Rostock. Math. Kolloq. **49**, 127–140 (1995)

Subject Classification (AMS)
65D30, 41A55, 65A10

Raimond Strauss

Numerische Integration von hypersingulären Integralen

Gewidmet den Herren Professoren
L. Berg, W. Engel, G. Pazderski *und* H.-W. Stolle.

Einleitung

Es wird ein Verfahren zur numerischen Integration von Integralen des Hadamardschen Typs

$$\neq\!\!\!\!\!\!\int_a^b \frac{f(t)}{(t-x)^2}\,dt\,, \quad a < x < b \tag{1}$$

angegeben, wobei nur die Kenntnis von Funktionswerten $f(t_i)$ an den Stellen $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ vorausgesetzt wird.

Die Quadraturgewichte werden aus bekannten Gewichten ([6], S. 183f) zur Quadratur von Cauchy-Hauptwert-Integralen gewonnen. Das Verfahren konvergiert unter schwachen Voraussetzungen. Die maximal erreichbare Konvergenzordnung ist $O(N^{-2}\ln N)$ auf jedem Teilintervall $[a_1, b_1] \subset (a, b)$. Sind neben den Funktionswerten auch die Ableitungen $f'(a)$ und $f'(b)$ bekannt, kann man eine Quadratur konstruieren, die auf (a, b) mit der gleichen Ordnung gleichmäßig konvergiert. Die Konvergenzordnung ist nur um den Faktor $\ln N$ schlechter als die maximal mögliche (vgl. [6], [3]). Anstelle der hier verwendeten Ausgangsgewichte für Cauchy-Hauptwert-Integrale kann man auch andere nutzen und durch analoges Vorgehen Quadraturverfahren für Hadamardsche Integrale herleiten, die eine höhere Konvergenzordnung haben. Eine Übertragung auf Integrale

$$\neq\!\!\!\!\!\!\int_a^b \frac{f(t)}{(t-x)^m}\,dt\,, \quad a < x < b \tag{2}$$

mit ganzzahligem $m > 2$ ist möglich und geschieht in einer weiterführenden Arbeit [8].

Vorausgesetzt wird die Hölderstetigkeit der ersten Ableitung von $f(t)$. Sie ist hinreichend für die Existenz des Integrals (1). Der Stetigkeitsmodul einer Funktion $f(t)$ wird mit $\omega(f,\delta)$ bezeichnet.

Für die behandelten Verfahren werden die Quadraturfehler abgeschätzt und die Fehlerordnung mit der optimalen verglichen. Schließlich werden Testrechnungen für die verschiedenen Quadraturen ausgeführt.

Eine Quadraturformel für Hadamardsche Integrale

Man kann das Integral (1) partiell integrieren und erhält (vgl. [5])

$$\int\limits_a^b \frac{f(t)}{(t-x)^2}\,dt = -\left[\frac{f(b)}{(b-x)} - \frac{f(a)}{(a-x)}\right] + \int\limits_a^b \frac{f'(t)}{t-x}\,dt\,. \tag{3}$$

Um den Wert für das gesuchte Hadamard Integral zu ermitteln, muß man das Cauchy-Hauptwert-Integral von $f'(t)$ auf der rechten Seite von (3) berechnen. Die dafür bekannten Methoden ließen sich sofort ausnutzen, wenn anstelle der Funktionswerte $f(t_i)$ an den Stellen $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ die entsprechenden Werte der Ableitung $f'(t_i)$ gegeben wären.

Zunächst wird das Cauchy-Hauptwert-Integral für $f(t)$ betrachtet.

Die Bezeichnungen

$$h_i = t_i - t_{i-1}, \quad \bar{h} = \max_i h_i \quad \text{und} \quad \underline{h} = \min_i h_i$$

werden vereinbart. Die Abhängigkeit der Größen $\bar{h}$ und $\underline{h}$ von N wird nicht gekennzeichnet. Für $N \to \infty$ soll $\bar{h}$ gegen Null gehen. Weiter wird verlangt, daß für jede Zerlegungsfolge der Quotient $\bar{h}/\underline{h}$ beschränkt bleibt, d.h., bei fortgesetzter Verfeinerung ($N \to \infty$) soll eine von N unabhängige Konstante $H > 0$ mit der Eigenschaft

$$\frac{\bar{h}}{\underline{h}} \leq H$$

existieren.

