Mathematik in der Strahlentherapie

Thomas Kalinowski

Institut für Mathematik
Universität Rostock
thomas.kalinowski@uni-rostock.de

STAUNT
Rostock, 8. September 2008

Biographisches

- Matheklub in Löcknitz 88/89
- Mathezirkel in Rostock 1993 – 1998
- Olympiade 1994 – 1998
- Bundeswettbewerb 1997 und 1998
- 1998 Abi in Rostock
- 1999 – 2003 Mathestudium in Rostock
- 2005 Promotion (Mathematische Optimierung)
- seitdem Mitarbeiter am Institut für Mathematik in Rostock
- Dozent bei Seminaren des Vereins RHO e.V.

Inhalt

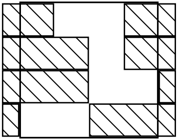
Inhalt

Intensitätsmodulierte Bestrahlungstherapie (IMRT)

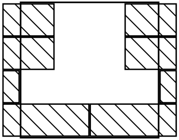
- Ziel: Zerstörung des Tumorgewebes ohne Beeinträchtigung der Funktionalität der Organe.
- Bestrahlung aus verschiedenen Richtungen.
- Der Beschleuniger liefert für jede Einstrahlrichtung ein homogenes Feld.
- Ein Ansatz zur besseren Differenzierung innerhalb des bestrahlten Bereichs ist die intensitätsmodulierte Bestrahlung.

Ein Mehrlamellenkollimator (MLC)

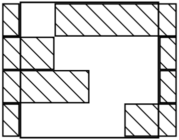
Modulierung durch Überlagerung homogener Felder



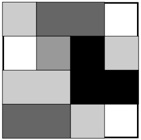
2 MU



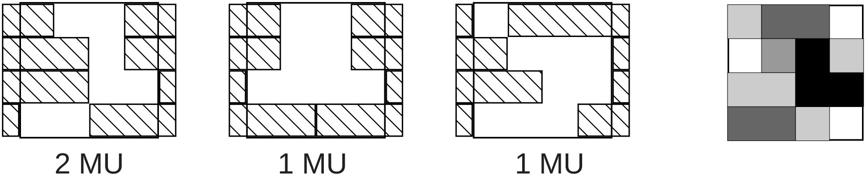
1 MU



1 MU



Modulierung durch Überlagerung homogener Felder



$$2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Inhalt

Eine Fluenzmatrix

- Beschreibung der gewünschten Fluenz durch eine nichtnegative ganzzahlige Matrix
- Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

...entsprechen *Segmenten:*

Die homogenen Felder

...entsprechen *Segmenten:*

- $0-1-$Matrizen

...entsprechen *Segmenten:*

- $0 - 1-$Matrizen
- In jeder Zeile gibt's genau ein Intervall von aufeinanderfolgenden Einsen.

Die homogenen Felder

...entsprechen *Segmenten:*

- $0-1-$Matrizen
- In jeder Zeile gibt's genau ein Intervall von aufeinanderfolgenden Einsen.
- Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine Segmentierung

$$\begin{pmatrix} 4&5&0&1&4&5\\ 2&4&1&3&1&4\\ 2&3&2&1&2&4\\ 5&3&3&2&5&3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$+1\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&1&1&1&1&0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&0 \end{pmatrix}$$

$$+1\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&0&0\\ 1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Das Optimierungsproblem

- gegeben: Fluenzmatrix A
- gesucht: eine *gute* Segmentierung

$$A = u_1 S_1 + u_2 S_2 + \cdots + u_t S_t$$

Das Optimierungsproblem

- gegeben: Fluenzmatrix A
- gesucht: eine *gute* Segmentierung

$$A = u_1 S_1 + u_2 S_2 + \cdots + u_t S_t$$

- gute Segmentierung
  - kleine Gesamtbestrahlungsdauer

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_t \to \min$$

  - wenige Felder

$$t \to \min$$

Konflikt der Zielfunktionen

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

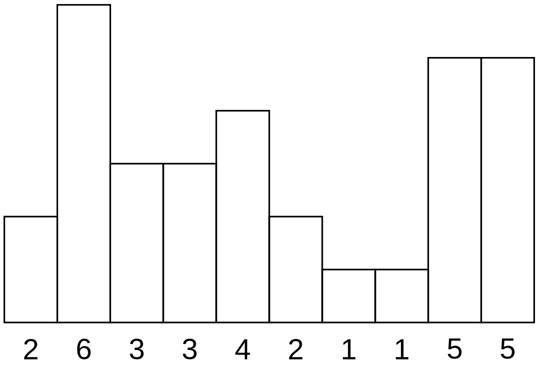
$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Inhalt

