Das Pentagon Problem

Metamorphosen einer IMO–Aufgabe

Elias Wegert

Institut für Angewandte Analysis
TU Bergakademie Freiberg

09.09.2008

Was hat ES mir gebracht?

Einige Einsichten:

Was hat ES mir gebracht?

Einige Einsichten:

- Mathematik ist nicht algorithmisch.

Was hat ES mir gebracht?

Einige Einsichten:

- Mathematik ist nicht algorithmisch.
- Mathematik ist ein weites Feld.

Was hat ES mir gebracht?

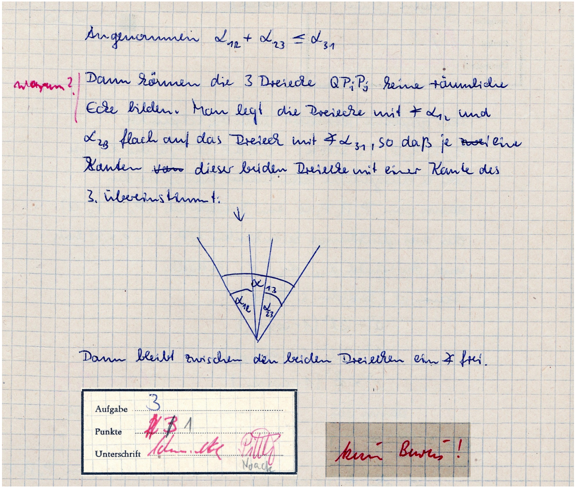
Einige Einsichten:

- Mathematik ist nicht algorithmisch.
- Mathematik ist ein weites Feld.
- Mathematik ist Bestandteil der Kultur.

Was hat ES mir gebracht?

Einige Einsichten:

- Mathematik ist nicht algorithmisch.
- Mathematik ist ein weites Feld.
- Mathematik ist Bestandteil der Kultur.
- Mathematik hat ihre eigene Kultur.



Angenommen $\alpha_{12} + \alpha_{23} \leq \alpha_{31}$

warum? Dann können die 3 Dreiecke QP_iP_j keine räumliche Ecke bilden. Man legt die Dreiecke mit $\sphericalangle \alpha_{12}$ und α_{23} flach auf das Dreieck mit $\sphericalangle \alpha_{31}$, so daß je ~~zwei~~ eine Kanten ~~von~~ dieser beiden Dreiecke mit einer Kante des 3. übereinstimmt.

Dann bleibt zwischen den beiden Dreiecken ein $\sphericalangle$ frei.

Aufgabe 3
Punkte 1
Unterschrift
Noack

kein Beweis!

Aus einem Lösungsversuch für Aufgabe 111243

Was hat ES mir gebracht?

Einige Einsichten:

- Mathematik ist nicht algorithmisch.
- Mathematik ist ein weites Feld.
- Mathematik ist Bestandteil der Kultur.
- Mathematik hat ihre eigene Kultur.

Etwas Problemlösekompetenz:

Was hat ES mir gebracht?

Einige Einsichten:

- Mathematik ist nicht algorithmisch.
- Mathematik ist ein weites Feld.
- Mathematik ist Bestandteil der Kultur.
- Mathematik hat ihre eigene Kultur.

Etwas Problemlösekompetenz:

- Heuristische Methoden

Was hat ES mir gebracht?

Einige Einsichten:

- Mathematik ist nicht algorithmisch.
- Mathematik ist ein weites Feld.
- Mathematik ist Bestandteil der Kultur.
- Mathematik hat ihre eigene Kultur.

Etwas Problemlösekompetenz:

- Heuristische Methoden
- Strukturierung von Problemen

Was hat ES mir gebracht?

Einige Einsichten:

- Mathematik ist nicht algorithmisch.
- Mathematik ist ein weites Feld.
- Mathematik ist Bestandteil der Kultur.
- Mathematik hat ihre eigene Kultur.

