Rostock. Math. Kolloq. **53**, 111–123 (1999)

Subject Classification (AMS)
93A25, 93C62, 94A12

Holger Boche

Stabilitätsverhalten der kausalen Variante des idealen Tiefpasses

ABSTRACT. In this paper the behaviour of the causal variant of the ideal low-pass is investigated. It is shown that this system is not stable with respect to the energy norm. A construction of an input signal with finite energy is given in the paper such that the output signal has an infinite energy. This result solves a problem proposed by Professor Mathis.

1 Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird das Stabilitätsverhalten der kausalen Variante des idealen Tiefpasses untersucht. Der ideale Tiefpaß ist ein energetisch stabiles System, d.h., die Energie des Ausgangssignals des idealen Tiefpasses ist stets kleiner oder gleich der Energie des Eingangssignals. Es wird in der Arbeit gezeigt, daß die kausale Variante des idealen Tiefpasses bezüglich der energetischen Norm instabil ist. Es wird ein Eingangssignal mit endlicher Energie angegeben, so daß der entsprechende Ausgang der kausalen Variante des idealen Tiefpasses eine unendliche Energie besitzt. Dieses System wird im weiteren mit T_+ bezeichnet. Natürlich besitzt die Impulsantwort h_+ des Systems T_+ eine endliche Energie. Es ist deshalb interessant, daß bestimmte Ausgangssignale eine unendliche Energie besitzen. Die Resultate der Arbeit zeigen, daß durch den Übergang von nicht kausalen energetisch stabilen Systemen zu ihren kausalen Varianten energetisch instabile Systeme entstehen können.

Im Abschnitt 2 der Arbeit werden die notwendigen Begriffe eingeführt. Im Abschnitt 3 wird das Verhalten des idealen Tiefpasses und seiner kausalen Variante untersucht. Die Arbeit endet mit einer Diskussion der Resultate.

2 Begriffe

Als erstes werden wichtige Signalräume eingeführt. Mit l^2 wird der Signalraum aller Signale x bezeichnet, für welche die Beziehung

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{1}$$

gilt. Die Signale $x \in l^2$ werden als Signale mit endlicher Energie bezeichnet. Es sei l^2_+ der Signalraum aller Signale x mit endlicher Energie, für welche die Beziehung $x(k) = 0$ für $k < 0$ gilt.

Weiterhin wird der Signalraum l^∞ aller beschränkten Signale eingeführt. Für ein Signal $x \in l^\infty$ gilt somit die Beziehung

$$\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |x(k)| \ . \tag{2}$$

Ein Signal x mit endlicher Energie gehört stets zum Signalraum l^∞, jedoch gilt im allgemeinen die Umkehrung dieser Aussage nicht. Man hat also $l^2 \subset l^\infty$.

In der weiteren Arbeit werden zeitdiskrete zeitinvariante lineare Systeme (LTI-Systeme) untersucht. Ein solches System S heißt energetisch stabil, wenn eine positive Zahl C_1 existiert, so daß für alle Eingangssignale x mit endlicher Energie die Beziehung

$$\|Sx\|_2 \leq C_1 \cdot \|x\|_2 \tag{3}$$

gilt. Die Energie des Ausgangssignals Sx ist somit kleiner oder gleich der Energie des Eingangssignals, multipliziert mit der Konstanten C_1. Das Input-Output-Verhalten eines energetisch stabilen LTI-Systems S ist stets durch die übliche Faltungssumme

$$y(k) = (Sx)(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k-l)x(l) \tag{4}$$

gegeben. Hierbei ist h die Impulsantwort des Systems S. Diese Tatsache gilt nicht für beliebige BIBO-stabile (bounded-input bounded-output) lineare Systeme. Ein solches System ist im allgemeinen nicht eindeutig durch seine Impulsantwort bestimmt ([1], [2], [3], [13]). Die Beschränkung auf energetisch stabile Systeme stellt somit tatsächlich eine Einschränkung der zulässigen Systeme dar.