- geg. Vektor $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$
- ges. Zerlegung $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{s_1} + \cdots + \boldsymbol{s_t}$ in möglichst wenige *Intervallvektoren* $\boldsymbol{s_i}$
- Grundidee
  - schrittweise Reduktion von $\boldsymbol{a}$
  - Parameter, um den Fortschritt zu messen

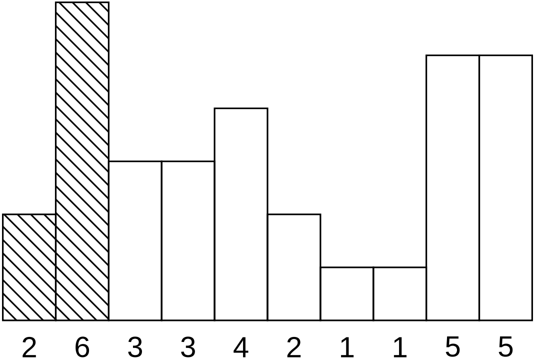
Ein Beispiel

- Vektor $(2 \quad 6 \quad 3 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 5 \quad 5)$



Ein Beispiel

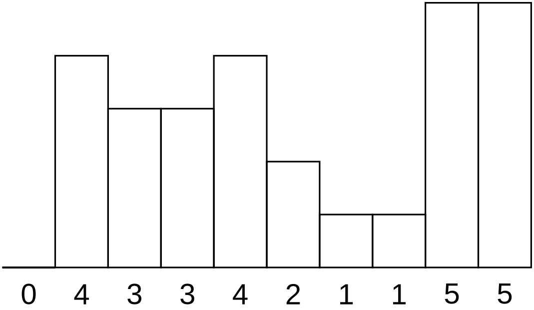
- Vektor $\begin{pmatrix}2 & 6 & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 1 & 5 & 5\end{pmatrix}$



- $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, u = 2$

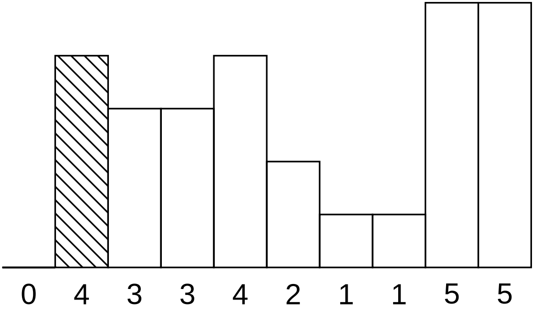
Ein Beispiel

- Vektor $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$



Ein Beispiel

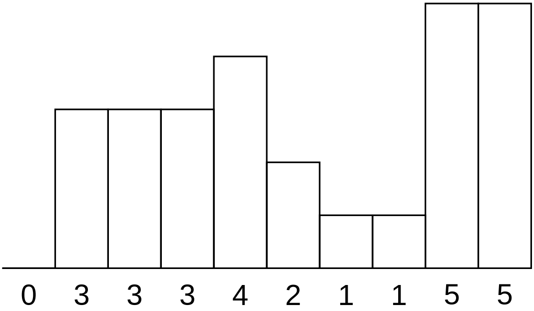
- Vektor $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$



