Mathematische Methoden zur Bildentstörung

Gerlind Plonka-Hoch
Universität Duisburg-Essen

Rostock — 8. September 2008

Inhalt

- **Mathematische Methoden zur Signal- und Bildentstörung**
  - **Variationsansatz**
  - **Nichtlineare Diffusionsfilterung**
  - **Wavelet Shrinkage**
  - **Hybridansätze**
- **Forschungsschwerpunkte und Projekte**

Mathematische Methoden der Bildentstörung

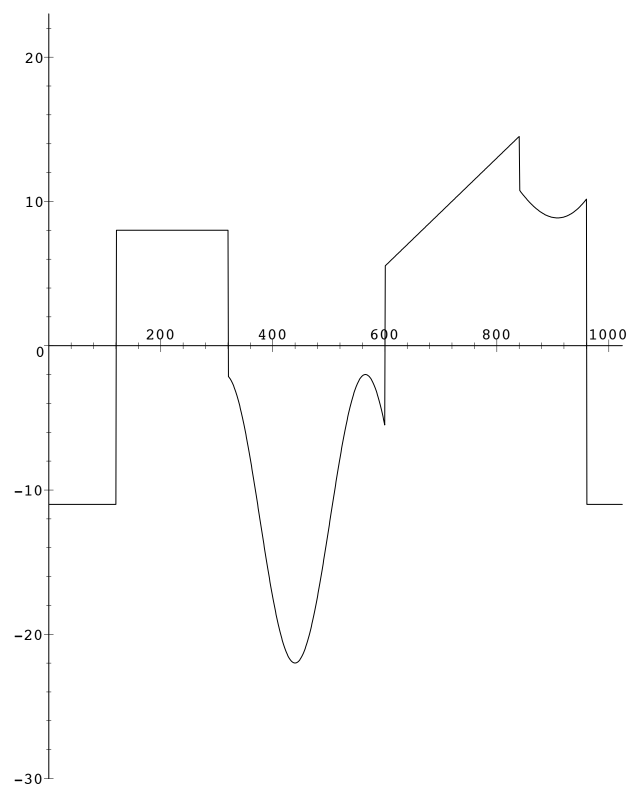
Rekonstruktionsproblem

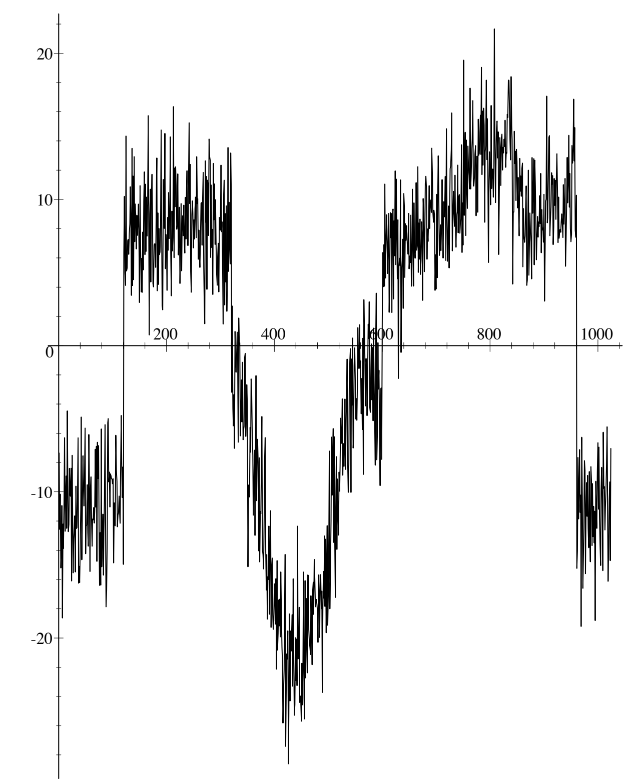
Rekonstruiere ein **Signal (Bild)** $\boldsymbol{u}$ aus einem **beobachteten Signal** $\boldsymbol{f}$

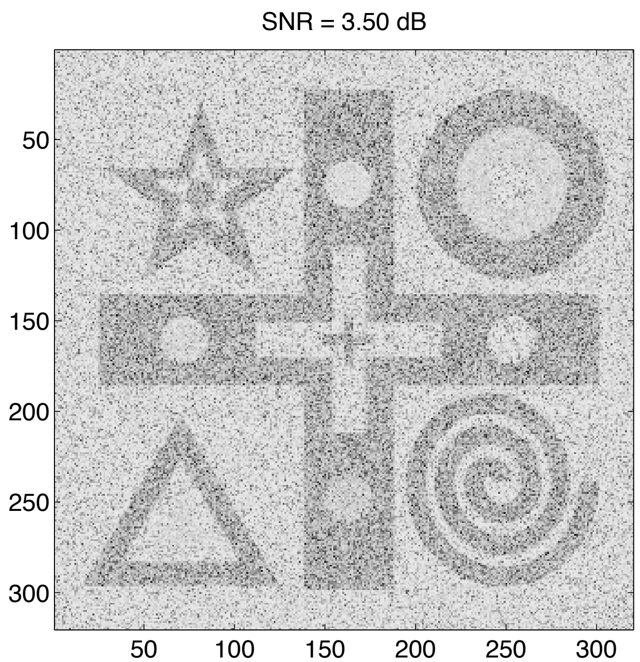
Die Veränderung des Signals entsteht durch

- **zufällige Störungen** $\boldsymbol{n}$ $\qquad \boldsymbol{f = u + n}$
- **Verzerrung** $\boldsymbol{R}$ $\qquad \boldsymbol{f = R\,u + n}$