Für $i = 0, 1, \ldots, N$ werden mit

$$\phi_i(t) = \begin{cases} (t - t_{i-1})/h_i & \text{für } a \le t_{i-1} \le t \le t_i \\ (t_{i+1} - t)/h_{i+1} & \text{für } t_i \le t \le t_{i+1} \le b, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die „Dachfunktionen" bezeichnet. Ersetzt man die Funktion $f(t)$ durch die stückweise lineare Interpolation durch die Punkte $(t_i, f(t_i))$, $i = 0, 1, \ldots, N$, so ergibt sich die Quadraturformel

$$\int_a^b \frac{f(t)}{t - x}\, dt = \sum_{i=0}^{N} f(t_i) \int_a^b \frac{\phi_i(t)}{t - x}\, dt + r_N(f, x) = \sum_{i=0}^{N} f(t_i) A_i(x) + r_N(f, x) \tag{4}$$

mit den Gewichten $A_i(x)$ und dem Fehler $r_N(f, x)$.

Für $x \ne t_j$, $j = i-1,\ i,\ i+1$ erhält man die Gewichtsfunktionen $A_i(x)$ als

$$\begin{aligned} A_0(x) &= \frac{t_1 - x}{h_1} \ln \left| \frac{t_1 - x}{t_0 - x} \right| - 1, \\ A_i(x) &= \frac{t_{i+1} - x}{h_{i+1}} \ln \left| \frac{t_{i+1} - x}{t_i - x} \right| - \frac{t_{i-1} - x}{h_i} \ln \left| \frac{t_i - x}{t_{i-1} - x} \right|, \\ A_N(x) &= \frac{x - t_{N-1}}{h_N} \ln \left| \frac{t_N - x}{t_{N-1} - x} \right| + 1 \quad (i = 1, \ldots, N-1). \end{aligned} \tag{5}$$

An den Stellen $x = t_j$, $j = i-1,\ i,\ i+1$ existieren die Grenzwerte der Funktionen $A_i(x)$, $1 \le i \le N-1$:

$$\begin{aligned} A_i(t_{i-1}) &= \frac{h_i + h_{i+1}}{h_{i+1}} \ln \frac{h_i + h_{i+1}}{h_i}, \\ A_i(t_{i+1}) &= \frac{h_i + h_{i+1}}{h_i} \ln \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \\ A_i(t_i) &= \ln \frac{h_{i+1}}{h_i}. \end{aligned}$$

Genauso werden die Werte $A_0(t_1) = -1$ und $A_N(t_{N-1}) = 1$ festgelegt. Für $i = 1, 2, \ldots, N-1$ sind die Funktionen $A_i(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ definiert und beschränkt. Die Gewichtsfunktionen $A_0(x)$ und $A_N(x)$ sind auf jedem Intervall $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, beschränkt.

Hilfssatz 1 *Für $1 \leq i \leq N-1$ sind die Gewichte $A_i(x)$ beschränkt. Die folgenden Abschätzungen sind für jedes $x \in \mathbb{R}$ gültig:*

$$|A_i(x)| \leq A$$

mit

$$A = \max\{2H\ln(2H), 3+2H\}\,.$$

Mit der Parametrisierung $x = t_0 + sh_1$ bzw. $x = t_N - sh_N$, $0 < s \leq 1$, erhält man für die Randgewichte

$$|A_0(x)| \leq \ln\frac{1}{s} + 1 \quad bzw. \quad |A_N(x)| \leq \ln\frac{1}{s} + 1.$$

Beweis: Aus den Grenzwerten ergeben sich die Schranken:

$$\begin{aligned} |A_i(t_{i-1})| &\leq 2H\,|\ln(2H)|\,, \\ |A_i(t_{i+1})| &\leq 2H\left|\ln\frac{H}{2}\right| \quad \text{und} \\ |A_i(t_i)| &\leq |\ln H|\,. \end{aligned}$$

Für jedes x mit $a \leq x \leq t_{i-1}$ bzw. $x \geq t_{i+1}$ und jedes i findet man durch Einsetzen der Funktionen $\phi_i(t)$ die Ungleichung

$$|A_i(x)| = \left|\int_a^b \frac{\phi_i(t)}{t-x}\,dt\right| \leq \sup_{t_{i-1}\leq t\leq t_i}\left|\frac{\phi_i(t)}{t-t_{i-1}}\right| h_i + \frac{1}{h_i}h_{i+1}^2 \leq 1 + H\overline{h}\,.$$

Analog wird für $x \geq t_{i+1}$ vorgegangen.

