Rostock. Math. Kolloq. **53**, 23–49 (1999)

Subject Classification (AMS)
20E15, 20D30

Roland Schmidt

Supermodulare Untergruppen von Gruppen

Nach [9] heißt das Element M des Verbandes $\mathcal{V}$ *supermodular* in $\mathcal{V}$ (kurz M sm $\mathcal{V}$), wenn für alle $B, C, D \in \mathcal{V}$ die folgende Identität erfüllt ist:

$$\begin{aligned} &(M \cup B) \cap (M \cup C) \cap (M \cup D) = \\ &\quad M \cup (B \cap C \cap (M \cup D)) \cup (C \cap D \cap (M \cup B)) \cup (B \cap D \cap (M \cup C)); \end{aligned} \tag{S}$$

M heißt *vereinigungsdistributiv* (kurz: $\cup$-distributiv) in $\mathcal{V}$, wenn für alle $B, C \in \mathcal{V}$ das distributive Gesetz

$$M \cup (B \cap C) = (M \cup B) \cap (M \cup C) \tag{D}$$

gilt. Wie man sofort sieht, ist jedes $\cup$-distributive Element eines Verbandes supermodular, aber die Umkehrung gilt nicht. Die $\cup$-distributiven Untergruppen einer Gruppe G, d.h. die $\cup$-distributiven Elemente ihres Untergruppenverbandes $L(G)$, sind seit langem gut bekannt: sie sind für Torsionsgruppen unabhängig voneinander von Higman [1] und Zappa [10] charakterisiert worden, für beliebige Gruppen von Sato [6]; siehe auch Suzuki [8, Chapter III, Theorem 6 und 7].

Wir wollen in dieser Arbeit die supermodularen Untergruppen einer Gruppe G bestimmen. Es wird sich herausstellen, daß diese genau die $\cup$-distributiven Untergruppen sind, wenn die Primzahl 2 keine Schwierigkeiten macht. Das gilt z.B. für Untergruppen ungerader Ordnung oder mit ungeradem Index in endlichen Gruppen; oder für Normalteiler M beliebiger Gruppen mit $|M| > 2$, wenn M oder G/M kein Element der Ordnung 2 enthält. In 2-Gruppen jedoch gibt es eine Vielzahl von supermodularen Untergruppen, die nicht $\cup$-distributiv sind (siehe Satz 3.3 und 3.6), so daß unsere Charakterisierung der supermodularen Untergruppen beliebiger Gruppen in den Sätzen 5.1 und 5.3 doch etwas komplizierter wird als die der $\cup$-distributiven Untergruppen von Higman, Zappa und Sato. Haupthilfsmittel beim Beweis dieser Charakterisierung ist der vielleicht etwas überraschende Satz, den wir als erstes in §2 beweisen, daß eine supermodulare Untergruppe einer Gruppe G mit jeder Untergruppe von G vertauschbar ist.

Unsere Bezeichnungen sind, von den unten aufgeführten abgesehen, die allgemein üblichen (siehe etwa [2] oder [7]). G ist immer eine Gruppe und $\mathcal{V}$ ist immer ein Verband. Für $M \leq G$ und $x \in G$ bedeutet

$$\begin{aligned}
M <\cdot G \quad &: \quad M \text{ ist eine maximale Untergruppe von } G,\\
M_G = \bigcap_{g\in G} M^g \quad &: \quad \text{das Herz von } M \text{ in } G,\\
\pi(M) \quad &= \quad \{p \in \mathbb{P} \mid \text{es existiert } x \in M \text{ mit } o(x) = p\},\\
\pi(G \setminus M) \quad &= \quad \{p \in \mathbb{P} \mid \text{es existiert ein } p\text{-Element in } G \setminus M\},\\
o(x, M) = |\langle x\rangle : M \cap \langle x\rangle| \quad &: \quad \text{die Ordnung von } x \text{ modulo } M.
\end{aligned}$$

Sind $B, C, D, M \in \mathcal{V}$, so setzen wir

$$\begin{aligned}
[B/C] &= \{X \in \mathcal{V} \mid C \leq X \leq B\} \ \text{ falls } C \leq B,\\
[B/O] &= \{X \in \mathcal{V} \mid X \leq B\},\\
[I/B] &= \{X \in \mathcal{V} \mid B \leq X\},\\
L(B, C, D; M) &= (M \cup B) \cap (M \cup C) \cap (M \cup D),\\
R(B, C, D; M) &= M \cup (B \cap C \cap (M \cup D)) \cup (C \cap D \cap (M \cup B)) \cup (B \cap D \cap (M \cup C)).
\end{aligned}$$

1 Supermodulare Elemente in Verbänden

Wir wollen in diesem Abschnitt die grundlegenden Eigenschaften supermodularer Elemente herleiten, die wir später brauchen werden. Im gesamten Paragraphen seien B, C, D und M Elemente des Verbandes $\mathcal{V}$.

Bemerkung 1.1 Da jeder der 4 Terme, die in $R(B, C, D; M)$ vereinigt werden, in jedem der 3 Terme, deren Durchschnitt in $L(B, C, D; M)$ gebildet wird, enthalten ist, gilt immer $L(B, C, D; M) \geq R(B, C, D; M)$. Somit ist genau dann (S) für B, C, D und M erfüllt, wenn

$$L(B, C, D; M) \leq R(B, C, D; M) \tag{S'}$$

gilt. Insbesondere ist M genau dann supermodular in $\mathcal{V}$, wenn für alle $B, C, D \in \mathcal{V}$ die Ungleichung (S$'$) erfüllt ist. $\square$

Da die Supermodularität durch eine Gleichung definiert ist, gilt:

Lemma 1.2 (a) *Sei M sm $\mathcal{V}$. Ist $\mathcal{T}$ ein Teilverband von $\mathcal{V}$ und $M \in \mathcal{T}$, so ist M sm $\mathcal{T}$; insbesondere ist M sm $[B/C]$, falls $C \leq M \leq B$.*

(b) *Ist $\mathcal{V}_i$ ein Verband und M_i sm $\mathcal{V}_i$ für $i = 1, \ldots, r$, so ist $M_1 \times \cdots \times M_r$ supermodular in $\mathcal{V}_1 \times \cdots \times \mathcal{V}_r$.*

Satz 1.3 *Ist M $\cup$-distributiv in $\mathcal{V}$, so ist M supermodular in $\mathcal{V}$.*

Beweis: Wir wenden (D) zweimal an und erhalten

$$(M \cup B) \cap (M \cup C) \cap (M \cup D) = M \cup (B \cap C \cap D) \leq R(B, C, D; M).$$

Damit gilt (S′), und nach 1.1 ist M sm $\mathcal{V}$. □

Korollar 1.4 *Ist $\mathcal{V}$ distributiv, so ist jedes $M \in \mathcal{V}$ supermodular in $\mathcal{V}$.*

Bekanntlich (s. [7], S. 43) heißt M *modular* in $\mathcal{V}$, wenn gilt:

(M1) $\quad U \cup (M \cap V) = (U \cup M) \cap V \quad$ für alle $U, V \in \mathcal{V}$ mit $U \leq V$ und

(M2) $\quad M \cup (U \cap V) = (M \cup U) \cap V \quad$ für alle $U, V \in \mathcal{V}$ mit $M \leq V$.

Satz 1.5 (Vasantha Kandasamy [9]). *Ist M supermodular in $\mathcal{V}$, so gilt* (M2) *für M.*

Beweis: Für $U, V \in \mathcal{V}$ mit $M \leq V$ gilt offenbar

$$L(U, U, V; M) = (M \cup U) \cap (M \cup V) = (M \cup U) \cap V$$

und

$$R(U, U, V; M) = M \cup (U \cap (M \cup V)) \cup (U \cap V \cap (M \cup U)) = M \cup (U \cap V).$$

Da M sm $\mathcal{V}$, folgt $(M \cup U) \cap V = M \cup (U \cap V)$. □

In Proposition 2 seiner Arbeit behauptet Vasantha Kandasamy, daß jede supermodulare Untergruppe modular ist. Sein Beweis ist allerdings unvollständig: es ist im wesentlichen der obige Beweis von Satz 1.5, der nirgends benutzt, daß der Verband der Untergruppenverband einer Gruppe ist, und der nur die Eigenschaft (M2) liefert. Man sieht sofort, daß im nichtmodularen Verband mit 5 Elementen das Atom, das zugleich Antiatom ist, supermodular, aber nicht modular ist. Wie wir im nächsten Paragraphen zeigen werden, gilt die Aussage von Vasantha Kandasamys Proposition 2 aber doch: supermodulare Untergruppen sind modular. Deshalb wird die folgende Vererbungseigenschaft für uns nützlich sein.

Lemma 1.6 *Ist M supermodular und modular in $\mathcal{V}$, so ist $M \cap U$ sm $[U/O]$ für alle $U \in \mathcal{V}$.*

Beweis: Seien $B, C, D \leq U$. Wir setzen $L := L(B, C, D; M)$ und

$$T := (B \cap C \cap (M \cup D)) \cup (C \cap D \cap (M \cup B)) \cup (B \cap D \cap (M \cup C)).$$

Wegen M sm $\mathcal{V}$ ist $L = M \cup T$, und da M modular in $\mathcal{V}$ ist, gilt

$$(M \cap U) \cup X = (M \cup X) \cap U$$

für alle $X \leq U$. Damit rechnet man leicht nach, daß

$$L(B, C, D; M \cap U) = L \cap U = (M \cap U) \cup T = R(B, C, D; M \cap U)$$

gilt. Somit ist $M \cap U$ supermodular in $[U/O]$. $\square$

Die Eigenschaft (M2) liefert:

Lemma 1.7 *Sei M sm $\mathcal{V}$ und $X \in \mathcal{V}$.*

(a) *Die Abbildung $\varphi : [X \cup M/M] \to [X/M \cap X]$, $B \mapsto B \cap X$ ist injektiv, und es gilt $B = M \cup (B \cap X) = M \cup B^{\varphi}$ für alle $B \in [X \cup M/M]$.*

(b) *Ist $[X/M \cap X]$ eine Kette, so auch $[X \cup M/M]$.*

(c) *Ist $M \cap X$ unterer Nachbar von X, so ist M unterer Nachbar von $X \cup M$.*

Beweis: Seien $B, C \in [X \cup M/M]$.

(a) Nach (M2) gilt $B = (M \cup X) \cap B = M \cup (X \cap B) = M \cup B^{\varphi}$; ist also $B^{\varphi} = C^{\varphi}$, so folgt $B = M \cup B^{\varphi} = M \cup C^{\varphi} = C$. Damit ist φ injektiv.

(b) Da $[X/M \cap X]$ eine Kette ist, gilt $B^{\varphi} \leq C^{\varphi}$ oder $C^{\varphi} \leq B^{\varphi}$. Mit (a) folgt $B = B^{\varphi} \cup M \leq C^{\varphi} \cup M = C$ bzw. $C \leq B$ im anderen Fall. Damit sind B und C vergleichbar, d.h., $[X \cup M/M]$ ist eine Kette.

(c) Nach (a) hat $[X \cup M/M]$ höchstens zwei Elemente, und wegen $M \cap X < X$ ist $M < X \cup M$, also M unterer Nachbar von $X \cup M$. $\square$

Um zu zeigen, daß ein Element supermodular ist, sind die folgenden Aussagen nützlich.

Lemma 1.8 (a) *Ist eines der drei Elemente B, C, D in M enthalten, so gilt (S).*

(b) *Ist M modular in $\mathcal{V}$ und $M \cup (X \cap Y) = M \cup ((M \cup X) \cap Y)$ für zwei Elemente X, Y der drei Elemente B, C, D, so gilt (S).*

(c) *Ist M modular in $\mathcal{V}$ und in einem der Elemente B, C, D enthalten, so gilt (S).*

Beweis: (a) Ist etwa $B \leq M$, so ist $M \cup B = M$ und somit $L(B, C, D; M) = M$. Damit ist (S$'$) erfüllt, und nach 1.1 gilt (S).

(b) Sei Z das dritte der Elemente B, C, D. Wenden wir (M2) mit $V = M \cup X$ und $V = M \cup Z$ an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} L(B,C,D;M) &= (M\cup X)\cap(M\cup Y)\cap(M\cup Z) \\ &= [M\cup((M\cup X)\cap Y)]\cap(M\cup Z) = [M\cup(X\cap Y)]\cap(M\cup Z) \\ &= M\cup(X\cap Y\cap(M\cup Z)) \leq R(B,C,D;M) \end{aligned}$$

Nach 1.1 gilt (S).

(c) Ist $M \leq X$, so ist $X = M \cup X$ und die Voraussetzung von (b) erfüllt. □

Wir brauchen neben 1.6 noch die folgende speziellere Vererbungseigenschaft.