Ein LTI-System S heißt kausal, wenn für alle Signale $x_1, x_2 \in l^2$, für welche $x_1(l) = x_2(l)$ für $l \leq n$ gilt, ebenfalls die Beziehung

$$(Sx_1)(k) = (Sx_2)(k) \tag{5}$$

für $k \leq n$ erfüllt ist. Ein System der Form (4) mit einer Impulsantwort $h \in l^2$ ist genau dann kausal, wenn für die Impulsantwort h die Beziehung $h(k) = 0$ für $k < 0$ gilt.

Im weiteren wird der ideale Tiefpaß untersucht. Er besitzt für die digitale Signalverarbeitung eine große Bedeutung ([4], [5], [11], [12], [14]). Dazu sei $0 < \omega_g < \pi$ eine feste Grenzfrequenz. Die Impulsantwort des idealen Tiefpasses ist durch

$$h_{\omega_g}(k) = \begin{cases} \frac{\sin \omega_g k}{\pi k}, & k \neq 0, \\ \\ \frac{\omega_g}{\pi}, & k = 0, \end{cases} \tag{6}$$

gegeben. Hierbei ist $\sqrt{-1} = j$. Da ω_g eine feste Grenzfrequenz ist, kann im weiteren $h = h_{\omega_g}$ gesetzt werden. Damit gilt für das Input-Output-Verhalten des idealen Tiefpasses T die Darstellung

$$(Tx)(k) = \sum_{l=-\infty; l \neq 0}^{\infty} \frac{\sin \omega_g l}{\pi l} x(k-l) + \frac{\omega_g}{\pi} x(k) \; . \tag{7}$$

Der Frequenzgang H des idealen Tiefpasses ist durch

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \omega_g, \\ \frac{1}{2}, & |\Omega| = \omega_g, \\ 0, & \omega_g < |\Omega| \leq \pi, \end{cases} \tag{8}$$

gegeben ([6], [7]). Aufgrund der Darstellung (8) kann der ideale Tiefpaß T kein kausales System sein. Aus (8) kann ebenfalls sofort auf das energetische Verhalten des idealen Tiefpasses T geschlossen werden. Es gilt für alle Signale $x \in l^2$

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |y(k)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Y(e^{j\Omega})|^2 \, d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\Omega})|^2 \cdot |X(e^{j\Omega})|^2 \, d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} |X(e^{j\Omega})|^2 \, d\Omega \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 \, d\Omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 \, , \end{aligned} \tag{9}$$

d.h., es gilt

$$\|y\|_2 \leq \|x\|_2 \; . \tag{10}$$

Bei der Abschätzung (10) wurden die Parsevalsche Gleichung und die Beziehung

$$Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega}) \cdot X(e^{j\Omega}) \tag{11}$$

genutzt. Die Gleichung (11) gilt für fast alle $\Omega \in [-\pi, \pi)$. Aufgrund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für den Raum $L^2[-\pi, \pi)$ gehört die Funktion Y zum Raum $L^2[-\pi, \pi)$. Für $N \in \mathbb{N}$ werden die Funktionen

$$X_N(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-N}^{N} x(k) e^{-jk\Omega}$$

eingeführt. Man hat $\lim_{N\to\infty} \|X - X_N\|_{L^2[-\pi,\pi)} = 0$. Weiterhin ist mit

$$y_N(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k-l) x_N(l) \tag{12}$$

ebenfalls für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{N\to\infty} y_N(k) = y(k) \ . \tag{13}$$

Aufgrund der Beziehung $\|y_N\|_2 \le \|h\|_2 \cdot \|x_N\|_1$ erhält man nach einer einfachen Rechnung für fast alle $\Omega \in [-\pi, \pi)$ die Beziehung $Y_N(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega}) \cdot X_N(e^{j\Omega})$. Damit ergibt sich für die durch die Gleichung (11) definierte Funktion Y

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |Y(e^{j\Omega}) - Y_N(e^{j\Omega})| \, d\Omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\Omega})| \cdot |X(e^{j\Omega}) - X_N(e^{j\Omega})| \, d\Omega \\ &\le \|H\|_{L^2[-\pi,\pi)} \cdot \|X - X_N\|_{L^2[-\pi,\pi)} \ ,\end{aligned} \tag{14}$$

also

$$\lim_{N\to\infty} \|Y - Y_N\|_{L^1[-\pi,\pi)} = 0 \ . \tag{15}$$

Somit gilt für die durch die Gleichung (11) definierte Funktion Y

$$y(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\Omega}) e^{jk\Omega} \, d\Omega \ ,$$

womit sich der gewünschte Zusammenhang ergibt.

