Vorbemerkung

Das folgende Thema für eine Bachelor-Arbeit wendet sich vor allem an Hörerinnen und Hörer der Vorlesung *Allgemeine Algebra I oder II*. Über den Inhalt dieser Vorlesungen kann man sich aber auch im Teil III des Buches [2] informieren.
Das Thema ist so gewählt, dass man die Grundlagen zur Behandlung des Themas bereits aus den Vorlesungen kennt. Außerdem ist dieses Thema fortsetzbar zu einem Thema für eine Master-Arbeit.
Die Definitionen von nachfolgend nicht erläuterten Begriffen und Bezeichnungen findet man in [1], Kapitel 1.

Thema der Bachelor-Arbeit: Einige Eigenschaften der Hyper-Klone über endlichen Mengen

Es sei $k \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $E_k := \{0, 1, 2, ..., k-1\}$, $P_k^{(n)}$ die Menge aller n-stelligen Funktionen $f: E_k^n \longrightarrow E_k$, die das n-fache kartesische Produkt E_k^n in die Menge E_k abbilden, und $P_k := \bigcup_{n \geq 1} P_k^{(n)}$. Für $k = 2$ heißen die Elemente von P_2 Boolesche Funktionen. Benutzt werden solche Funktionen z.B. bei der mathematischen Beschreibung von einfachen informationsverarbeitenden Systemen und in der Mathematischen Logik. Denkt man sich die Funktionen aus P_k durch gewisse Formeln mit Variablen beschrieben, so motiviert diese „Formelschreibweise“ die folgende Festlegung von Operationen (so genannte **Superpositionsoperationen**) über P_k:
– Umordnen von Variablen,
– Identifizieren von Variablen,
– Hinzufügen von fiktiven Variablen und
– das Ersetzen von Variablen in Funktionen durch Funktionen
mit denen man aus Funktionen andere Funktionen konstruieren kann. Für $F \subseteq P_k$ bezeichne $[F]$ die Menge aller Funktionen aus P_k, die man mit Hilfe der oben grob beschriebenen Superpositionsoperationen in endlich vielen Schritten aus den Funktionen aus F erhalten kann. Gilt $[F] = F$, heißt F **abgeschlossen** oder eine **Teilklasse von** P_k. Enthält eine abgeschlossene Teilmenge von P_k alle Funktionen e_i^n, die durch $e_i^n(x_1, x_2, ..., x_n) := x_i$ definiert sind ($n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$), nennt man F einen **Klon** von P_k. Wie man im Kapitel 22 aus [2] sowie in den Büchern [4] und [3] nachlesen kann, gibt es sowohl technische als auch algebraische Probleme, die sich übersetzen lassen in Probleme über Klone. Deshalb wurden in den letzten Jahrzehnten einige tausend Arbeiten über P_k und die Eigenschaften der Teilklassen von P_k publiziert, wobei auch einige Modifikationen von P_k (wie etwa partielle Funktionen über E_k) untersucht wurden.
Bezeichne $\mathfrak{P}(A)$ die Menge aller Teilmengen der Menge A.
Aus technischen Gründen interessiert man sich auch für n-stellige Funktionen der Art:

$$f: E_k^n \longrightarrow (\mathfrak{P}(E_k)) \setminus \{\emptyset\},$$

die man **Hyper-Funktionen** nennt und die man zu einer Menge $H_k^{(n)}$ und diese zu $H_k := \bigcup_{n \geq 1} H_k^{(n)}$ zusammenfassen kann. Analog zu P_k lassen sich dann **Hyper-Superpositionsoperationen**, **Hyper-Klone** u.ä. definieren.

Die Literatur mit Ergebnissen über Hyper-Klone ist zur Zeit noch gut überschaubar und eine Übersicht über die Publikationen der letzten 10 Jahre zum Thema soll Gegenstand der Bachelor-Arbeit sein. Hilfreich bei dieser Literaturzusammenstellung (inklusive kurzer Inhaltsangaben) sind Vorträge, deren Kurzfassungen (jeweils ca. 4-6 Seiten lang) man im Internet unter dem Stichwort ISMVL („International Symposium of Multiple-Valued Logic“[1]) finden kann.
Die bisher gefundenen Resultate über Hyper-Klone sollen im Vergleich zu entsprechenden Resultaten über Klone, die man alle in [3][2] nachlesen kann, dargestellt werden. Mit Beweis sollen dabei nur die in der Literatur bisher benutzten Methoden, Hyper-Klone über isomorphe Abbildungen mittels anderer Methoden zu beschreiben, sowie die Ergebnisse über maximale Hyper-Klone angegeben werden. Die dazu benötigte Original-Literatur wird dem Bearbeiter dieses Themas zur Verfügung gestellt. Für ISMVL 2010 (findet Ende Mai 2010 in Barcelona statt) ist ein Vortrag von Hajime Machida, Jovanka Pantović and Ivo G. Rosenberg angekündigt, der erläutert, wie man die 9 maximalen Hyper-Klone von H_2 mittels geschickt gewählter Abbildungen sowie einer Galois-Beziehung aus einem bereits 1975 publizierten und bewiesenen Satz erhält.

Literatur

[1] Lau, D.: Algebra und Diskrete Mathematik 1. Grundbegriffe der Mathematik, Algebraische Strukturen, Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Numerische Algebra. 2. Aufl, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007

[2] Lau, D.: Algebra und Diskrete Mathematik 2. Lineare Optimierung, Graphen und Algorithmen, Algebraische Strukturen und Allgemeine Algebra mit Anwendungen. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004

[3] Lau, D.: Function Algebras on Finite Sets. A Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006

[4] Pöschel, R., Kalužnin, L.A.: Funktionen und Relationenalgebren. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1979

[1] Dies ist die wichtigste Tagung zu mehrwertigen Logiken mit Anwendungen, die einmal im Jahr stattfindet.

[2] Von diesem Buch gibt es auch eine etwas ältere deutsche Fassung, die ich dem Bearbeiter des Themas zur Verfügung stellen kann.