Lemma 1.9 *Ist M sm $\mathcal{V}$ und $[I/M] = \{X \in \mathcal{V} \mid M \leq X\}$ eine Kette, so ist jedes $H \in [I/M]$ supermodular in $\mathcal{V}$.*

Beweis: Zu zeigen ist (S) mit H statt M. Ist eines der Elemente B, C, D in H enthalten, so gilt das nach 1.8(a). Seien also $B, C, D \not\leq H$. Dann ist $M \cup B \not\leq H$ und somit $H \leq M \cup B$, da $[I/M]$ eine Kette ist. Wegen $M \leq H$ folgt $M \cup B = H \cup B$; genauso $M \cup C = H \cup C$ und $M \cup D = H \cup D$. Damit erhalten wir

$$L(B,C,D;H) = L(B,C,D;M) = R(B,C,D;M) \leq R(B,C,D;H),$$

da $M \leq H$. Mit 1.1 folgt H sm $\mathcal{V}$. □

2 Supermodulare und permutable Untergruppen

Die Untergruppe M der Gruppe G heißt *supermodular* in G (kurz: M sm G), wenn M ein supermodulares Element des Untergruppenverbandes $L(G)$ von G ist; M heißt *permutabel* in G, wenn M mit jeder Untergruppe von G vertauschbar ist, d.h. wenn $MX = XM$ für alle $X \leq G$ gilt. Unser erstes Hauptergebnis ist, daß jede supermodulare Untergruppe permutabel ist. Wir beweisen das in zwei Schritten.

Lemma 2.1 *Ist M* sm *G und $x \in G$ mit $o(x, M) < \infty$, so ist $M\langle x\rangle = \langle x\rangle M$.*

Beweis: Wir nehmen an, das Lemma wäre falsch, und betrachten ein Gegenbeispiel (G, M, x), d.h. M sm G und $x \in G$ mit $o(x, M) < \infty$ und $M\langle x\rangle \neq \langle x\rangle M$, bei dem $o(x, M)$ möglichst klein ist; sei $X = \langle x\rangle$. Dann ist für $H = M \cup X$ auch $(H/M_H, M/M_H, xM_H)$ ein Gegenbeispiel; denn nach 1.2 ist M/M_H sm H/M_H, und wäre M/M_H mit $\langle xM_H\rangle$ vertauschbar, so folgte der Widerspruch

$$MX = MM_HX = MXM_H = XM_HM = XM.$$

Da $o(xM_H, M/M_H) = o(x, M)$ ist, können wir zu H/M_H übergehen, d.h.

$$G = M \cup X \quad \text{und} \quad M_G = 1 \tag{1}$$

annehmen. Offenbar ist $X/M\cap X$ eine endliche zyklische Gruppe. Hätte die zwei verschiedene maximale Untergruppen $X_1/M\cap X$ und $X_2/M\cap X$, so lieferte die Minimalität von $o(x, M)$, daß M mit X_1 und X_2, also auch mit $X_1 \cup X_2 = X$ vertauschbar wäre, ein Widerspruch. Es ist also $X/M\cap X$ zyklisch von Primzahlpotenzordnung und damit $[X/M\cap X]$ eine Kette; nach 1.7 ist auch $[X \cup M/M] = [G/M]$ eine Kette.

Angenommen, es existierte ein Y mit $M\cap X < Y < X$. Aus der Minimalität von $o(x, M)$ folgte dann $MY = YM =: H$. Nach 1.9 wäre H sm G, und unsere Induktionsannahme lieferte $HX = XH$ und damit

$$MX = MYX = HX = XH = XYM = XM.$$

Der Widerspruch zeigt, daß

$$M\cap X \quad \text{eine maximale Untergruppe von } X \tag{2}$$

ist. Mit 1.7(c) erhalten wir:

$$M \quad \text{ist eine maximale Untergruppe von } G. \tag{3}$$

Nun folgt

$$M\cap M^y \trianglelefteq M^y \quad \text{für alle } y \in X\,. \tag{4}$$

Denn wäre $M\cap M^y \ntrianglelefteq M^y$ für ein $y \in X$, so existierte ein $z \in M^y$ mit $(M\cap M^y)^z \nleq M\cap M^y$. Dann wären $B := (M\cap M^y)^z$, $C := \langle z\rangle$ und X wegen $z \in M^y$ und $B \leq M^y$ alle nicht in M enthalten, und mit (3) folgte $L(B, C, X; M) = G$. Wegen $y \in X$ wäre $M^y\cap X = (M\cap X)^y = M\cap X \leq M$ und somit $B\cap X \leq M$ und $C\cap X \leq M$; da auch

$$B\cap C = (M\cap M^y)^z \cap \langle z\rangle = ((M\cap M^y)\cap\langle z\rangle)^z = (M\cap M^y)\cap\langle z\rangle \leq M$$

ist, folgte $R(B, C, X; M) = M$, im Widerspruch zur Supermodularität von M. Damit ist (4) bewiesen.

Wenden wir (4) an mit $y = x$ und $y = x^{-1}$, so erhalten wir $M\cap M^x \trianglelefteq M^x$ und $M\cap M^{x^{-1}} \trianglelefteq M^{x^{-1}}$, also $M^x \cap M \trianglelefteq M$. Wegen $M\langle x\rangle \neq \langle x\rangle M$ ist $M^x \neq M$, und es folgt $M\cap M^x \trianglelefteq M\cup M^x = G$ nach (3). Da $M_G = 1$ ist, erhalten wir $M\cap M^x = 1$ und wegen $M\cap X \leq M\cap M^x$ und (2) dann

$$M\cap X = M\cap M^x = 1, \quad \text{und} \quad |X| \quad \text{ist eine Primzahl.} \tag{5}$$

Da $MX \neq XM$ ist, existiert ein $a \in M$ mit $X \neq X^a$; wegen $M \cap X = 1$ ist $M \cap X^a = 1$. Ist $B \leq G$ mit $B \cap X = 1 = B \cap X^a$ und $B \not\leq M$, so ist $L(B, X, X^a; M) = G$ und $R(B, X, X^a; M) = M$, ein Widerspruch. Es gibt also kein solches B, und daraus folgt zum einen, daß X und X^a die einzigen minimalen Untergruppen von G sind, die nicht in M enthalten sind; zum anderen erhalten wir $X^a \leq M^x$, sonst hätte $B = M^x$ wegen $M \cap M^x = 1 = M^x \cap X$ die obigen Eigenschaften. Damit ist X^a die einzige minimale Untergruppe von M^x und dann $X^{ax^{-1}}$ die einzige minimale Untergruppe von M. Folglich hat X genau 3 Konjugierte, und es ist $M = N_G(X^{ax^{-1}})$ wegen (3) und $M_G = 1$. Somit ist $|G : M| = 3$, und G ist die symmetrische Gruppe auf 3 Symbolen, doch die hat 3 minimale Untergruppen außerhalb M. Mit diesem Widerspruch ist Lemma 2.1 bewiesen. $\square$

Lemma 2.2 *Ist M sm G und existiert ein $x \in G$ mit $o(x, M) = \infty$, so ist $|M| \leq 2$ und $x \in C_G(M)$.*

Beweis: Sei $M \neq 1$ und $X = \langle x \rangle$. Aus $o(x, M) = \infty$ folgt, daß

$$M \cap X = 1 \quad \text{und} \quad X \text{ unendlich zyklisch} \tag{6}$$

ist. Die Supermodularität von M liefert dann:

$$\begin{array}{l} \text{Sind } B, C, D \leq M \cup X \ \text{ mit } B \cap C \leq M, B \cap D \leq M \ \text{ und } C \cap D \leq M, \\ \text{so ist eine der drei Gruppen } B, C, D \text{ in } M \text{ enthalten.} \end{array} \tag{7}$$

Denn die Voraussetzungen in (7) implizieren $R(B, C, D; M) = M$, während für $B \not\leq M$ nach 1.7 offenbar $M \cup B = M \cup ((M \cup B) \cap X)$ und somit $(M \cup B) \cap X \neq 1$ ist. Wäre also keine der Gruppen B, C, D in M enthalten, so wäre

$$K := ((M \cup B) \cap X) \cap ((M \cup C) \cap X) \cap ((M \cup D) \cap X) \neq 1\,,$$

da endlich viele nichttriviale Untergruppen der unendlich zyklischen Gruppe X nichttrivialen Durchschnitt haben. Mit (6) folgte

$$L(B, C, D; M) \geq M \cup K > M = R(B, C, D; M)\,,$$

ein Widerspruch. Damit ist (7) bewiesen.

Angenommen, es existiert ein $g \in (M \cup X) \setminus M$ mit $o(g, M) < \infty$. Nach 2.1 ist dann $M\langle g \rangle = \langle g \rangle M$; sei $M\langle g \rangle =: H$. Dann ist $|H : M| = |\langle g \rangle : \langle g \rangle \cap M| < \infty$, also auch H/M_H endlich. Nach 1.7 ist $H = M \cup (H \cap X)$ und wegen $M \cap X = 1$ ist $H \cap X \simeq (H \cap X)M_H/M_H$ endlich. Da X unendlich zyklisch ist, folgt $H \cap X = 1$, also der Widerspruch $H = M$. Damit haben wir

$$o(g, M) = \infty \quad \text{für alle } g \in (M \cup X) \setminus M\,. \tag{8}$$

Wir wollen zeigen, daß M von x^2 normalisiert wird. Das ist klar, wenn $M = M^x$ ist. Sei also $M \neq M^x$, etwa $M^x \not\leq M$; sonst gehen wir zu x^{-1} über. Sei $y \in X$. Nach (6) ist $M^y \cap X = (M \cap X)^y = 1$. Für $b \in M^y$ gilt dann $b \in M$ oder $b \in M^x$; denn sonst wäre $o(b, M^x) = \infty$ nach (8), also $\langle b \rangle \cap M^x = 1$, und die drei Untergruppen $B = \langle b \rangle$, $C = M^x$, $D = X$ von $M \cup X$ würden (7) verletzen. Also ist M^y die mengentheoretische Vereinigung der beiden Untergruppen $M^y \cap M$ und $M^y \cap M^x$ und somit gleich einer dieser Untergruppen, d.h. $M^y \leq M$ oder $M^y \leq M^x$. Wir benutzen dies mit $y = x^2$ und $y = x^{-1}$. Da $M^x \not\leq M$, ist $M^{x^2} \not\leq M^x$, also $M^{x^2} \leq M$. Aus $M^{x^2} \leq M$ und $M^{x^2} \not\leq M^x$ folgt $M \not\leq M^x$, also $M^{x^{-1}} \not\leq M$. Somit ist $M^{x^{-1}} \leq M^x$ und dann $M \leq M^{x^2}$. Damit ist $M = M^{x^2}$, also

$$M \trianglelefteq M\langle x^2 \rangle . \tag{9}$$

Sei $1 \neq y \in \langle x^2 \rangle$ und $1 \neq a \in C_M(y)$. Dann ist $\langle a, y \rangle = \langle a \rangle \times \langle y \rangle$ und für $B = \langle ay \rangle$, $C = \langle a^2 y \rangle$, $D = \langle y \rangle$ offenbar $L(B, C, D; M) = M\langle y \rangle$. Wäre $o(a) = \infty$, so wäre $B \cap C = B \cap D = C \cap D = 1$ und $R(B, C, D; M) = M$, ein Widerspruch. Sei also $o(a) = n$. Dann ist $B \cap C = B \cap D = \langle y^n \rangle$ und $C \cap D = \langle y^m \rangle$ mit $m = n$ für n ungerade und $m = \frac{n}{2}$ für n gerade, also $R(B, C, D; M) \leq M\langle y^m \rangle$. Es folgt $n = 2$, d.h. $o(a) = 2$ für $1 \neq a \in C_M(y)$. Existieren zwei verschiedene Involutionen a, b in $C_M(y)$, so setzen wir $B = \langle ay \rangle$, $C = \langle by \rangle$, $D = \langle y \rangle$ und erhalten wieder $L(B, C, D; M) = M\langle y \rangle$ und $R(B, C, D; M) \leq M\langle y^2 \rangle$, ein Widerspruch. Es ist also

$$|C_M(y)| \leq 2 \quad \text{für alle } 1 \neq y \in \langle x^2 \rangle . \tag{10}$$

Angenommen, $|M| > 2$. Wäre dann M endlich, so bewirkte x^2 einen Automorphismus endlicher Ordnung m auf M, d.h., es wäre $M = C_M(x^{2m})$ im Widerspruch zu (10). Somit ist M unendlich. Sei $1 \neq y \in \langle x^2 \rangle$ mit $|C_M(y)|$ maximal und sei $Y = \langle y \rangle$. Dann ist $C_M(Y_1) = C_M(Y)$ für alle $1 \neq Y_1 \leq Y$ und es folgt

$$Y \cap Y^a = 1 \quad \text{für alle } a \in M \setminus C_M(Y) . \tag{11}$$

Denn es ist $[y, a] = y^{-1} a^{-1} y a \in Y \cup Y^a \leq C_G(Y \cap Y^a)$ und $[y, a] \in M$, da $M \trianglelefteq M\langle x^2 \rangle$. Ist also $Y \cap Y^a \neq 1$, so ist $[y, a] \in C_M(Y \cap Y^a) = C_M(Y)$ und dann $[y^2, a] = [y, a]^2 = 1$, da $|C_M(Y)| \leq 2$. Also $a \in C_M(y^2) = C_M(Y)$, ein Widerspruch. Damit ist (11) gezeigt, und aus (11) folgt sofort, daß $Y^a \cap Y^b = (Y \cap Y^{ab^{-1}})^b = 1$ ist für alle $a, b \in M$ mit $ab^{-1} \notin C_M(Y)$. Da M unendlich und $C_M(Y)$ endlich ist, existieren also 3 Konjugierte B, C, D von Y unter M, die sich paarweise trivial schneiden, ein Widerspruch zu (7).

