Rostock. Math. Kolloq. **53**, 3–22 (1999)

Subject Classification (AMS)
03G20, 08A40

Dietlinde Lau

Die maximalen Klassen von $\bigcap_{\varrho \in Q} Pol_3\varrho$ für $Q \subseteq \mathfrak{P}(\{0,1,2\})$, Teil III

In Fortsetzung von Teil I und II dieser Arbeit sollen nachfolgend für Teilklassen der Form

$$I \cap \bigcap_{\varrho \in Q} Pol_3\varrho \ (\subseteq P_3),$$

wobei $I := Pol_3\{0\} \cap Pol_3\{1\} \cap Pol_3\{2\}$ („Menge aller idempotente Funktionen aus P_3") und

$$Q \in \{\emptyset, \{\{a,b\}\}, \{\{a,b\},\{a,c\}\}, \{\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}\} \mid \{a,b,c\} = \{0,1,2\}\}$$

ist, die maximalen Klassen ermittelt werden.

Neben den bereits im Teil I eingeführten Begriffen und Bezeichnungen verwenden wir nachfolgend auch die folgenden Bezeichnungen für Funktionen aus P_3:

Für $\{a,b,c\} := E_3$ und die totale Ordnung $\omega : a < b < c$ sei $s_{a,b}(x,y) := max_\omega(x,y)$. Für $n \geq 3$ sei ferner $s^n_{a,b} := s^{n-1}_{a,b} \star s_{a,b}$. Mit g_{a_1,a_2,a_3} kennzeichnen wir 2-stellige Funktionen aus I, die definiert sind durch

$$g_{a_1,a_2,a_3}(0,1) = g_{a_1,a_2,a_3}(1,0) = a_1, \ g_{a_1,a_2,a_3}(0,2) = g_{a_1,a_2,a_3}(2,0) = a_2,$$
$$g_{a_1,a_2,a_3}(1,2) = g_{a_1,a_2,a_3}(2,1) = a_3\,.$$

Sämtliche maximalen Klassen der Menge aller idempotenten Funktionen aus P_k wurden bereits in [4] von Á. Szendrei beschrieben. Als Spezialfall dieser Arbeit (bzw. aus [5] oder [1]) erhält man den folgenden Satz:

Satz 1 *Die Klasse I aller idempotenten Funktionen aus P_3 besitzt genau 10 maximale Klassen:*

(1) $I \cap Pol_3\{0,1\}$,
(2) $I \cap Pol_3\{0,2\}$,
(3) $I \cap Pol_3\{1,2\}$
(4) $I \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,
(5) $I \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,
(6) $I \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
(7) $I \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
(8) $I \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
(9) $I \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
(10) $I \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Zwecks Ermittlung der maximalen Klassen für die noch verbleibenden Fälle für T_Q benötigen wir einige Hilfsaussagen.

Lemma 2 *Seien* $T := Pol_3\{0,1\} \cap Pol_3\{0,2\} \cap Pol_3\{1,2\}$, $T_{0,1} := Pol_3\{0,1\}$ *und* $T_{0,1;0,2} := Pol_3\{0,1\} \cap Pol_3\{0,2\}$. *Dann gilt:*

(a) $\forall g \in (I \cap T_{0,1;0,2}) \backslash Pol_3\{1,2\}: \ [\{g\} \cup T] = I \cap T_{0,1;0,2}$,

(b) $\forall g \in (I \cap T_{0,1}) \backslash Pol_3\{1,2\} \ \forall h \in (I \cap T_{0,1}) \backslash Pol_3\{0,2\}: \ [\{g,h\} \cup T] = I \cap T_{0,1}$.

Beweis: O.B.d.A. seien die idempotenten Funktionen g und h zweistellig und es gelte: $g(1,2) = 0$ und $h(0,2) = 1$.
(a): Eine beliebige Funktion f^n aus $I \cap T_{0,1;0,2}$ läßt sich dann mit Hilfe der Funktionen $g_\alpha^n \in T$ ($\alpha \in \{1,2\}$), die definiert sind durch

$$g_\alpha(\mathbf{x}) := \begin{cases} \alpha & \text{für} \quad \mathbf{x} \in \{1,2\}^n \text{ und } f(\mathbf{x}) = 0\,, \\ f(\mathbf{x}) & \text{sonst,} \end{cases}$$

durch $f(\mathbf{x}) = g(g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}))$ darstellen.
(b): Analog zu (a) zeigt man leicht, daß $T_{0,1;0,2;0;1;2} \subseteq [\{g\} \cup T]$ gilt.
Sei $f^n \in I \cap T_{0,1}$. Wählt man $h_\beta^n \in T_{0,1;0,2;0;1;2}$ ($\beta \in \{0,2\}$) wie folgt:

$$h_\beta(\mathbf{x}) := \begin{cases} \beta & \text{für} \quad \mathbf{x} \in \{0,2\}^n \text{ und } f(\mathbf{x}) = 1\,, \\ f(\mathbf{x}) & \text{sonst,} \end{cases}$$

so erhält man $f \in [\{g,h\} \cup T]$ aus $f(\mathbf{x}) = h(h_0(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}))$. ∎

Lemma 3 *Sei* $T := Pol_3\{0,1\} \cap Pol_3\{0,2\} \cap Pol_3\{1,2\}$ *und bezeichne* A *eine Teilmenge von* I*, die für jedes* $\{a,b\} \in \{\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}\}$ *die folgenden 2 Eigenschaften besitzt:*

(i) $\forall h^m \in P_{\{a,b\}} \cap Pol \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \ \exists H^m \in [A]: \ \forall \mathbf{x} \in \{a,b\}^m: \ h(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x})$;

(ii) $s_{a,b}, s_{b,a} \in [A]$.

Dann gilt $T \subseteq [A]$. [1]

[1] Als unmittelbare Folgerung aus diesem Lemma, Lemma 2, Lemma 2.3 (Teil I) und $\left(T_Q \cap Pol \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & b & b \end{pmatrix}\right)^2 = T_Q^2$, falls $T_Q \subset I$ und $a, b \in E_3$, $a \neq b$, erhält man:
Die Ordnung der Klassen $T_Q \subset I$*, d. h. die kleinste Zahl* r *mit* $[T_Q^r] = T_Q$*, ist 3.*
Für $T_Q = I$ folgt aus allgemeineren Aussagen über idempotente Funktionen (siehe [3]), daß die Ordnung von I gleich 2 ist.

Beweis: Bezeichne $\mathfrak{E}$ die Menge $E_2^n \cup \{0,2\}^n \cup \{1,2\}^n$. Eine beliebige n-stellige Funktion $f \in T$ läßt sich mit Hilfe der Funktionen $x \vee y := s_{0,1}(x,y)$,

$$f_1^n(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{für} \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{E}\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und Funktionen der Art

$$f_{\mathbf{a},\alpha}^n(\mathbf{x}) := \begin{cases} \alpha & \text{für} \quad \mathbf{x} = \mathbf{a}\,, \\ 1 & \text{für} \quad \mathbf{x} \in \{1,2\}^n \backslash \{\mathbf{2}\}\,, \\ 2 & \text{für} \quad \mathbf{x} = \mathbf{2}\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in der Form

$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) \vee \bigvee_{\substack{\mathbf{a} \in E_3^n \backslash \mathfrak{E} \\ f(\mathbf{a}) \in \{1,2\}}} f_{\mathbf{a},f(\mathbf{a})}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

darstellen. Zwecks Nachweis von $f \in [A]$ konstruieren wir zunächst für beliebige $a, b \in E_3$ mit $\{a,b,c\} = E_3$ die n-stelligen Funktionen:

$$F_{a,b}(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{für} \quad \mathbf{x} \in \{a,b\}^n\,, \\ b & \text{für} \quad \mathbf{x} \in \{b,c\}^n \backslash \{\mathbf{c}\}\,, \\ c & \text{für} \quad \mathbf{x} = \mathbf{c}\,, \\ a & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen (ii) und $s_{a,b}^n := s_{a,b}^{n-1} \star s_{a,b}$ gilt für beliebige $n \geq 3$

$$s_{a,b}^n \in [A]\,. \tag{2}$$

Sei zunächst $a = 0$ und $b = 1$. Wegen (i) findet man in $[A]$ eine Funktion g^n mit

$$\forall \mathbf{x} \in \{0,1\}^n : \; f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\,. \tag{3}$$