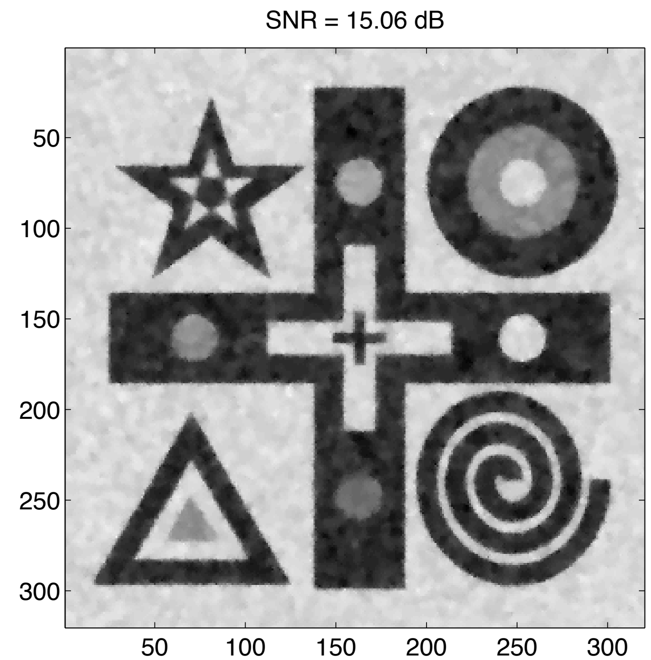
Schlecht gestelltes inverses Problem



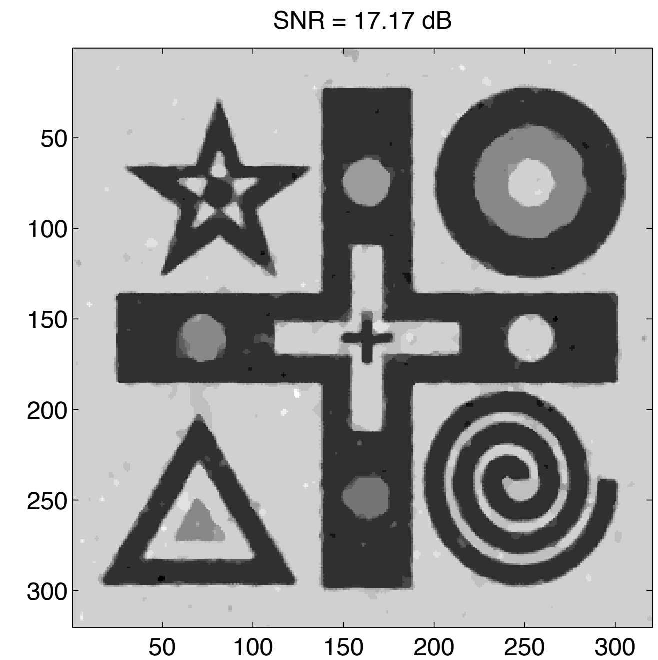




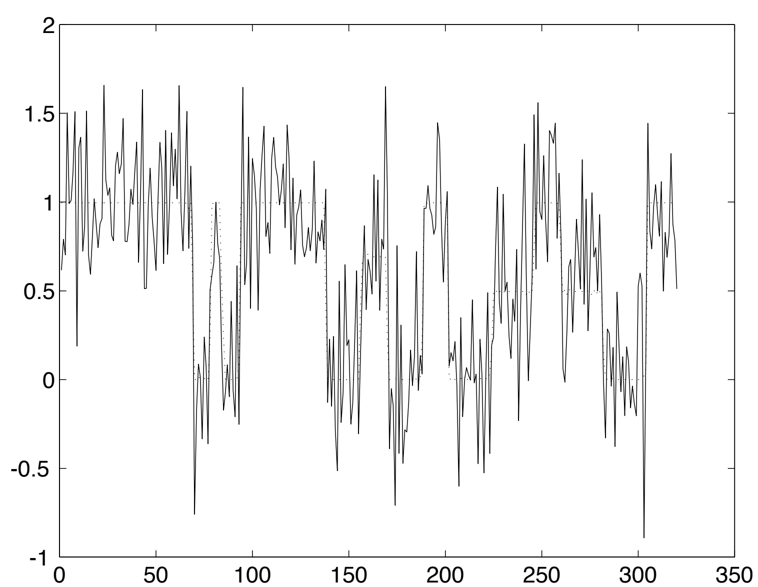
Gestörtes Bild
SNR=3.50 dB



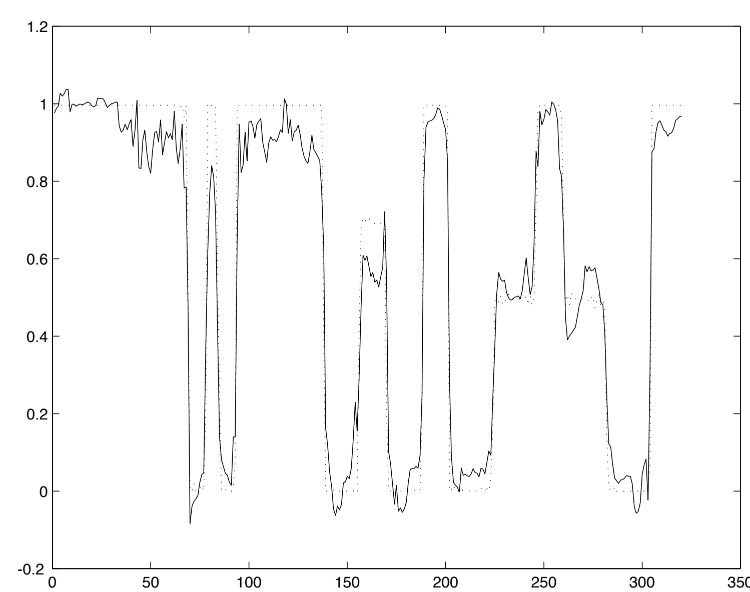
digitaler TV Filter [COS]
SNR=15.06 dB



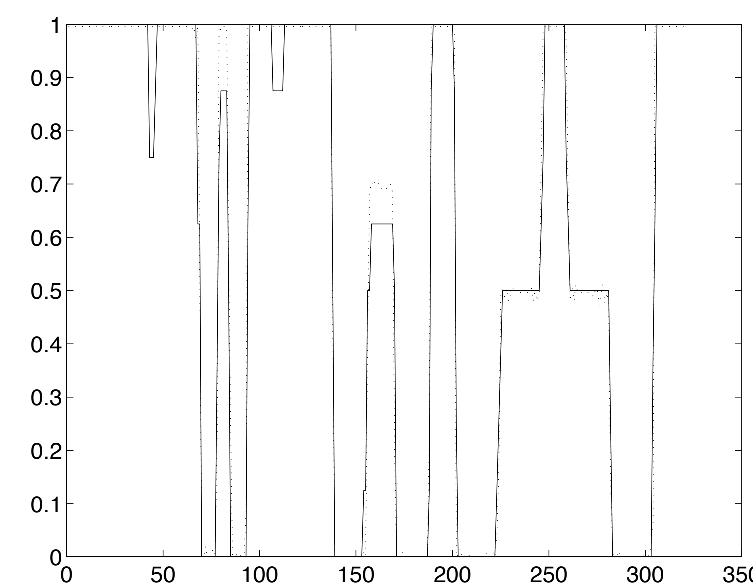
PMa-Algorithmus
SNR=17.17 dB



Schnitt durch das gestörte Bild



Schnitt für den digitalen TV Filter



Schnitt für den PMa-Algorithmus

Variationsansatz

Sei $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{0}$ sowie $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{M}$.

Rudin-Osher-Fatemi-Modell

Minimiere das Funktional

$$\boldsymbol{J_\alpha(u)} = \underbrace{\int_{\boldsymbol{\Omega}} (\boldsymbol{f(x)} - \boldsymbol{u(x)})^{\mathbf{2}}\, \boldsymbol{dx}}_{\text{Approximationsterm}} + \boldsymbol{\alpha} \underbrace{\int_{\boldsymbol{\Omega}} (|\boldsymbol{\nabla u(x)}|)\, \boldsymbol{dx}}_{\text{Glättungsterm}}$$

für $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{BV}(\boldsymbol{\Omega}) \cap \boldsymbol{L}^{\mathbf{2}}(\boldsymbol{\Omega})$

Vorteile: TV-Quasi-Norm gut zur Bildentstörung geeignet
Funktional ist konvex
$\Rightarrow$ Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Nachteile: Glättungsterm nicht differenzierbar
$\Rightarrow$ aufwändige Berechnung (Gradientenabstiegsverfahren)
staircasing effect

Weiterentwicklung der Modelle

Meyer-Modell

Minimiere das Funktional

$$\boldsymbol{J_\alpha(u,v) = \|v\|_{G(\mathbb{R}^2)} + \alpha \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x)| dx,}$$

wobei $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{BV}(\mathbb{R}^2) \cap \boldsymbol{L^2}(\boldsymbol{\Omega})$ und $\boldsymbol{v := f - u} \in \boldsymbol{G}(\mathbb{R}^2)$.