- $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u = 1$

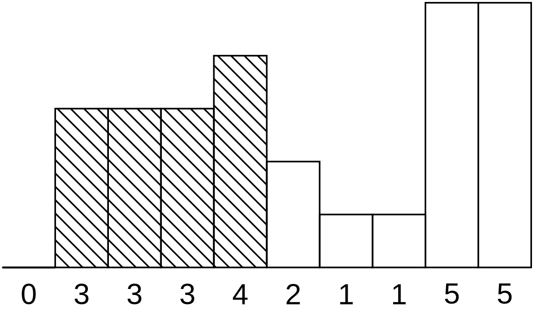
Ein Beispiel

- Vektor $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$



Ein Beispiel

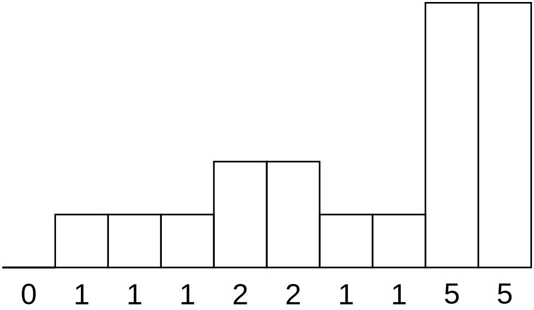
- Vektor $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$



- $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u = 2$

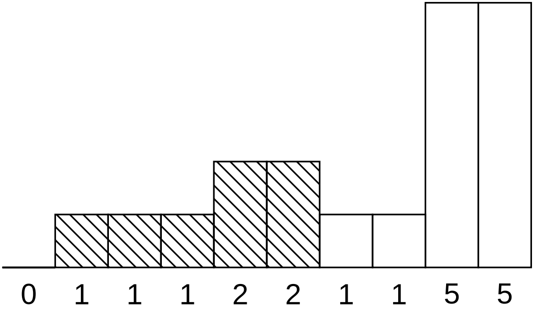
Ein Beispiel

- Vektor $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$



Ein Beispiel

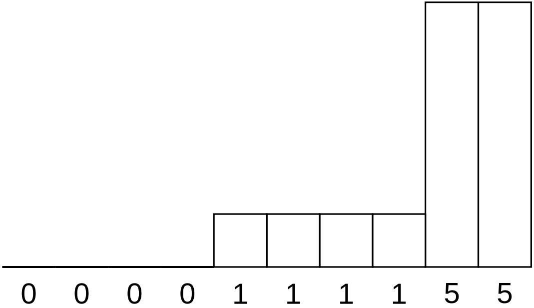
- Vektor $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$



- $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u = 1$

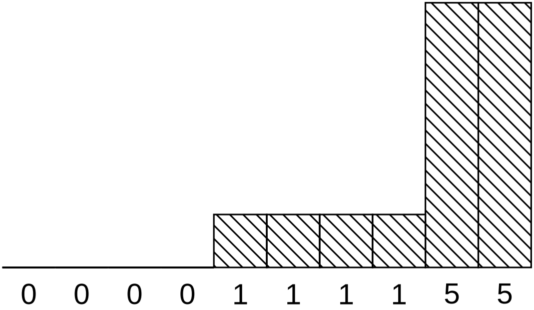
Ein Beispiel

- Vektor $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$



Ein Beispiel

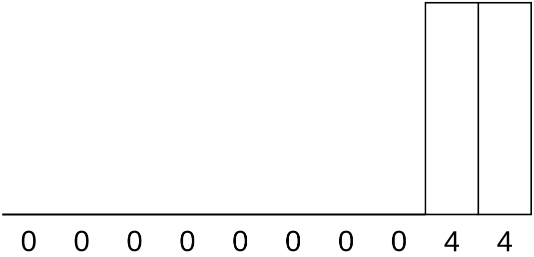
- Vektor $\begin{pmatrix}2 & 6 & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 1 & 5 & 5\end{pmatrix}$



- $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $u = 1$

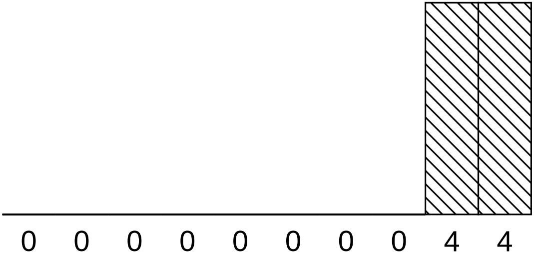
Ein Beispiel

- Vektor $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$



Ein Beispiel

- Vektor $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$



- $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $u = 4$

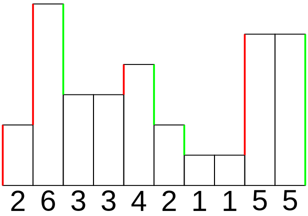
Ein Beispiel

- Vektor $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Segmentierung

$$
\begin{aligned}
&(2\ \ 2\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)\\
+&(0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)\\
+&(0\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)\\
+&(0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)\\
+&(0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)\\
+&(0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 4\ \ 4)\\
=&(2\ \ 6\ \ 3\ \ 3\ \ 4\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 5\ \ 5)
\end{aligned}
$$



