LIM $M_i = 2r(x)$. Fassen wir die obigen Ungleichungen zusammen, dann erhalten wir

$$r(tx + (1-t)z) \leq tr(x) + (1-t)r(z) - 2\sum_{n=0}^{m}\varphi(2^n t)d_p\left(\frac{\|z-x\|^p}{2^{np}2r(x)}\right)2r(x).$$

Wegen $r(z) \leq r(tx + (1-t)z)$ folgt

$$tr(z) \leq tr(x) - 4\sum_{n=0}^{m}\varphi(2^n t)d_p\left(\frac{\|z-x\|^p}{2^{np+1}r(x)}\right)r(x).$$

Setzen wir $t = 2^{-m}$, so erhalten wir unter Beachtung von $\varphi(2^{n-m}) = 2^{n-m}$ für $n = 0, 1, \ldots, m$

$$2^{-m}r(z) \leq 2^{-m}r(x) - 4\sum_{n=0}^{m}2^{n-m}d_p\left(\frac{\|z-x\|^p}{2^{np+1}r(x)}\right)r(x).$$

Multiplizieren wir mit $2^m/r(x)$, dann folgt für $m \to \infty$ die Behauptung (5).

4) Für alle $x \in C$ definieren wir die Funktion

$$d(x) := \operatorname*{LIM}_i \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\|x - T^k x\|^p \tag{6}$$

und zeigen, daß die folgenden Ungleichungen gelten:

(i) $\|z - u\| \leq 2d^{1/p}(u)$,

(ii) $d(z) \leq \alpha d(u) \quad (\alpha < 1)$.

Zu (i): Wegen der Dreiecksungleichung und der Konvexität der Funktion t^p für $t > 0$ ist

$$\left(\frac{\|z-u\|^p}{2}\right) \leq \left(\frac{\|z - T^k u\| + \|u - T^k u\|}{2}\right)^p \leq \frac{\|z - T^k u\|^p + \|u - T^k u\|^p}{2},$$

d.h.

$$\|z-u\|^p \leq 2^{p-1}(\|z-T^k u\|^p + \|u-T^k u\|^p).$$

Durch Summation bekommen wir

$$\|z-u\|^p \leq 2^{p-1}\left[\frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\|z-T^k u\|^p + \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\|u-T^k u\|^p\right].$$

Durch Anwendung des Banach-Limes erhalten wir unter Beachtung von $r(z) \leq r(u) = d(u)$

$$\|z-u\|^p \leq 2^{p-1}(r(z)+d(u)) \leq 2^p d(u).$$

Zu (ii): Die Abschätzung (ii) wird sich unmittelbar aus

$$\frac{1}{k_p} + 4\sum_{n=0}^{\infty} 2^n d_p\left(\frac{d(z)}{2^{np+1}k_p r(z)}\right) \leq 1 \tag{7}$$

und der Voraussetzung (2) ergeben. Zum Nachweis dieser Ungleichung zeigen wir zunächst, daß $r(T^k z) \leq \|T^k\|^p r(z)$ für jede natürliche Zahl k gilt. Für $n_i > k$ ist

$$\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\|T^k z - T^j u\|^p \leq \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{k}\|T^k z - T^j u\|^p + \|T^k\|^p \frac{1}{n_i}\sum_{j=k+1}^{n_i}\|z-T^{j-k}u\|^p.$$

Für die letzte Summe können wir auch schreiben:

$$\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i-k}\|z-T^j u\|^p = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\|z-T^j u\|^p - \frac{1}{n_i}\sum_{j=n_i-k+1}^{n_i}\|z-T^j u\|^p.$$

Für $i \to \infty$ streben die beiden Summen

$$\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{k}\|T^k z - T^j u\|^p \quad \text{und} \quad \frac{1}{n_i}\sum_{j=n_i-k+1}^{n_i}\|z-T^j u\|^p$$

gegen 0. Durch Anwendung des Banach-Limes erhalten wir daher die Ungleichung $r(T^k z) \leq \|T^k\|^p r(z)$ (vgl. Definition (4)).
Setzen wir in (5) $x = T^k z$, so erhalten wir unter Beachtung der Monotonie von $d_p(t)$

$$1 + 4\|T^k\|^p \sum_{n=0}^{m} 2^n d_p\left(\frac{\|z-T^k z\|^p}{2^{np+1}\|T^k\|^p r(z)}\right) \leq \|T^k\|^p,$$

wobei m eine beliebige natürliche Zahl ist. Summieren wir von $k=1$ bis $k=n_i$ und dividieren durch n_i, dann erhalten wir nach Vertauschung der Reihenfolge der Summationen

$$1 + 4\sum_{n=0}^{m} 2^n \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\|T^k\|^p d_p\left(\frac{\|z-T^k z\|^p}{2^{np+1}\|T^k\|^p r(z)}\right) \leq s_i, \tag{8}$$

wobei wir zur Abkürzung

$$s_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \|T^k\|^p$$

gesetzt haben. Wegen der Konvexität der Funktion $d_p(t)$ gilt wieder nach der Jensenschen Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n_i} \frac{\|T^k\|^p}{s_i n_i} d_p \left(\frac{\|z - T^k z\|^p}{2^{np+1} \|T^k\|^p r(z)} \right) \geq d_p \left(\sum_{k=1}^{n_i} \frac{1}{s_i n_i} \frac{\|z - T^k z\|^p}{2^{np+1} r(z)} \right).$$