Literatur

1990	Nordström
1992	Rudin, Osher, Fatemi
1994	ter Haar Romeny
1997	Aubert, Vese
2002	Meyer
2002	Aubert, Kornprobst
2003	Vese-Osher

2004	Osher, Sole, Vese
2005	Aubert, Aujol
2005	Osher, Burger, Goldfarb, Xu, Yin
2006	Garnet, Le, Meyer
2007	Chan, Zhou
...	

Nichtlineare Diffusionsfilterung

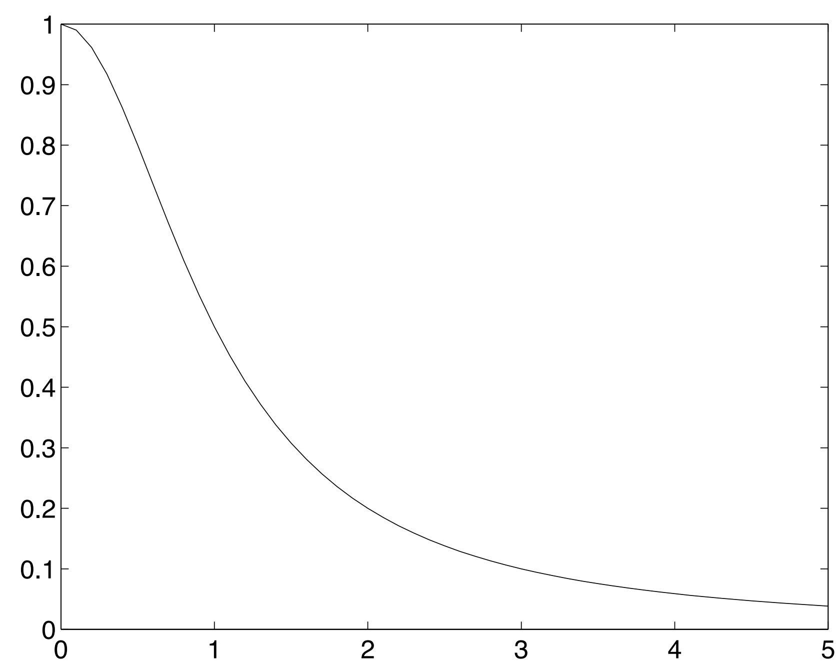
Sei $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{n}$.

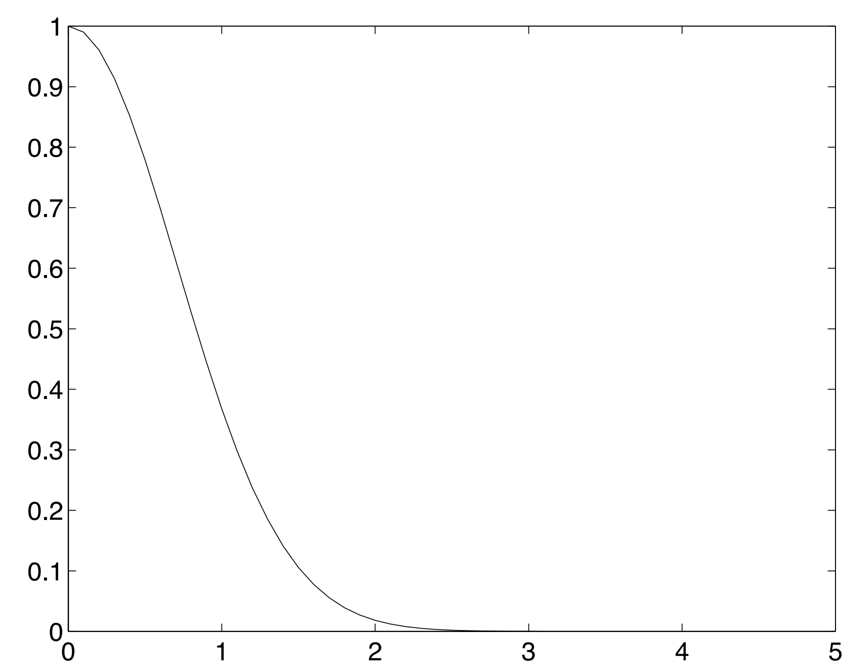
Betrachte $\quad \boldsymbol{u_t = \mathrm{div}\left(g(|\nabla u|)\,\nabla u\right)} \quad$ **auf** $\boldsymbol{\Omega \times (0, \infty)}$

Anfangsbedingung $\quad \boldsymbol{u(x, 0) = f(x)} \quad \boldsymbol{x \in \Omega}$

Randbedingung $\quad \boldsymbol{\frac{\partial}{\partial n} u(x) = 0} \quad \boldsymbol{x \in \partial\Omega}$

Diffusivität $\quad \boldsymbol{g(|s|) = \frac{1}{1+s^2/\kappa}}$ **oder** $\boldsymbol{g(|s|) = \exp(-\frac{s^2}{\kappa})}$





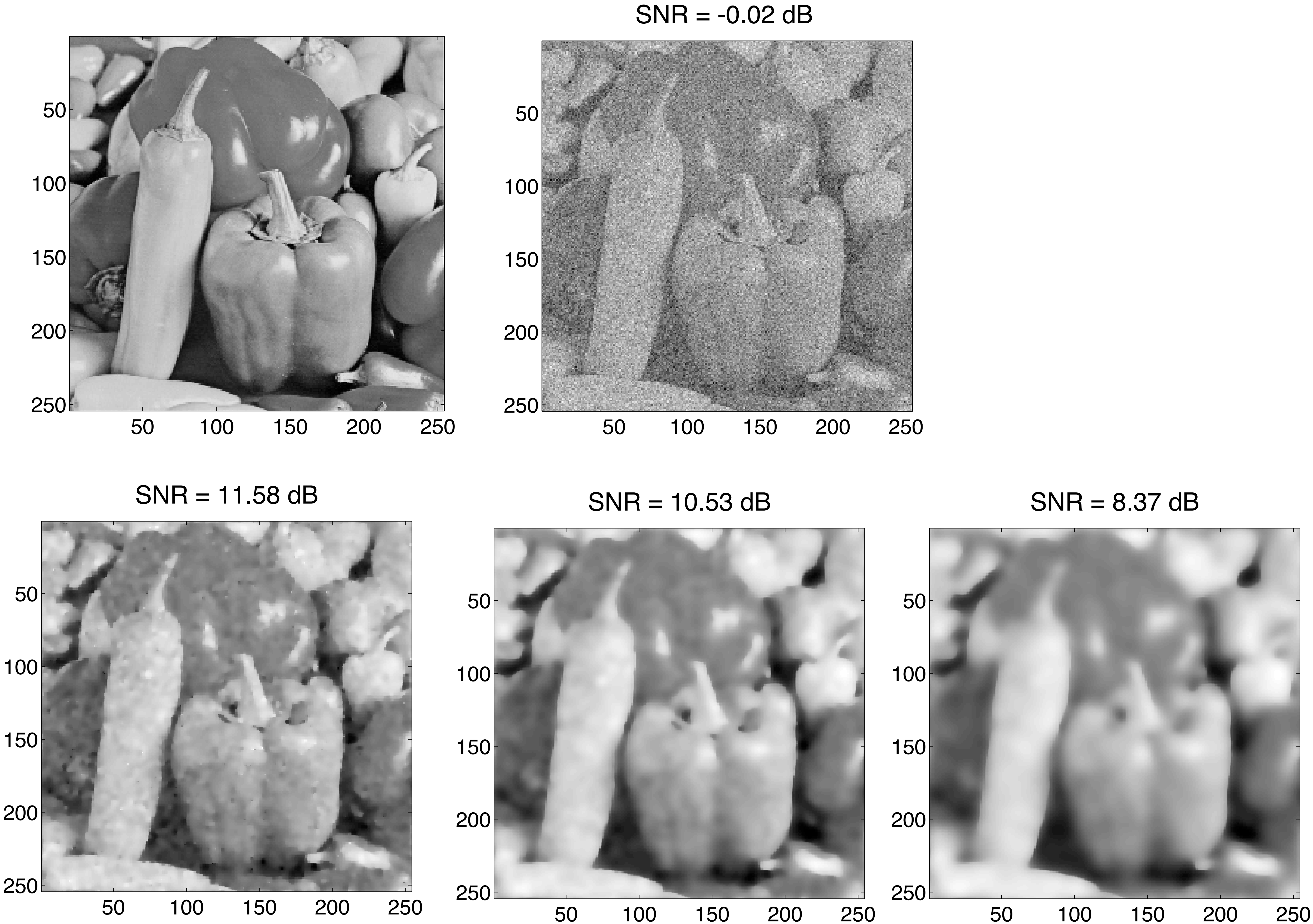
Vorteil: Bessere Erhaltung der Strukturen des Bildes