Die Energie des Ausgangssignals y des idealen Tiefpasses ist somit stets kleiner oder gleich der Energie des Eingangssignals x.

Im weiteren wird die kausale Variante T_+ des idealen Tiefpasses T untersucht. Dieses System T_+ ist dadurch definiert, daß seine Impulsantwort h_+ unter allen kausalen Systemen der Form (4) bezüglich der energetischen Norm am dichtesten an der Impulsantwort h des idealen Tiefpasses liegt. Die Impulsantwort h_+ ergibt sich damit aus

$$h_+(k) = \begin{cases} h(k) \, , \ k \ge 0 \, , \\ \\ \ \ 0 \, , \quad k < 0 \ . \end{cases} \tag{16}$$

Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus der folgenden einfachen Rechnung. Hierbei sei $g \neq h_+$ ein beliebiges Signal aus dem Signalraum l^2_+. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k) - g(k)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{-1} |h(k)|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} |h(k) - g(k)|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k) - h_+(k)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k) - g(k)|^2 \\ &> \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k) - h_+(k)|^2 \ . \end{aligned} \tag{17}$$

Damit stellt das System T_+ bezüglich der Approximierbarkeit der Impulsantwort h in der energetischen Norm das optimale System dar. Die Impulsantwort h_+ ergibt sich aufgrund der Darstellung (16) aus $h_+(k) = h(k) \cdot s(k)$, wobei mit s die Sprungfunktion

$$s(k) = \begin{cases} 1\,, \; k \geq 0\,, \\ \\ 0\,, \; k < 0\,, \end{cases} \tag{18}$$

bezeichnet wird. Das System T_+ wird somit aufgrund einer sehr einfachen Konstruktion aus dem idealen Tiefpaß gewonnen. Als nächstes soll gezeigt werden, daß das System T_+ ein völlig anderes Stabilitätsverhalten besitzt als der ideale Tiefpaß T. Es wird gezeigt, daß das System T_+ nicht energetisch stabil ist. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 1 *Es existiert ein Signal x_* mit endlicher Energie, so daß das Ausgangssignal T_+x_* eine unendliche Energie besitzt. Es gilt also*

$$\|T_+x_*\|_2 = \infty \ . \tag{19}$$

Für das Eingangssignal x_* gilt ebenfalls $x_*(l) = 0$ für $l < 0$, d.h., es gehört zum Signalraum l^2_+.

Der Satz 1 wird im nächsten Abschnitt bewiesen.

Trotzdem das System T_+ eine Impulsantwort mit endlicher Energie besitzt, erzeugt das System T_+ für das Eingangssignal x_* ein Ausgangssignal, welches eine unendliche Energie besitzt. Die Faltung zweier Signale mit endlicher Energie muß somit kein Signal mit endlicher Energie ergeben. Natürlich gilt für alle Eingangssignale x mit endlicher Energie für den Ausgang $y_+ = T_+x$ des Systems T_+ aufgrund der Cauchyschen Ungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned}|y_+(k)| &= \left| \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_g l}{\pi l} x(k-l) + \frac{\omega_g}{\pi} x(k) \right| \leq \sum_{l=1}^{\infty} \left| \frac{\sin \omega_g l}{\pi l} x(k-l) \right| + \frac{\omega_g}{\pi} |x(k)| \\ &\leq \left(\left(\frac{\omega_g}{\pi}\right)^2 + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \omega_g l}{\pi l}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} |x(k-l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|h_+\|_2 \cdot \|x\|_2 \ . \end{aligned} \tag{20}$$