Aus (8) bekommen wir daher

$$\frac{1}{s_i} + 4 \sum_{n=0}^{m} 2^n d_p \left(\frac{1}{2^{np+1} r(z)} \frac{1}{s_i n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \|z - T^k z\|^p \right) \leq 1. \tag{9}$$

Nach (3) ist $\lim s_i = k_p$. Auf Grund der Eigenschaft 5° eines Banach-Limes ist unter Beachtung von (6)

$$\operatorname*{LIM}_i \frac{1}{s_i n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \|z - T^k z\|^p = \frac{1}{k_p} d(z). \tag{10}$$

Wenden wir auf (9) den Banach-Limes an, so erhalten wir unter Berücksichtigung von Satz 1 ($d_p(t)$ ist ja konvex) und (10)

$$\frac{1}{k_p} + 4 \sum_{n=0}^{m} 2^n d_p \left(\frac{d(z)}{2^{np+1} k_p r(z)} \right) \leq 1. \tag{11}$$

Für $m \to \infty$ folgt die Ungleichung (7). Wir betrachten nun die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{k_p} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n d_p \left(\frac{t}{2^{np+1} k_p} \right), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Die Stetigkeit und die strenge Monotonie von $d_p(t)$ überträgt sich auf $f(t)$. Es ist

$$f(0) = \frac{1}{k_p} \leq 1.$$

Nach den Voraussetzungen $k_p < \gamma_p$ und (2) ist $f(1) > 1$. Somit gibt es ein $\alpha < 1$ mit $f(\alpha) = 1$. Aus (11) folgt $d(z) \leq \alpha r(z)$. Wegen $r(z) \leq r(u) = d(u)$ erhalten wir schließlich (ii).

5) Ausgehend von einem beliebigen Punkt $u_0 \in C$ definieren wir eine Folge (u_m) auf folgende Weise: $u_{m+1} = z(u_m), m = 0, 1, 2, \ldots$. Ist $r(u_m) = 0$ für irgendein m, dann ist u_m

nach Punkt 2) ein Fixpunkt von T. Ist dies nicht der Fall, dann gilt nach (i) und (ii) aus Punkt)

$$\|u_{m+1} - u_m\| \leq 2d^{1/p}(u_m) \leq 2(\alpha^{1/p})^m d^{1/p}(u_0).$$

Folglich ist (u_m) eine Cauchy-Folge und somit konvergent gegen einen Punkt $y \in C$. Es ist

$$\|y - T^k y\| \leq \|y - u_m\| + \|u_m - T^k u_m\| + \|T^k u_m - T^k y\|.$$

Wegen der Konvexität der Funktion t^p für $t > 0$ gilt nach der Jensenschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\frac{\|y - T^k y\|^p}{3^p} &\leq \tfrac{1}{3}(\|y - u_m\|^p + \|u_m - T^k u_m\|^p + \|T^k u_m - T^k y\|^p) \\ &\leq \tfrac{1}{3}(1 + \|T^k\|^p)\|y - u_m\|^p + \tfrac{1}{3}\|u_m - T^k u_m\|^p\end{aligned}$$

Durch Summation folgt

$$\frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i} \|y - T^k y\|^p \leq 3^{p-1}\left(1 + \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\|T^k\|^p\right)\|y - z_m\|^p + \frac{3^{p-1}}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\|u_m - T^k u_m\|^p.$$

Durch Anwendung des Banach-Limes erhalten wir

$$d(y) \leq 3^{p-1}(1 + k_p)\|y - u_m\|^p + 3^{p-1} d(u_m).$$

Für $m \to \infty$ folgt $d(y) = 0$, d.h., y ist nach Punkt 2) ein Fixpunkt von T. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Satz 2 *Es sei C eine nichtleere, beschränkte, abgeschlossene und konvexe Teilmenge des uniform konvexen Banach-Raumes X und $T : C \to C$ eine Lipschitzstetige Abbildung. Genügt die Zahl $\gamma_p\,(p > 1)$ der Gleichung*

$$\frac{1}{\gamma_p} + 4\sum_{n=0}^{\infty} 2^n d_p\left(\frac{1}{2^{np+1}\gamma_p}\right) = 1$$

und gilt für ein p

$$k_p = \varliminf_{n\to\infty} \inf_m \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|T^{m+k}\|^p < \gamma_p, \tag{12}$$

dann hat T einen Fixpunkt in C.