Nachteile: - Perona-Malik Modell schlecht gestellt $\Rightarrow$ Regularisierung nötig
- sehr kleine Schrittweiten für explizite numerische Verfahren nötig um Stabilität zu sichern
- Stoppzeit

Literatur

1987	Perona, Malik
1992	Alvarez, Lions, Morel
1997	Weickert
1997	Kichenassamy
1998	Black, Sapiro, Marimont, Heeger

2000	Chen, Vemuri, Wang
2005	Welk, Steidl, Weickert
2006	Esedoglu
2007	Chui, Wang
...	


SNR = -0.02 dB
SNR = 11.58 dB
SNR = 10.53 dB
SNR = 8.37 dB

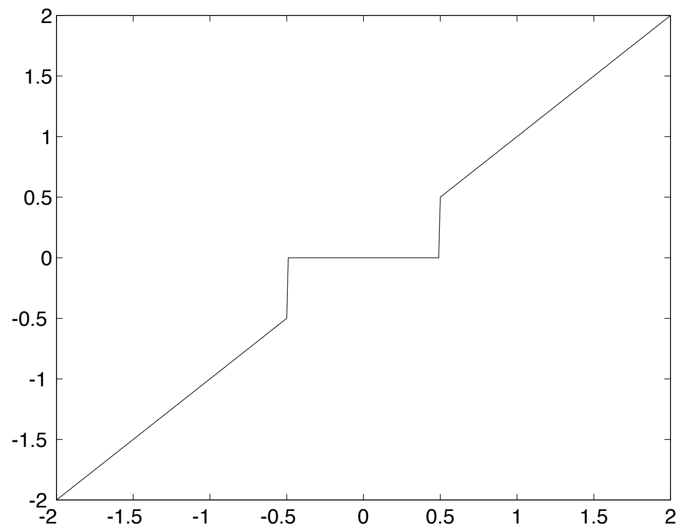
Wavelet Shrinkage

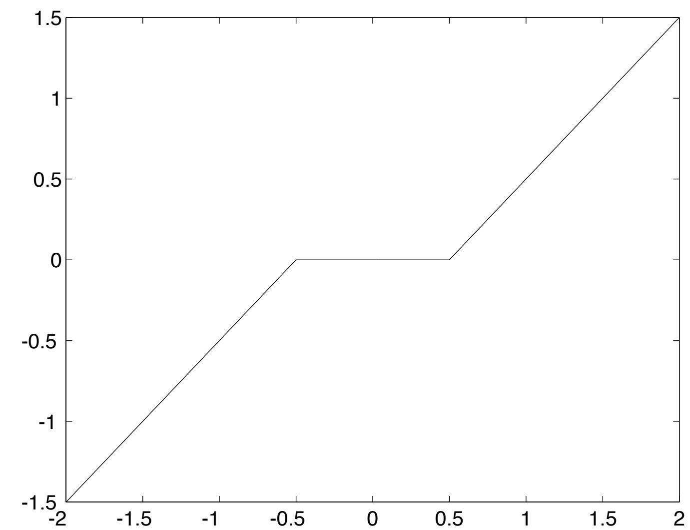
Idee

- Finde passende lokale Funktionensysteme, die $L_2(\Omega)$ erzeugen (orthogonal, biorthogonal, redundant).
- Entwickle die Bildfunktion in diesem Funktionensystem und wende auf die Entwicklungskoeffizienten eine Shrinkage-Prozedur an.
- Transformiere zurück.

Sei $\boldsymbol{S_t}$ eine **Shrinkage-Funktion**

$$S_t(x) = \begin{cases} x & \text{für } |x| \geq t \\ 0 & \text{für } |x| < t \end{cases} \quad \text{oder} \quad S_t(x) = \begin{cases} x - t & \text{für } x \geq t \\ 0 & \text{für } |x| < t \\ x + t & \text{für } x \leq -t \end{cases}$$





Sei $\{ \boldsymbol{\psi^r_{j,k}} \,,\, j \in \mathbb{N}_0,\, k \in I_j,\, r = 1,2,3 \}$ ein **orthogonales Waveletsystem** von $L_2(\Omega)$

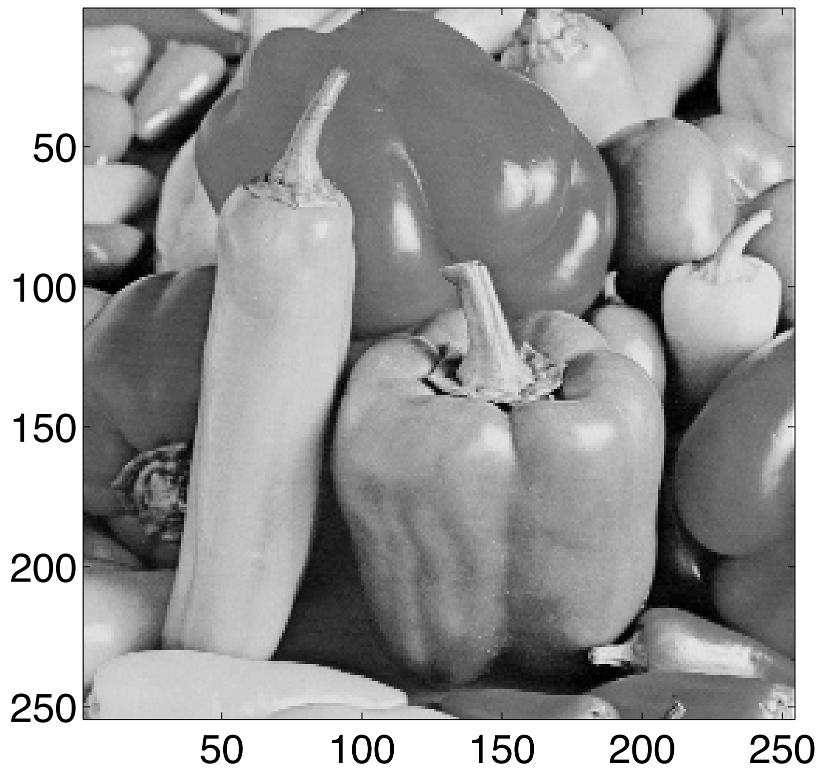
Wavelet Shrinkage

$$\boldsymbol{u(t) := \langle f, 1 \rangle + \sum_{j,k,r} S_t(\langle f,\, \psi^r_{j,k} \rangle)\, \psi^r_{j,k}}$$