Damit ist $|M| = 2$ und M nach (8) die einzige Untergruppe der Ordnung 2 in $M \cup X$. Es folgt $x \in C_G(M)$, was zu zeigen war. □

Als unmittelbare Folgerung aus 2.1 und 2.2 erhalten wir das angekündigte Ergebnis.

Satz 2.3 *Ist M supermodular in G, so ist M permutabel in G.*

Beweis: Da eine Untergruppe, die mit gewissen Untergruppen vertauschbar ist, auch mit deren Erzeugnis vertauschbar ist, ist nur zu zeigen, daß $MX = XM$ gilt für alle zyklischen Untergruppen X von G. Ist $|X : M \cap X| < \infty$, so steht das in Lemma 2.1; ist $|X : M \cap X|$ unendlich, so ist nach Lemma 2.2 sogar $X \leq C_G(M)$, also gewiß $MX = XM$. □

Da jede permutable Untergruppe modular ist [7, Theorem 2.1.3], haben wir mit Satz 2.3 insbesondere die in §1 angekündigte Aussage bewiesen, daß jede supermodulare Untergruppe modular ist. Ferner erhalten wir mit 1.6 die folgende wichtige Vererbungseigenschaft.

Lemma 2.4 *Ist M supermodular in G und $U \leq G$, so ist $M \cap U$ supermodular in U.*

Wir wollen nun umgekehrt zeigen, daß eine permutable Untergruppe der Ordnung 2 einer beliebigen Gruppe supermodular ist. Zuerst beweisen wir ein allgemeineres Kriterium für Supermodularität.

Satz 2.5 *Sei M permutabel in G und G periodisch. Genau dann ist M supermodular in G, wenn es zu jedem H mit $M < H \leq G$ höchstens 2 zyklische Untergruppen X von Primzahlpotenzordnung gibt mit $H = MX$.*

Beweis: Ist M sm G und sind $X_i \leq G$ zyklisch von Primzahlpotenzordnung mit $X_1 \neq X_2 \neq X_3 \neq X_1$ und $M < H = MX_1 = MX_2 = MX_3$, so ist $R(X_1, X_2, X_3; M) = M \cup (X_1 \cap X_2) \cup (X_2 \cap X_3) \cup (X_1 \cap X_3)$. Da $X_i \neq X_j$ ist für $i \neq j$, gilt $X_i \cap X_j \leq \Phi(X_i)$, und somit sind alle $X_i \cap X_j$ in der M enthaltenden maximalen Untergruppe $H_0 = M\Phi(X_i)$ von H enthalten. Also

$$R(X_1, X_2, X_3; M) \leq H_0 < H = L(X_1, X_2, X_3; M),$$

ein Widerspruch.

Sei nun umgekehrt die angegebene Bedingung erfüllt und seien $B, C, D \leq G$. Sei $x \in MB \cap MC \cap MD$ von Primzahlpotenzordnung und sei $H = M\langle x \rangle$. Zu zeigen ist $x \in R(B, C, D; M)$; dann gilt (S′) und M sm G nach 1.1.

Ist $H = M$, so ist $x \in M \leq R(B, C, D; M)$. Sei also $M < H$. Dann ist wegen $H \leq MB \cap MC \cap MD$ nach Dedekind

$$H = M(H \cap B) = M(H \cap C) = M(H \cap D).$$

Da M permutabel in G ist, ist M modular in G und nach [7, Theorem 2.1.5] somit

$$[\langle x \rangle / \langle x \rangle \cap M] \simeq [H/M] \simeq [H \cap B / H \cap B \cap M] = [H \cap B / M \cap B].$$

Da $[\langle x\rangle/\langle x\rangle\cap M]$ eine Kette ist, ist es auch $[H\cap B/M\cap B]$, und es existiert ein $b\in H\cap B$ von Primzahlpotenzordnung mit $H\cap B=(M\cap B)\langle b\rangle$. Damit ist $H=M(H\cap B)=M\langle b\rangle$, und genauso existieren $c\in H\cap C$ und $d\in H\cap D$ von Primzahlpotenzordnung mit $H=M\langle c\rangle=M\langle d\rangle$. Nach Voraussetzung gibt es höchstens 2 solche Untergruppen $\langle b\rangle,\langle c\rangle,\langle d\rangle$, d.h., es ist etwa $\langle b\rangle=\langle c\rangle\leq B\cap C\cap MD$. Somit ist

$$H=M\langle b\rangle\leq M(B\cap C\cap MD)\leq R(B,C,D;M)$$

und damit $x\in R(B,C,D;M)$, was zu zeigen war. □

Satz 2.6 *Ist M permutabel in G und $|M|=2$, so ist M supermodular in G.*

Beweis: Seien $B,C,D\leq G$. Wie eben ist zu zeigen, daß jedes $x\in MB\cap MC\cap MD$ von unendlicher oder Primzahlpotenzordnung in $R(B,C,D;M)$ liegt. Sei dazu wieder $M<M\langle x\rangle=:H$. Dann ist $H=M(H\cap B)=M(H\cap C)=M(H\cap D)$. Nach 1.8(c) gilt (S) für B,C,D, wenn M in einer der Gruppen B,C,D enthalten ist; sei also $M\cap B=M\cap C=M\cap D=1$. Dann sind $H\cap B$, $H\cap C$ und $H\cap D$ Komplemente zu M in H.

Ist $o(x)=\infty$ oder $o(x)=p^n$ mit $p>2$, so ist $M\trianglelefteq H$ nach [7, 5.2.7 bzw. 5.1.5], also $H=M\times\langle x\rangle$. In einer solchen Gruppe gibt es 2 Komplemente bzw. genau ein Komplement zu M. Ist $o(x)=2^n$, so ist $|H:\langle x\rangle|=2$, also $\langle x\rangle\trianglelefteq H$ und dann H abelsch vom Typ $(2^n,2)$ oder dazu verbandsisomorph. In jedem Fall hat M höchstens 2 Komplemente in H, d.h. es muß etwa $H\cap B=H\cap C\leq B\cap C\cap MD$ und dann $x\in H=M(H\cap B)\leq R(B,C,D;M)$ sein. □

Es sei bemerkt, daß es Gruppen G mit nichtnormalen permutablen Untergruppen der Ordnung 2 und Elementen unendlicher Ordnung gibt [7, Exercise 6.3.2].

3 Supermodulare Untergruppen von p-Gruppen

Für $p>2$ lassen sich die supermodularen Untergruppen einer p-Gruppe folgendermaßen charakterisieren.

Satz 3.1 *Sei G eine p-Gruppe, $p>2$, und sei $1<M<G$. Dann sind äquivalent:*

(a) *M ist supermodular in G.*

(b) *Für jede Untergruppe X von G gilt $X\leq M$ oder $M\leq X$.*

(c) *Es gilt eine der folgenden drei Aussagen:*

  (i) *G ist zyklisch,*

  (ii) *$G\simeq Z_{p^\infty}$, die Prüfergruppe vom Typ p^∞* [5, S. 23]*,*

  (iii) *$1<M\leq Z(G)<G$ und $Z(G)=\bigcap\{\langle x\rangle\mid x\in G\setminus Z(G)\}$.*

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß (b) aus (a) folgt. Offenbar ist (b) äquivalent zur Aussage: Für jedes $x \in G \setminus M$ ist $M \leq \langle x \rangle$. Wir nehmen also an, es existiert $x \in G \setminus M$ mit $M \not\leq \langle x \rangle$, und betrachten ein solches x mit $o(x)$ minimal. Sei $X = \langle x \rangle$, $N = \langle x^p \rangle$ und $H = M \cup X$. Wegen der Minimalität von $o(x)$ ist $x^p \in M$, also $M \cap X = N <\cdot\ X$; nach 1.7 ist $M <\cdot\ H$. Wäre $N_M(X) \neq M$, so existierten $|M : N_M(X)| \geq p$ Konjugierte von X unter M; sind B, C, D drei solche Konjugierte, so folgt $L(B, C, D; M) = H$ und $R(B, C, D; M) = M$, ein Widerspruch. Also ist $X \trianglelefteq H$ und dann auch $N \trianglelefteq H$. Wäre $C_{M/N}(X/N) \neq 1$, so existierte Y mit $N <\cdot\ Y \leq M$ und XY/N elementarabelsch der Ordnung p^2. Diesmal existierten drei von Y/N verschiedene Untergruppen B/N, C/N, D/N der Ordnung p von XY/N, und es wäre wieder $L(B, C, D; M) = H$ und $R(B, C, D; M) = M$. Es ist also $C_{M/N}(X/N) = 1$, insbesondere $C_M(X) = N$ und dann M/N isomorph zu einer Untergruppe von Aut X, also endlich. Damit ist $H = MX$ endlich, also $M \trianglelefteq H$ und dann $H/N = M/N \times X/N$, im Widerspruch zu $C_{M/N}(X/N) = 1$. Damit ist (b) gezeigt.

Sei nun (b) erfüllt. Da $M < G$ ist, existiert $x \in G \setminus M$, und es folgt $M \leq \langle x \rangle$. Damit ist M zyklisch und wird von x zentralisiert; da die Elemente $x \in G \setminus M$ ganz G erzeugen, folgt $M \leq Z(G)$. Jede minimale Untergruppe von G liegt nach (b) in M, d.h., G hat nur eine minimale Untergruppe. Ist also G endlich, so ist G zyklisch. Ist $Z(G)$ unendlich, so existiert zu jedem $x \in G \setminus Z(G)$ ein $z \in Z(G)$ mit $o(x) = o(z)$; dann ist $\langle x, z \rangle$ endlich und nicht zyklisch, was nicht möglich ist, da G nur eine minimale Untergruppe hat. Also folgt $G = Z(G)$ und somit $G \simeq Z_{p^\infty}$. Ist schließlich G unendlich und $Z(G)$ endlich, so ist für jedes $x \in G \setminus Z(G)$ offenbar $\langle x \rangle Z(G)$ endlich, daher zyklisch und somit $Z(G) \leq \langle x \rangle$. Also ist $Z(G) \leq \bigcap\{\langle x \rangle \mid x \in G \setminus Z(G)\}$; die umgekehrte Inklusion gilt in jeder Gruppe. Damit ist (c) gezeigt.

Sei schließlich (c) erfüllt. In den Fällen (i) und (ii) ist $L(G)$ eine Kette. Im Fall (iii) ist für $x \in G \setminus M$ entweder $x \in Z(G)$ und dann $M \leq \langle x \rangle$, da $Z(G)$ zyklisch ist, oder $x \notin Z(G)$ und dann $M \leq Z(G) \leq \langle x \rangle$. In allen Fällen gilt (b), und aus (b) folgt $M \trianglelefteq G$ und mit 1.8 dann (a). Damit ist Satz 3.1 bewiesen. □

Die Gruppen in (iii) von Satz 3.1 haben nur eine minimale Untergruppe, nämlich $\Omega(M)$, und sind wegen $Z(G) < G$ daher unendlich. Damit haben wir das folgende Korollar, das sich natürlich auch leicht direkt beweisen läßt.

Korollar 3.2 *Sei $|G| = p^n$, $p > 2$. Existiert eine supermodulare Untergruppe M von G mit $1 < M < G$, so ist G zyklisch.*

Beispiele von Gruppen mit (iii) aus Satz 3.1 sind die von Olshanskii [4, Theorem 31.8] konstruierten erweiterten Tarskigruppen. Eine vollständige Beschreibung aller (iii) erfüllenden Gruppen ist uns nicht bekannt. Für $p = 2$ ist die Situation besser, da es hier Gruppen von

Typ (iii) nicht geben kann. Dafür gibt es erheblich mehr endliche 2-Gruppen mit supermodularen Untergruppen. Diese bestimmen wir als nächstes; wir bezeichnen mit Q_{2^n} die verallgemeinerte Quaternionengruppe der Ordnung 2^n.