Für $t_{i-1} < x < t_i$ ist

$$\begin{aligned} |A_i(x)| &= \left|\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \frac{\phi_i(t)-\phi_i(x)}{t-x}\,dt + \phi_i(x)\ln\left|\frac{t_{i+1}-x}{t_{i-1}-x}\right|\right| \\ &\leq \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\phi_i(t)-\phi_i(x)}{t-x}\,dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\phi_i(t)-\phi_i(x)}{t-x}\,dt\right| + \left|\frac{x-t_{i-1}}{h_i}\left(\frac{t_{i+1}-x}{x-t_{i-1}} - 1\right)\right| \\ &\leq 1 + \left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\phi_i(t)-\phi_i(t_i)}{t-x}\,dt\right| + \left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\phi_i(t_i)-\phi_i(x)}{t-x}\,dt\right| + \frac{h_i+h_{i+1}}{h_i} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{h_{i+1}}{h_i} + 1 + \frac{h_{i+1}}{h_i} \leq 3 + 2H \end{aligned}$$

Die beiden letzten Ungleichungen sind offenbar. ■

Der Hilfssatz 1 läßt sich folgendermaßen ergänzen.

Hilfssatz 2 *Für jedes $x \in [a_1, b_1] \subset (a,b)$ ist die Ungleichung*

$$\sum_{i=0}^{N} |A_i(x)| \leq K_1 \ln(N-1)$$

erfüllt. Die Konstante K_1 ist aus den im Beweis angegebenen Ungleichungen (6), (7) *und* (8) *zu ermitteln. Werden in der Summe der Gewichte der erste und der letzte Summand nicht berücksichtigt, erhält man für $x \in [a,b]$*

$$\sum_{i=1}^{N-1} |A_i(x)| \leq K_2 \ln(N-1)$$

mit einer geeigneten Konstante K_2, die der Ungleichung $K_2 \ln(N-1) \geq 4A + 2H \ln(N-1)$ genügt.

Beweis: Es sei $x \in [t_k, t_{k+1}]$ mit $1 \leq k \leq N-2$. Nach Hilfssatz 1 sind die Gewichte $A_j(x)$, $j = k-1, k, k+1, k+2$ durch die Konstante A beschränkt. Im weiteren wird $\sum_{i=k}^{l} = 0$ gesetzt, falls $k > l$ gilt.

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i=0 \\ i\neq k-1,k,k+1,k+2}}^{N} |A_i(x)| &= \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq k-1,k,k+1,k+2}}^{N} \left| \int\!\!\!\!\!\!-_a^b \frac{\phi_i(t)}{t-x}\, dt \right| \\
&\leq \bar{h} \left[\sum_{i=0}^{k-2} \frac{1}{|t_{i+1} - x|} + \sum_{i=k+3}^{N} \frac{1}{|t_{i-1} - x|} \right] \leq \bar{h} \left[\sum_{i=0}^{k-2} \frac{1}{|t_{i+1} - t_k|} + \sum_{i=k+3}^{N} \frac{1}{|t_{i-1} - t_{k+1}|} \right] \\
&\leq \bar{h} \left[\sum_{i=0}^{k-2} \frac{1}{\sum_{j=i+2}^{k} h_j} + \sum_{i=k+3}^{N} \frac{1}{\sum_{j=k+2}^{i-1} h_j} \right] \leq \frac{\bar{h}}{\underline{h}} \left[\sum_{i=0}^{k-2} \frac{1}{k-i-1} + \sum_{i=k+3}^{N} \frac{1}{i-k-2} \right] \\
&\leq 2H \sum_{i=1}^{N-2} \frac{1}{i} \leq 2H \ln(N-1).
\end{aligned}$$

Insgesamt findet man für diesen Fall die Ungleichung

$$\sum_{i=0}^{N} |A_i(x)| \leq 4A + 2H \ln(N-1)\,. \tag{6}$$

Für hinreichend großes N ist $t_1 < a_1$ bzw. $b_1 < t_{N-1}$ und der Beweis ist vollständig.