Unter Verwendung von (2) und (3) prüft man leicht nach, daß

$$F_{0,1}(\mathbf{x}) = s_{2,1}^3(s_{0,1}^2(g(\mathbf{x}), s_{1,0}^n(\mathbf{x})), s_{2,0}^n(\mathbf{x}), s_{2,0}^3(s_{2,1}^n(\mathbf{x}), s_{1,0}^n(\mathbf{x}), s_{0,1}^n(\mathbf{x}))) \in [A]$$

gilt.
Analog zeigt man $F_{a,b} \in [A]$ für die anderen $a, b \in E_3$.
Hieraus und aus $f_1(\mathbf{x}) = s_{2,1}^2(s_{0,1}^2(F_{0,1}(\mathbf{x}), F_{0,2}(\mathbf{x})), F_{1,2}(\mathbf{x}))$ folgt $f_1 \in [A]$.
Wegen (1) haben wir zum Beweis unseres Lemmas nur noch $f_{\mathbf{a},\beta}^n \in [A]$ für beliebige $\mathbf{a} \in E_3^n \backslash \mathfrak{E}$

und $\beta \in \{1,2\}$ zu zeigen.
O.B.d.A. seien

$$\mathbf{a} := (\underbrace{0,0,...,0}_{r}, \underbrace{1,1,...,1}_{s}, \underbrace{2,2,...,2}_{t}),$$

$\beta = 1$ und

$$\mathbf{x} := (x_1, x_2, ..., x_r), \ \mathbf{y} := (y_1, y_2, ..., y_s), \ \mathbf{z} := (z_1, z_2, ..., z_t).$$

Nach unseren obigen Überlegungen zu den Funktionen $F_{a,b}$ sind folgende Funktionen Superpositionen über A:

$$g_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \begin{cases} 1 \text{ für} & (\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{0},\mathbf{1}) \text{ oder } (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \{1,2\}^{r+s} \backslash \{\mathbf{2}^{r+s}\}, \\ 2 \text{ für} & (\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{2}^{r+s}, \\ 0 \text{ sonst}, \end{cases}$$

$$g_2(\mathbf{x},\mathbf{z}) := \begin{cases} 2 \text{ für} & (\mathbf{x},\mathbf{z}) = (\mathbf{0},\mathbf{2}) \text{ oder } (\mathbf{x},\mathbf{z}) = \mathbf{2}^{r+t} \text{ oder} \\ & (\mathbf{x},\mathbf{z}) \in \{1,2\}^{r+t} \backslash \{\mathbf{1}^{r+t}\}, \\ 1 \text{ für} & (\mathbf{x},\mathbf{z}) = \mathbf{1}^{r+t}, \\ 0 \text{ sonst}, \end{cases}$$

$$g_3(\mathbf{y},\mathbf{z}) := \begin{cases} 2 \text{ für} & (\mathbf{y},\mathbf{z}) \in \{0,2\}^{s+t} \backslash \{\mathbf{0}^{s+t}\}, \\ 0 \text{ für} & (\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathbf{0}^{s+t}, \\ 1 \text{ sonst}. \end{cases}$$

Es gilt dann

$$f_{\mathbf{a},1}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = s^3_{2,1}(g_1(\mathbf{x},\mathbf{y}), g_2(\mathbf{x},\mathbf{z}), g_3(\mathbf{y},\mathbf{z})).$$

Analog zeigt man $f_{\mathbf{a},2} \in [A]$. Folglich ist $T \subseteq [A]$. ∎

Lemma 4 *Die Menge $A \subseteq I$ habe die Eigenschaft*

$$\begin{array}{l} \forall \{a,b\} \in \{\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}\} : \\ \forall h^m \in P_{\{a,b\}} \cap Pol \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \ \exists H^m \in [A] : \ \forall \mathbf{x} \in \{a,b\}^m : \ h(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}). \end{array} \tag{4}$$

Dann existieren zu beliebigen $\alpha \in \{0,1\}$, $\beta \in \{0,2\}$, $\gamma \in \{1,2\}$ gewisse $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in E_3$ mit

$$g_{\alpha,b_1,c_1}, \ g_{a_1,\beta,c_2}, \ g_{a_2,b_2,\gamma} \in [A]. \tag{5}$$

Beweis: Wegen (4) gibt es für beliebiges $\alpha \in \{0,1\}$ eine Funktion $g \in [A]$ mit $g(0,1) = g(1,0) = \alpha$. Entweder liegt mit g bereits eine Funktion des Typs g_{α,b_1,c_1} vor oder wir können sie mit folgenden Superpositionsbildungen in $[A]$ nachweisen:
Ist $b_1 := g(0,2) \neq g(2,0) =: b_1'$, so erhält man mit Hilfe einer Funktion $h_1^2 \in [A]$ mit $h_1\begin{pmatrix} b_1 & b_1' \\ b_1' & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ die Funktion $g'(x,y) := h_1(g(x,y), g(y,x))$ mit den Eigenschaften $g'(0,1) = g'(1,0) = \alpha$, $g'(0,2) = g'(2,0) = b_1$. Falls $c_1 := g'(1,2) \neq g'(2,1) =: c_1'$, haben wir $g_{\alpha,b_1,c_1}(x,y) = h_2(g'(x,y), g'(y,x)) \in [A]$, wobei $h_2 \in [A]$ mit $h_2(c_1,c_1') = h_2(c_1',c_1) = c_1$ gewählt ist.
g_{a_1,β,c_2}, $g_{a_2,b_2,\gamma} \in [A]$ zeigt man analog. ■

Lemma 5 *Sei* $T_{0,1;0;1;2} := Pol_3\{a,b\} \cap I$. *Dann gilt*

(a) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&2 \\ 0&1&0&1&2&0 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0 \\ 0&1&0&1&2 \end{pmatrix}$,

(b) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&2&1&2 \\ 2&0&2&1 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&2&0&1 \\ 0&1&2&1&0 \end{pmatrix}$,

(c) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&2&1&0&1 \\ 0&1&2&0&2&2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&1 \end{pmatrix}$,

(d) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&2&1&2&1&0 \\ 0&1&2&2&1&0&2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&1 \end{pmatrix}$,

(e) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&2&0&1&1&2&0 \\ 0&1&2&1&0&2&1&2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&0&1&1&1 \\ 0&1&0&1&2 \end{pmatrix}$,

(f) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&2&0&1&0&1 \\ 0&1&2&1&0&2&2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&2&0&1 \\ 0&1&2&1&0 \end{pmatrix}$,

(g) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&2&0&1 \\ 0&1&2&1&0 \end{pmatrix}$,

(h) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&2&0&1 \\ 0&1&2&1&0 \end{pmatrix}$,

(i) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&1&2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3\{0,2\}$,

(j) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 0&1&2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3\{1,2\}$,

(k) $T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0&1&0&1 \\ 0&1&2&2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0;1;2} \cap Pol_3\{0,2\}$,

(l) $T_{0,1;0,2;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,2\,2\,0\,2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0,2;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0\,2\,0 \\ 0\,2\,2 \end{pmatrix}$,

(m) $T_{0,1;0,2;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,0\,2\,1\,1 \\ 0\,1\,2\,2\,0\,0\,2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0,2;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,1\,1 \end{pmatrix}$,

(n) $T_{0,1;0,2;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,0\,2\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,2\,2\,0\,0\,1\,2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0,2;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,0\,2 \end{pmatrix}$,

(o) $T_{0,1;0,2;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,2\,1\,0\,2\,2 \end{pmatrix} \subseteq T_{0,1;0,2;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} 0\,2\,0 \\ 0\,2\,2 \end{pmatrix}$.