Satz 3.3 *Sei G eine endliche 2-Gruppe und $1 < M < G$. Dann sind äquivalent:*

(a) *M ist supermodular in G.*

(b) *M ist permutabel in G, und ist $M <\cdot\, H \leq G$, so ist jede von M verschiedene maximale Untergruppe von H zyklisch.*

(c) *Es gilt eine der folgenden sechs Aussagen:*

- (i) *M ist permutabel in G und $|M| = 2$.*
- (ii) *G ist zyklisch.*
- (iii) *$G \simeq Q_{2^n}$ mit $n \geq 3$, und $M = Z_2(G)$, falls $n \geq 4$.*
- (iv) *$M = \Omega(G)$ und $|M| = 4$.*
- (v) *G ist abelsch vom Typ $(2^n, 2)$ mit $n \geq 3$, oder dazu verbandsisomorph, und $M = \Omega_k(G)$ für ein $k < n$.*
- (vi) *$G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1,\ b^4 = a^{2^{n-1}},\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$ mit $n \geq 3$ und $M = \Omega_2(G)$.*

Beweis: Ist M supermodular in G, so ist M nach 2.3 permutabel in G. Sei $M <\cdot\, H \leq G$ und $U \neq M$ eine nichtzyklische maximale Untergruppe von H. Dann ist $H/U \cap M$ eine Vierergruppe, und somit existiert B mit $U \cap M < B < H$ und $U \neq B \neq M$. Da U nicht zyklisch ist, existieren neben $U \cap M$ zwei weitere maximale Untergruppen C und D mit $C \cap D = C \cap (U \cap M) = D \cap (U \cap M)$. Da $M <\cdot\, H$ und $B, C, D \not\leq M$ sind, ist $L(B, C, D; M) = H$; da $B \cap U$ und $C \cap D$ in M liegen, ist $R(B, C, D; M) = M$, ein Widerspruch. Damit ist gezeigt, daß (b) aus (a) folgt.

Wir nehmen nun an, daß M die Eigenschaft (b) hat, und zeigen (c) mittels Induktion nach $|G|$. Ist $|M| = 2$, so gilt (i); sei also

$$|M| \geq 4\,. \tag{12}$$

Angenommen, es existiert $x \in G \setminus M$ mit $o(x) = 2$. Da M permutabel in G ist, ist dann $|M\langle x\rangle : M| = 2$; sei U eine x enthaltende maximale Untergruppe von $M\langle x\rangle$. Da $x \notin M$, ist $U \neq M$, nach Voraussetzung also U zyklisch. Damit ist $U \cap M = 1$ und dann $|M| = |MU : U| = 2$, im Widerspruch zu (12). Es existiert also kein solches x, d.h., es ist

$$\Omega(G) \leq M\,. \tag{13}$$

Ist M zyklisch, so besitzt G daher nur eine minimale Untergruppe, ist also zyklisch oder eine verallgemeinerte Quaternionengruppe. Ist $G \simeq Q_{2^n}$ mit $n \geq 4$, so existiert wegen $|M| \geq 4$ eine nichtzyklische Untergruppe H von G mit $M <\cdot\, H$. Nach Voraussetzung hat dann H

nur zyklische maximale Untergruppen, ist also eine Q_8. Somit ist $|M| = 4$ und $M = Z_2(G)$, da permutabel in G. Damit gilt (iii), und wir können annehmen, daß

$$M \text{ nicht zyklisch} \tag{14}$$

ist. Sei $M <\cdot\ H \leq G$. Nach (14) ist H nicht zyklisch, besitzt also mindestens 2 von M verschiedene maximale Untergruppen, die nach Voraussetzung zyklisch sind. Da die Diedergruppen, Quasidiedergruppen und verallgemeinerten Quaternionengruppen jeweils nur eine zyklische maximale Untergruppe haben, sofern sie eine nichtzyklische echte Untergruppe enthalten, folgt mit [2, S. 91]:

(15) Ist $M <\cdot\ H \leq G$, so ist H abelsch vom Typ $(2^r, 2)$ oder dazu verbandsisomorph, und $M = \Omega_{r-1}(H)$. Insbesondere ist M abelsch.

Da $|\Omega(H)| = 4$ und $\Omega(G) \leq M \leq H$ ist, gilt

$$|\Omega(G)| = 4\,. \tag{16}$$

Ist $M = \Omega(G)$, so gilt (iv). Wir können also $\Omega(G) < M$ annehmen. Nach (15) ist $M/\Omega(G)$ zyklisch. Ist ferner $g \in G \setminus M$ mit $o(g) = 4$, so ist $|M\langle g\rangle : M| = |\langle g\rangle : M \cap \langle g\rangle| = 2$; insbesondere ist $|M\langle g\rangle| \geq 2^4$ und nach (15) daher $g \in \Omega_2(M\langle g\rangle) \leq M$, ein Widerspruch. Somit ist $\Omega_2(G) \leq M$ und $M/\Omega(G)$ enthält jede minimale Untergruppe von $G/\Omega(G)$. Damit hat $G/\Omega(G)$ nur eine minimale Untergruppe, ist also zyklisch oder eine verallgemeinerte Quaternionengruppe. Im ersten Fall ist $G = \langle y\Omega(G)\rangle$ und $|G : \langle y\rangle| = |\Omega(G) : \Omega(G) \cap \langle y\rangle| = 2$, d.h., G hat einen zyklischen Normalteiler vom Index 2. Da G genau 3 Involutionen besitzt, gilt (v). Sei also

$$G/\Omega(G) \simeq Q_{2^n} \quad \text{mit} \quad n \geq 3\,. \tag{17}$$

Für jede Untergruppe H von G mit $M <\cdot\ H$ ist $H/\Omega(G)$ nach (15) zyklisch; mit (17) folgt daraus $|M : \Omega(G)| = 2$. Damit ist $M \leq \Omega_2(G)$, also schließlich

$$M = \Omega_2(G) \quad \text{und} \quad |M| = 8\,. \tag{18}$$

Sei $A = C_G(\Omega(G))$ und $x \in \Omega(G) \setminus \Phi(M)$; sei $X = \langle x\rangle$. Da M abelsch ist, ist $M \leq A$; nach (17) und (18) ist $M < A$, da $|G : A| \leq 2$. Damit ist $1 < M/X < A/X$, und M/X erfüllt (b) in A/X. Da M/X zyklisch der Ordnung 4 ist, liefert die Induktionsannahme, daß A/X zyklisch oder eine verallgemeinerte Quaternionengruppe ist. Im letzteren Fall existierte $H \leq A$ mit $M <\cdot\ H$ und $H/X \simeq Q_8$, ein Widerspruch zu (15). Also ist A/X zyklisch und dann $A = \langle a\rangle \times \langle x\rangle$ mit $a \in G$.

Ist $A = G$, so gilt (v); sei also $|G : A| = 2$. Da $G/\Omega(G)$ eine verallgemeinerte Quaternionengruppe ist, existiert ein $b \in G$ mit $G = \langle a, b, \Omega(G)\rangle$ und $a^b = a^{-1}z$ für ein $z \in \Omega(G)$. Wegen

$b^2 \in A$ ist $a = a^{b^2} = (a^{-1}z)^b = az^{-1}z^b$, also $z^b = z$. Da $b \notin A = C_G(\Omega(G)) = C_G(x)$ ist, folgt $z \in \langle a \rangle$. Ist $a^b = a^{-1}$, so sind wir zufrieden. Ist aber $a^b \neq a^{-1}$, so ist also $a^b = a^{-1+2^{n-1}}$ und $x^b = xa^{2^{n-1}}$ und somit $(ax)^b = a^{-1}x = (ax)^{-1}$. In diesem Fall ersetzen wir a durch ax und können also annehmen, daß $a^b = a^{-1}$ ist. Da $M \leq A$, ist $b \notin M = \Omega_2(G)$, also $o(b) \geq 8$. Andererseits ist $|G : \langle a \rangle| = 4$ und somit $|\langle b \rangle : \langle a \rangle \cap \langle b \rangle| \leq 4$; ferner $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| \leq 2$, da diese Gruppe von b invertiert und zentralisiert wird. Es folgt $o(b) = 8$, $b^4 = a^{2^{n-1}}$ und $G = \langle a, b \rangle$. Damit gilt (vi) und (c).

Wir zeigen schließlich, daß (a) aus (c) folgt, d.h. daß in den Fällen (i) – (vi) immer M supermodular in G ist. Im Fall (i) gilt das nach Satz 2.6, im Fall (ii) nach 1.4; in den anderen Fällen benutzen wir Satz 2.5. Sei also $M < H = MX$ mit X zyklisch. Da in allen diesen Fällen $M \trianglelefteq G$ ist, ist dann zu zeigen:

$$\text{Es existiert höchstens eine zyklische Untergruppe } Y \neq X \text{ von } H \text{ mit } H = MY. \tag{19}$$

Das ist klar für $G \simeq Q_8$, da hier entweder $H = X$ zyklisch oder $H = G$ und M eine der 3 maximalen Untergruppen von G ist. Ist $G \simeq Q_{2^n}$ mit $n \geq 4$ und $M = Z_2(G)$, so ist entweder $|X| = 4$ und $H \simeq Q_8$, oder $|X| > 4$ und dann $M \leq X = H$, da alle Elemente außerhalb der zyklischen maximalen Untergruppe von G die Ordnung 4 haben; in beiden Fällen gilt (19). Im Fall (iv) ist $|H : Y| = |M : M \cap Y| = 2$ für jede $H = MY$ erfüllende zyklische Untergruppe Y. Da H nur 3 maximale Untergruppen hat, gilt (19). Im Fall (v) ist $|X| = 2^r$ mit $r > k$, somit $H = \Omega_r(G)$ und dann auch $|Y| = 2^r$ für jedes zyklische Y mit $H = MY$. Da eine abelsche Gruppe vom Typ $(2^r, 2)$ nur 2 zyklische Untergruppen der Ordnung 2^r besitzt, gilt (19). Im Fall (vi) schließlich ist $b^2 \in Z(G)$ und somit $A = \langle a, b^2 \rangle$ abelsch vom Typ $(2^n, 2)$. Ist $g \in G \setminus A$, so ist $g = a^i b^{2k+1}$ und dann $g^2 = b^{4k+2}$, also

$$o(g) = 8 \;\text{ für alle }\; g \in G \setminus A\,. \tag{20}$$

Somit ist $M = \Omega_2(G) \leq A$, d.h. $|M| = 8$. Ist nun $H = MX \leq A$, so gilt (19), wie wir gerade im Fall (v) sahen. Ist aber $H \not\leq A$ und $H = MY$ mit Y zyklisch, so ist $|Y| = 8$ und $|Y \cap M| = 4$ nach (20) und damit $|H : Y| = |M : M \cap Y| = 2$. Es ist also H von zwei Elementen erzeugt und hat nur 3 maximale Untergruppen, von denen eine M ist. Es folgt (19), somit gilt (a), und Satz 3.3 ist bewiesen. $\square$

Offenbar beschreiben die Fälle (i) – (iii) aus Satz 3.3 die zyklischen und die Fälle (iv) – (vi) die nichtzyklischen supermodularen Untergruppen endlicher 2-Gruppen. Es sei bemerkt, daß die Gruppen in (iv) wohlbekannt sind [3]. Um Satz 3.3 auf unendliche Gruppen auszudehnen, brauchen wir den folgenden Hilfssatz.

Lemma 3.4 *Sei G eine 2-Gruppe und $1 < M < G$. Ist M supermodular in G, so ist $|M| \leq o(x)$ für jedes $x \in G \setminus M$; insbesondere ist M endlich.*

Beweis: Sei $x \in G \setminus M$ mit $o(x)$ minimal, sei $X = \langle x \rangle$ und $H = MX$; zu zeigen ist $|M| \leq |X|$. Die Minimalität von $o(x)$ liefert $x^2 \in M$, also $|X : M \cap X| = 2$. Da M permutabel in G ist, folgt $|H : M| = |X : M \cap X| = 2$ und $M \trianglelefteq H$.

Angenommen, es existiert T mit $X < T \leq H$ und $|T : X| = 4$. Dann ist T eine endliche 2-Gruppe und $M \cap T$ sm T nach 2.4; ferner $|T : M \cap T| = 2$, also $1 < M \cap T < T$. Ist dann $X < S < T$, so ist S zyklisch nach 3.3(b); andererseits hat $S = (M \cap S)X$ zwei verschiedene maximale Untergruppen $M \cap S$ und X. Der Widerspruch zeigt, daß keine X enthaltende Untergruppe T von H mit $|T : X| = 4$ existiert.

Da je zwei Involutionen eine Diedergruppe erzeugen, enthält jede 2-Gruppe der Ordnung ≥ 4 eine Untergruppe der Ordnung 4. Damit folgt $|N_H(X)/X| \leq 2$. Nach Satz 2.5 hat X höchstens 2 Konjugierte unter H, d.h., es ist auch $|H : N_H(X)| \leq 2$, also $|H : X| \leq 4$. Es folgt $|H : X| = 2$ und dann $|M| = |X|$, was zu zeigen war. □

Das vorstehende Lemma gestattet es, einige unmittelbare Folgerungen aus Satz 3.3, die wir später brauchen werden, gleich für supermodulare Untergruppen beliebiger 2-Gruppen zu beweisen.