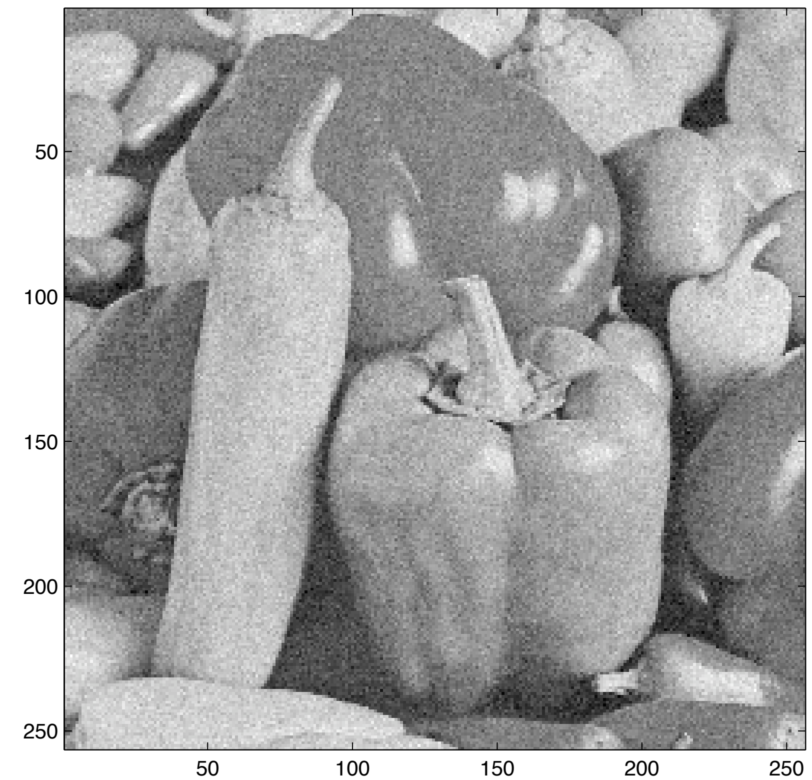
Vorteil: Sehr schnelle Berechnung
Nachteil: Gibbsartige Phänomene in Kantennähe

Literatur

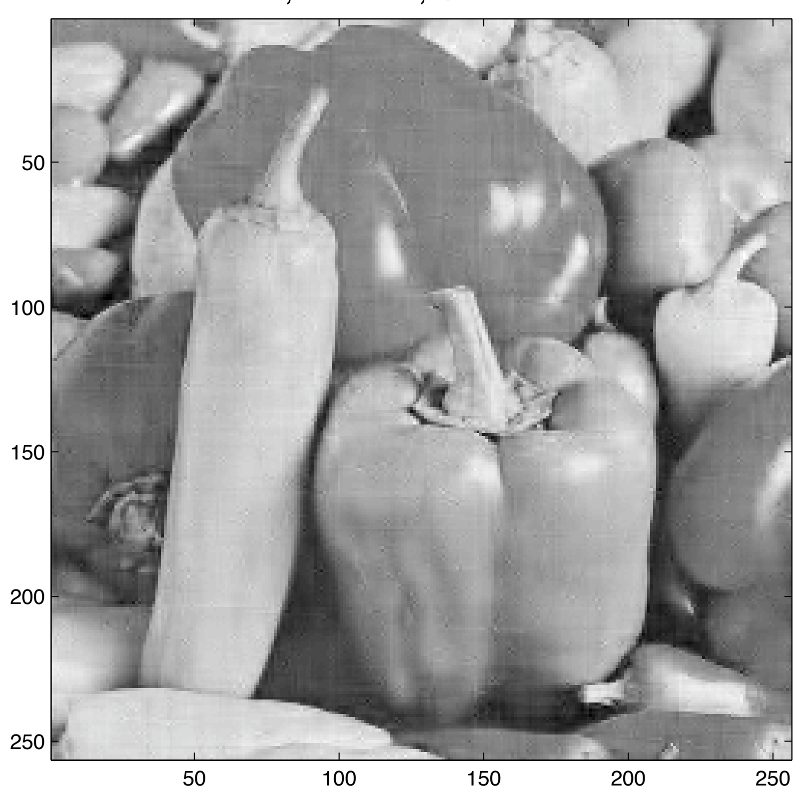
1994	Donoho, Johnstone
1995	Coifman, Donoho
1995	Coifman, Meyer
2001	Chambolle, Lucier
2001	Kingsbury
2004	Candes, Donoho
2005	Pennec, Mallat
2006	Do, Vetterli
2006	Candes, Demanet, Donoho
2006	Po, Do
2007	Kutyniok, Labate
...	