Etwas Problemlösekompetenz:

- Heuristische Methoden
- Strukturierung von Problemen
- Fähigkeit zur Abstraktion

Was hat ES mir gebracht?

Einige Einsichten:

- Mathematik ist nicht algorithmisch.
- Mathematik ist ein weites Feld.
- Mathematik ist Bestandteil der Kultur.
- Mathematik hat ihre eigene Kultur.

Etwas Problemlösekompetenz:

- Heuristische Methoden
- Strukturierung von Problemen
- Fähigkeit zur Abstraktion
- Selbständigkeit und Ausdauer

Mathematische Probleme löst jeder auf seine Weise –

Albrecht Böttcher und Albrecht Hess beim IMO Training 1973

Persönlicher Arbeitsstil

Mathematische Probleme löst jeder auf seine Weise – oder doch nicht ?

Albrecht Böttcher und Albrecht Hess beim IMO Training 1973

Was hat ES mir gebracht?

Einige Einsichten:

- Mathematik ist nicht algorithmisch.
- Mathematik ist ein weites Feld.
- Mathematik ist Bestandteil der Kultur.
- Mathematik hat ihre eigene Kultur.

Etwas Problemlösekompetenz:

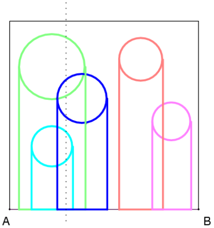
- Heuristische Prinzipien
- Strukturierung von Problemen
- Fähigkeit zur Abstraktion
- Selbständigkeit und Ausdauer
- Spezielle Techniken und Methoden

From the Buffon Needle Problem to the Kreiss Matrix Theorem
Elias Wegert and Lloyd N. Trefethen
The American Mathematical Monthly, Vol. 101, No. 2 (Feb., 1994), pp. 132-139 (article consists of 8 pages)
Published by: Mathematical Association of America

47. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 11–13
Aufgaben – 2. Tag

471345

Innerhalb eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 befinden sich endlich viele Kreisscheiben, die sich auch überlappen dürfen. Die Summe aller Kreisumfänge sei gleich 10. Man beweise, dass es eine Gerade gibt, die mindestens vier dieser Kreise schneidet oder berührt.



Beide Probleme verwenden die Reduktion eines mehrdimensionalen Problems auf ein eindimensionales.

Ideenaustausch

Albrecht Böttcher und E.W. bei der 4. Stufe der MO 1972

„Mathematical Community“

Im IMO Trainingslager 1973

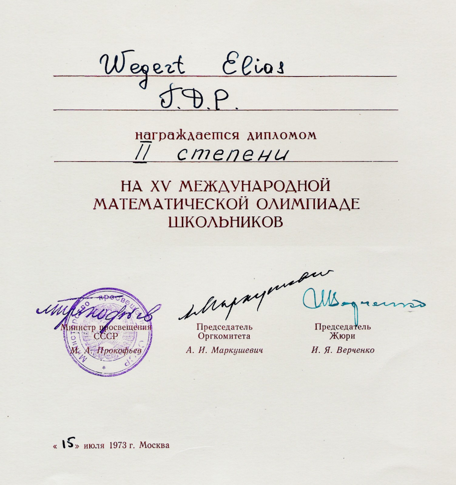
Umgang mit Erfolgen ...


In der Klasse 8
belegte
Elias Wegert
Oberschule I Frankenberg
den 2. Platz

Hainichen, den 18. Dezember 1968

FDJ-Kreisleitung

Kreisschulrat


Wegert Elias
Г.Д.Р.