Korollar 3.5 *Sei G eine 2-Gruppe, $1 < M < G$ und M supermodular in G. Dann gilt:*

(a) *M ist abelsch.*

(b) *M normalisiert jede Untergruppe von G.*

(c) *Ist $|M| > 2$, so ist $M \trianglelefteq G$.*

(d) *Ist M nicht zyklisch, so ist $\Omega(G) \leq M$ und M abelsch vom Typ $(2^k, 2)$ für ein $k \in \mathbb{N}$.*

Beweis: Wir überzeugen uns zuerst, daß die Aussagen (a) – (d) für endliches G gelten. Eine solche Gruppe hat eine der Eigenschaften (i) – (vi) aus Satz 3.3. Gilt eine der Aussagen (i) – (iv), so sind (a) – (d) trivial, wenn man für (b) beachtet, daß in den Fällen (i), (iii) und (iv) für $1 \neq U \leq G$ gilt $|UM : U| = |M : U \cap M| \leq 2$. Gilt (v), so ist $\Omega_{n-1}(G)$ abelsch und $U \trianglelefteq G$ für alle $U \not\leq \Omega_{n-1}(G)$. Im Fall (vi) schließlich ist M nach (20) in der abelschen Gruppe $A = \langle a, b^2 \rangle$ enthalten, also abelsch. Für $U \leq G$ ist entweder $U \leq A$ oder $|M : U \cap M| \leq 2$, wieder nach (20). Somit gilt (b), (c) ist trivial, und (d) folgt aus (20).

Ist nun G unendlich, so ist M nach 3.4 und 2.3 endlich und permutabel in G. Für jedes $x \in G \setminus M$ ist also $G_0 = M\langle x \rangle$ endlich und $1 < M < G_0$, d.h., es gelten (a) – (d) für G_0. Damit ist M abelsch und vom Typ $(2^k, 2)$ für ein $k \in \mathbb{N}$, falls nicht zyklisch; ferner $M^x = M$ falls $|M| > 2$ und $M \leq N_G(\langle x \rangle)$. Somit gelten (b) und (c). Ist schließlich M nicht zyklisch, so folgt aus $o(x) = 2$ der Widerspruch $x \in \Omega(G_0) \leq M$. Also ist $\Omega(G) \leq M$, und (d) gilt.□

Der folgende Satz charakterisiert die supermodularen Untergruppen unendlicher 2-Gruppen. Er wird in §5 nicht gebraucht werden, da wir mit Korollar 3.5 arbeiten können.

Satz 3.6 *Sei G eine unendliche 2-Gruppe und sei $1 < M < G$. Genau dann ist M supermodular in G, wenn eine der folgenden Aussagen gilt:*

(i) *M ist permutabel in G und $|M| = 2$.*
(ii) *$G \simeq Z_{2^\infty}$.*
(iii) *$G = A\langle b\rangle$ mit $A \simeq Z_{2^\infty}$, $a^b = a^{-1}$ für alle $a \in A$, $\langle b^2\rangle = \Omega(A)$ und $M = Z_2(G)$.*
(iv) *$M = \Omega(G)$ und $|M| = 4$.*
(v) *$G \simeq Z_{2^\infty} \times Z_2$ und $M = \Omega_k(G)$ für ein $k \in \mathbb{N}$.*
(vi) *$G = A\langle b\rangle$ mit $A \simeq Z_{2^\infty}$, $a^b = a^{-1}$ für alle $a \in A$, $\langle b^4\rangle = \Omega(A)$ und $M = \Omega_2(G)$.*

Beweis: Sei zuerst M sm G. Nach 2.3 ist M permutabel in G. Ist $|M| = 2$, so sind wir fertig; sei also $|M| > 2$. Mit Lemma 3.4 folgt dann $\Omega(G) \leq M$.

Ist M zyklisch, so hat G nur eine minimale Untergruppe, und somit gilt bekanntlich $G \simeq Z_{2^\infty}$ oder $G \simeq Q_{2^\infty}$, die in (iii) angegebene Gruppe. Im letzteren Fall wird G von Elementen der Ordnung 4 erzeugt, und mit 3.4 folgt $|M| = 4$; als permutable Untergruppe von G ist dann $M = Z_2(G)$. Damit gilt (iii).

Sei nun M nicht zyklisch. Nach Korollar 3.5 ist dann $\Omega(G) \leq M$ und M abelsch vom Typ $(2^k, 2)$ für ein $k \in \mathbb{N}$; es folgt $|\Omega(G)| = 4$. Ist $|M| = 4$, so gilt (iv); sei also $k \geq 2$. Nach Lemma 3.4 ist dann $\Omega_2(G) \leq M$. Da $M/\Omega(G)$ zyklisch ist, hat also $G/\Omega(G)$ nur eine minimale Untergruppe und ist somit isomorph zu Z_{2^∞} oder Q_{2^∞}.

Ist $H/\Omega(G) \simeq Z_{2^\infty}$ und $\Omega(G) \leq Z(H)$, so ist für je zwei Elemente $u, v \in H$ offenbar $\langle u, v\rangle\Omega(G)$ eine zyklische Erweiterung der zentralen Untergruppe $\Omega(G)$, also abelsch, d.h. $uv = vu$. Damit ist H abelsch, und da G nur 3 Involutionen besitzt, folgt $H \simeq Z_{2^\infty} \times Z_2$ [5, 4.3.13].

Wegen $|\Omega(G)| = 4$ ist $|G : C_G(\Omega(G))| \leq 2$. Ist also $G/\Omega(G) \simeq Z_{2^\infty}$, so folgt $C_G(\Omega(G)) = G$ und dann $G \simeq Z_{2^\infty} \times Z_2$, wie eben gezeigt. Nach 3.4 ist $M = \Omega_k(G)$, d.h., es gilt (v). Ist schließlich $G/\Omega(G) \simeq Q_{2^\infty}$, so ist $H \leq C_G(\Omega(G))$, wenn $H/\Omega(G)$ die Untergruppe vom Index 2 in $G/\Omega(G)$ ist; wegen $H/\Omega(G) \simeq Z_{2^\infty}$ ist erneut $H = A \times Z$ mit $A \simeq Z_{2^\infty}$ und $|Z| = 2$. Da $G/\Omega(G) \simeq Q_{2^\infty}$ ist, existiert $b \in G$ mit $a^b \equiv a^{-1} \pmod{\Omega(G)}$ für alle $a \in A$. Somit ist $(a^2)^b = (a^b)^2 = a^{-2}$, und da jedes Element von A ein Quadrat ist, folgt $a^b = a^{-1}$ für alle $a \in A$. Wegen $|G : A| = 4$ wird $b^4 \in A$ von b invertiert und zentralisiert; es ist also $b^4 \in \Omega(A)$. Wegen $M/\Omega(G) \trianglelefteq G/\Omega(G)$ ist $M \leq H$, also $b \notin M$. Nach 3.4 ist $o(b) \geq 8$ und damit dann $\langle b^4\rangle = \Omega(A)$ und $G = A\langle b\rangle$. Wieder mit 3.4 folgt $|M| = 8$, also $M = \Omega_2(G)$. Damit gilt (vi).

Hat umgekehrt G eine der Eigenschaften (ii) – (vi), so ist M ein endlicher Normalteiler von G und folglich auch H endlich, wenn $H = MX > M$ und X zyklisch ist. Nach Satz 3.3 ist M supermodular in H, und somit hat M höchstens 2 zyklische Supplemente in H. Nach 2.5 ist M sm G. Gilt schließlich (i), so ist M nach Satz 2.6 supermodular in G. □

4 Supermodulare Untergruppen endlicher Gruppen

Wir brauchen zwei Hilfssätze, deren unendliche Versionen für die Charakterisierung supermodularer Untergruppen beliebiger Torsionsgruppen benötigt werden. Deshalb beweisen wir sie gleich allgemein.

Lemma 4.1 *Sei G eine Torsionsgruppe, $1 < M < G$, M supermodular in G und sei $X \leq G$ zyklisch von Primzahlpotenzordnung p^n mit $X \not\leq M$.*

(a) *Dann ist $M \leq N_G(X)$.*

(b) *Ist $p > 2$ oder $p = 2 \notin \pi(M)$, so ist $M \leq C_G(X)$.*

Beweis: Nach Satz 2.3 ist M permutabel in G; sei $H = MX$. Nach Satz 2.5 hat X höchstens zwei Konjugierte unter M, d.h., es ist $|M : N_M(X)| \leq 2$. Wegen $N_H(X) = N_M(X)X$ ist dann auch $|H : N_H(X)| \leq 2$.

Sei zuerst $p > 2$. Ist dann $y \in N_H(X) \setminus X$ ein p-Element, so ist $P = X\langle y\rangle$ eine endliche p-Untergruppe von H mit $X < P$. Da $X \not\leq M$ und $P = (M \cap P)X$ ist, gilt $1 < M \cap P < P$. Nach 2.4 ist $M \cap P$ sm P, und nach 3.2 ist P zyklisch; aber dann kann P nicht Produkt der echten Untergruppen $M \cap P$ und X sein. Der Widerspruch zeigt, daß X die Menge der p-Elemente von $N_H(X)$ ist. Damit ist X charakteristisch in $N_H(X) \trianglelefteq H$, also $X \trianglelefteq H$. Nach [7, Theorem 6.2.10] ist M ascendant in H, nach [7, Theorem 2.1.5] ist $[H/M] \simeq [X/M \cap X]$ eine endliche Kette. Ist also H_0 die M enthaltende maximale Untergruppe von H, so ist $H_0 \trianglelefteq H$. Somit ist $[M, X] \leq H_0 \cap X = \Phi(X)$, und damit wird X von jeder p'-Untergruppe von M zentralisiert [2, S. 275]. Da X jedes p-Element von M enthält, folgt $M \leq C_G(X)$.

Sei nun $p = 2$. Wäre $|H : N_H(X)| = 2$, so existierte ein 2-Element $a \in M \setminus N_H(X)$. Wegen $N_H(X) \trianglelefteq H$ wären dann X und X^a verschiedene 2-Normalteiler von $N_H(X)$ und $S = XX^a\langle a\rangle$ eine endliche 2-Gruppe. Wegen $a \in M \cap S$ und $X \not\leq M$ wäre $1 < M \cap S < S$, und nach 2.4 und 3.5 würde X von $M \cap S$ normalisiert, im Widerspruch zu $X \neq X^a$. Es ist also $N_H(X) = H$, d.h., (a) gilt. Und ist $2 \notin \pi(M)$, so ist $M \leq C_G(X)$, da Aut X eine 2-Gruppe ist. □

Lemma 4.2 *Sei G eine Torsionsgruppe und $1 < M < G$. Ist M supermodular in G, so ist $O^2(G) \leq MC_G(M)$ und $\pi(M/Z(M)) \cap \pi(C_G(M)/Z(M)) = \emptyset$.*

Beweis: Sei $x \in G$ mit $o(x) = q^r$ und $2 < q \in \mathbb{P}$. Ist $x \notin M$, so ist $x \in C_G(M)$ nach 4.1(b). Somit enthält $MC_G(M)$ jedes Element ungerader Ordnung, d.h., es ist $O^2(G) \leq MC_G(M)$.

Angenommen, $p \in \pi(M/Z) \cap \pi(C_G(M)/Z)$, wobei $Z = Z(M)$. Dann existieren Untergruppen $A/Z \leq M/Z$ und $C/Z \leq C_G(M)/Z$ der Ordnung p. Wegen $MC_G(M)/Z = M/Z \times C_G(M)/Z$ ist AC/Z elementarabelsch der Ordnung p^2, enthält also eine weitere

Untergruppe B/Z der Ordnung p; sei X zyklisch der Ordnung p^n mit $B = ZX$. Dann ist $X \not\leq M$ und $X \not\leq C_G(M)$, nach 4.1(b) also $p = 2$. Nach 4.1(a) ist $M \leq N_G(X)$. Da Aut X eine 2-Gruppe ist, existiert ein 2-Element $y \in M$ mit $y \notin C_M(X)$.

Da AC/Z abelsch ist, ist AC nilpotent, also direktes Produkt seiner Sylowgruppen; somit existiert eine X enthaltende 2-Sylowgruppe P von AC mit $AC = ZP$. Dann sind $M \cap P$ und $C_G(M) \cap P = C_P(M)$ zwei verschiedene maximale Untergruppen von P, und mit $X \not\leq C_P(M)$ folgt $P = (M \cap P)C_P(M) = XC_P(M)$. Da $M \leq N_G(X)$ ist, werden X und P von $y \in M$ normalisiert, d.h., $S = P\langle y \rangle$ ist eine 2-Gruppe; ferner ist

$$X \leq P = (M \cap P)C_P(M) \leq MC_S(M) \cap S = (M \cap S)C_S(M)\,.$$

Wegen $X \not\leq M$ und $X \not\leq C_G(M)$ folgt $1 < M \cap S < S$; nach 2.4 und 3.5 ist $M \cap S$ abelsch und wird somit von $(M \cap S)C_S(M) \geq X$ zentralisiert. Aber $y \in M \cap S$, ein Widerspruch. Damit ist Lemma 4.2 bewiesen. □

Wir kommen zu unserem ersten Hauptergebnis.

Satz 4.3 *Sei G eine endliche Gruppe und $M \leq G$ mit $|M|$ oder $|G : M|$ ungerade. Dann sind äquivalent:*

(a) *M ist supermodular in G.*

(b) *M ist $\cup$-distributiv in G.*

(c) *Es existieren Untergruppen L und K von G mit*
   - (i) *$G = L \times K$ und $(|L|, |K|) = 1$.*
   - (ii) *$M = L \times (M \cap K)$ und $M \cap K \leq Z(G)$.*
   - (iii) *Für jeden Primteiler p von $|M \cap K|$ sind die p-Sylowgruppen von G zyklisch.*

Beweis: Nach 1.3 folgt (a) aus (b), und nach [7, Theorem 3.4.8] folgt (b) aus (c). Zu zeigen bleibt, daß (c) aus (a) folgt.