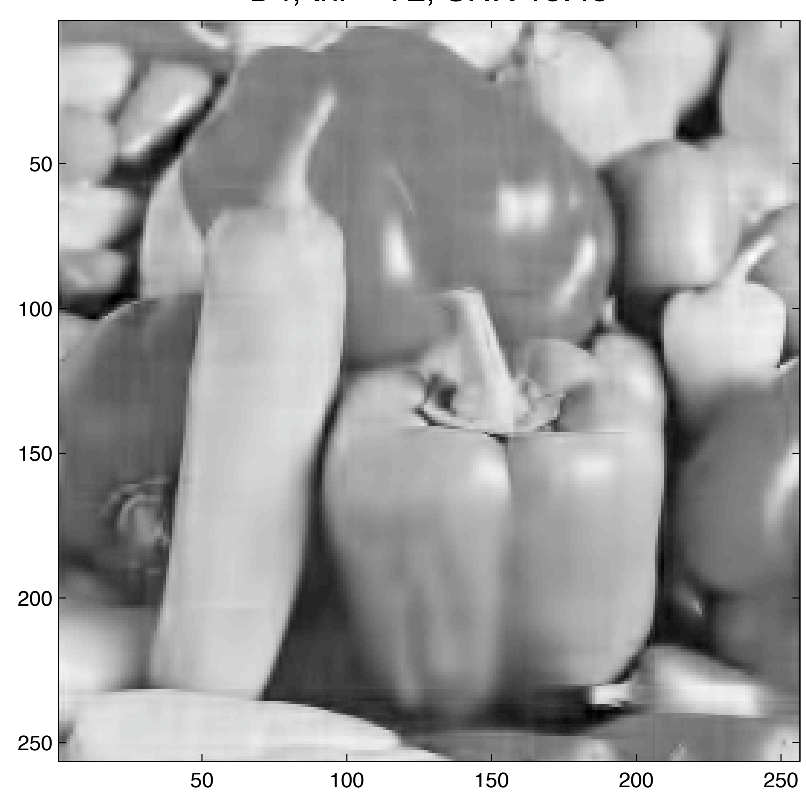
SNR 10.79



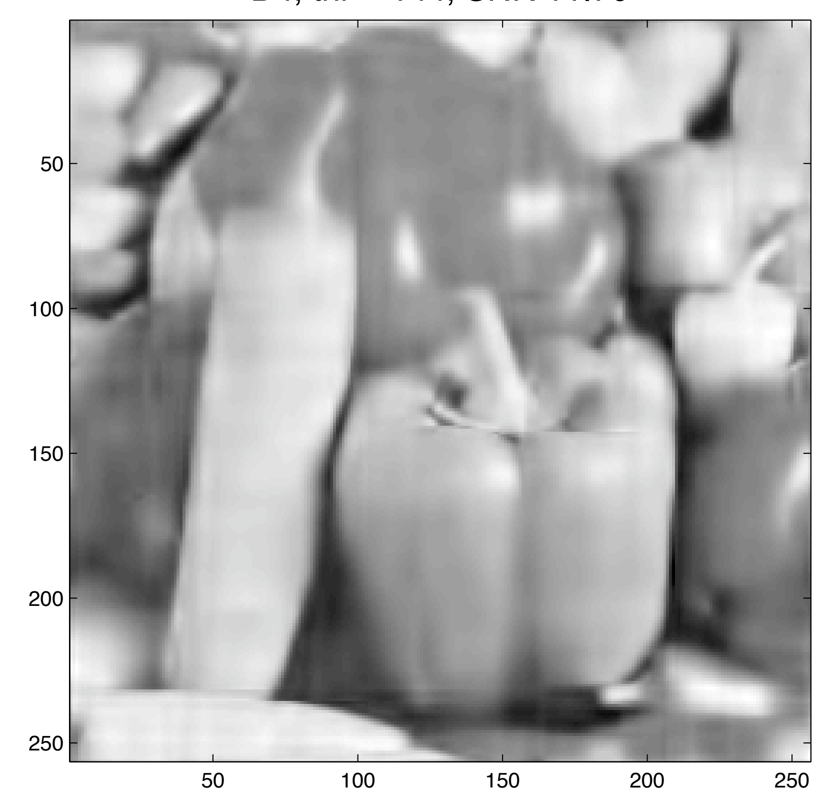
D4, thr = 36, SNR 17.19



D4, thr = 72, SNR 15.45



D4, thr = 144, SNR 11.70



Beziehungen zwischen den verschiedenen Methoden, Hybridansätze

1998 Chambolle, DeVore, Lee, Lucier
1998 Scherzer, Weickert
2000 Chan, Zhou
2001 Coifman, Sowa
2002 Candes, Guo
2002 Malgouyres
2003 Durand, Froment
2004 Steidl, Weickert, Brox, Mrazek, Welk
2004 Daubechies, Teschke
2005 Welk, Weickert, Steidl
2006 Fenn, Ma
2007 Mrazek, Weickert
2007 Teschke, Zhariy, Soares

... und eigene Arbeiten

Eigene Arbeiten

- Gerlind Plonka, Gabriele Steidl: *A multiscale wavelet-inspired scheme for nonlinear diffusion.* International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing 4 (2006), 1–22.
- Jianwei Ma, Gerlind Plonka: *Combined Curvelet shrinkage and nonlinear anisotropic diffusion.* IEEE Trans. Image Process. 16 (2007), 2198–2206.
- Gerlind Plonka, Jianwei Ma: *Convergence of an iterative nonlinear scheme for denoising of piecewise constant images.* International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing 5 (2007), 975–995.
- Gerlind Plonka: *A digital diffusion-reaction type filter for nonlinear denoising.* Preprint 2007, Results in Mathematics, to appear.
- Gerlind Plonka, Jianwei Ma: *Nonlinear regularized reaction-diffusion filters for denoising of images with textures.* IEEE Trans. Image Process. 17 (2008), 1283–1294.
- Jens Krommweh, Gerlind Plonka: *Directional Haar wavelet frames on triangles.* Preprint 2007.

Nonlinear regularized reaction-diffusion filters for denoising of images with textures

Konstruktionsmethode

Wende das folgende Reaktions-Diffusionsmodell auf $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{n}$ an.

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{t}} = \mathbf{div}\,(\boldsymbol{g}(|\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{P_\sigma u})|)\boldsymbol{\nabla u}) + \gamma\,(\boldsymbol{Sf} - \boldsymbol{u})$$

Anfangsbedingung $\quad \boldsymbol{u}(\cdot\,, \mathbf{0}) = \boldsymbol{f}$

homogene Neumann-Randbedingungen

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{t}} = \mathbf{div}\,(\boldsymbol{g}(|\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{P_\sigma u})|)\boldsymbol{\nabla u}) + \gamma\,(\boldsymbol{Sf} - \boldsymbol{u})$$

Wähle

$$\boldsymbol{P_\sigma u} = \boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{s}}\,\boldsymbol{Tu}$$

wobei T die Curvelet-Transformation ist, T^{-1} die inverse Curvelet-Transformation, und

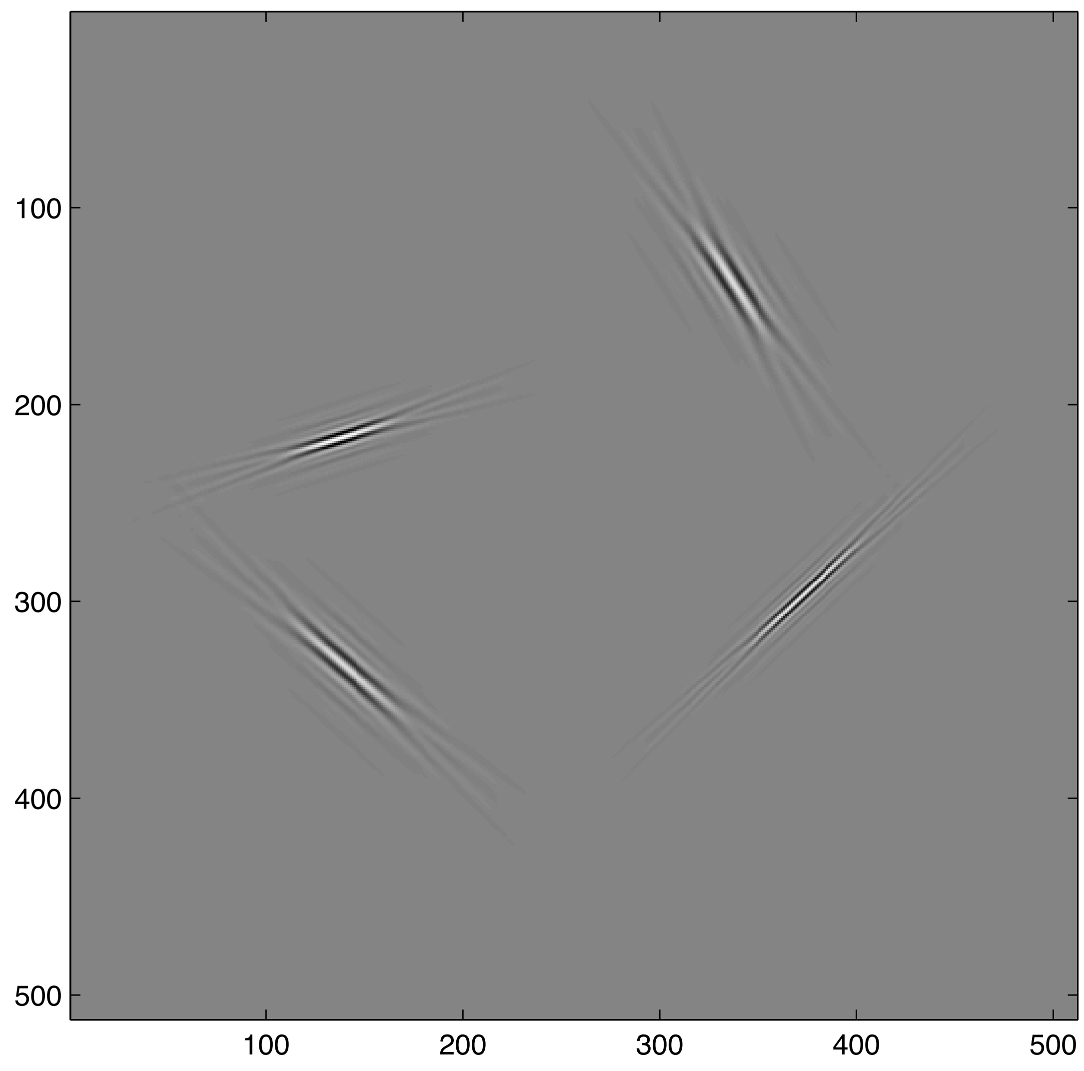
$$\Theta_s(x) := \begin{cases} x - \sigma & \text{if} \quad x \geq \sigma \\ 0 & \text{if} \quad |x| < \sigma \\ x + \sigma & \text{if} \quad x < -\sigma \end{cases} \qquad \textit{soft threshold}.$$