Der Fall $a_1 < t_1$ und $x \in [a_1, t_1]$, d.h. $x = a + sh_1$, $0 < \dfrac{a_1 - a}{h_1} \le s \le 1$, kann ähnlich behandelt werden:

$$\begin{aligned}
|A_0(x)| + \sum_{i=1}^{N} |A_i(x)| &\le (1-s)(|\ln(1-s)| + |\ln(s)|) + \sum_{i=1}^{N} |A_i(x)| \\
&\le \frac{1}{e} + |\ln \frac{a_1 - a}{h_1}| + 2A + \sum_{i=3}^{N} |A_i(t_1)| \\
&\le \frac{1}{e} + |\ln \frac{a_1 - a}{h_1}| + 2A + H \ln(N-1). \qquad (7)
\end{aligned}$$

Analog findet man für $x \in [t_{N-1}, b_1]$

$$\sum_{i=0}^{N} |A_i(x)| \le \frac{1}{e} + \left|\ln \frac{b - b_1}{h_N}\right| + 2A + H \ln(N-1). \qquad \blacksquare \qquad (8)$$

Den Fehler $r_N(f, x)$ in Gleichung (4) erhält man als Cauchy–Hauptwert–Integral des Interpolationsfehlers. Er ist in verschiedenen Arbeiten angegeben worden ([7], [6], [3]).

Hilfssatz 3 *Wenn $f(t) \in C^{k,\lambda}$, $k \in \{0, 1\}$, $0 < \lambda \le 1$, gilt für den Fehler $r_N(f, x)$ aus* (4)

$$|r_N(f, x)| \le c_k N^{-(k+\lambda)} \ln N \qquad \textit{für jedes} \quad x \in (a, b)\,.$$

Die Konstanten c_0 und c_1 sind von N unabhängig.

Bemerkung 4 Die Ordnung in Hilfssatz 3 läßt sich nicht verbessern. Die maximale Konvergenzordnung $N^{-2} \ln N$ wird für $f(t) \in C^{1,1}$ erreicht. Diethelm hat in [3] für $f(t) \in C^k$, $k \in \{1, 2\}$, die im Hilfssatz 3 auftretenden Konstanten c_k asymptotisch scharf angegeben.

Jetzt wird das Cauchy-Hauptwert-Integral über $f'(t)$ aus (3) behandelt. Bezeichnet $Q_i(t)$ für $i = 1, \ldots, N-1$ die Parabel durch die Punkte $(t_{i-1}, f(t_{i-1}))$, $(t_i, f(t_i))$ und $(t_{i+1}, f(t_{i+1}))$, so werden die Werte $f'(t_i)$ durch $f_i' = Q_i'(t_i)$ approximiert. Weiter wird $f_0' = Q_1'(t_0)$ und $f_N' = Q_{N-1}'(t_n)$ gesetzt. Im einzelnen erhält man für $i = 1, 2, \ldots, N-1$

$$f_i' = \frac{1}{h_i h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} \left[-h_{i+1}^2 f(t_{i-1}) + (h_{i+1}^2 - h_i^2) f(t_i) + h_i^2 f(t_{i+1})\right] , \qquad (9)$$

für $i = 0$

$$f_0' = \frac{1}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)} \left[-h_2(2h_1 + h_2) f(t_0) + (h_1 + h_2)^2 f(t_1) - h_1^2 f(t_2) \right] \tag{10}$$

und $i = N$

$$\begin{aligned} f_N' &= \frac{1}{h_{N-1} h_N (h_{N-1} + h_N)} [h_N^2 f(t_{N-2}) \\ &- (h_{N-1} + h_N)^2 f(t_{N-1}) + h_{N-1}(h_{N-1} + 2h_N) f(t_N)] \,. \end{aligned} \tag{11}$$

Ferner wird der Fehler der numerischen Differentiation (9), (10) und (11) benötigt:

Hilfssatz 5 *Sei $f(t) \in C^{k+1}$ für $k \in \{0, 1\}$, dann gelten für $i = 0, \ldots, N$ die Ungleichungen*

$$|f'(t_i) - f_i'| \le C_k h^k \omega(f^{(k+1)}, h)$$

mit $C_0 = 1 + H$ und $C_1 = 2$.