Beweis: Obige Behauptungen kürzen wir im Beweis für $T \in \{T_{0,1;0;1;2}, T_{0,1;0,2;0;1;2}\}$ in der Form

$$\text{(x)} \qquad T \cap Pol_3 \varrho_{\mathrm{x}} \subseteq T \cap Pol_3 \varrho'_{\mathrm{x}}$$

ab (x $\in$ {a,b,c,...,o}).
(a) folgt aus (1) (Teil I) und $\varrho_{\mathrm{a}} \cap (E_2 \times E_3) = \varrho'_{\mathrm{a}}$.
(b) folgt aus $\varrho_{\mathrm{b}} \circ \varrho_{\mathrm{b}} = \varrho'_{\mathrm{b}}$.
(x) für x $\in$ {c,d,m} folgt aus $\tau(\varrho_x \cap E_2^2) = \varrho'_{\mathrm{x}}$.
(e) folgt aus $\varrho_{\mathrm{e}} \cap (\tau \varrho_{\mathrm{e}}) \cap (E_2 \times E_3) = \varrho'_{\mathrm{e}}$.
(f) folgt aus $(\tau \varrho_{\mathrm{f}}) \cap \varrho_{\mathrm{f}} = \varrho'_{\mathrm{f}}$.
(x) für x $\in$ {g,h} folgt aus $(\tau \varrho_{\mathrm{x}}) \circ \varrho_{\mathrm{x}} = \varrho'_{\mathrm{x}}$.
(x) für x $\in$ {i,k} folgt aus $pr_1(\{0\} \times E_3) \cap \varrho_{\mathrm{x}}) = \{0, 2\}$.
(j) folgt aus $pr_1(\{1\} \times \varrho_{\mathrm{j}}) = \{1, 2\}$.
(x) für x $\in$ {l,o} folgt aus $\varrho_{\mathrm{x}} \cap \{0, 2\}^2 = \varrho'_{\mathrm{x}}$.
(n) folgt aus $\varrho_{\mathrm{n}} \cap (\tau \varrho_{\mathrm{n}}) \cap (E_2 \times \{0, 2\}) = \varrho'_{\mathrm{n}}$. ∎

Satz 6 *Sei* $\{a,b,c\} := E_3$. $T_{a,b;a;b;c} := I \cap Pol_3\{a,b\}$ *besitzt genau* 13 *maximale Klassen:*

(1) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$,

(2) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$,

(3) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$,

(4) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & b & b \end{pmatrix}$,

(5) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3\{a,c\}$,

(6) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3\{b,c\}$,

(7) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & c & a & b \\ a & b & c & b & a \end{pmatrix}$,

(8) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b & b & a & c & b & c \\ a & b & a & b & c & a & c & b \end{pmatrix}$,

(9) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b & b & a \\ a & b & a & b & c \end{pmatrix}$,

(10) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b & b & b \\ a & b & a & b & c \end{pmatrix}$,

(11) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & a & b \\ a & b & c & c \end{pmatrix}$,

(12) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} b & b & b & a \\ a & b & c & c \end{pmatrix}$,

(13) $T_{a,b;a;b;c} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & c & b & c & c \\ c & a & c & b & c \end{pmatrix}$.

Beweis: O.B.d.A. seien $a = 0$, $b = 1$ und $c = 2$. Mit A bezeichnen wir in diesem Beweis eine Teilmenge von $T_{0,1;0;1;2}$, die keine Teilmenge der unter (1) bis (13) aufgezählten Teilklassen von $T_{0,1;0;1;2}$ ist. Dann gehören zu $[A]$ gewisse Funktionen $f_1, f_2, ..., f_{13}$ mit der im Teil I vereinbarten Eigenschaft (*).
Wegen Lemma 5, (a)-(k) und den obigen Klassen (4) - (7), (9), (10) findet man in $[A]$ gewisse Funktionen $f_{14} - f_{24}$ mit

$$f_{14}\begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&2 \\ 0&1&0&1&2&0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1&2&2 \\ 2&1&2 \end{pmatrix},\ f_{15}\begin{pmatrix} 0&2&1&2 \\ 2&0&2&1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0&0&1&1&2 \\ 0&1&0&1&2 \end{pmatrix},$$

$$f_{16}\begin{pmatrix} 0&1&2&1&0&1 \\ 0&1&2&0&2&2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0&2&2 \\ 1&0&1 \end{pmatrix},\ f_{17}\begin{pmatrix} 0&1&2&1&2&1&0 \\ 0&1&2&2&1&0&2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0&2 \\ 1&0 \end{pmatrix},$$

$$f_{18}\begin{pmatrix} 0&1&2&0&1&1&2&0 \\ 0&1&2&1&0&2&1&2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ f_{19}\begin{pmatrix} 0&1&2&0&1&0&1 \\ 0&1&2&1&0&2&2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 2&2 \\ 0&1 \end{pmatrix},$$

$$f_{20}\begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 2&0&1 \end{pmatrix},\qquad f_{21}\begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&2 \end{pmatrix},$$

$$f_{22}\begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&1&2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 1&0&2 \end{pmatrix},\qquad f_{23}\begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 0&1&2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 1&0&2 \end{pmatrix},$$

$$f_{24}\begin{pmatrix} 0&1&0&1 \\ 0&1&2&2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0&1 \\ 1&0 \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 2,(b) und Lemma 3 genügt es, für den Beweis von $[A] = T_{0,1;0;1;2}$ zu zeigen, daß A die Voraussetzungen (i) und (ii) von Lemma 3 erfüllt. Wir beginnen mit dem Beweis von

$$\forall\{\alpha,\beta\}\in\{\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}\}:\\ \forall g^n\in P_{\{\alpha,\beta\}}\cap Pol_3\{\alpha\}\times\{\beta\}\ \exists G^n\in[A]:\ \forall\mathbf{x}\in\{\alpha,\beta\}^n:\ g(\mathbf{x})=G(\mathbf{x})\,. \tag{6}$$

Für $\{\alpha,\beta\}=\{0,1\}$ folgt (6) unter Verwendung von $f_1,...,f_4$ aus Lemma 2.3 (Teil I). Insbesondere gehört damit zu $[A]$ eine gewisse 3-stellige Funktion t mit der Eigenschaft

$$\forall x,y,z\in E_2:\ t(x,y,z):=x+y+z\ (\mathrm{mod}\,2)\,.$$

Als nächstes soll (6) für $\alpha=0$ und $\beta=2$ bewiesen werden. Um Lemma 2.3 (Teil I) anwenden zu können, weisen wir weiter unten Funktionen d^2, k^2 und r^3 in $[A]$ mit

$$d\begin{pmatrix}0\,2\\2\,0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\ k\begin{pmatrix}0\,2\\2\,0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ r\begin{pmatrix}0\,2\,0\\0\,2\,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \tag{7}$$

nach. Da d, k, r idempotent sind, gehören die Funktionen d, k und r' mit

$$r'(x,y,z):=r(k(x,z),d(y,z),z))\,,\\ r'\begin{pmatrix}0\,2\,0\\0\,2\,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

zu $[A]\cap Pol_3\{0,2\}$, woraus sich nach Lemma 2.3(Teil I) die Aussage (6) aus (7) ergibt. Ausgangspunkt des folgenden Nachweises von d,k,r in $[A]$ ist die Funktion f_5 mit $f_5(0,2)=1$, für die wir 3 Fälle unterscheiden:

Fall 1: $f_5(2,0)=0$.

In $[A]$ findet man eine Funktion h_1^2 mit $h_1\begin{pmatrix}0\,1\\1\,0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, womit wir $k(x,y):=h_1(f_5(x,y),f_5(y,x))$ wählen können. Da für f_{14} die Beziehung $f_{14}\begin{pmatrix}0\,0\,1\,1\,0\,2\\0\,1\,0\,1\,2\,0\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}1\,2\,2\\2\,1\,2\end{pmatrix}$ gilt, erhalten wir mit Hilfe von $h_2^2\in[A]$, $h_2\begin{pmatrix}0\,1\\1\,0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ die Funktion

$$f'_{14}(x,y):=\\ f_{14}(k(x,y),f_5(k(x,y),x),f_5(k(x,y),y),h_2(f_5(k(x,y),x),f_5(k(x,y),y)),x,y)\in[A]\,,$$

die $f'_{14}\begin{pmatrix}0\,2\\2\,0\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}1\,2\,2\\2\,1\,2\end{pmatrix}$ erfüllt. Falls $f'_{14}\begin{pmatrix}0\,2\\2\,0\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}1\,2\\2\,1\end{pmatrix}$ ist, kann man in $[A]$ unter Verwendung der Funktion f_8 eine zweistellige Funktion f'_8 konstruieren, die die geforderte Eigenschaft von d besitzt. Also können wir o.B.d.A. $f'_{14}\begin{pmatrix}0\,2\\2\,0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ und damit $d:=f'_{14}\in[A]$ annehmen.