Wähle

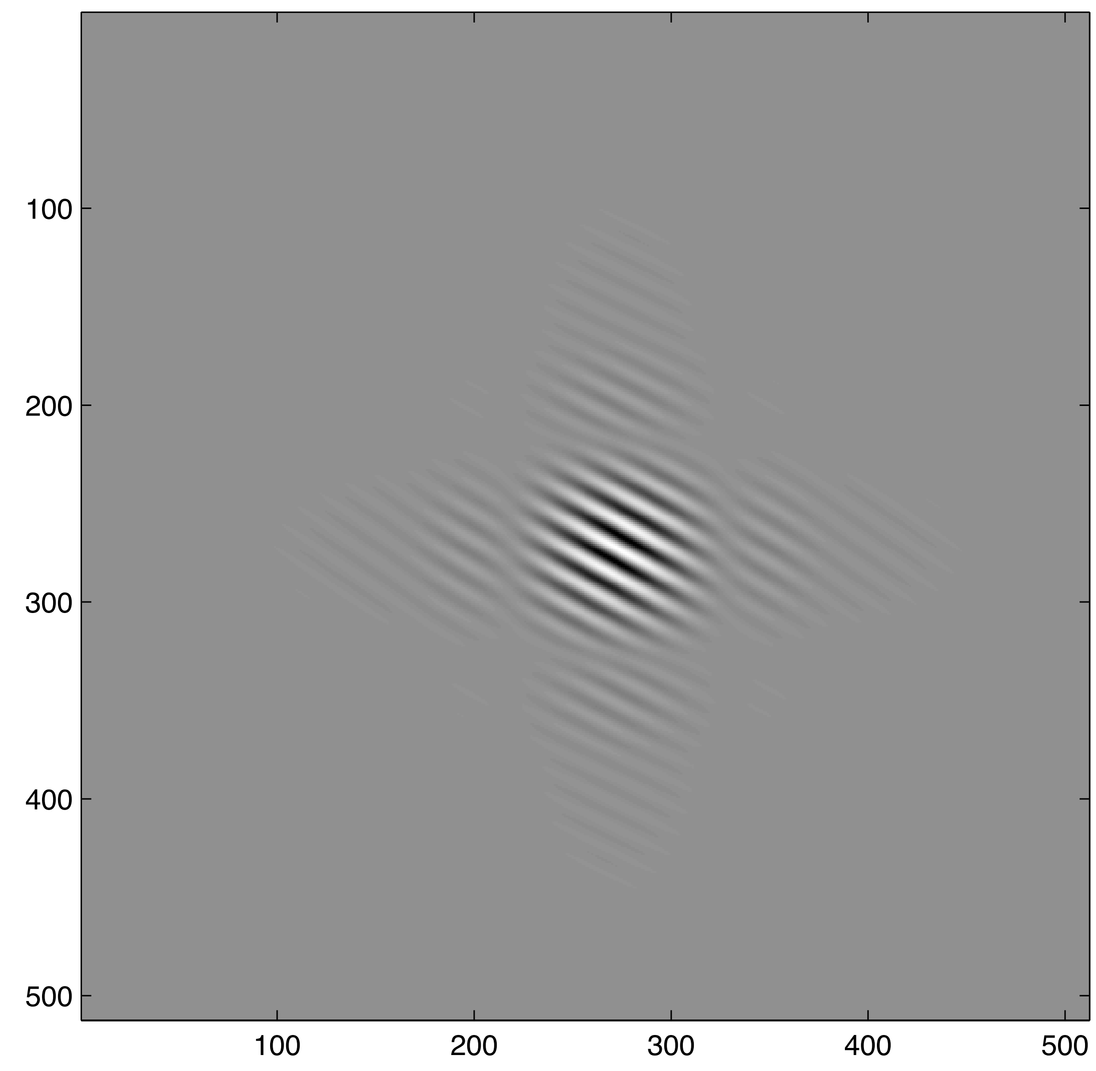
$$\boldsymbol{Sf} = \boldsymbol{W}^{-1}\,\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{h}}\,\boldsymbol{Wf}$$

wobei W eine Wave-Atom-Transformation ist mit

$$\Theta_h(x) := \begin{cases} x & |x| \geq \sigma \\ 0 & |x| < \sigma \end{cases} \qquad \textit{hard threshold}.$$