Sei also M sm G. Ist $M = G$ oder $M = 1$, so gilt (c) mit $L = G$ und $K = 1$ bzw. $L = 1$ und $K = G$; sei also $1 < M < G$. Nach 4.2 ist dann $O^2(G) \leq MC_G(M)$. Ist $|G : M|$ ungerade, so enthält M eine 2-Sylowgruppe von G; ist $|M|$ ungerade und X eine (zyklische) 2-Untergruppe von G, so ist $X \leq C_G(M)$ nach 4.1(b). In beiden Fällen folgt:

$$G = MC_G(M)\,. \tag{21}$$

Sei wieder $Z = Z(M)$, und sei ω die Menge der Primteiler von $|C_G(M)/Z|$. Sei $S = O_\omega(Z)$ und $R = O_{\omega'}(Z)$. Nach 4.2 ist S ein Hallscher Normalteiler von M, besitzt also ein Komplement L in M; wegen $S \leq Z(M)$ ist dann $M = L \times S$. Genauso ist R ein Hallscher Normalteiler von $C_G(M)$, besitzt ein Komplement K in $C_G(M)$, und es ist $C_G(M) = R \times K$.

Da L und K charakteristische Untergruppen der Normalteiler M bzw. $C_G(M)$ von G sind, ist $L \trianglelefteq G$ und $K \trianglelefteq G$. Schließlich ist $LK = LRSK = MC_G(M) = G$ und $(|L|, |K|) = 1$, da K eine ω-Gruppe und L nach 4.2 eine ω'-Gruppe ist. Somit ist $G = L \times K$, d.h., es gilt (i) aus (c). Ferner ist $M = L \times (M \cap K)$ und $M \cap K \leq O_\omega(M) = S \leq Z(G)$ nach (21), d.h., es gilt (ii). Sei schließlich p ein Primteiler von $|M \cap K|$. Dann ist $p \mid |M|$ und $p \in \omega$, also $p \mid |C_G(M) : Z| = |G : M|$. Nach Voraussetzung ist $p > 2$; ferner gilt $1 < M \cap P < P$ für $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Nach 2.4 ist $M \cap P \,\mathrm{sm}\, P$ und nach 3.2 dann P zyklisch. Damit gilt (iii), also (c). □

Nach 4.3 ist nur noch die Situation zu betrachten, daß $|M|$ und $|G : M|$ gerade sind, also $1 < M \cap P < P$ gilt für jede 2-Sylowgruppe P von G. Wir zeigen zuerst, daß wir uns dabei darauf beschränken können, daß M eine 2-Gruppe ist, und behandeln dann die nach 3.3 für M und P möglichen Fälle.

Lemma 4.4 *Sei G endlich, M sm G, $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ und sei $1 < M \cap P < P$. Dann ist $M = (M \cap P) \times Q$ mit einer $2'$-Gruppe Q.*

Beweis: Da M permutabel in G ist, ist $M \cap P \in \mathrm{Syl}_2(M)$. Für jedes $x \in P \setminus (M \cap P)$ wird $\langle x \rangle$ nach Lemma 4.1(a) von M normalisiert, also von $O^2(M)$ zentralisiert. Da P von diesen Elementen erzeugt wird, ist also $O^2(M) \leq C_G(P) \leq C_G(M \cap P)$; es folgt $M \cap P \trianglelefteq M$. Nach Schur-Zassenhaus existiert ein Komplement Q zu $M \cap P$ in M, und es ist $M = (M \cap P) \times Q$, da $Q \leq O^2(M) \leq C_G(M \cap P)$. □

Lemma 4.5 *Sei G eine Torsionsgruppe und $M = A \times B \leq G$ mit $\pi(A) \cap \pi(B) = \emptyset$. Genau dann ist M supermodular in G, wenn A und B supermodular in G sind.*

Beweis: Sei zuerst M sm G. Dann ist M nach Satz 2.3 permutabel in G, und nach [7, Lemma 6.2.16] ist A permutabel in G. Sei $A < H = AX$ mit X zyklisch von Primzahlpotenzordnung. Ist $X \leq M$, so folgt aus $\pi(A) \cap \pi(B) = \emptyset$, daß $X \leq B$ ist; dann ist $H = A \times X$ und X die einzige (zyklische) Untergruppe von Primzahlpotenzordnung mit $H = AX$. Ist $X \not\leq M$, so gilt für jedes Y mit $AX = AY$ offenbar $MX = BAX = BAY = MY$; da M sm G ist, existieren nach 2.5 höchstens zwei solche zyklischen Y von Primzahlpotenzordnung. Nach Satz 2.5 ist A sm G; genauso B sm G.

Seien nun umgekehrt A und B supermodular in G. Dann sind A und B permutabel in G, also auch $A \cup B = M$. Sei $M < H = MX$ mit X zyklisch von Primzahlpotenzordnung p^n. Nach 4.1(a) ist $A \leq N_G(X)$; genauso $B \leq N_G(X)$, also $X \trianglelefteq H$. Ist $p \notin \pi(M)$, so ist auch $M \trianglelefteq H$ nach [7, Lemma 6.2.15], und X ist die einzige zyklische Untergruppe von Primzahlpotenzordnung mit $H = M \times X$. Ist $p \in \pi(M)$ und etwa $p \in \pi(B)$, so ist $p \notin \pi(A)$, also $A \leq C_G(X)$ nach 4.1(b). Es folgt $H = ABX = A \times BX$. Ist also $Y \leq G$ zyklisch von

Primzahlpotenzordnung mit $H = MY$, so ist $|Y : Y \cap M| = |H : M|$ eine p-Potenz, also Y eine p-Gruppe und dann $Y \leq BX$. Es folgt

$$BX = BX \cap H = BX \cap MY = (BX \cap M)Y = BY\,,$$

da $\pi(BX) \cap \pi(A) = \emptyset$. Da B sm G ist, existieren höchstens zwei solche Y, und nach Satz 2.5 ist M sm G. □

Das vorstehende Lemma zeigt, daß die Faktoren $M \cap P$ und Q aus 4.4 supermodular in G sind, und daß umgekehrt das direkte Produkt einer supermodularen 2-Untergruppe mit einer supermodularen $2'$-Untergruppe supermodular ist. Da wir die $2'$-Gruppen und diejenigen, die 2-Sylowuntergruppen von G enthalten, in Satz 4.3 charakterisiert haben, genügt es also, die 2-Gruppen M mit $1 < M < P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ zu behandeln. Offenbar hat ein solches Paar M, P eine der Eigenschaften (i) – (vi) aus Satz 3.3, wenn M sm P ist. Eigenschaft (i) wurde in Satz 2.6 erledigt; Eigenschaft (iv) und die restlichen Fälle behandeln wir getrennt.

Satz 4.6 *Sei G eine endliche Gruppe und $M \leq G$ elementarabelsch der Ordnung 4. Genau dann ist M supermodular in G, wenn $M = \{x \in G \mid x^2 = 1\}$ und $|G : C_G(M)| \leq 2$ ist.*

Beweis: Sei zuerst M sm G. Existierte $g \in G \setminus M$ mit $o(g) = 2$, so wäre $M \leq N_G(\langle g \rangle)$ nach 4.1(a), also $M\langle g \rangle = M \times \langle g \rangle$ elementarabelsch der Ordnung 8. Ist dann $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ mit $M\langle g \rangle \leq P$, so ist $1 < M < P$, M sm P und $|\Omega(P)| \geq 8$, ein Widerspruch zu 3.5(d). Also ist $M = \{x \in G \mid x^2 = 1\}$. Nach 4.2 ist $G/C_G(M)$ eine 2-Gruppe, also $|G/C_G(M)| \leq 2$, da $|M| = 4$.

Sei umgekehrt $M = \{x \in G | x^2 = 1\}$ und $|G : C_G(M)| \leq 2$; sei $M < H = MX$ mit X zyklisch der Ordnung p^r. Ist $p \neq 2$, so ist $X \leq C_G(M)$, also $H = M \times X$ und X die einzige zyklische Untergruppe von Primzahlpotenzordnung mit $H = MX$. Ist $p = 2$, so ist $H = MX \leq P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ und $M = \Omega(P)$. Nach 3.3 ist M sm P, und nach 2.5 existieren auch hier höchstens 2 zyklische $Y \leq P$ mit $H = MY$. Nach 2.5 ist M sm G. □

Satz 4.7 *Sei G eine endliche Gruppe, $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$, $1 < M < P$ und M nicht elementarabelsch mit $|M| \leq 4$. Genau dann ist M supermodular in G, wenn M supermodular in P ist und G ein normales 2-Komplement besitzt, das von M zentralisiert wird.*

Beweis: Sei zuerst M sm G. Wir haben zu zeigen, daß G ein normales 2-Komplement besitzt; das wird nach 4.1(b) von M zentralisiert. Da M sm P und $1 < M < P$ ist, haben M, P eine der Eigenschaften (ii), (iii), (v) oder (vi) aus 3.3. Nach 3.5(a) ist M abelsch, also $O^2(G) \leq C_G(M)$ nach 4.2. Damit ist $C_P(M)$ eine 2-Sylowgruppe von $C_G(M)$, die in den

Fällen (ii) und (iii) zyklisch, im Fall (v) abelsch vom Typ $(2^n, 2)$ oder $(2^{n-1}, 2)$ und im Fall (vi), da dort $\langle a, b^2 \rangle$ abelsch ist, wieder abelsch vom Typ $(2^n, 2)$ ist. Nach [2, S. 419] hat $C_G(M)$ ein normales 2-Komplement N. Dann ist $N = O^2(G)$ ein normales 2-Komplement von G.

Sei umgekehrt N ein normales 2-Komplement in G, M sm P und $[N, M] = 1$. Nach 3.5(c) ist $M \trianglelefteq P$ und wegen $[M, N] = 1$ dann $M \trianglelefteq G$. Sei $M < H = MX$ mit X zyklisch der Ordnung p^r. Ist $p \neq 2$, so ist $X \leq N$, also $H = M \times X$. Ist $p = 2$, so ist o.B.d.A. $H \leq P$ und M hat höchstens 2 zyklische Supplemente in H. Nach 2.5 ist M sm G. $\square$

In der Situation des Satzes 4.6, also im Fall (iv) von Satz 3.3, braucht G kein normales 2-Komplement zu besitzen: $SL(2, 3) \times Z_2$ ist ein Beispiel.

5 Supermodulare Untergruppen beliebiger Gruppen

Wir beweisen zum Abschluß eine Charakterisierung supermodularer Untergruppen beliebiger Gruppen, die der in [8] gegebenen Charakterisierung der $\cup$-distributiven Untergruppen ähnelt. Wir beginnen mit den Torsionsgruppen und bezeichnen für $p \in \mathbb{P}$ und $M \leq G$ mit M_p die Menge der p-Elemente von M und mit $\pi(G \setminus M)$ die Menge der Primzahlen q, zu denen es ein q-Element in $G \setminus M$ gibt.

Satz 5.1 *Sei G eine Torsionsgruppe und $1 < M < G$. Genau dann ist M supermodular in G, wenn M die folgenden drei Eigenschaften hat:*

(a) *M ist permutabel in G.*

(b) *Für jedes $p \in \pi(G \setminus M)$ ist $M_p \leq Z(M)$.*

(c) *Ist $u \in G \setminus M$ ein p-Element, so gilt entweder*

  (i) *$M_p \leq \langle u \rangle \leq C_G(M)$ oder*

  (ii) *$p = 2$, $M \leq N_G(\langle u \rangle)$, $|M_2\langle u \rangle : \langle u \rangle| = 2$ und $M_2\langle u \rangle$ ist isomorph zur Q_8, abelsch vom Typ $(2^k, 2)$ für ein $k \in \mathbb{N}$ oder verbandsisomorph dazu.*

Beweis: Sei zuerst M sm G. Nach Satz 2.3 gilt dann (a). Sei $p \in \pi(G \setminus M)$ und $u \in G \setminus M$ ein p-Element. Ist $p \notin \pi(M)$, so ist $M_p = 1 \leq Z(M) \cap \langle u \rangle$ und $M \leq C_G(u)$ nach 4.1(b); somit gelten (b) und (i) aus (c).

Sei also $p \in \pi(M)$ und zuerst $p > 2$. Dann ist nach 4.1(b) erneut $M \leq C_G(u)$. Sei $1 \neq x \in M$ ein p-Element. Dann ist $P := \langle x, u \rangle$ eine endliche p-Gruppe mit $x \in M \cap P < P$. Nach 3.2 ist P zyklisch. Da $\langle u \rangle \not\leq M \cap P$ ist, gilt $M \cap P \leq \langle u \rangle$, also $x \in \langle u \rangle$. Damit ist $M_p \leq \langle u \rangle \leq C_G(M)$ und insbesondere $M_p \leq Z(M)$, d.h., es gelten (b) und (c).