Weiterhin ergibt sich für die Energie der Impulsantwort h_+ aufgrund der Parsevalschen Gleichung

$$\sum_{l=0}^{\infty} |h_+(l)|^2 < \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\Omega})|^2 \, d\Omega = \frac{\omega_g}{\pi} \,, \tag{21}$$

womit man

$$|y_+(k)| \leq \sqrt{\frac{\omega_g}{\pi}} \cdot \|x\|_2 \tag{22}$$

erhält. Der Spitzenwert des Ausgangs y_+ des Systems T_+ ist somit stets kleiner oder gleich der Energie des Eingangssignals, multipliziert mit $\sqrt{\frac{\omega_g}{\pi}}$. Somit ist für alle Zahlen N die Energiekonzentration

$$E_N(y) = \left(\sum_{l=-N}^{N} |y_+(l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{23}$$

stets endlich. Der Satz 1 besagt nun, daß speziell für das Ausgangssignal T_+x_* die Beziehung

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{l=-N}^{N} |(T_+x_*)(l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \infty \tag{24}$$

gilt, d.h., die Energiekonzentration wächst in Abhängigkeit von N unbegrenzt an, womit das Signal T_+x_* keine endliche Energie besitzen kann.

Für ein System S mit einer absolut summierbaren Impulsantwort h kann das in diesem Abschnitt geschilderte Verhalten nicht auftreten. Hier hat man stets

$$\|Sx\|_2 \leq \|h\|_1 \cdot \|x\|_2 \,,$$

womit ebenfalls die kausale Variante eines solchen Systems energetisch stabil ist.

Die Abschätzung (9) kann auf ein beliebiges LTI-System ausgedehnt werden, dessen Frequenzgang H zum Raum $L^\infty[-\pi, \pi)$ gehört. Man erhält hier

$$\|Sx\|_2 \leq \|H\|_{L^\infty[-\pi,\pi)} \cdot \|x\|_2 \,.$$

Es ist damit klar, daß der Frequenzgang der kausalen Variante des idealen Tiefpasses nicht zum Raum $L^\infty[-\pi, \pi)$ gehört.

3 Konstruktion des Signals x_*

Im weiteren wird das System

$$(Ux)(k) = (T_+x)(k) - \frac{\omega_g}{\pi}x(k) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_g l}{\pi l} x(k-l) \tag{25}$$

betrachtet. Damit gilt für alle Signale $x \in l^2$ die Beziehung

$$\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} |(T_+x)(k) - (Ux)(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\omega_g}{\pi} \cdot \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} |x(l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{26}$$

Als nächstes wird das Signal $x_* \in l_+^2$ konstruiert, so daß

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{l=0}^{N} |(Ux_*)(l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \infty \tag{27}$$

gilt. Da mit (26) ebenfalls

$$\begin{aligned} \left(\sum_{l=0}^{N} |(Ux_*)(l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{\omega_g}{\pi} \cdot \left(\sum_{l=0}^{N} |x_*(l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{l=0}^{N} |(T_+x_*)(l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\omega_g}{\pi} \cdot \|x_*\|_2 + \left(\sum_{l=0}^{N} |(T_+x_*)(l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{28}$$

gilt, hat man mit (27)

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{l=0}^{N} |(T_+x_*)(l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \infty , \tag{29}$$

d.h., das Ausgangssignal T_+x_* besitzt keine endliche Energie, womit der Satz 1 bewiesen wäre. Es verbleibt also nur noch, das Signal x_* so zu konstruieren, daß die Beziehung (27) erfüllt ist.

Im weiteren sei $n(m) = 2^{m^4} + 1$. Es wird das Signal x_m mit

$$x_m(l) = \begin{cases} \frac{e^{j\omega_g l}}{\sqrt{n(m)}} , \; 0 \leq l \leq n(m) , \\ \\ 0 , \qquad l \notin [0, n(m)] , \end{cases} \tag{30}$$

betrachtet. Es gilt für alle Zeitpunkte $k \in [1, n(m)]$

$$\begin{aligned} (Ux_m)(k) &= \frac{1}{\sqrt{n(m)}} \sum_{l=1}^{k} \frac{\sin \omega_g l}{\pi l} e^{j\omega_g (k-l)} = \frac{e^{j\omega_g k}}{\sqrt{n(m)}} \sum_{l=1}^{k} \frac{\sin \omega_g l}{\pi l} e^{-j\omega_g l} \\ &= \frac{e^{j\omega_g k}}{2j\pi\sqrt{n(m)}} \cdot \left(\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l} - \sum_{l=1}^{k} \frac{e^{-2j\omega_g l}}{l} \right) . \end{aligned} \tag{31}$$