Beweis: Für $f(t) \in C^1$ existieren Punkte $\xi_1 \in (t_0, t_1)$ und $\xi_2 \in (t_1, t_2)$ mit

$$\begin{aligned} |f'(t_0) - f_0'| &= \left| f'(t_0) + \frac{h_1}{h_1 + h_2} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h_2} - \frac{2h_1 + h_2}{h_1 + h_2} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_1} \right| \\ &= \left| f'(t_0) + \frac{h_1}{h_1 + h_2} f'(\xi_2) - \frac{2h_1 + h_2}{h_1 + h_2} f'(\xi_1) \right| \\ &\le |f'(t_0) - f'(\xi_1)| + \frac{h_1}{h_1 + h_2} |f'(\xi_2) - f'(\xi_1)| \\ &\le \omega(f', \overline{h}) + \frac{H}{2} \omega(f', 2\overline{h}) \le (1 + H) \omega(f', \overline{h}) \,. \end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$|f'(t_N) - f_N'| \le (1 + H)\, \omega(f', \overline{h})$$

und für $1 \le i \le N-1$

$$|f'(t_i) - f_i'| \le H \omega(f', \overline{h}) \,.$$

Im Falle $f(t) \in C^2$ wird für $t_{i-1} \le t \le t_{i+1}$ die Parabel $Q_i(t)$ betrachtet. Bezeichnet x^* eine Nullstelle von $f'(t) - Q_i'(t)$ und x^{**} die Nullstelle von $f''(t) - Q_i''(t)$, so gilt für jedes

$t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$ die Darstellung

$$\begin{aligned}
|f'(t) - Q_i'(t)| &= \left| \int_{x^*}^{t} (f''(s) - Q_i''(s))\, ds \right| \\
&\leq |t - x^*| \max_{s\in[x^*,t]} |f''(s) - Q_i''(s)| \\
&\leq |t - x^*| \max_{s\in[x^*,t]} (|f''(s) - f''(x^{**})| + |Q_i''(s) - Q_i''(x^{**})|) \\
&\leq 2\overline{h}\omega(f'', \overline{h}).
\end{aligned}$$

■

Mit den Gewichten $A_i(x)$ aus (5) erhält man aus (3) und (4)

$$\int\!\!\!\!\!\!=_a^b \frac{f(t)}{(t-x)^2}\, dt = -\left[\frac{f(b)}{(b-x)} - \frac{f(a)}{(a-x)}\right] + \sum_{i=0}^{N} f'(t_i) A_i(x) + r_N(f', x)\,.$$

Da nur die Kenntnis der Funktionswerte $f(t_i)$ vorausgesetzt wird, werden die $f'(t_i)$ durch die Werte f_i' aus (9), (10) und (11) ersetzt:

$$\int\!\!\!\!\!\!=_a^b \frac{f(t)}{(t-x)^2}\, dt = -\left[\frac{f(b)}{(b-x)} - \frac{f(a)}{(a-x)}\right] + \sum_{i=0}^{N} f_i' A_i(x) + R_N(f, x)\,. \qquad (12)$$

Es werden die Vektoren $\underline{f} = (f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_N))^T$, $\underline{f}' = (f_0', f_1', \ldots, f_N')^T$, $\underline{a} = (A_0, A_1, \ldots, A_N)^T$ und $\underline{b} = (B_0, B_1, \ldots, B_N)^T$ und die Matrix $D = (d_{ij})_0^N$ mit den Elementen

$$d_{00} = \frac{-(2h_1 + h_2)}{h_1(h_1 + h_2)} + \frac{1}{a - x}\,, \qquad d_{01} = \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2}\,, \qquad d_{02} = \frac{-h_1}{h_2(h_1 + h_2)}\,,$$

$$d_{i,i-1} = \frac{-h_{i+1}}{h_i(h_i + h_{i+1})}\,, \qquad d_{i,i} = \frac{h_{i+1} - h_i}{h_i h_{i+1}}\,, \qquad d_{i,i+1} = \frac{h_i}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})}$$