Sei schließlich $p = 2 \in \pi(M)$ und sei P eine 2-Sylowgruppe von M. Nach 4.1(a) ist $M \le N_G(\langle u\rangle)$, also $S := P\langle u\rangle$ eine 2-Gruppe und $|S : P| = 2^r$ endlich. Da P eine maximale 2-Untergruppe von M ist, ist $M \cap S = P$. Jede Untergruppe T von S mit $T \not\le M$ wird von ihren nicht in M enthaltenen zyklischen Untergruppen erzeugt; jede solche wird nach 4.1(a) von M normalisiert und dann von $O^2(M)$ zentralisiert. Insbesondere wird S von $O^2(M)$ zentralisiert, und M normalisiert S und alle von P verschiedenen Untergruppen vom Index 2^r in S, also auch P. Damit ist $P = M_2$, die Menge der 2-Elemente von M, und $O^2(M)P = M$. Ist $P \le \langle u\rangle$, so wird u von $O^2(M)P = M$ zentralisiert, d.h., es gilt $M_2 \le \langle u\rangle \le C_G(M)$, was zu zeigen ist. Sei daher $P \not\le \langle u\rangle$. Da $P = M \cap S$ sm S und $1 < P < S$ ist, ist P nach Korollar 3.5 abelsch, wird also von $O^2(M)P = M$ zentralisiert, d.h., es gilt (b). Ferner existiert $v \in \langle u\rangle \setminus P$ mit $o(v) = 2|P \cap \langle u\rangle|$, und aus Lemma 3.4 folgt $|P| = 2|P \cap \langle u\rangle|$. Damit ist $|S : \langle u\rangle| = |P\langle u\rangle : \langle u\rangle| = 2$, und die Aussagen über die Struktur von $S = M_2\langle u\rangle$ folgen aus Satz 3.3. Denn wegen $u \notin P \not\le \langle u\rangle$ ist S nicht zyklisch, und wäre $S \simeq Q_{2^n}$ mit $n \ge 4$, so wäre $P = Z_2(S) \le \langle u\rangle$; die Gruppe in (vi) aus Satz 3.3 schließlich hat keinen zyklischen Normalteiler vom Index 2. Es bleiben die in (ii) von (c) angegebenen Möglichkeiten.

Sei umgekehrt (a) – (c) erfüllt und sei $H = M\langle u\rangle > M$ mit $o(u) = p^n$. Dann ist $u \in G \setminus M$, und nach Voraussetzung gilt (i) oder (ii). Ist $M_p \le \langle u\rangle \le C_G(M)$, so ist $M_p = M \cap \langle u\rangle \le Z(M)$ und somit $M_p \trianglelefteq H$ und $H/M_p = M/M_p \times \langle u\rangle/M_p$. Da M/M_p eine p'-Gruppe ist, ist $\langle u\rangle = H_p$ das einzige Supplement von M in H, das eine Primärgruppe ist. Sei nun (ii) erfüllt. Dann ist $p = 2$ und $\langle u\rangle \trianglelefteq H$. Ist also P eine 2-Sylowgruppe von H, so ist $\langle u\rangle \le P$, also $P = (M \cap P)\langle u\rangle$ und $M \cap P \le M_2$; es ist also $P = M_2\langle u\rangle$ die einzige 2-Sylowgruppe von H. Nach (ii) ist $|P : \langle u\rangle| = 2$ und $P \simeq Q_8$, abelsch vom Typ $(2^k, 2)$ oder verbandsisomorph dazu; in allen drei Fällen gibt es nur 2 solche zyklischen Supplemente zu M_2 in P. Nach Satz 2.5 ist M sm G. $\square$

Aus Satz 5.1 erhalten wir, wie in der Einleitung angekündigt, daß eine supermodulare Untergruppe M einer Torsionsgruppe G $\cup$-distributiv ist, wenn sie eine $2'$-Gruppe ist oder alle 2-Elemente von G enthält.

Korollar 5.2 *Eine Untergruppe M der Torsionsgruppe G mit $2 \notin \pi(M) \cap \pi(G \setminus M)$ ist genau dann supermodular in G, wenn sie $\cup$-distributiv in G ist.*

Beweis: Nach 1.3 ist jede $\cup$-distributive Untergruppe supermodular. Sei umgekehrt M supermodular in G und $2 \notin \pi(M) \cap \pi(G \setminus M)$. Ist $u \in G \setminus M$ ein p-Element, so kann (ii) aus 5.1(c) nicht gelten, da dort $M_2 \ne 1$ und dann $p = 2 \in \pi(M) \cap \pi(G \setminus M)$ ist. Also gilt $M_p \le \langle u\rangle \le C_G(M)$. Daraus folgt insbesondere $M \trianglelefteq G$ und nach [8, Chapter III, Theorem 6] ist M $\cup$-distributiv in G. $\square$

Für Gruppen mit Elementen unendlicher Ordnung ist unsere Charakterisierung etwas komplizierter, wird aber ein ähnliches Korollar liefern.

Satz 5.3 *Sei G eine Gruppe mit Elementen unendlicher Ordnung und sei $M < G$ mit $|M| > 2$. Genau dann ist M supermodular in G, wenn gilt:*

(a) *Alle Elemente endlicher Ordnung von G liegen in M.*
(b) *$M \trianglelefteq G$.*
(c) *G/M ist eine Torsionsgruppe.*
(d) *Sind $u, v \in G$ Elemente unendlicher Ordnung, so ist $\langle u\rangle \cap \langle v\rangle \neq 1$.*
(e) *Es ist $\pi(M) \cap \pi(G/M) \subseteq \{2\}$; gilt $\pi(M) \cap \pi(G/M) = \{2\}$, so ist $|M_2| = 2$.*
(f) *Ist $u \in G \setminus M$ und $a \in M$, so existiert ein $u_0 \in C_{\langle u\rangle}(a)$ mit $uM = u_0M$.*

Beweis: Sei zuerst M supermodular in G. Nach 2.3 ist dann M permutabel in G, und wir zeigen (a) – (f) in einer Reihe von Schritten.

Zum Beweis von (a) betrachten wir ein $x \in G \setminus M$ mit minimaler endlicher Ordnung. Dann ist $o(x) = p^r$ für eine Primzahl p und $x^p \in M$; ist also $H = M\langle x\rangle$, so ist $|H : M| = |\langle x\rangle : M \cap \langle x\rangle| = p$. Nach Voraussetzung existiert ein $g \in G$ mit $o(g) = \infty$. Wegen M sm G ist $g^m \in M$ für ein $m \in \mathbb{N}$ nach 2.2, und $\langle x\rangle$ hat höchstens 2 Konjugierte unter M. Also wird $\langle x\rangle$ von g^{2m} normalisiert und dann von $a = g^{2mn}$ zentralisiert für geeignetes $n \in \mathbb{N}$. Da $o(a) = \infty$ und $o(x) = p^r$, ist $F = \langle a, x\rangle = \langle a\rangle \times \langle x\rangle$ und $M \cap F = \langle a\rangle \times \langle x^p\rangle$. Ist $N = \langle a^{p^2}\rangle \times \langle x^p\rangle$, so ist nach 2.4 und 1.2 also $(M \cap F)/N$ sm F/N, ferner F/N abelsch vom Typ (p^2, p) und $(M \cap F)/N$ zyklisch der Ordnung p^2. Das ist nach 3.2 und 3.3 unmöglich. Der Widerspruch zeigt, daß $G \setminus M$ nur Elemente unendlicher Ordnung enthält, d.h., (a) gilt.

Ist $x \in G$ und $H = M\langle x\rangle$ sowie $a \in M$, so ist $L(\langle x\rangle, \langle ax\rangle, \langle a^{-1}x\rangle; M) = M\langle x\rangle = H$ und

$$R(\langle x\rangle, \langle ax\rangle, \langle a^{-1}x\rangle; M) = M \cup (\langle x\rangle \cap \langle ax\rangle) \cup (\langle ax\rangle \cap \langle a^{-1}x\rangle) \cup (\langle x\rangle \cap \langle a^{-1}x\rangle) \leq MC_G(a^2),$$

da $\langle ax\rangle \cap \langle a^{-1}x\rangle$ das Element $ax(a^{-1}x)^{-1} = a^2$ zentralisiert und die anderen beiden Durchschnitte a zentralisieren. Somit gilt:

$$\text{Für } H = M\langle x\rangle \text{ und } a \in M \text{ ist } H = MC_H(a^2). \tag{22}$$

Angenommen, M wäre nicht normal in G. Dann existierte ein $x \in G \setminus N_G(M)$; sei $H = M\langle x\rangle$. Da $o(x, M)$ nach 2.2 endlich ist, existiert ein $a \in M$ mit $a^x \notin M$. Nach (a) ist $o(a) = o(a^x) = \infty$, und nach (22) ist $H = C_H(a^2)M$. Also existiert ein $z \in C_H(a^2)$ mit $a^z \notin M$. Dann ist $\langle a^2\rangle = \langle a^2\rangle^z \leq \langle a^z\rangle$ vom Index 2; ist also $F = \langle a, a^z\rangle$, so ist $F/\langle a^2\rangle$ eine Diedergruppe, da von den Involutionen $a\langle a^2\rangle$ und $a^z\langle a^2\rangle$ erzeugt. Wegen $F \leq M\langle a^z\rangle$ und $|M\langle a^z\rangle : M| = |\langle a^z\rangle : \langle a^2\rangle| = 2$ ist $(M \cap F)/\langle a^2\rangle$ nach 2.4 und 1.2 eine supermodulare Untergruppe vom Index 2 in der Diedergruppe $F/\langle a^2\rangle$. Diese hat daher höchstens 2 nicht in

$(M \cap F)/\langle a^2 \rangle$ gelegene minimale Untergruppen und folglich die Ordnung 8 oder 4, nach Satz 3.3 also die Ordnung 4. Dann ist $M \cap F = \langle a \rangle$ und somit $\langle a \rangle / \langle a^8 \rangle$ sm $F/\langle a^8 \rangle$ vom Index 2 im Widerspruch zu Satz 3.3. Damit ist (b) bewiesen, und (c) folgt aus Lemma 2.2.

Zum Beweis von (d) brauchen wir zwei Vorbereitungen. Existierten Elemente $a \in M$ und $b \in C_G(a) \setminus M$ mit $o(a) = \infty$ und $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$, so wäre $F = \langle a, b \rangle = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ und $M \cap F$ sm F mit $F = (M \cap F)\langle b \rangle$. Sind also $B = \langle b \rangle$, $C = \langle ab \rangle$ und $D = \langle a^2 b \rangle$, so ist $B \cap C = B \cap D = C \cap D = 1$, da $o(b) = \infty$ nach (a), und somit $R(B, C, D; M \cap F) = M \cap F$; aber $L(B, C, D; M \cap F) = F$, ein Widerspruch. Es gibt also keine solchen Elemente a, b, d.h., es ist

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \neq 1 \text{ für alle } a \in M \text{ mit } o(a) = \infty \text{ und } b \in C_G(a) \setminus M\,. \tag{23}$$

Sei nun $|H : M| = p \in \mathbb{P}$ und seien $x, y \in H \setminus M$. Wegen $y^p \in M$ ist $xy^p \in H \setminus M$ und somit $L(\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle xy^p \rangle; M) = H$. Wäre $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = 1$, so müßte also $\langle u \rangle = \langle x \rangle \cap \langle xy^p \rangle \not\leq M$ oder $\langle v \rangle = \langle y \rangle \cap \langle xy^p \rangle \not\leq M$ sein. Im ersten Fall wird u von x und xy^p, also auch von $y^p \in M$ zentralisiert; mit (23) folgt $\langle u \rangle \cap \langle y^p \rangle \neq 1$, also $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \neq 1$, ein Widerspruch. Im zweiten Fall wird genauso v von x zentralisiert, und mit (23) folgt $\langle v \rangle \cap \langle x^p \rangle \neq 1$, derselbe Widerspruch. Es ist also

$$\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \neq 1, \text{ falls } x, y \in H \setminus M \text{ und } |H : M| \in \mathbb{P} \text{ ist.} \tag{24}$$

Seien nun $u, v \in G$ mit $o(u) = o(v) = \infty$. Nach 2.2 sind geeignete Potenzen von u und v in M enthalten; um $\langle u \rangle \cap \langle v \rangle \neq 1$ zu zeigen, können wir also $u, v \in M$ annehmen. Wegen $M < G$ und (c) existiert $H \leq G$ mit $|H : M| \in \mathbb{P}$. Nach (22) existiert $x \in C_H(u^2) \setminus M$, und nach (23) ist $\langle u \rangle \cap \langle x \rangle \neq 1$; genauso existiert $y \in C_H(v^2) \setminus M$ mit $\langle v \rangle \cap \langle y \rangle \neq 1$. Da nach (24) auch $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \neq 1$ ist, folgt $\langle u \rangle \cap \langle v \rangle \neq 1$. Damit ist (d) gezeigt, und aus (d) folgt sofort:

$$\text{Ist } x \in N \trianglelefteq F \leq G \text{ und } o(x) = \infty, \text{ so ist } F/N \text{ eine Torsionsgruppe.} \tag{25}$$

Denn für jedes $y \in F$ mit $o(y) = \infty$ ist $y^n \in \langle x \rangle \leq N$ für ein $n \in \mathbb{N}$, also $o(yN)$ endlich.