награждается дипломом
II степени

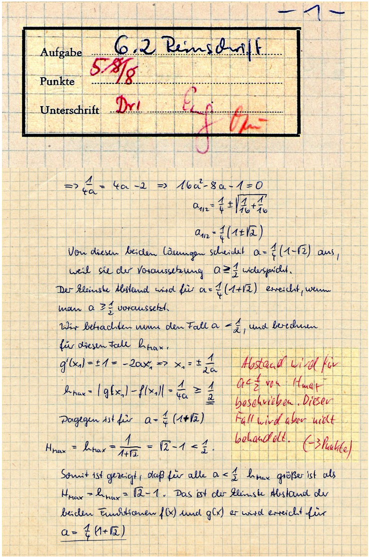
НА XV МЕЖДУНАРОДНОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ
ШКОЛЬНИКОВ

Министр просвещения СССР
М. А. Прокофьев

Председатель Оргкомитета
А. И. Маркушевич

Председатель Жюри
И. Я. Верченко

«15» июля 1973 г. Москва



— 1 —

Aufgabe 6.2 Reinschrift

Punkte 5 ~~8~~/8

Unterschrift Dr!

$$\Rightarrow \frac{1}{4a} = 4a - 2 \Rightarrow 16a^2 - 8a - 1 = 0$$

$$a_{1/2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}}$$

$$a_{1/2} = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{2})$$

Von diesen beiden Lösungen scheidet $a = \frac{1}{4}(1-\sqrt{2})$ aus, weil sie der Voraussetzung $a \geq \frac{1}{2}$ widerspricht.

Der kleinste Abstand wird für $a = \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})$ erreicht, wenn man $a \geq \frac{1}{2}$ voraussetzt.

Wir betrachten nun den Fall $a < \frac{1}{2}$, und berechnen für diesen Fall h_{max}.

$$g'(x_1) = \pm 1 = -2ax_1 \Rightarrow x_1 = \pm \frac{1}{2a}$$

$$h_{max} = |g(x_1) - f(x_1)| = \frac{1}{4a} \geq \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Dagegen ist für $a = \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})$

$$H_{max} = h_{max} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}.$$

Abstand wird für $a < \frac{1}{2}$ von H_{max} beschrieben. Dieser Fall wird aber nicht behandelt. (−3 Punkte)

Somit ist gezeigt, daß für alle $a < \frac{1}{2}$ h_{max} größer ist als $H_{max} = h_{max} = \sqrt{2} - 1$. Das ist der kleinste Abstand der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ er wird erreicht für $\underline{a = \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})}$

Kann man nach so vielen Jahren noch einen Einspruch anmelden ?

Olympiadeprobleme versus „echte“ Mathematik

Olympiadeprobleme sind echte Mathematik

Olympiadeprobleme versus „echte“ Mathematik

Olympiadeprobleme sind echte Mathematik mit Besonderheiten:

Olympiadeprobleme versus „echte“ Mathematik

Olympiadeprobleme sind echte Mathematik mit Besonderheiten:

- abschätzbarer Schwierigkeitsgrad

Olympiadeprobleme versus „echte“ Mathematik

Olympiadeprobleme sind echte Mathematik mit Besonderheiten:

- abschätzbarer Schwierigkeitsgrad
- vorgegebener Zeitrahmen

Olympiadeprobleme versus „echte“ Mathematik

Olympiadeprobleme sind echte Mathematik mit Besonderheiten:

- abschätzbarer Schwierigkeitsgrad
- vorgegebener Zeitrahmen
- eingeschränkte Hilfsmittel

Olympiadeprobleme versus „echte“ Mathematik

Olympiadeprobleme sind echte Mathematik mit Besonderheiten:

- abschätzbarer Schwierigkeitsgrad
- vorgegebener Zeitrahmen
- eingeschränkte Hilfsmittel
- begrenzter Wissensumfang

Olympiadeprobleme versus „echte“ Mathematik

Olympiadeprobleme sind echte Mathematik mit Besonderheiten:

- abschätzbarer Schwierigkeitsgrad
- vorgegebener Zeitrahmen
- eingeschränkte Hilfsmittel
- begrenzter Wissensumfang
- spezielle Tricks

Olympiadeprobleme versus „echte“ Mathematik

Olympiadeprobleme sind echte Mathematik mit Besonderheiten:

- abschätzbarer Schwierigkeitsgrad
- vorgegebener Zeitrahmen
- eingeschränkte Hilfsmittel
- begrenzter Wissensumfang
- spezielle Tricks

Mathematik ist eine Entdeckungsreise mit offenem Ende.