für $1 \leq i \leq N-1$,

$$d_{N,N-2} = \frac{h_N}{h_{N-1}(h_{N-1} + h_N)}\,, \qquad d_{N,N-1} = -\frac{h_{N-1} + h_N}{h_{N-1} h_N}\,,$$

$$d_{N,N} = \frac{h_{N-1} + 2h_N}{h_N(h_{N-1} + h_N)} - \frac{1}{b - x}\,, \quad d_{i,j} = 0 \quad \text{sonst}$$

eingeführt. Dann ist für

$$\underline{b} = D^T \underline{a}$$

die folgende Gleichung erfüllt:

$$-\left[\frac{f(b)}{(b-x)} - \frac{f(a)}{(a-x)}\right] + \sum_{i=0}^{N} f_i' A_i(x) = \sum_{i=0}^{N} f(t_i) B_i(x)\,. \tag{13}$$

Die Gleichung (12) wird zu

$$\displaystyle{=}\!\!\!\!\!\!\int_a^b \frac{f(t)}{(t-x)^2}\,dt = \sum_{i=0}^{N} f(t_i) B_i(x) + R_N(f,x)\,. \tag{14}$$

Für den Fehler $R_N(f,x)$ gilt wegen Hilfssatz 2 die Abschätzung:

$$\begin{aligned} |R_N(f,x)| &= \left| \displaystyle{=}\!\!\!\!\!\!\int_a^b \frac{f(t)}{(t-x)^2}\,dt - \sum_{i=0}^{N} f(t_i) B_i(x) \right| = \left| \displaystyle{-}\!\!\!\!\!\!\int_a^b \frac{f'(t)}{t-x}\,dt - \sum_{i=0}^{N} f_i' A_i(x) \right| \\ &\leq \left| \displaystyle{-}\!\!\!\!\!\!\int_a^b \frac{f'(t)}{t-x}\,dt - \sum_{i=0}^{N} f'(t_i) A_i(x) \right| + \max_i \{|f'(t_i) - f_i'|\} \sum_{i=0}^{N} |A_i(x)| \qquad (15) \\ &\leq \left| r_N(f', \overline{h}) \right| + \max_i \{|f'(t_i) - f_i'|\} K_1 ln(N-1)\,. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit den Hilfssätzen 3 und 5

Satz 6 *Für $a < a_1 \leq x \leq b_1 < b$, $f \in C^{k+1,\lambda}$ mit $k \in \{0,1\}$, $0 < \lambda \leq 1$ gilt für den Fehler der Quadraturformel* (14) *die Abschätzung*

$$|R_N(f,x)| \leq (c_k + K_1 C_k)\; \overline{h}^{k+\lambda} \ln N$$

mit den Konstanten c_k aus Hilfssatz 3*, K_1 aus Hilfssatz* 2 *und C_k aus Hilfssatz* 5.

Verwendet man äquidistante Stützstellen $t_i = a + ih$ mit $h = (b-a)/N$, dann vereinfachen sich die f_i' aus (9), (10) und (11) zu

$$f_i' = \frac{1}{2h}(f(t_{i+1}) - f(t_{i-1})) \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, N-1,$$

$$f_0' = \frac{1}{2h}(-3f(t_0) + 4f(t_1) - f(t_2)) \quad \text{und}$$

$$f_N' = \frac{1}{2h}(f(t_{N-2}) - 4f(t_{N-1}) + 3f(t_N)).$$

Für diesen Fall sollen die Gewichte $B_i(x)$ für $0 \le i \le N$ explizit angegeben werden:

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= \frac{1}{2h}(-3A_0(x) - A_1(x) + \frac{2h}{a-x}) \\
B_1(x) &= \frac{1}{2h}(4A_0(x) - A_2(x)) \\
B_2(x) &= \frac{1}{2h}(-A_0(x) + A_1(x) - A_3(x)) \\
B_i(x) &= \frac{1}{2h}(A_{i-1}(x) - A_{i+1}(x)) \quad \text{für} \quad 3 \le i \le N-3 \\
B_{N-2}(x) &= \frac{1}{2h}(A_{N-3}(x) - A_{N-1}(x) + A_N(x)) \\
B_{N-1}(x) &= \frac{1}{2h}(A_{N-2}(x) - 4A_N(x)) \\
B_N(x) &= \frac{1}{2h}(A_{N-1}(x) + 3A_N(x) - \frac{2h}{b-x})).
\end{aligned} \tag{16}$$