Die noch fehlende nichtmonotone Funktion r erhält man wie folgt:
Wegen $f_{16}\begin{pmatrix}0\,1\,2\,1\,0\,1\\0\,1\,2\,0\,2\,2\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}0\,2\,2\\1\,0\,1\end{pmatrix}$ gilt

$$f'_{16}(x,y,z) := f_{16}(x, f_5(x,z), z, f_6(f_5(x,z), f_5(y,z)), y, f_5(y,z)) \in [A]$$

mit $f'_{16}\begin{pmatrix}0\,0\,2\\0\,2\,2\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}2\,0\,2\\1\,1\,0\end{pmatrix}$.

Da wir im Fall $f'_{16}\begin{pmatrix}0\,0\,2\\0\,2\,2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $r := f'_{16}$ wählen können, haben wir noch 2 Fälle zu betrachten:

Fall 1.1: $f'_{16}\begin{pmatrix}0\,0\,2\\0\,2\,2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Wegen $f_{17}\begin{pmatrix}0\,1\,2\,1\,2\,1\,0\\0\,1\,2\,2\,1\,0\,2\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}0\,2\\1\,0\end{pmatrix}$ hat die Funktion

$$f'_{17}(x,y,z) := f_{17}(x, f_5(x,z), z, f_5(y,z), f'_{16}(x,y,z), f_6(f_5(x,z), f_5(y,z)), y)$$

die Eigenschaft $f'_{17}\begin{pmatrix}0\,0\,2\\0\,2\,2\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}0\,2\\1\,0\end{pmatrix}$. Wir können also entweder $r := f'_{17}$ wählen, oder mit Hilfe der bereits konstruierten Funktionen sowie der Funktion f_{18} die Funktion

$$\begin{aligned}&f'_{18}(x,y,z) :=\\ &f_{18}(x, f_5(x,z), z, f'_{17}(x,y,z), f_6(f_5(x,z), f_5(y,z)), f_5(y,z), f'_{16}(x,y,z), y) \in [A]\end{aligned}$$

bilden, die die gewünschte Eigenschaft von r hat.

Fall 1.2: $f'_{16}\begin{pmatrix}0\,0\,2\\0\,2\,2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Mittels f_{19} läßt sich dieser Fall auf den Fall 1.1 wie folgt zurückführen:

$$f'_{19}(x,y,z) := f_{19}(x, f_5(x,z), z, f'_{16}(x,y,z), f_6(f_5(x,z), f_5(y,z)), y, f_5(y,z))$$

$$f'_{19}\begin{pmatrix}0\,0\,2\\0\,2\,2\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}2\,2\\0\,1\end{pmatrix}.$$

Damit ist (7) bewiesen und (nach dem eingangs Bemerkten) (6) für $\{\alpha,\beta\} = \{0,2\}$ im Fall 1 gezeigt.

Fall 2: $f_5(2,0) = 1$.

Die Funktion $f'_6(x,y) := f_6(f_5(x,y),y)$ hat die Eigenschaft $f'_6\begin{pmatrix}0\,2\\2\,0\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}0\,0\\0\,1\end{pmatrix}$. Falls

$f_6'\begin{pmatrix}0\ 2\\2\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ist, können wir wie im Fall 1 weiter verfahren. Ist $f_6'\begin{pmatrix}0\ 2\\2\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, kann man die Funktion $f_5'(x,y) := f_5(f_6'(x,y),y)$ bilden, für die $f_5'\begin{pmatrix}0\ 2\\2\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, womit auch dieser Fall auf den Fall 1 zurückführbar ist.

Fall 3: $f_5(2,0) = 2$.

Bildet man $f_{15}'(x,y) := f_{15}(x,y,f_5(x,y),f_5(y,x))$, so gilt $f_{15}'\begin{pmatrix}0\ 2\\2\ 0\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}0\ 0\ 1\ 1\ 2\\0\ 1\ 0\ 1\ 2\end{pmatrix}$, womit wir entweder weiter wie unter Fall 1 oder 2 verfahren können, oder $f_{15}'\begin{pmatrix}0\ 2\\2\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ haben. Mit einer solchen Funktion f_{15}' können wir jedoch die Superposition $f_{13}'(x,y) := f_{13}(x,y,f_5(x,y),f_5(y,x),f_{15}'(x,y)) \in [A]$ bilden, die die Eigenschaft $f_{13}'\begin{pmatrix}0\ 2\\2\ 0\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}0\ 0\ 1\ 1\\0\ 1\ 0\ 1\end{pmatrix}$ besitzt, womit der Fall 3 auf den Fall 1 oder 2 zurückführbar ist.

Folglich ist (7) bewiesen und damit auch (6) im Fall $\{\alpha,\beta\} = \{0,2\}$ gezeigt.

Analog beweist man (6) für $\{\alpha,\beta\} = \{1,2\}$, womit die Bedingung (i) aus Lemma 3 von $[A]$ erfüllt wird.

Daß auch (ii) aus Lemma 3 für $[A]$ gilt, soll als nächstes gezeigt werden. Wir beginnen mit dem Beweis von

$$\begin{array}{l}\forall(\alpha,\beta) \in E_2 \times E_3:\ \exists G_{\alpha,\beta} \in [A]:\\ G_{\alpha,\beta}(0,1) = G_{\alpha,\beta}(1,0) = \alpha \quad \wedge \quad G_{\alpha,\beta}(0,2) = G_{\alpha,\beta}(2,0) = \beta\,.\end{array} \tag{8}$$

Nach (6) und Lemma 4 gehören für gewisse $a,b \in E_3$, $c,d,e \in E_2$ zu $[A]$ Funktionen der Art

$$G_{0,a},\ G_{1,b},\ G_{c,0},\ G_{e,2},\ G_{d,1},\ (\ G_{d,1}(x,y) := f_5(G_{c,0}(x,y),G_{e,2}(x,y))\ )\,.$$

Für (c,d) sind folgende 4 Fälle möglich:

Fall 1: $(c,d) = (0,0)$.

1.1: Falls $b \in \{0,1\}$, können wir mit Hilfe einer Funktion $h_3^3 \in [A]$, die $h_3\begin{pmatrix}0\ 0\ 1\\0\ 1\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\overline{b}\end{pmatrix}$ ($\{b,\overline{b}\} = E_2$) erfüllt, die Superposition $h_4(x,y) := h_3(G_{0,0}(x,y),G_{0,1}(x,y),G_{1,b}(x,y))$ bilden und $G_{1,\overline{b}} := h_4$ wählen, womit (8) für $(\alpha,\beta) \in E_2^2$ im Fall 1.1 gezeigt ist. Da auch $G_{e,2} \in [A]$ für ein gewisses $e \in E_2$ ist, folgt aus

$$\begin{array}{l}G_{1,2}(x,y) = f_9(G_{0,0}(x,y),G_{0,1}(x,y),G_{1,0}(x,y),G_{1,1}(x,y),G_{0,2}(x,y))\,,\\ G_{0,2}(x,y) = f_{10}(G_{0,0}(x,y),G_{0,1}(x,y),G_{1,0}(x,y),G_{1,1}(x,y),G_{1.2}(x,y))\end{array}$$

die Gültigkeit von (8) im Fall 1.1.

1.2 Der Fall $b = 2$ kann mit Hilfe der Funktionen f_{20} und f_{11} auf den Fall 1.1 wie folgt zurückgeführt werden:
Mit der Superpositionsbildung $f'_{20}(x, y) := f_{20}(G_{0,0}(x, y), G_{0,1}(x, y), G_{1,2}(x, y))$ können wir eine Funktion der Art $G_{0,2}$, $G_{1,0}$ oder $G_{1,1}$ erhalten. Falls $f'_{20} \in \{G_{1,0}, G_{1,1}\}$, kann wie im Fall 1.1 weiter verfahren werden. Ist $f'_{20} = G_{0,2}$, erhält man durch Bildung von $f'_{11}(x, y) := f_{11}(G_{0,0}(x, y), G_{0,1}(x, y), G_{0,0}(x, y), G_{1,2}(x, y))$ eine Funktion der Art $G_{1,0}$ oder $G_{1,1}$.

Fall 2: $(c, d) = (1, 1)$.
Dieser Fall läßt sich analog zu Fall 1 behandeln, indem man für die Funktion $G_{0,a}$ die Fälle 2.1: $a \in E_2$ und 2.2: $a = 2$ unterscheidet und die Funktionen f_9, f_{10}, f_{21} und f_{12} benutzt.