Damit erhält man

$$\Re\left(je^{-j\omega_g k}(Ux_m)(k)\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{n(m)}} \cdot \Re\left(\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l} - \sum_{l=1}^{k}\frac{e^{-2j\omega_g l}}{l}\right)$$
$$\geq \frac{1}{2\pi\sqrt{n(m)}} \cdot \left(\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l} - \left|\sum_{l=1}^{k}\frac{e^{-2j\omega_g l}}{l}\right|\right) \ , \tag{32}$$

wobei mit $\Re z$ der Realteil einer komplexen Zahl z bezeichnet wird. Die rechte Seite von (32) wird weiter untersucht. Dabei wird als erstes das erste Glied auf der rechten Seite von (32) betrachtet. Es ist für $l \leq \tau \leq l+1$

$$\frac{1}{l} > \int\limits_{l}^{l+1} \frac{1}{\tau}\, d\tau \ , \tag{33}$$

also

$$\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l} > \sum_{l=1}^{k}\int\limits_{l}^{l+1}\frac{1}{\tau}\, d\tau = \int\limits_{1}^{k+1}\frac{1}{\tau}\, d\tau = \ln(1+k) \ . \tag{34}$$

Damit erhält man die Abschätzung

$$\Re\left(je^{-j\omega_g k}(Ux_m)(k)\right) \geq \frac{1}{2\pi\sqrt{n(m)}}\ln(k+1) - \frac{1}{2\pi\sqrt{n(m)}} \cdot \left|\sum_{l=1}^{k}\frac{e^{-2j\omega_g l}}{l}\right| . \tag{35}$$

Der zweite Ausdruck auf der rechten Seite von (35) wird als nächstes untersucht. Es soll gezeigt werden, daß für alle Zahlen k die Abschätzung

$$\left|\sum_{l=1}^{k}\frac{e^{-2j\omega_g l}}{l}\right| \leq \frac{1}{\sin\omega_g} \tag{36}$$

gilt. Dazu wird die Hilfsfunktion

$$\phi(k) = \sum_{l=0}^{k} e^{-2j\omega_g l} = \frac{1 - e^{-2j\omega_g(k+1)}}{1 - e^{-2j\omega_g}} \tag{37}$$

eingeführt. Weiterhin ist $\phi(0) = 1$. Es gilt damit

$$\sum_{l=1}^{k}\frac{e^{-2j\omega_g l}}{l} = \sum_{l=1}^{k}\frac{\phi(l)-\phi(l-1)}{l} = \sum_{l=1}^{k}\frac{\phi(l)}{l} - \sum_{l=1}^{k}\frac{\phi(l-1)}{l}$$
$$= \sum_{l=1}^{k}\frac{\phi(l)}{l} - \sum_{l=2}^{k+1}\frac{\phi(l)}{l-1}$$
$$= \phi(1) - \frac{\phi(k+1)}{k+1} + \sum_{l=2}^{k}\phi(l)\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l-1}\right) \ . \tag{38}$$

Damit erhält man

$$\left|\sum_{l=1}^{k} \frac{e^{-2j\omega_g l}}{l}\right| \leq |\phi(1)| + \frac{|\phi(k+1)|}{k+1} + \sum_{l=2}^{k} |\phi(l)| \cdot \frac{1}{l(l-1)} \ . \tag{39}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} |\phi(n)| &= \frac{|1-e^{-2j\omega_g(n+1)}|}{|1-e^{-2j\omega_g}|} \leq \frac{2}{|1-e^{-2j\omega_g}|} \\ &= \frac{2}{|e^{j\omega_g}-e^{-j\omega_g}|} = \frac{1}{\sin\omega_g} \ . \end{aligned} \tag{40}$$