Bemerkung 7 Aus [6], S. 185, Theorem 4 erkennt man, daß für $f(t) \in C^{r+m-1,\lambda}$ die maximal erreichbare (optimale) Konvergenzordnung einer Quadratur mit $N+1$ Stützstellen für das hypersinguläre Integral $⨎_a^b \frac{f(t)}{(t-x)^m}\,dt$, $a < x < b$, $m > 1$, von der Ordnung $O(1/N^{r+\lambda})$ ist. Ein Vergleich dieser Aussage mit Satz 6 zeigt den Verlust der Ordnung $O(\ln N)$.

Bemerkung 8 Wenn die Werte $f'(a)$ und $f'(b)$ zur Verfügung stehen, kann man das Verfahren so modifizieren, daß es nicht nur in jedem abgeschlossenen Teilintervall $[a_1, b_1]$ von (a, b), sondern auch in (a, b) mit gleicher Konvergenzordnung konvergiert. Ausgehend von (12) erhält man wegen $f'(t_0) = f_0'$ und $f'(t_N) = f_N'$ unter Berücksichtigung von der zu (13) analogen Bedingung

$$-\left[\frac{f(b)}{(b-x)} - \frac{f(a)}{(a-x)}\right] + \sum_{i=1}^{N-1} f_i' A_i(x) = \sum_{i=0}^{N} f(t_i) B_i(x)$$

die Quadraturformel

$$⨎_a^b \frac{f(t)}{(t-x)^2}\,dt = f'(a)A_0(x) + f'(b)A_N(x) \tag{17}$$

$$+ \sum_{i=0}^{N} f_i B_i(x) + R_N(f, x).$$

Die Gewichte berechnen sich jetzt nach

$$
\begin{aligned}
B_0(x) &= \frac{1}{2h}(-A_1(x) + \frac{2h}{a-x}) \\
B_1(x) &= \frac{1}{2h}(-A_2(x)) \\
B_i(x) &= \frac{1}{2h}(A_{i-1}(x) - A_{i+1}(x)) \quad \text{für} \quad 2 \le i \le N-2 \\
B_{N-1}(x) &= \frac{1}{2h}A_{N-2}(x) \\
B_N(x) &= \frac{1}{2h}(A_{N-1}(x) - \frac{2h}{b-x}).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

In der Fehlerdarstellung (15) entfallen wegen $f'(t_0) = f_0'$ und $f'(t_N) = f_N'$ der erste und der letzte Summand. Man erhält die Ungleichung

$$
|R_N(f,x)| \le |r_N(f',x)| + \max_i |f'(t_i) - f_i'| \sum_{i=1}^{N-1} |A_i(x)|. \tag{19}
$$

Nach Hilfssatz 1 sind alle Gewichte $A_i(x)$, $1 \le i \le N-1$, im Intervall $[a,b]$ beschränkt. Daraus folgt die Konvergenz des modifizierten Verfahrens mit gleicher Konvergenzordnung auf dem Intervall (a,b). Das Randverhalten des hypersingulären Integrals wird durch die angegebene Formel exakt widergespiegelt.

Beispielrechnungen

Es werden Beispielrechnungen vorgestellt, die die oben angegebenen Abschätzungen praktisch bestätigen. Die zweite und die dritte Spalte der Tabellen enthalten die Fehler der Quadraturformel (14) mit den Gewichten (16) und der Quadraturformel (17) aus Bemerkung 8 mit den Gewichten (18). Im ersten Beispiel, das in [2] ebenfalls berechnet wurde, ist ein gewöhnliches Integral als Hadamardsches Integral geschrieben und dann numerisch berechnet worden. Das Beispiel 5 zeigt als einziges bessere Resultate in der zweiten Spalte als in der ersten. Hier wirkt sich die gleichmäßige Konvergenz des zweiten Verfahrens aufgrund der verwendeten exakten Werte $f'(a)$ und $f'(b)$ aus. Im 6. Beispiel wurde ein uneigentliches Integral berechnet. Da die Singularität ($x = 0$) an der unteren Grenze des Intervalls liegt und somit $A_0(0)$ nicht existiert, mußte das Integrationsintervall dort vergrößert werden. Die Wahl von $a = -0,1$ als untere Grenze ist willkürlich.