Fall 3: $(c, d) = (0, 1)$.
Wegen $f_{22}(G_{0,0}, G_{1,1}, G_{0,2}) \in \{G_{0,1}, G_{1,0}, G_{1,2}\}$, $f_{23}(G_{0,0}, G_{1,1}, G_{1,2}) \in \{G_{0,1}, G_{1,0}, G_{0,2}\}$ und $f_{24}(G_{0,0}, G_{1,1}, G_{0,2}, G_{1,2}) \in \{G_{0,1}, G_{1,0}\}$, ist dieser Fall auf Fall 1 oder 2 zurückführbar.

Fall 4: $(c, d) = (1, 0)$.
Mit Hilfe von Funktionen aus $A \cap Pol_3\{0, 1\}$ ist dieser Fall ebenfalls auf einen der vorher betrachteten zurückführbar.

Damit ist (8) bewiesen.

Analog beweist man

$$\begin{aligned}&\forall(\alpha, \beta) \in E_2 \times E_3 : \ \exists H_{\alpha,\beta} \in [A] : \\ &H_{\alpha,\beta}(0, 1) = H_{\alpha,\beta}(1, 0) = \alpha \quad \wedge \quad H_{\alpha,\beta}(1, 2) = H_{\alpha,\beta}(2, 1) = \beta \, .\end{aligned} \tag{9}$$

Wie im Beweis von Lemma 4 gezeigt wurde, folgt aus (8) und (9)

$$\begin{aligned}&\forall(\alpha, \beta) \in E_2 \times E_3 : \ \exists \gamma, \delta \in E_3 : \\ &g_{\alpha,\beta,\gamma}, \ g_{\alpha,\delta,\beta} \in [A] \, .\end{aligned} \tag{10}$$

Speziell gehören zu $[A]$ damit auch die Funktionen $g_1 := g_{0,0,\gamma_1}$, $g_2 := g_{0,2,\gamma_2}$, $g_3 := g_{1,0,\gamma_3}$, und $g_4 := g_{1,2,\gamma_4}$ für gewisse $\gamma_1, ..., \gamma_4 \in E_3$. Es genügt, $\gamma_1 = 0$ zu betrachten, da man in den Fällen $\gamma_1 \in \{1, 2\}$ die Funktion $g_{0,0,0}$ wie folgt erhalten kann:

$$\begin{aligned} g_{0,0,0}(x, y) &= g_{0,0,1}(f_6(g_{0,0,1}(x, y), y), f_6(g_{0,0,1}(x, y), x)) \, , \\ g_{0,0,0}(x, y) &= g_{0,0,2}(f_6(x, g_{0,0,2}(x, y)), f_6(y, g_{0,0,2}(x, y)) \, . \end{aligned}$$

Nach diesen Vorbereitungen ist es jetzt nicht schwer die Funktionen der Art $s_{a,b}$ aus der Bedingung (ii) von Lemma 4 zu konstruieren:
Es gilt $s_{1,0}(x, y) = g_2(g_2(g_1(x, y), y), g_2(g_1(x, y), x)) \in [A]$ sowie
$s_{2,0}(x, y) = g_3(g_3(g_1(x, y), y), g_3(g_1(x, y), x) \in [A]$. Zwecks Nachweis von $s_{1,2}$ in $[A]$ betrachten wir nochmals f_{22}, für die wir o.B.d.A. $f_{22}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ annehmen können. (Falls

$f_{22}\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,1\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, so erhält man durch Bildung von $f'_{22}(x,y,z) :=$ $t(x,y,f_{22}(x,y,z))$ eine Funktion, für die $f'_{22}\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,1\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt. Ist $f_{22}\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,1\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, so läßt sich dieser Fall auf die vorher betrachteten durch Bildung der Funktion $f'_{22}(x,y,z) :=$ $f_6(y, f_{22}(x,y,z))$ zurückführen.)

Es gilt dann $f_{22}(g_1(x,y), s_{2,0}(x,y), s_{1,0}(x,y)) \in \{s_{2,1}, g_{0,1,1}, g_{0,2,1}\}$, $s_{2,1}(x,y) = g_1(s_{2,0}(x,y), g_{0,1,1}(x,y))$ und $s_{2,1}(x,y) = g_3(g_1(x,y), g_{0,2,1}(x,y))$. Also gehört auch $s_{2,1}$ zu $[A]$ und wir können mit Hilfe dieser Funktion auch $g_{1,1,1}(x,y) = g_3(f_5(g_1(x,y), s_{1,0}(x,y)), s_{2,0}(x,y)) \in [A]$ und $s_{0,1}(x,y) = H_{1,2}(g_{1,1,1}(x,y), s_{1,0}(x,y)) \in [A]$ zeigen. Zum Beweis von $s_{0,2}, s_{1,2} \in [A]$ benötigen wir noch Funktionen q_a $(a \in E_2)$ mit der Eigenschaft $q_a\begin{pmatrix} 0\,2\,0 \\ 0\,2\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix}$, die sich wie folgt in $[A]$ nachweisen lassen:

O.B.d.A. können wir für die Funktion f_7 die Eigenschaft $f_7\begin{pmatrix} 0\,1\,2\,0\,1 \\ 0\,1\,2\,1\,0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 2\,2 \end{pmatrix}$ annehmen. Bildet man mit Hilfe der bereits in $[A]$ nachgewiesenen Funktionen die Funktion $f'_7(x,y,z) := f_7(x, g_{1,1,1}(x,z), y, z, t(x,y,z))$, so hat diese Funktion entweder die gewünschte Eigenschaft von q_0 und man erhält q_1 durch Bildung von $q_1(x,y) := f_5(f'_7(x,y,z), y)$, oder wir können $q_1 := f'_7$ und $q_0(x,y,z) := f_6(f'_7(x,y,z), y)$ wählen. Folglich gehören zu $[A]$ auch die Funktionen

$$g_{1,0,0}(x,y) = t(g_{0,0,0}(x,y), s_{2,0}(x,y), s_{2,1}(x,y))\,,$$

$$g_{1,1,0}(x,y) = t(g_{0,0,0}(x,y), s_{2,0}(x,y), f_5(g_{0,0,0}(x,y), s_{1,0}(x,y))\,,$$

$$s_{0,2}(x,y) = q_1(g_{1,0,0}(x,y), s_{0,1}(x,y), g_{1,1,0}(x,y))\,,$$

$$s_{1,2}(x,y) = q_0(g_{0,0,0}(x,y), s_{1,0}(x,y), s_{2,1}(x,y))\,.$$

Damit erfüllt $[A]$ auch die Bedingung (ii) von Lemma 3 und es gilt (unter Verwendung von Lemma 2,(b)) $[A] = T_{0,1;0;1;2}$.

Die paarweise Unvergleichbarkeit (bezüglich Inklusion) der Klassen (7) - (13) ist der Tabelle 1 zu entnehmen, deren idempotente Funktionen in Tabelle 2 definiert sind. Die paarweise Unvergleichbarkeit dieser Klassen mit denen unter (1) - (6) angegebenen und die Unvergleichbarkeit dieser Klassen untereinander prüft man leicht nach.

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}
(7)	−	−	+	+	−	+	+	−	−	−
(8)	−	−	+	+	+	−	−	−	−	−
(9)	+	−	+	+	−	−	+	−	−	+
(10)	−	+	+	+	−	+	−	−	+	−
(11)	+	−	+	−	−	+	+	+	−	+
(12)	−	+	−	+	−	+	+	+	+	−
(13)	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+

Tabelle 1

x	y	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}
0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0
0	2	0	1	0	1	0	2	2	1	2	0
2	0	0	1	0	1	1	2	2	2	2	2
1	2	2	2	0	1	2	2	2	2	1	2
2	1	2	2	0	1	1	2	2	2	2	2

Tabelle 2

■

Satz 7 *Sei* $\{a,b,c\} := E_3$. $T_{a,b;a,c;0;1;2} := Pol_3\{a,b\} \cap Pol_3\{a,c\} \cap I$ *besitzt genau* 17 *maximale Klassen:*

(1) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$,

(2) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$,

(3) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$,

(4) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & b & b \end{pmatrix}$,

(5) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & c \\ c & a \end{pmatrix}$,

(6) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & c \\ a & c & a \end{pmatrix}$,

(7) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} c & a & c \\ c & c & a \end{pmatrix}$,

(8) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & c \\ a & c & c \end{pmatrix}$,

(9) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3\{b,c\}$,

(10) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix}$,

(11) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} b & a \\ a & c \end{pmatrix}$,

(12) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & a & c \end{pmatrix}$,

(13) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & b \\ a & a & c \end{pmatrix}$,

(14) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & c & c \end{pmatrix}$,

(15) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & b \\ c & a & c \end{pmatrix}$,

(16) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & b & c \end{pmatrix}$,

(17) $T_{a,b;a,c;0;1;2} \cap Pol_3 \begin{pmatrix} a & c & a \\ a & c & b \end{pmatrix}$.