- *unvermeidbare Positionen*

linke Lamelle		rechte Lamelle	
Position 1	2 MU	Position 2	3 MU
Position 2	4 MU	Position 5	2 MU
Position 5	1 MU	Position 6	1 MU
Position 9	4 MU	Position 10	5 MU

- Insgesamt braucht man also mindestens 11 MU.

Formale Charakterisierung der minimalen TNMU

- $m \times n-$Fluenzmatrix $A = (a_{ij})$
- Zeilenkomplexität $c_i(A) = \sum_{j=1}^{n} \max\{0, a_{ij} - a_{i,j-1}\}$
- Gesamtkomplexität $c(A) = \max_{i \in [m]} c_i(A)$

Satz

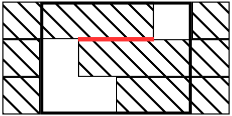
Die minimale TNMU zur Realisierung der Fluenzmatrix ist $c(A)$.

- Beweis: iterierte Konstruktion eines Segments S mit $c(A - S) = c(A) - 1$.

Inhalt

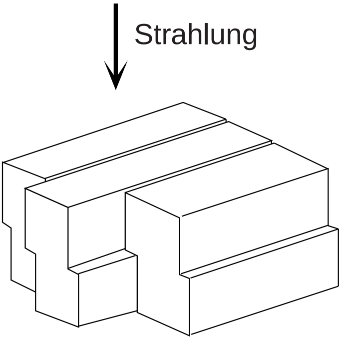
Die Interleaf Collision Constraint (ICC)

- Gegenüberliegende Lamellen in benachbarten Zeilen dürfen nicht überlappen.
- Beispiel:



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist kein Segment.}$$

Tongue-and-Groove



Unterdosierung

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

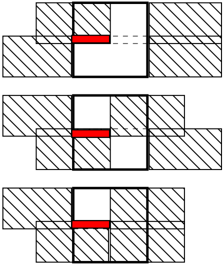
Unterdosierung

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3 MU

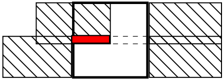
1 MU

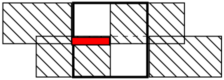
1 MU

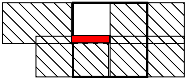


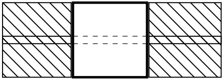
Unterdosierung

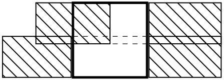
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

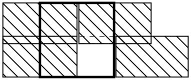
3 MU 

1 MU 

1 MU 

2 MU 

1 MU 

1 MU 

Vermeidung der Unterdosierung

$$a_{ij} \le a_{i+1,j} \wedge s_{ij} = 1 \Rightarrow \; s_{i+1,j} = 1 \qquad (i \in [m-1],\; j \in [n]),$$
$$a_{ij} \le a_{i-1,j} \wedge s_{ij} = 1 \Rightarrow \; s_{i-1,j} = 1 \qquad (i \in [2,m],\; j \in [n]).$$

Vermeidung der Unterdosierung

$$\begin{aligned}
a_{ij} \le a_{i+1,j} \wedge s_{ij} = 1 \Rightarrow\ s_{i+1,j} = 1 \qquad & (i \in [m-1],\ j \in [n]),\\
a_{ij} \le a_{i-1,j} \wedge s_{ij} = 1 \Rightarrow\ s_{i-1,j} = 1 \qquad & (i \in [2,m],\ j \in [n]).
\end{aligned}$$

- Die Fluenz im Grenzbereich zwischen (i,j) und $(i+1,j)$ beträgt $\min\{a_{ij}, a_{i+1,j}\}$.

Definition. *A*-Segment

Ein *A–Segment* ist eine $m \times n$-Matrix $S = (s_{ij})$ mit Einträgen aus $\{0, 1\}$, so dass es ganze Zahlen $l_i,\ r_i$ $(i \in [m])$ mit folgenden Eigenschaften gibt.