Beispiel 1

$$
\neq\!\!\!\!\int_0^1 \frac{(t-0,2)^3}{(t-0,2)^2}\,dt = 0,3
$$

N	Quadratur (14)	Quadratur (17)
45	0,0010916022	0,0010484255
90	0,0002646182	0,0002593515
180	0,0000651559	0,0000645054
360	0,0000161663	0,0000160855

Beispiel 2

$$\fint_{-1}^{1} \frac{(1,21 - t^2)^{-\frac{1}{2}}}{(t - 0,25)^2}\, dt = -0,89562283$$

N	Quadratur (14)	Quadratur (17)
45	0,213472745	0,13842829
90	0,04729129	0,03928024
180	0,01151341	0,01052917
360	0,002860037	0,00273817

Beispiel 3

$$\fint_{0}^{1} \frac{t^6}{t - \frac{1}{2}}\, dt = \fint_{0}^{1} \frac{t^6 (t - \frac{1}{2})}{(t - \frac{1}{2})^2}\, dt = 0,4\bar{3}$$

N	Quadratur (14)	Quadratur (17)
45	0,0102968314	0,0108143596
90	0,0026823830	0,0027489929
180	0,0006823664	0,0006908153
360	0,0001720917	0,0001731555

Beispiel 4

$$\fint_{0}^{1} \frac{t^6}{(t - \frac{1}{2})^2}\, dt = 1,2$$

N	Quadratur (14)	Quadratur (17)
45	0,0116577349	0,0120815182
90	0,0030126239	0,0030665368
180	0,0007623189	0,0007691175
360	0,0001917366	0,0001925902

Beispiel 5

$$\int_0^1 \frac{t^6}{(t-0,999999999)^2}\,dt = -1000000110,62385$$

N	**Quadratur (14)**	**Quadratur (17)**
45	0,2452501174	0,0537552676
90	0,0573006670	0,0160168610
180	0,0130679748	0,0046476019
360	0,0029215371	0,00013225671

Beispiel 6

$$\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\,dt = \int_{-0,1}^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt \quad \text{mit} \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ t^{\frac{5}{2}} & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

N	**Quadratur (14)**	**Quadratur (17)**
45	0,0084331287	0,0084377737
90	0,0030551119	0,0030556874
180	0,0010135985	0,0010136701
360	0,0002943699	0,0002943789

Literatur

[1] **Delbourgo, D.** und **Elliott, D.** : *On the approximate evaluation of Hadamard finite-part integrals.* IMA J. Numer. Anal. **14**, 485-500 (1994)

[2] **Delbourgo, D.** : *On the numerical evaluation of Hadamard finite-part integrals.* B.Sc. (Hons) Thesis, Mathematics Department, University of Tasmania 1994

[3] **Diethelm, K.** : *Asymptotically sharp error bounds for a quadrature rule for Cauchy Principal Value Integrals based on piecewise linear interpolation.* Hildesheimer Informatikberichte 19/94 (1994)

[4] **Linz, P.** : *On the approximate computation of certain strongly singular integrals.* Computing **35**, 345-353 (1985)

[5] **Monegato, G.** : *Numerical evaluation of hypersingular integrals.* J. Comp. Appl. Math. **50**, 9-31 (1994)

[6] **Stolle, H.-W.** und **Strauß, R.** : *On the numerical integration of certain singular integrals.* Computing **48**, 177-189 (1992)

[7] **Strauß, R.** : *Eine Interpolationsquadratur für Cauchy-Hauptwert-Integrale.* Rostock. Math. Kolloq. **22**, 57-63 (1983)

[8] **Strauß, R.** : *Quadratur von Hadamardschen Integralen ganzzahliger Ordnung.* (in Vorbereitung)

[9] **Volkov, E. A.** : *Numerical Methods.* Moscow 1986

eingegangen: 15. September 1995

Autor:

Dr. R. Strauß
Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
Universitätsplatz 1
18051 Rostock
Deutschland