Beweis: O.B.d.A. seien $a = 0$, $b = 1$ und $c = 2$. Mit A bezeichnen wir in diesem Beweis eine Teilmenge von $T_{0,1;0,2;0;1;2}$, die keine Teilmenge der unter (1) bis (17) aufgezählten Teilklassen von $T_{0,1;0;1;2}$ ist. Dann gehören zu $[A]$ gewisse Funktionen $f_1, f_2, ..., f_{17}$ mit der im Teil I vereinbarten Eigenschaft (*).

Wegen Lemma 5, (l)-(o) und den obigen Klassen (4), (8) und (12) findet man in $[A]$ gewisse

Funktionen $f_{18} - f_{21}$ mit

$$f_{18}\begin{pmatrix}0\,1\,2\,0\,1\,1\\0\,1\,2\,2\,0\,2\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}2\,0\,2\\0\,1\,1\end{pmatrix},\ f_{19}\begin{pmatrix}0\,1\,2\,0\,2\,1\,1\\0\,1\,2\,2\,0\,0\,2\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}0\,2\\1\,1\end{pmatrix},$$
$$f_{20}\begin{pmatrix}0\,1\,2\,0\,2\,1\,0\,1\\0\,1\,2\,2\,0\,0\,1\,2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ f_{21}\begin{pmatrix}0\,1\,2\,0\,1\,0\,1\\0\,1\,2\,1\,0\,2\,2\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}2\,2\\0\,1\end{pmatrix}.$$

Wegen Lemma 2,(a), der Funktion f_9 und Lemma 3 genügt es, für den Beweis von $[A] = T_{0,1;0,2;0;1;2}$ zu zeigen, daß A die Voraussetzungen (i) und (ii) von Lemma 3 erfüllt. Wegen Lemma 2.3 (Teil I) und obigen Klassen (1) – (8) haben wir

$$\begin{array}{l}\forall\{\alpha,\beta\} \in \{\{0,1\},\{0,2\}\}:\\ \forall g^n \in P_{\{\alpha,\beta\}} \cap Pol_3\{\alpha\}\times\{\beta\}\ \exists G^n \in [A]:\ \forall \mathbf{x} \in \{\alpha,\beta\}^n:\ g(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}).\end{array} \tag{11}$$

Wir überlegen uns als erstes, daß (11) auch für $\{a,b\} = \{1,2\}$ gilt. Um Lemma 2.3 (Teil I) anwenden zu können, weisen wir weiter unten Funktionen d^2, k^2 und r^3 in $[A]$ mit

$$d\begin{pmatrix}1\,2\\2\,1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\ k\begin{pmatrix}1\,2\\2\,1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ r\begin{pmatrix}1\,2\,1\\1\,2\,2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \tag{12}$$

nach. Da d, k, r idempotent sind, gehören die Funktionen d, k sowie r' mit $r'(x,y,z) := r(k(x,z),d(y,z),z))$ und $r'\begin{pmatrix}1\,2\,1\\1\,2\,2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ zu $[A] \cap Pol_3\{1,2\}$, woraus sich nach Lemma 2.3 (Teil I) die Aussage (11) für $\{a,b\} = \{1,2\}$ aus (12) ergibt.

Für die Funktion f_9 haben wir $f_9\begin{pmatrix}1\,2\\2\,1\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}0\,0\,0\\0\,1\,2\end{pmatrix}$. Falls $f_9\begin{pmatrix}1\,2\\2\,1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\alpha\end{pmatrix}$ $(\alpha \in \{1,2\})$ ist, erhält man mit Hilfe einer Funktion $h_1^2 \in [A]$, die $h_1\begin{pmatrix}0\,\alpha\\\alpha\,0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ erfüllt, eine Funktion $f_9'(x,y) := h_1(f_9(x,y),f_9(y,x)) \in [A]$ mit $f_9'\begin{pmatrix}1\,2\\2\,1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Also können wir o.B.d.A. $f_9'\begin{pmatrix}1\,2\\2\,1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ annehmen.

Die Funktion $f_{10}'(x,y) := f_{10}(f_9(x,y),x)$ hat die Eigenschaft $f_{10}'\begin{pmatrix}1\,2\\2\,1\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}0\,1\\2\,0\end{pmatrix}$. Ist $f_{10}'\begin{pmatrix}1\,2\\2\,1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, so erhält man die gesuchten Funktionen d und k wie folgt als Superpositionen über A: $d(x,y) := h_2(f_{10}'(x,y),f_{10}'(y,x))$ ($h_2 \in [A]$, $h_2\begin{pmatrix}0\,2\\2\,0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$), $f_{14}'(x,y) := f_{14}(f_9(x,y),f_{10}'(x,y),x)$, $k(x,y) := h_3(f_{14}'(x,y),f_{14}'(y,x))$ ($h_3 \in [A]$, $h_3\begin{pmatrix}0\,1\\1\,0\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$). Gilt $f'_{10}\begin{pmatrix} 1\ 2 \\ 2\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, so erhalten wir k und d analog:
$k(x,y) := h_3(f'_{10}(x,y), f'_{10}(y,x))$, $f'_{13}(x,y) := f_{13}(f_9(x,y), f'_{10}(x,y), x)$,
$d(x,y) := h_2(f'_{13}(x,y), f'_{13}(y,x))$.
Eine nichtmonotone Funktion r läßt sich wie folgt in $[A]$ nachweisen: Die Funktion $f'_{18}(x,y,z) := f_{18}(f_9(x,y), x, y, f_9(y,z), f_9(x,z), z)$ hat die Eigenschaft $f'_{18}\begin{pmatrix} 1\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 2\ 0\ 2 \\ 0\ 1\ 1 \end{pmatrix}$. Also kann man $r := f'_{18}$ wählen, oder es gilt $f'_{18}\begin{pmatrix} 1\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 2\ 0 \\ 0\ 1 \end{pmatrix}$. Ist $f'_{18}\begin{pmatrix} 1\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, so erhält man durch
$f'_{19}(x,y,z) := f_{19}(f_9(x,y), x, y, f_9(y,z), f'_{17}(x,y,z), f_9(x,z), z)$ eine Funktion mit
$f'_{19}\begin{pmatrix} 1\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0\ 2 \\ 1\ 1 \end{pmatrix}$.

Falls $f'_{19}\begin{pmatrix} 1\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist, kann man

$r(x,y,z) := f_{20}(f_9(x,y), x, y, f_9(y,z), f'_{17}(x,y,z), f_9(x,z), f_{19}(x,y,z), z)$ wählen. Ansonsten sei $r := f'_{19}$.
Im Fall $f'_{18}\begin{pmatrix} 1\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ läßt sich unter Verwendung von f_{21} und f_{20} auf analoge Weise eine Funktion r konstruieren.

Damit ist (12) gezeigt, womit $[A]$ die Bedingung (i) aus Lemma 3 erfüllt.