Olympiadeprobleme versus „echte“ Mathematik

Olympiadeprobleme sind echte Mathematik mit Besonderheiten:

- abschätzbarer Schwierigkeitsgrad
- vorgegebener Zeitrahmen
- eingeschränkte Hilfsmittel
- begrenzter Wissensumfang
- spezielle Tricks

Mathematik ist eine Entdeckungsreise mit offenem Ende.

Wichtiger Schritt für den Zugang zum Reich der Mathematik:

Olympiadeprobleme versus „echte“ Mathematik

Olympiadeprobleme sind echte Mathematik mit Besonderheiten:

- abschätzbarer Schwierigkeitsgrad
- vorgegebener Zeitrahmen
- eingeschränkte Hilfsmittel
- begrenzter Wissensumfang
- spezielle Tricks

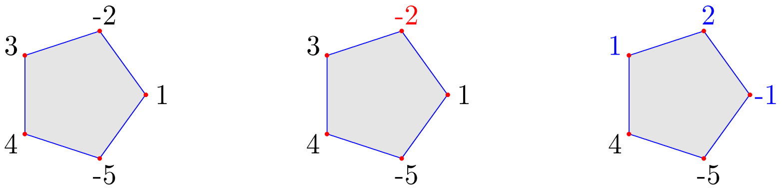
Mathematik ist eine Entdeckungsreise mit offenem Ende.

Wichtiger Schritt für den Zugang zum Reich der Mathematik:

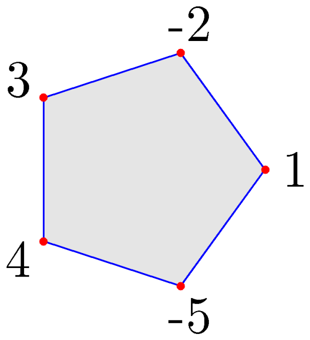
$$\text{Probleme lösen} \Longrightarrow \text{Probleme stellen}$$

E.W.: IMO 1986, Aufgabe 3

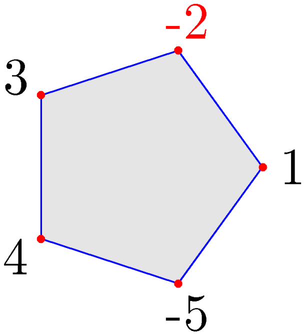
An jedem Eckpunkt eines Fünfecks steht eine ganze Zahl. Die Summe aller fünf Zahlen ist positiv. Wenn an drei aufeinanderfolgenden Eckpunkten die Zahlen x, y und z stehen und y negativ ist, so können diese durch $x+y$, $-y$ und $z+y$ ersetzt werden. Man beweise, dass es nach endlich vielen Ersetzungen keine negativen Zahlen mehr gibt.