Mit (40) erhält man für das letzte Glied der rechten Seite die Abschätzung von (39)

$$\begin{aligned} \sum_{l=2}^{k} |\phi(l)| \cdot \frac{1}{l(l-1)} &\leq \frac{1}{\sin\omega_g} \cdot \sum_{l=2}^{k} \frac{1}{l(l-1)} < \frac{1}{\sin\omega_g} \cdot \sum_{l=2}^{k} \frac{1}{(l-1)^2} \\ &< \frac{1}{\sin\omega_g} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} = \frac{\pi^2}{4 \cdot \sin\omega_g} \ . \end{aligned} \tag{41}$$

Damit muß

$$\left|\sum_{l=1}^{k} \frac{e^{-2j\omega_g l}}{l}\right| \leq \frac{2}{\sin\omega_g} + \frac{\pi^2}{4\sin\omega_g} < \frac{5}{\sin\omega_g} \tag{42}$$

sein. Mit (42) erhält man für den Ausdruck (35)

$$\Re\left(je^{-j\omega_g k}(Ux_m)(k) \right) \geq \frac{1}{\sqrt{n(m)}} \left(\frac{1}{2\pi} \ln(k+1) - \frac{1}{\sin\omega_g} \right) \ . \tag{43}$$

Gilt nun für den Zeitpunkt k die Beziehung $\sqrt{n(m)} \leq k \leq n(m)$, so erhält man

$$\Re\left(je^{-j\omega_g k}(Ux_m)(k) \right) \geq \frac{1}{\sqrt{n(m)}} \left(\frac{1}{2\pi} \ln\sqrt{n(m)} - \frac{1}{\sin\omega_g} \right) \ . \tag{44}$$

Weiterhin existiert eine natürliche Zahl m_0 derart, daß für alle Zahlen $m \geq m_0$ stets die Beziehung

$$\frac{1}{2\pi} \ln\sqrt{n(m)} - \frac{1}{\sin\omega_g} = \frac{\ln 2}{2\pi} m^4 - \frac{1}{\sin\omega_g} > \frac{1}{10} m^4$$

erfüllt ist. Damit erhält man für alle Zahlen $m \geq m_0$ die Abschätzung

$$\Re\left(je^{-j\omega_g k}(Ux_m)(k) \right) > \frac{1}{10\sqrt{n(m)}} m^4 \ . \tag{45}$$

Es wird nun für das Signal x_* der Ansatz

$$x_*(l) = \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cdot x_m(l) \tag{46}$$

gewählt. Für die Energie des Signals x_* ergibt sich mit der Dreiecksungleichung

$$\|x_*\|_2 \leq \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cdot \|x_m\|_2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} \ . \tag{47}$$

Es wird als nächstes das Signal $y_* = Ux_*$ untersucht. Es gilt für alle Zeitpunkte k

$$\begin{aligned}(Ux_*)(k) &= \sum_{l=1}^{k} \frac{\sin \omega_g l}{\pi l} \cdot x_*(k-l) \\ &= \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{l=1}^{k} \frac{\sin \omega_g l}{\pi l} \cdot x_m(k-l) \ . \end{aligned} \tag{48}$$

Da für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\begin{aligned}|x(k) - \sum_{m=m_0}^{n} \frac{1}{m^2} \cdot x_m(k-l)| &\leq \|x - \sum_{m=m_0}^{n} \frac{1}{m^2} \cdot x_m\| \\ &\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \frac{1}{n} \end{aligned} \tag{49}$$

gilt, konvergiert die endliche Reihe $\sum_{m=m_0}^{n} \frac{1}{m^2} x_m(k-l)$ gleichmäßig gegen das Signal x_*. Somit war die Vertauschung der Summationsreihenfolge in (48) zulässig. Aus (48) ergibt sich

$$\Re(je^{-j\omega_g k}(Ux_*)(k)) = \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cdot \Re(je^{-j\omega_g k}(Ux_m)(k)) \ . \tag{50}$$