Definition. *A*-Segment

Ein *A–Segment* ist eine $m \times n$-Matrix $S = (s_{ij})$ mit Einträgen aus $\{0, 1\}$, so dass es ganze Zahlen $l_i,\ r_i$ $(i \in [m])$ mit folgenden Eigenschaften gibt.

- $l_i \leq r_i + 1 \qquad (i \in [m]),$

Definition. *A*-Segment

Ein *A–Segment* ist eine $m \times n$-Matrix $S = (s_{ij})$ mit Einträgen aus $\{0, 1\}$, so dass es ganze Zahlen $l_i,\ r_i$ $(i \in [m])$ mit folgenden Eigenschaften gibt.

- $l_i \leq r_i + 1 \qquad (i \in [m]),$
- $s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } l_i \leq j \leq r_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (i \in [m],\ j \in [n]),$

Definition. *A*-Segment

Ein *A–Segment* ist eine $m \times n$-Matrix $S = (s_{ij})$ mit Einträgen aus $\{0, 1\}$, so dass es ganze Zahlen $l_i,\ r_i$ $(i \in [m])$ mit folgenden Eigenschaften gibt.

- $l_i \leq r_i + 1 \qquad (i \in [m]),$
- $s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } l_i \leq j \leq r_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (i \in [m],\ j \in [n]),$
- ICC: $l_i \leq r_{i+1} + 1,\ r_i \geq l_{i+1} - 1 \quad (i \in [m-1])$

Definition. A-Segment

Ein *A–Segment* ist eine $m \times n$-Matrix $S = (s_{ij})$ mit Einträgen aus $\{0, 1\}$, so dass es ganze Zahlen $l_i,\ r_i$ $(i \in [m])$ mit folgenden Eigenschaften gibt.

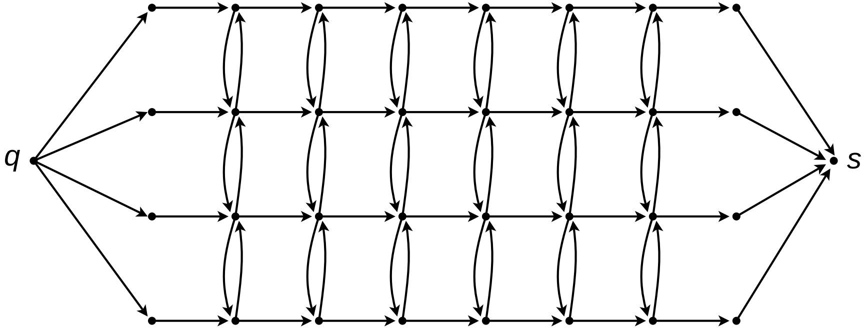
- $l_i \leq r_i + 1 \qquad (i \in [m])$,
- $s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } l_i \leq j \leq r_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (i \in [m],\ j \in [n])$,
- ICC: $l_i \leq r_{i+1} + 1,\ r_i \geq l_{i+1} - 1 \quad (i \in [m-1])$

und außerdem gilt

- Tongue-and-Groove Bedingung (TGB):

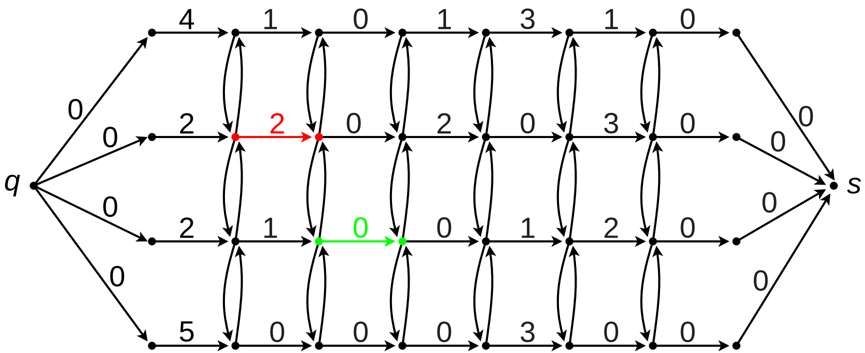
$$a_{ij} \leq a_{i+1,j} \wedge s_{ij} = 1 \ \Rightarrow\ s_{i+1,j} = 1 \quad (i \in [m-1],\ j \in [n]),$$
$$a_{ij} \leq a_{i-1,j} \wedge s_{ij} = 1 \ \Rightarrow\ s_{i-1,j} = 1 \quad (i \in [2, m],\ j \in [n]).$$