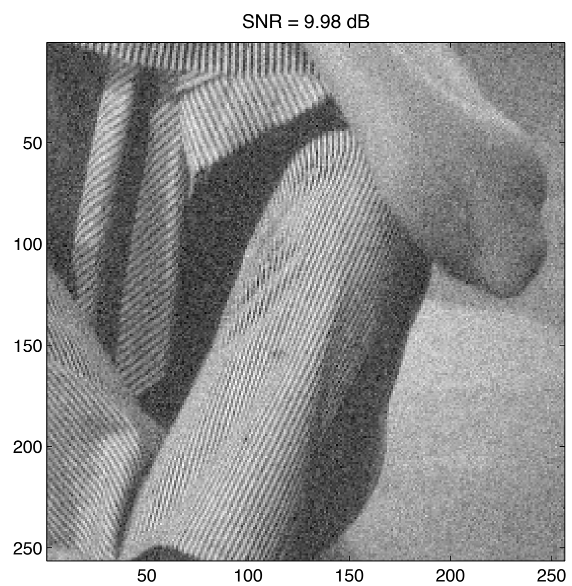


Curvelet-Funktionen
im Zeitbereich

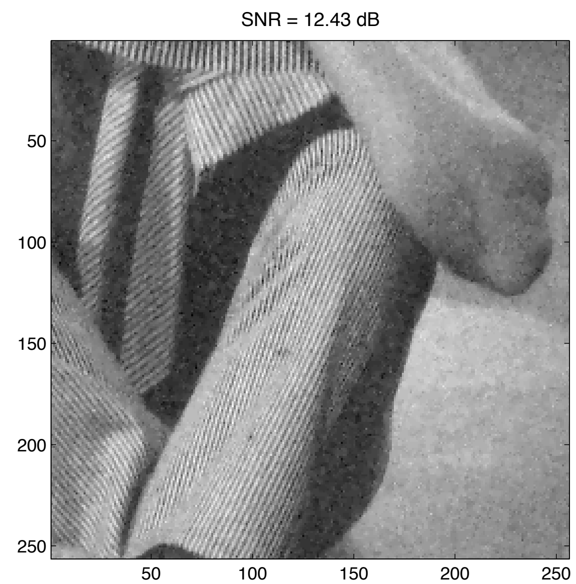


Wave-Atom-Funktion
im Zeitbereich

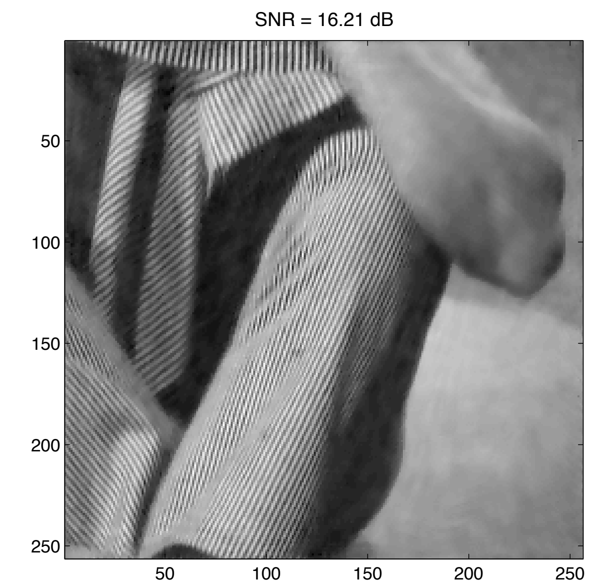
Numerische Resultate



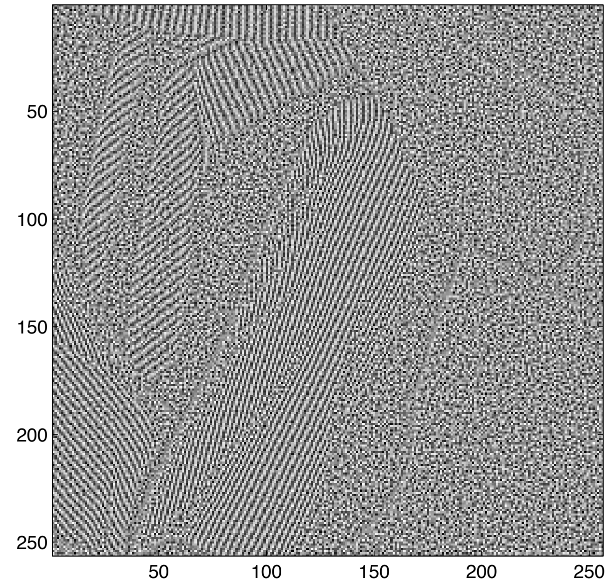
Gestörtes Bild
SNR=9.98



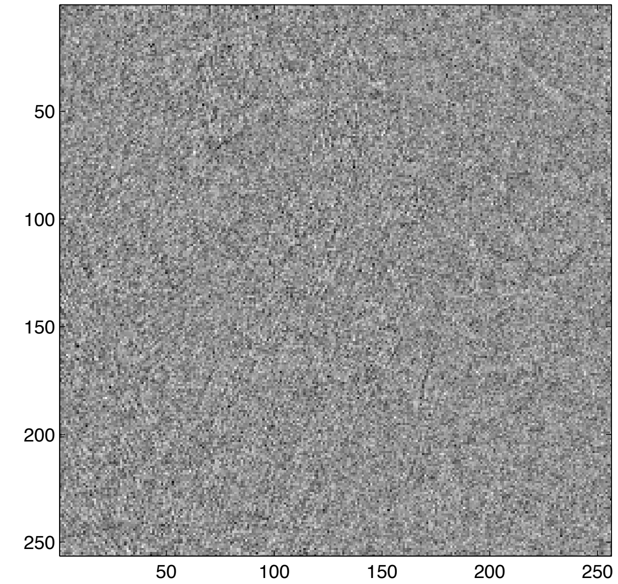
TV-Diffusionsfilter
SNR= 12.43



neuer Filter [PM]
SNR=16.21



Differenzbild
für TV-Filter



Differenzbild
für neuen Filter

Forschungsinteressen und Projekte der Arbeitsgruppe

Arbeitsgruppe

- **Leiterin**
  Prof. Dr. Gerlind Plonka-Hoch
- **wissenschaftliche Mitarbeiter**
  Dipl.-Math. Jens Krommweh
  Dipl.-Math. Stefanie Tenorth
- **studentische Hilfskraft**
  cand. math. Florian Boßmann
- **Diplomanden (2008)**
  Stefanie Tenorth
  Jasmin Szymanski
  Benjamin Ristov
  Anna Peissakhovitch
  Songül Canpolat
  Alexander Rosenfeld
  Anna Schütz

Aktuelle Projekte

1 Digitale Bildverarbeitung mittels Shearlets
Sachmittelprojekt der DFG seit April 2007

Thema:
Konstruktion und Analyse neuer Shearlet-Funktionensystems mit einfacher Struktur und kompaktem Träger im Zeitbereich und deren Anwendung zur Analyse, Kompression und Entstörung von Bildern

Projektmitarbeiter: Jens Krommweh

2 Entstörung und Kompression von Daten auf der Sphäre
DFG-Kooperationsprojekt Projekt Deutschland-Rumänien
seit Oktober 2007

Thema:
Herleitung und Analyse neuer Verfahren zur Entstörung und Kompression von Daten auf der Sphäre

Projektpartner: Prof. Dr. Daniela Roşca (TU Cluj-Napoca)

3 Adaptive Approximation Algorithms for Sparse Data Representation

Sachmittelprojekt der DFG seit September 2008 im Rahmen des Schwerpunktprogramms 1324 "Mathematische Methoden zur Extraktion quantifizierbarer Information aus komplexen Systemen"

Projektpartner: Prof. Dr. Armin Iske (Universität Hamburg)

Vorhaben:
- Effiziente Dimensionsreduktion durch manifold learning
- Konstruktion adaptiver Filter zur effizienten Darstellung von Daten
- Anwendung adaptiver Multiskalenstrukturen zur numerischen Simulation von Diffusionsprozessen zur Bildentstörung
- Texturseparation mittels redundanter Dictionaries und Diffusions-Reaktions-Modellen
- Anwendung auf verschiedene Probleme in Neuro- und Biowissenschaften sowie auf medizinische Bilder

Projektmitarbeiterin: Stefanie Tenorth

Diplomarbeitsthemen 2008

- **Stefanie Tenorth**: Verallgemeinerte Rudin-Osher-Fatemi-Regularisierung zur Signalentstörung
- **Jasmin Szymanski**: Untersuchung alternativer Ansätze zur Erkennung von Fahrzeugcrashs (in Zusammenarbeit mit FB Maschinenbau und BMW, München)
- **Benjamin Ristov**: Adaptive Wavelets zur Ultraschall-Signalanalyse (in Zusammenarbeit mit Salzgitter Mannesmann Forschung, Duisburg, Dr. Till Schmitte)
- **Anna Peissakhovitch**: Greedy-Algorithmen zur effizienten Darstellung von Signalen
- **Songül Canpolat**: Die Total-Least-Squares-Methode und ihre Anwendung zur Entstörung von Bildern (in Zusammenarbeit mit Hüttenwerk Krupp-Mannesmann, Duisburg)
- **Alexander Rosenfeld**: Adaptive Waveletshrinkage-Methoden zur Analyse von Streufluss-Signalen (in Zusammenarbeit mit Salzgitter Mannesmann Forschung, Duisburg, Dr. Till Schmitte)
- **Anna Schütz**: Ein zweistufiges Verfahren zur Rekonstruktion von Bildern mit Impulsstörungen