Es sei nun $k > n(m_0)$ ein beliebiger Zeitpunkt und $m > m_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Es können die beiden Fälle $k \leq n(m)$ bzw. $k > n(m)$ eintreten. Für den ersten Fall hat man

$$\begin{aligned}\Re(je^{-j\omega_g k}(Ux_m)(k)) &\geq \frac{1}{\sqrt{n(m)}} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \ln(k+1) - \frac{1}{\sin \omega_g} \right) \\ &> \frac{1}{\sqrt{n(m)}} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{n(m_0)} - \frac{1}{\sin \omega_g} \right) > 0 \ . \end{aligned} \tag{51}$$

Für den zweiten Fall ergibt sich

$$\begin{aligned}\Re(je^{-j\omega_g k}(Ux_m)(k)) &\geq \frac{1}{2\pi\sqrt{n(m)}} \Re \left(\sum_{l=1}^{n(m)} \frac{1}{l} - \sum_{l=1}^{n(m)} \frac{e^{-2j\omega_g}}{l} \right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{n(m)}} \Re \left(\frac{1}{2\pi} \ln n(m) - \frac{1}{\sin \omega_g} \right) > 0 \ . \end{aligned} \tag{52}$$

Somit ist für alle Zahlen $M \geq m_0$ stets

$$\Re(je^{-j\omega_g k}(Ux_*)(k)) > \frac{1}{M^2} \Re(je^{-j\omega_g k}(Ux_M)(k)) \ . \tag{53}$$

Betrachtet man nun speziell die Zeitpunkte k aus dem Zeitintervall $\sqrt{n(M)} \leq k \leq n(M)$, so ergibt das

$$\Re(je^{-j\omega_g k}(Ux_*)(k)) > \frac{1}{M^2} \cdot \frac{M^4}{10\sqrt{n(M)}} \ . \tag{54}$$

Nun ist ebenfalls

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} |(Ux_*)(k)|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} |je^{-j\omega_g k} \cdot (Ux_*)(k)|^2 \geq \sum_{k=0}^{\infty} \left|\Re\Big(je^{-j\omega_g k} \cdot (Ux_*)(k)\Big)\right|^2 \\
&\geq \sum_{k=\sqrt{n(M)}}^{n(M)} \left|\Re\Big(je^{-j\omega_g k} \cdot (Ux_*)(k)\Big)\right|^2 \\
&> \frac{1}{M^4} \sum_{k=\sqrt{n(M)}}^{n(M)} \left|\Re\Big(e^{-j\omega_g k} \cdot (Ux_M)(k)\Big)\right|^2 \\
&> \frac{M^8}{10M^4} \frac{1}{n(M)} \sum_{k=\sqrt{n(M)}}^{n(M)} 1 \\
&= \frac{M^4}{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n(M)}}\right) > \frac{M^4}{20} \ .
\end{aligned} \tag{55}$$

Somit gilt für alle natürlichen Zahlen $M > m_0$ stets

$$\|Ux_*\|_2 > \frac{M^2}{\sqrt{20}} \ , \tag{56}$$

womit

$$\|Ux_*\|_2 = \infty \tag{57}$$

gelten muß. Damit wurde der Satz 1 vollständig bewiesen.

4 Abschließende Bemerkungen

In der Arbeit wurde gezeigt, daß die kausale Variante T_+ des idealen Tiefpasses ein energetisch instabiles System ist. Es wurde ein Eingangssignal x_* mit endlicher Energie angegeben, so daß das Ausgangssignal T_+x_* eine unendliche Energie besitzt. Nun hat die Impulsantwort h_+ ebenfalls eine endliche Energie. Da sich das Ausgangssignal T_+x_* aus der Faltung der Impulsantwort h_+ mit dem Eingangssignal x_* ergibt, zeigen die Resultate der Arbeit, daß die Faltung von Signalen mit endlicher Energie nicht unbedingt ein Signal mit endlicher Energie ergibt.