Daß auch (ii) aus Lemma 3 von $[A]$ erfüllt wird, soll als nächstes gezeigt werden. Wir beginnen mit dem Beweis von

$$\begin{aligned} &\forall(\alpha,\beta) \in E_2 \times \{0,2\}\ \exists G_{\alpha,\beta} \in [A]: \\ &G_{\alpha,\beta}(0,1) = G_{\alpha,\beta}(1,0) = \alpha\ \wedge\ G_{\alpha,\beta}(0,2) = G_{\alpha,\beta}(2,0) = \beta. \end{aligned} \tag{13}$$

Wegen Lemma 4 haben wir für gewisse $p,q \in \{0,2\}$, $r,s \in \{0,1\}$: $G_{0,p}, G_{1,q}, G_{r,0}, G_{s,2} \in [A]$. Wir betrachten die Relation $\varrho := \begin{pmatrix} 0\ 1\ r\ s \\ p\ q\ 0\ 2 \end{pmatrix}$. Durchmustern der möglichen Fälle liefert:

$$\varrho \in \left\{ \begin{pmatrix} 0\ 1 \\ 0\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\ 0 \\ 0\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\ 1\ 1 \\ 0\ 0\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\ 0\ 1 \\ 0\ 2\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\ 1\ 1 \\ 2\ 0\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\ 0\ 1\ 1 \\ 0\ 2\ 0\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Falls $\varrho = \begin{pmatrix} 0\ 1 \\ 0\ 2 \end{pmatrix}$ ist, erhalten wir durch $f'_{10}(x,y) := f_{10}(G_{0,0}(x,y), G_{1,2}(x,y))$ ($\in [A]$) eine Funktion mit der Eigenschaft $f'_{10} \in \{G_{0,2}, G_{1,0}\}$. Wegen
$G_{1,0}(x,y) = f_{14}(G_{0,0}(x,y), G_{0,2}(x,y), G_{1,2}(x,y))$ und

$G_{0,2}(x,y) = f_{12}(G_{0,0}(x,y), G_{1,0}(x,y), G_{1,2}(x,y))$ gilt (13) für $\varrho = \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,2 \end{pmatrix}$. Die anderen noch zu untersuchenden 6 Fälle für ϱ lassen sich unter Verwendung der Funktionen $f_{11}, f_{12}, ..., f_{17}$ analog behandeln. Also gilt (13).

Aus (13) ergibt sich dann, daß die Funktionen $g_1 := g_{0,0,\gamma_1}$, $g_2 := g_{0,2,\gamma_2}$, $g_3 := g_{1,0,\gamma_3}$ und $g_4 := g_{1,2,\gamma_4}$ für gewisse $\gamma_1, ..., \gamma_4 \in E_3$ zu $[A]$ gehören (siehe Beweis von Lemma 4). Wie im Beweis von Satz 6 kann man sich überlegen, daß es genügt, $\gamma_1 = 0$ zu betrachten. Mit Hilfe der Funktionen $g_1(= g_{0,0,0})$, g_2, g_3, g_4 läßt sich dann zunächst
$s_{1,0}(x,y) = g_2(g_2(g_1(x,y),y), g_2(g_1(x,y),x)) \in [A]$ sowie
$s_{2,0}(x,y) = g_3(g_3(g_1(x,y),y), g_3(g_1(x,y),x) \in [A]$ zeigen. Zwecks Nachweis von $s_{2,1}$ in $[A]$ betrachten wir die Funktion f_{16}, für die $f_{16}\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,1\,2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0\,1\,1 \\ 1\,0\,2 \end{pmatrix}$ gilt. Falls $f_{16}\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,1\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, erhält man durch Bildung von $f'_{16}(x,y,z) := h_4(x,y,f_{16}(x,y,z))$ (mit $h_4 \in [A]$ und $h_4\begin{pmatrix} 0\,1\,1 \\ 0\,1\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) eine Funktion, für die $f'_{16}\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,1\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt. Ist $f_{16}\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,1\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, so läßt sich dieser Fall auf die vorher betrachteten durch Bildung der Funktion $f''_{16}(x,y,z) := f_9(y, f_{16}(x,y,z))$ zurückführen. Also genügt es, nur den Fall $f_{16}\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,1\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu betrachten. Es gilt dann $f_{16}(g_1(x,y), s_{2,0}(x,y), s_{1,0}(x,y)) \in \{s_{2,1}, g_{0,2,1}\}$ und $s_{2,1}(x,y) = g_3(g_1(x,y), g_{0,2,1}(x,y))$. Also gehört auch $s_{2,1}$ zu $[A]$.

Die Funktion f_{17} hat die Eigenschaft $f_{17}\begin{pmatrix} 0\,2\,0 \\ 0\,2\,1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0\,2\,2 \\ 2\,0\,1 \end{pmatrix}$. Falls $f_{17}\begin{pmatrix} 0\,2\,0 \\ 0\,2\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, erhält man durch Bildung von $f'_{17}(x,y,z) := h_5(x,y,f_{17}(x,y,z))$ mit $h_5 \in [A]$, $h_5\begin{pmatrix} 0\,2\,2 \\ 0\,2\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Funktion, für die $f'_{17}\begin{pmatrix} 0\,2\,0 \\ 0\,2\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt. Ist $f_{17}\begin{pmatrix} 0\,2\,0 \\ 0\,2\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, so läßt sich dieser Fall auf die vorher betrachteten durch Bildung der Funktion

$f''_{17}(x,y,z) := f_9(f_{17}(x,y,z),y)$ zurückführen. Also genügt es, nur den Fall $f_{17}\begin{pmatrix} 0\ 2\ 0 \\ 0\ 2\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ zu betrachten. Damit gilt $s_{1,2}(x,y) = f_{17}(g_1(x,y), s_{1,0}(x,y), s_{2,1}(x,y)) \in [A]$. Falls in g_4 $d = 0$ ist, erhält man $s_{0,1}$ und $s_{0,2}$ wie folgt: $s_{0,1}(x,y) = g_4(g_4(x,y), s_{1,0}(x,y))$, $s_{0,2}(x,y) = g_4(g_4(x,y), s_{2,0}(x,y))$. Im Fall $d = 1$ haben wir $g_4 = s_{0,2}$ und wir erhalten $s_{0,1}$ durch $s_{0,1}(x,y) = g_4(h_6(g_1(x,y), s_{2,0}(x,y), s_{2,1}(x,y)), s_{1,2}(x,y)) \in [A]$, wobei $h_6 \in [A]$ mit $h_6\begin{pmatrix} 0\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ist $d = 2$, so haben wir $g_4 = s_{0,1}$ und wir erhalten $s_{0,2}$ durch

$s_{0,2}(x,y) = g_4(h_7(g_1(x,y), s_{1,0}(x,y), s_{1,2}(x,y)), s_{2,0}(x,y)) \in [A]$, wobei $h_7 \in [A]$ mit
$h_7\begin{pmatrix} 0\ 2\ 0 \\ 0\ 2\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Damit erfüllt $[A]$ auch die Bedingung (ii) von Lemma 3 und es gilt (unter Verwendung von Lemma 2,(a)) $[A] = T_{0,1;0,2;0;1;2}$.

Die paarweise Unvergleichbarkeit (bezüglich Inklusion) der Klassen (10) - (17) ist der Tabelle 3 zu entnehmen, deren Funktionen in Tabelle 4 definiert sind. Die paarweise Unvergleichbarkeit dieser Klassen mit denen unter (1) - (9) angegebenen und die Unvergleichbarkeit dieser Klassen untereinander prüft man leicht nach.

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9
(10)	+	+	−	−	−	−	+	+	+
(11)	−	−	+	+	+	+	−	−	+
(12)	+	+	+	+	+	+	−	−	−
(13)	+	+	−	−	+	+	+	+	−
(14)	+	+	+	+	−	−	+	+	−
(15)	−	−	+	+	+	+	+	+	−
(16)	−	+	−	+	+	−	+	−	−
(17)	+	−	−	+	+	−	−	+	−

Tabelle 3

x	y	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	2	0	0	2	2	0	0	2	2
2	0	0	0	2	2	0	0	2	2
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	1	2	1	2	1	2	1	2