Der Segmentierungsgraph



$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

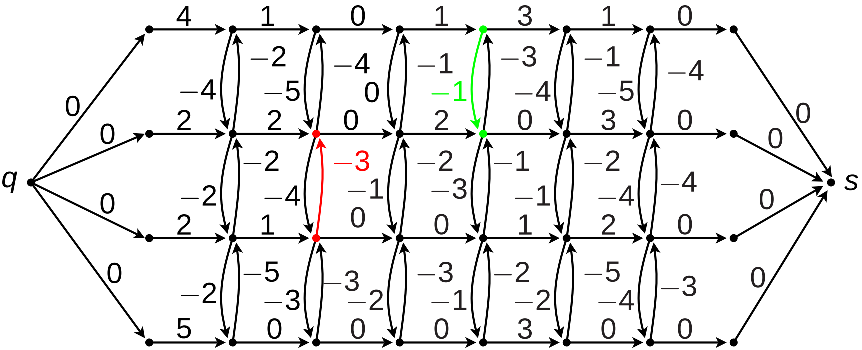
Die Gewichtsfunktion



$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

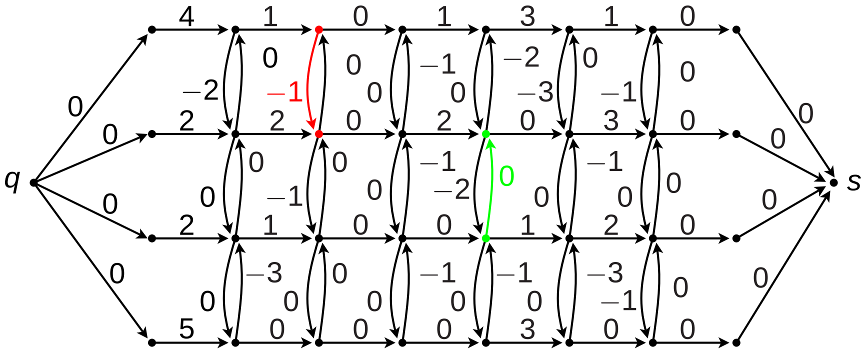
$$w((i,j-1),(i,j)) = \max\{0, a_{ij} - a_{i,j-1}\}$$

Die ICC-Gewichtsfunktion



$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$w((i,j),(i \pm 1, j)) = -a_{ij}$$



$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$w((i,j),(i \pm 1, j)) = \min\{0, a_{i\pm 1,j} - a_{ij}\}$$

Konkrete Interpretation der Gewichtsfunktionen

- Wir setzen

$$\alpha_1(i,j) = \text{maximale Länge eines Weges von } q \text{ nach } (i,j).$$

- Dann ist $\alpha_1(i,j)$ eine untere Schranke für die Anzahl der Monitor Units mit $l_i \leq j$.
- Damit ist die maximale Länge eines $q-s-$Weges (oder äquivalent $\max_i \alpha_1(i,n)$) eine untere Schranke für die DT.
- Wir setzen deshalb

$$c(A) = \text{maximale Weglänge im Segmentierungsgraphen.}$$

Min-Max–Charakterisierung

Satz

Die minimale DT für eine MLC-Segmentierung mit ICC bzw. mit ICC und TGB ist gleich der maximalen Weglänge im Segmentierungsgraphen, wenn man jeweils die entsprechende Gewichtsfunktion verwendet.

- Die Zahlen $\alpha_1(i, j)$, und damit auch die minimale DT, können auch für sehr große Matrizen algorithmisch effizient bestimmt werden.
- Beweisidee: iterierte Konstruktion eines Segments S mit $c(A - S) = c(A) - 1$.

Und in Wirklichkeit . . .

- . . . ist alles noch viel komplizierter.

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}.$$

Schluss

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!