Es ist überraschend, daß bereits das System T_+ energetisch instabil ist. Es wurde sehr einfach aus dem idealen Tiefpaß konstruiert. Die Resultate der Arbeit zeigen also, daß mit Hilfe sehr einfacher Operationen im Zeitbereich aus einem energetisch stabilen System ein energetisch instabiles System erzeugt werden kann. Die Resultate der Arbeit bestätigen die von Professor Mathis geäußerte Vermutung, daß die Faltung zweier Signale mit endlicher Energie nicht unbedingt ein Signal mit endlicher Energie liefert ([8], [9]). Der Signalraum l^2 der Signale mit endlicher Energie bildet somit keine Faltungsalgebra. Damit kann für diesen Signalraum keine Systemtheorie im Sinne von Küpfmüller aufgebaut werden. Für eine ausführliche Diskussion über die Konsequenzen der in dieser Arbeit dargestellten Resultate sei auf die von Professor Mathis gehaltene Akademievorlesung [10] vor der Rheinisch-Westphälischen Akademie der Wissenschaften verwiesen .

Danksagung: Der Verfasser dankt Herrn Professor Mathis für die interessante Problemstellung und für die vielen Diskussionen und Hinweise zu dieser Arbeit.

Literatur

[1] **Boche, H.** : *Complete Characterization of the Structure of Discrete-Time Linear Systems.* In: Proc. of 15th IMACS World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics. pp. 6-12, Berlin 1997

[2] **Boche, H.** und **Reißig, G.** : *Complete Characterization of all Discrete-Time Linear Systems of Convolution Type.* In: Proc. of ECCTD'97, European Conference on Circuit Theory and Design. Vol. III, pp. 1185-1192, Budapest 1997

[3] **Boyd, S.P.** : *Volterra Series: Engineering Fundamentals.* PhD Thesis, Univ. California, Berkeley 1985

[4] **Couch II, L.W.** : *Digital and Analog Communication Systems.* 3rd. Ed., New York 1990

[5] **Crochiere, R.E.** und **Rabiner, L.R.** : *Multirate Signal Processing.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York 1983

[6] **Fettweis, A.** : *Elemente nachrichtentechnischer Systeme.* Teubner Studienbücher Elektrotechnik, Stuttgart 1990

[7] **Kammeyer, K.D.** und **Kroschel, K.** : *Digitale Signalverarbeitung; Filterung und Spektralanalyse.* Teubner Studienbücher Elektrotechnik, Stuttgart 1992

[8] **Mathis, W.** : *Persönliche Mitteilung auf der Kleinheubacher Tagung.* Kleinheubach, Oktober 1995

[9] **Mathis, W.** : *Persönliche Mitteilung an der Universität Wuppertal.* Mai 1996

[10] **Mathis, W.** : *Die begrifflichen Grundlagen der Netzwerk- und Systemtheorie - ein Beitrag zur Mathematisierung der Elektrotechnik.* Vortrag an der Rheinisch-Westphälischen Akademie der Wissenschaften in Düsseldorf, 24 Seiten, Akademie-Bericht im Westdeutschen Verlag, Oppladen 1997

[11] **Proakis, J.H., Rader, Ch.M., Ling, F.** und **Nikias, Ch.L.** : *Advanced Digital Signal Processing.* New York 1992

[12] **Rabiner, L.R.** und **Gold, B.** : *Theory and Application of Digital Signal Processing.* Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, New Jersey 1975

[13] **Sandberg, I.W.** : *A Representation Theorem for Linear Systems.* IEEE Trans. Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications **45**, No. 5, 578-581 (1998)

[14] **Ziehmer, R.E.** und **Tranter, W.H.** : *Principles of Communications; Systems, Modulation and Noise.* 4rd Ed., New York 1995

eingegangen: 7. Oktober 1997 **revidierte Fassung:** 21. Januar 1999

Autor:

Holger Boche
Heinrich-Hertz-Institut für Nachrichtentechnik Berlin GmbH
Broadband Mobile Communication Networks
Einsteinufer 37
D-10587 Berlin,
Germany
und
Swiss Institute of Technology, Zürich (ETH-Zürich)
Communication Technology Laboratory
Sternwartstr. 7
CH-8092 Zurich,
Switzerland