Tabelle 4

■

Satz 8 *$T := Pol_3\{0,1\} \cap Pol_3\{0,2\} \cap Pol_3\{1,2\}$ besitzt genau 30 maximale Klassen:*

$$
\begin{array}{lll}
(1)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}, & (2)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 0\,2 \\ 2\,0 \end{pmatrix}, & (3)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 0\,2 \\ 2\,0 \end{pmatrix}, \\
(4)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 0\,0\,1 \\ 0\,1\,1 \end{pmatrix}, & (5)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 0\,0\,2 \\ 0\,2\,2 \end{pmatrix}, & (6)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 1\,1\,2 \\ 1\,2\,2 \end{pmatrix}, \\
(7)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix}, & (8)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 0\,2\,0 \\ 0\,0\,2 \end{pmatrix}, & (9)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 1\,2\,1 \\ 1\,1\,2 \end{pmatrix}, \\
(10)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 1\,0\,1 \\ 1\,1\,0 \end{pmatrix}, & (11)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 2\,0\,2 \\ 2\,2\,0 \end{pmatrix}, & (12)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 2\,1\,2 \\ 2\,2\,1 \end{pmatrix}, \\
(13)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,2 \end{pmatrix}, & (14)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 1\,2 \\ 1\,0 \end{pmatrix}, & (15)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 2\,0 \\ 2\,1 \end{pmatrix}, \\
(16)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,2 \end{pmatrix}, & (17)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 1\,0 \\ 2\,1 \end{pmatrix}, & (18)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 2\,1 \\ 0\,2 \end{pmatrix}, \\
(19)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,0\,2 \end{pmatrix}, & (20)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 1\,2\,1 \\ 1\,1\,0 \end{pmatrix}, & (21)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 2\,0\,2 \\ 2\,2\,1 \end{pmatrix}, \\
(22)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 0\,1\,1 \\ 0\,0\,2 \end{pmatrix}, & (23)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 1\,2\,2 \\ 1\,1\,0 \end{pmatrix}, & (24)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 2\,0\,0 \\ 2\,2\,1 \end{pmatrix}, \\
(25)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 0\,0\,1 \\ 0\,2\,2 \end{pmatrix}, & (26)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 1\,1\,2 \\ 1\,0\,0 \end{pmatrix}, & (27)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 2\,2\,0 \\ 2\,1\,1 \end{pmatrix}, \\
(28)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 0\,1\,1 \\ 2\,0\,2 \end{pmatrix}, & (29)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 1\,2\,2 \\ 0\,1\,0 \end{pmatrix}, & (30)\ T \cap Pol\begin{pmatrix} 2\,0\,0 \\ 1\,2\,1 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Beweis: Mit A bezeichnen wir in diesem Beweis eine Teilmenge von T, die keine Teilmenge der unter (1) bis (30) aufgezählten Teilklassen von T ist. Dann gehören zu $[A]$ gewisse Funktionen $f_1, f_2, ..., f_{30}$ mit der im Teil I vereinbarten Eigenschaft (*).
Zum Beweis von $[A] = T$ zeigen wir, daß A die Voraussetzungen (i) und (ii) von Lemma 3 erfüllt.
Wegen $f_1, ..., f_{12} \in [A]$ und Lemma 2.3 (Teil I) gilt offenbar (i).
Analog zu den Überlegungen im Beweis von Satz 7 (unter Verwendung der Funktionen $f_{13}, f_{16}, f_{19}, f_{22}, f_{25}, f_{28}$) zeigt man:

$$\forall (a,b) \in \{0,1\} \times \{0,2\}\ \exists \gamma \in \{1,2\}:\ g_{a,b,\gamma} \in [A] \tag{14}$$

bzw. (unter Verwendung der Funktionen f_i mit $i \in \{14, 15, ..., 30\} \backslash \{15, 16, 19, 22, 25, 28\}$)

$$\begin{array}{l} \forall (a,c) \in \{0,1\} \times \{1,2\}\ \exists \beta \in \{0,2\}:\ g_{a,\beta,c} \in [A]\,, \\ \forall (b,c) \in \{0,2\} \times \{1,2\}\ \exists \alpha \in \{0,1\}:\ g_{\alpha,b,c} \in [A]\,. \end{array} \tag{15}$$

Als nächstes soll

$$\forall (a,b) \in \{0,1\} \times \{0,2\}:\ g_{a,b,2} \in [A] \tag{16}$$

gezeigt werden.
Sei $(a,b) \in \{0,1\} \times \{0,2\}$ beliebig gewählt. Wegen (13) und (14) haben wir dann für gewisse u, v, w mit $u, w \in \{1,2\}$, $v \in \{0,2\}$: $g_{a,b,u}$, $g_{a,v,2}$, $g_{a,2,w} \in [A]$. Für das b in (15) sind 2 Fälle möglich:

Fall 1: $b = 0$.
Bis auf $(u, v, w) \in \{(1,2,1), (1,2,2)\}$ gilt in diesem Fall $g_{a,b,2} \in \{g_{a,b,u}, g_{a,v,2}, g_{a,2,w}\}$.
1.1: Im Fall $(u, v, w) = (1,2,1)$ (d.h., $\{g_{a,b,u}, g_{a,v,2}, g_{a,2,w}\} = \{g_{a,0,1}, g_{a,2,2}, g_{a,2,1}\}$) haben wir $g_{a,0,2} = f_{27}(g_{a,2,2}, g_{a,2,1}, g_{a,0,1})$.

1.2: Falls $(u, v, w) = (1,2,2)$ (d.h., $\{g_{a,b,u}, g_{a,v,2}, g_{a,2,w}\} = \{g_{a,0,1}, g_{a,2,2}\}$), ist $f_{15}(g_{a,2,2}, g_{a,0,1}) \in \{g_{a,0,2}, g_{a,2,1}\}$, womit wir wie unter 1.1 weiter verfahren können.

Fall 2: $b = 2$.
Bis auf die Möglichkeit $(u, v, w) = (1,0,1)$ (d.h., $\{g_{a,b,u}, g_{a,v,2}, g_{a,2,w}\} = \{g_{a,2,1}, g_{a,0,2}\}$) haben wir in diesem Fall $g_{a,b,2} \in \{g_{a,b,u}, g_{a,v,2}, g_{a,2,w}\}$. Da aber $f_{18}(g_{a,0,2}, g_{a,2,1}) \in \{g_{a,2,2}, g_{a,0,1}\}$ und $f_{30}(g_{a,2,1}, g_{a,0,2}, g_{a,0,1}) = g_{a,2,2}$ gilt, ist auch im Fall 2 $g_{a,b,2}$ eine Superposition über A.
Indem man anstelle von b und $\{0,2\}$ obige Überlegungen mit a und $\{0,1\}$ durchführt, kann man

$$\forall (a,b) \in \{0,1\} \times \{0,2\} : \ g_{a,b,1} \in [A] \tag{17}$$

beweisen. Aus (15) und (16) ergibt sich dann unmittelbar, daß A die Voraussetzung (ii) von Lemma 3 erfüllt. Also gilt nach Lemma 3: $[A] = T$.
Die paarweise Unvergleichbarkeit (bez. Inklusion) der Klassen (13), (16), (19), (22), (25), (28) ist der Tabelle 5 zu entnehmen, deren idempotente Funktionen $t_1, ..., t_4$ in der Tabelle 6 angegeben sind. Die Funktion t_5 ist definiert durch

$$t_5(x,y,z) := \begin{cases} x+y+z \pmod 2 & \text{für} \quad (x,y,z) \in \{0,1\}^3, \\ x+y+z \pmod 4 & \text{für} \quad (x,y,z) \in \{0,2\}^3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die paarweise Unvergleichbarkeit sämtlicher im Satz genannten Klassen beweist man analog oder prüft man leicht nach.

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
(13)	+	−	−	+	+
(16)	−	+	+	−	+
(19)	+	+	+	−	−
(22)	+	−	+	+	−
(25)	+	+	−	+	−
(28)	−	+	+	+	−

Tabelle 5

x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	t_4
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	2	0	2	0	2
2	0	0	2	0	2
1	2	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1

Tabelle 6

■

Literatur

[1] **Lau, D.** : *Die maximalen Klassen von $\bigcap_{a \in Q} Pol_k\{a\}$ für $Q \subseteq E_k$ (Ein Kriterium für endliche semi-primale Algebren mit nur trivialen Unteralgebren).* Rostock Math. Kolloq. **48**, 27-46 (1995)

[2] **Lau, D.** : *Die maximalen Klassen von $\bigcap_{\varrho \in Q} Pol_3\varrho$ für $Q \subseteq \mathfrak{P}(\{0,1,2\})$, Teil I, II.* Rostock. Math. Kolloq. **51**, 111-126 (1997), **52**, 85-105 (1999)

[3] **Quackenbush, R.W. :** *On the composition of idempotent functions.* Algebra Universalis **1**, 7-12 (1971)

[4] **Szendrei, Á. :** *Idempotent algebras with restrictions on subalgebras.* Acta Sci. Math. (Szeged) **51**, 251-268 (1987)

[5] **Szendrei, Á. :** *A classification of strictly simple algebras with trivial subalgebras.* Demonstratio Math. **24**, 149-173 (1991)

eingegangen: 10. August 1997 **revidierte Fassung:** 29. Juni 1999

Autor:

Dietlinde Lau
Fachbereich Mathematik
Universität Rostock
D-18051 Rostock
Germany