Der Beweis verläuft völlig analog dem des vorigen Satzes. Er unterscheidet sich nur in folgendem: Wir betrachten zwei Folgen (n_i) und (m_i) mit $n_i \to \infty$ für $i \to \infty$, so daß statt (3)

$$k_p = \lim_{i\to\infty}\frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\|T^{m_i+k}\|^p$$

ist, und statt (4) setzen wir

$$r(x) = \operatorname*{LIM}_{i} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_i} \|x - T^{m_i+k}\|^p.$$

Ansonsten führen wir die gleiche Schlußweise wie beim Beweis des vorigen Satzes.

Beispiel 1 Im Hilbert-Raum ergibt die Gleichung (2) wegen $d_2(t) = t/4$ für γ_2 den Wert 2. Die hinreichende Fixpunktbedingung (12) lautet

$$\varliminf_{n\to\infty} \inf_{m} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|T^{m+k}\|^2 < 2.$$

Dieses Ergebnis verallgemeinert Fixpunktaussagen von J.B. Baillon [1], E.A. Lifschitz (vgl. [6], S. 36), W. J. Downing, W.O. Ray [4] und M. Krüppel [13].

Beispiel 2 Im Raum L^p mit $2 \leq p < \infty$ erhalten wir unter Beachtung von $d_p(t) \geq t/2^p$ aus (2) für γ_p die Abschätzung

$$\gamma_p \geq 1 + \frac{1}{2^{p-1} - 1}.$$

Unsere Fixpunktbedingung (12) lautet

$$\varliminf_{n\to\infty} \inf_{m} \frac{1}{n} \sum_{k_p=1}^{n} \|T^{m+k}\|^p < 1 + \frac{1}{2^{p-1} - 1}$$

(vgl. Krüppel [13]).

Literatur

[1] **Baillon, J. B.** : *Quelques aspects de la théorie des points fixés dans les espaces de Banach I.* Séminaire d'Analyse Fonctionelle de Í École Polytechnique, VII, 1978-79

[2] **Banach, S.** : *Théorie des opérations linéaires.* Warszawa 1932

[3] **Browder, F. E.** : *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **54**, 1041–1044 (1965)

[4] **Downing, W. J.** und **Ray, W. O.** : *Uniformly Lipschitzian semigroups in Hilbert space.* Canad. Math. Bull. **25**, 210–214 (1982)

[5] **Goebel, K.** und **Kirk, W. A.** : *A fixed point theorem for transformations whose iterates have uniformly Lipschitz constant.* Studia Math. **17**, 135–140 (1973)

[6] **Goebel, K.** und **Reich, S.** : *Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry and Nonexpansive Mappings.* New York 1984

[7] **Göhde, D.** : *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildungen.* Math. Nachr. **30**, 251–258 (1965)

[8] **Goebel, K.** und **Kirk, W. A.** : *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances.* Amer. Math. Monthly **72**, 1004–1006 (1965)

[9] **Kantorowitsch, L. W.** und **Akilow, G. P.** : *Funktionalanalysis in normierten Räumen.* Berlin 1978

[10] **Kirk, W. A.** : *Fixed point theory for nonexpansive mappings.* Proc. Conf. Sherbrooke/Canad. 1980. Lecture Notes in Math. **886**, 484–505 (1981)

[11] **Köthe, G.** : *Topologische lineare Räume.* Berlin 1960

[12] **Krüppel, M.** : *Beiträge zur Theorie der universellen Maße und Integrale.* Diss. B, Univ. Rostock 1977

[13] **Krüppel, M.** : *Ungleichungen für den asymptotischen Radius in uniform konvexen Banach-Räumen mit Anwendung in der Fixpunkttheorie.* Rostock. Math. Kolloq. **48**, 59–74 (1995)

[14] **Krüppel, M.** : *Eine Ungleichung für Banach-Limites beschränkter Zahlenfolgen.* Rostock. Math. Kolloq. **48**, 75–79 (1995)

[15] **Lorenz, G. G. :** *A contribution to the theory of divergent sequences.* Acta Math. **80**, 167–190 (1948)

[16] **Natanson, I. P. :** *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen.* Berlin 1969

[17] **Zeidler, E. :** *Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis I, -Fixpunktsätze-.* Leipzig 1976

eingegangen: 05. Juli 1994

Autor:

Prof. Dr. M. Krüppel
Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
Universitätsplatz 1
18051 Rostock
Deutschland