Sei $p \in \pi(M) \cap \pi(G/M)$. Dann existieren $a \in M$ mit $o(a) = p$ und $H \leq G$ mit $M \leq H$ und $|H : M| = p$. Nach (22) existiert $x \in C_H(a^2)$ mit $H = M\langle x \rangle$. Wäre $p > 2$, so wäre $F = \langle a, x \rangle = \langle a \rangle \times \langle x \rangle$ und $M \cap F = \langle a \rangle \times \langle x^p \rangle$; und nach 2.4 und 1.2 wäre $(M \cap F)/\langle x^p \rangle$ supermodular in $F/\langle x^p \rangle$, im Widerspruch zu 3.2. Also ist $p = 2$ und die erste Aussage in (e) bewiesen.

Sei nun $\pi(M) \cap \pi(G/M) = \{2\}$ und sei $U \neq 1$ eine endliche Untergruppe von M, die von 2-Elementen erzeugt wird; sei weiter $|H : M| = 2$, $H = M\langle x \rangle$ und $X = \langle x \rangle$. Nach (a) ist $o(x) = \infty$ und nach (d) ist dann $D := \bigcap_{u \in U} X^u \neq 1$, also unendlich zyklisch. Sei N die Untergruppe vom Index 2 in D und $F = N_H(N)$. Offenbar ist $X \leq F$ und $D^U = D$, also $U \leq F$. Nach (25) ist F/N eine Torsionsgruppe, in der $(M \cap F)/N$ wieder supermodular vom Index 2 ist. Da N unendlich zyklisch und U endlich ist, ist $U \cap N = 1$, also $UN/N \simeq U$ von 2-Elementen erzeugt. Da $UN/N \leq (M \cap F)/N$, liegen diese 2-Elemente nach 5.1(b) im Zentrum von $(M \cap F)/N$. Insbesondere ist UN/N abelsch, also eine 2-Gruppe, und normalisiert $\langle x^2 \rangle / N \leq (M \cap F)/N$. Somit ist $\langle x^2 \rangle \leq D$ und X/N eine 2-Gruppe, also $xN \in F/N \setminus (M \cap F)/N$ ein 2-Element. Wegen $UN/N \not\leq X/N$ muß (ii) aus 5.1(c) für xN gelten, d.h. insbesondere $|UX : X| = 2$. Da $U \cap X = 1$ ist, folgt $|U| = 2$.

Damit ist gezeigt, daß M kein Element der Ordnung 4 enthält und daß je zwei verschiedene Involutionen a, b in M eine unendliche Diedergruppe erzeugen. Angenommen, dieser Fall tritt auf, d.h., es existieren Involutionen $a, b \in M$ mit $\langle a, b \rangle \simeq D_\infty$. Nach (d) ist $\langle ab \rangle \cap \langle x \rangle = \langle y \rangle$ unendlich zyklisch; sei $N = \langle y^4 \rangle$ und $F = N_H(N)$. Dann ist $a, b, x \in F$ und $(M \cap F)/N$ sm F/N vom Index 2. Nach (25) ist F/N eine Torsionsgruppe, und nach 5.1(b) ist $aN \in Z((M \cap F)/N)$; aber aN invertiert $\langle y \rangle / N$, ein Widerspruch. Damit ist schließlich auch gezeigt, daß es keine zwei verschiedenen Involutionen in M gibt, d.h., es gilt (e).

Zum Beweis von (f) können wir annehmen, daß $o(u, M) = p^r$ eine Primzahlpotenz ist; denn gilt die Aussage für die Primärkomponenten von $\langle u \rangle / \langle u \rangle \cap M$, so auch für $\langle u \rangle$. Sei $H = M\langle u \rangle$ und K/M die maximale Untergruppe von H/M. Ist $a \in \langle u \rangle$, so tut $u_0 = u$ das Verlangte; sei also $a \notin \langle u \rangle$ und damit $\langle u \rangle \neq \langle au \rangle$. Sei $N = \langle u \rangle \cap \langle au \rangle \cap K$ und $F = \langle u \rangle \cup \langle au \rangle$. Dann ist $N \leq Z(F)$, und nach (a), (d) und (25) ist $N \neq 1$ und F/N eine Torsionsgruppe. Da $u \notin K$ ist, ist $K \cap F \trianglelefteq F$ vom Index p. Nach Lemma 1.9 ist K sm H und somit wieder $(K \cap F)/N$ sm F/N. Ist $\langle u_1 \rangle / N$ die p-Sylowgruppe der endlichen zyklischen Gruppe $\langle u \rangle / N$, so ist $\langle u_1 \rangle / N \not\leq (K \cap F)/N$, und somit wird $\langle u_1 \rangle / N$ nach 5.1(c) von $(K \cap F)/N$ normalisiert. Da $a \in K \cap F$, folgt $\langle u_1 \rangle^a = \langle u_1 \rangle$, und wegen $o(u_1) = \infty$ kann u_1 von a nur zentralisiert oder invertiert werden; da $N \leq Z(F)$, folgt $u_1^a = u_1$. Da $\langle u_1 \rangle / N$ die p-Sylowgruppe von $\langle u \rangle / N$ ist, ist $u_1 = u^k$ mit $(k, p) = 1$. Somit existieren $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $1 = sp^r + tk$, also $u = u^{sp^r} u^{tk} = (u^{p^r})^s u_1^t$. Wegen $u^{p^r} \in M$ ist $uM = u_1^t M$ und $au_1^t = u_1^t a$, d.h., $u_0 = u_1^t$ tut das Verlangte. Damit sind alle Eigenschaften (a) – (f) bewiesen.

Sei nun umgekehrt (a) – (f) erfüllt und seien $B, C, D \leq G$ und $x \in L(B, C, D; M) = MB \cap MC \cap MD$. Nach (c) ist $o(xM) < \infty$; wir wollen $x \in R(B, C, D; M)$ zeigen und können dazu offenbar annehmen, daß $o(xM) = p^r$ mit $p \in \mathbb{P}$ und $r \in \mathbb{N}$ ist. Sei $H = M\langle x \rangle$. Da $H \leq MB$ ist, gilt $H = M(H \cap B)$, und somit existieren $a_1 \in M$ und $b \in H \cap B$ mit $x = a_1 b$; genauso existieren $a_2, a_3 \in M$ und $c \in H \cap C$, $d \in H \cap D$ mit $x = a_2 c = a_3 d$. Offenbar gilt:

$$\text{Ist } b^\alpha \in \langle c \rangle \text{ mit } (p, \alpha) = 1, \text{ so ist } x \in R(B, C, D; M). \tag{26}$$

Denn dann existieren $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $1 = s\alpha + tp^r$, und wegen $b^{p^r} \in M$ folgt

$$x \in Mb = Mb^{s\alpha} \subseteq M(B \cap C \cap MD) \leq R(B, C, D; M).$$

Nach Voraussetzung (f) existiert zu $a = a_1^{-1}a_2 \in M$ ein $c_0 \in \langle c\rangle$ mit $cM = c_0M$ und $ac_0 = c_0a$. Wegen $b = ac$ ist dann auch $bc_0 = c_0b$, und nach (a) und (d) ist $\langle b\rangle\cap\langle c_0\rangle \neq 1$; sei $\alpha \in \mathbb{N}$ minimal mit $b^\alpha \in \langle c_0\rangle$, also $b^\alpha = c_0^\gamma$ für ein $\gamma \in \mathbb{Z}$. Da $Mb = Mc = Mc_0$ ist, gilt $c_0b^{-1} \in M$ und somit $b^{\alpha-\gamma} = c_0^\gamma b^{-\gamma} = (c_0b^{-1})^\gamma \in M$; wegen $o(bM) = p^r$ ist $\alpha \equiv \gamma \,(\operatorname{mod} p^r)$. Ist $(p, \alpha) = 1$, so sind wir nach (26) fertig; sei also $\alpha = p\beta$ mit $\beta \in \mathbb{N}$. Dann ist $\gamma = p\delta$ mit $\delta \in \mathbb{Z}$, und es folgt $(b^\beta c_0^{-\delta})^p = b^\alpha c_0^{-\gamma} = 1$. Die Minimalität von α liefert $b^\beta \neq c_0^\delta$, d.h. $b^\beta c_0^{-\delta}$ ist ein Element der Ordnung p in G. Nach (a) und (e) ist $p = 2$ und $b^\beta = c_0^\delta z$, wo z das Element der Ordnung 2 in M ist. Es folgt $b^{\beta-\delta} = (c_0b^{-1})^\delta z \in M$ und somit $\beta \equiv \delta \,(\operatorname{mod} 2^r)$. Wäre also β oder δ gerade, so folgte $\beta = 2\varepsilon$ und $\delta = 2\varrho$ mit $\varepsilon, \varrho \in \mathbb{Z}$ und $(b^\varepsilon c_0^{-\varrho})^4 = b^\alpha c_0^{-\gamma} = 1$. Nach (a) und (e) ist z das einzige nichttriviale 2-Element in G; es folgte $b^\varepsilon = c_0^\varrho z^\lambda$ für ein $\lambda \in \mathbb{Z}$ und dann der Widerspruch $b^\beta = c_0^\delta$. Somit gilt

$$b^\beta = c_0^\delta z \quad \text{mit } \beta, \delta \text{ ungerade.} \tag{27}$$

Arbeiten wir genauso mit d statt b, so erhalten wir ungerade ganze Zahlen ν, μ und $c_1 \in \langle c\rangle$ mit $Mc = Mc_1$ und $d^\nu = c_1^\mu z$. Wegen $Mc_1 = Mc = Mc_0$ ist $c_0 = c^\kappa$ und $c_1 = c^\lambda$ mit κ, λ ungerade, und es folgt

$$b^{\beta\mu\lambda}z = (b^\beta z)^{\mu\lambda} = c_0^{\delta\mu\lambda} = c^{\kappa\delta\mu\lambda} = c_1^{\kappa\delta\mu} = (d^\nu z)^{\kappa\delta} = d^{\nu\kappa\delta}z\,,$$

also $b^{\beta\mu\lambda} = d^{\nu\kappa\delta} \in \langle d\rangle$. Da $\beta\mu\lambda$ ungerade ist, liefert (26) mit d statt c, daß $x \in R(B, C, D; M)$ ist. Damit ist M sm G und Satz 5.3 bewiesen. □

Korollar 5.4 *Sei G eine Gruppe mit Elementen unendlicher Ordnung und sei $M \trianglelefteq G$ mit $|M| > 2$. Enthält M oder G/M kein Element der Ordnung 2, so ist M genau dann supermodular in G, wenn M $\cup$-distributiv in G ist.*

Beweis: Ist M sm G, so gelten (a) – (f) von Satz 5.3. Unsere Voraussetzung impliziert $2 \notin \pi(M)\cap\pi(G/M)$, und damit liefert (e), daß $\pi(M)\cap\pi(G/M) = \emptyset$ ist. Nach [8, Chapter III, Theorem 7] ist M $\cup$-distributiv in G. □

Ist T eine Torsionsgruppe ohne Element der Ordnung 2 und $G = \langle a\rangle \times T \times \langle z\rangle$ mit $o(a) = 2$ und $o(z) = \infty$, so hat $M = \langle a\rangle \times T \times \langle z^2\rangle$ offenbar die Eigenschaften (a) – (f) aus Satz 5.3, ist also eine supermodulare Untergruppe von G mit $\pi(M)\cap\pi(G/M) = \{2\}$. Wegen

$$M(\langle z\rangle\cap\langle az\rangle) = M < G = M\langle z\rangle\cap M\langle az\rangle$$

ist M nicht $\cup$-distributiv in G.

Literatur

[1] **Higman, D.G.** : *Lattice homomorphisms induced by group homomorphisms.* Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 467-478 (1951)

[2] **Huppert, B.** : *Endliche Gruppen I.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1967)

[3] **Konvisser, M.W.** : *2-groups which contain exactly three involutions.* Math. Z. **130**, 19-30 (1973)

[4] **Olshanskii, A.Yu.** : *Geometry of defining relations in groups.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1991)

[5] **Robinson, D.J.S.** : *A course in the theory of groups.* GTM 80, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin (1982)

[6] **Sato, S.** : *On the lattice homomorphisms of infinite groups I.* Osaka Math. J. **4**, 229-234 (1952)

[7] **Schmidt, R.** : *Subgroup lattices of groups.* de Gruyter Verlag, Berlin New York (1994)

[8] **Suzuki, M.** : *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1956)

[9] **Vasantha Kandasamy, W.B.** : *Supermodular subgroups in finite groups.* Rostock. Math. Kolloq. **47**, 27-30 (1994)

[10] **Zappa, G.** : *Sulla condizione perchè un omomorfismo ordinario sia anche un omomorfismo strutturale.* Giorn. Mat. Battaglini (4) **78**, 182-192 (1949)

eingegangen: 15. April 1997

Autor:

Roland Schmidt
Mathematisches Seminar
Universität Kiel
Ludewig-Meyn-Straße 4
24098 Kiel
Germany