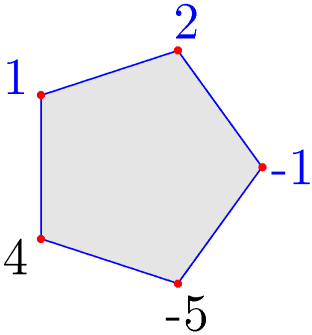
Ein Experiment



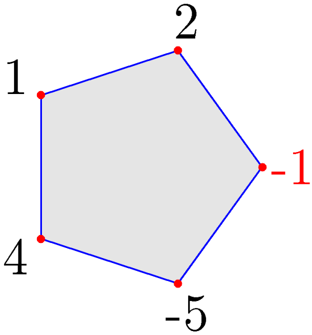
Ein Experiment



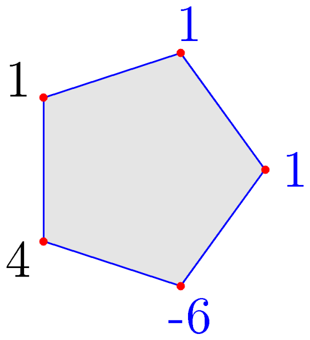
Ein Experiment



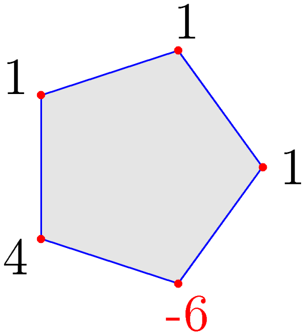
Ein Experiment



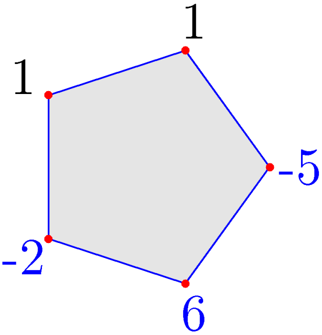
Ein Experiment



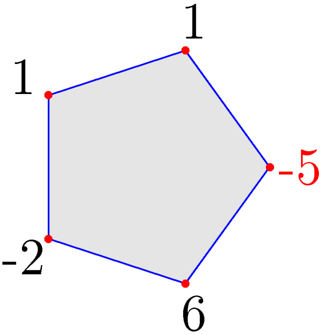
Ein Experiment



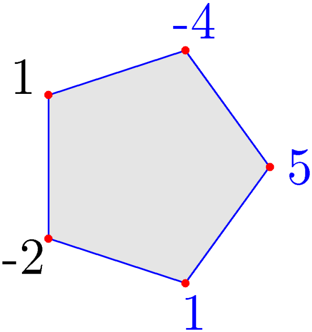
Ein Experiment



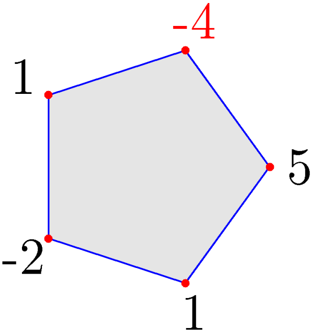
Ein Experiment



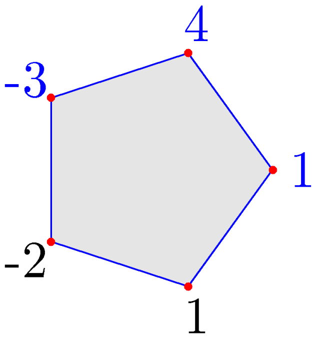
Ein Experiment



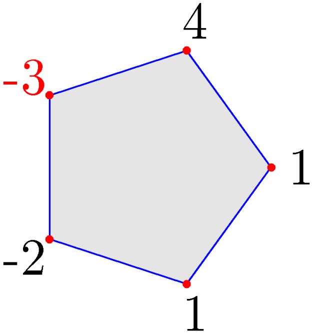
Ein Experiment



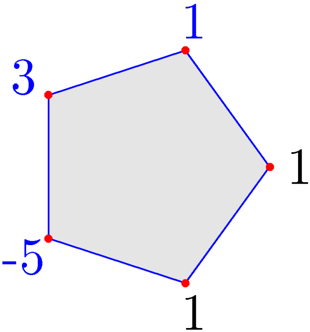
Ein Experiment



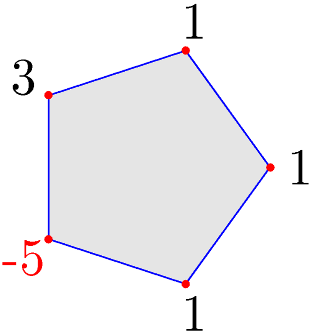
Ein Experiment



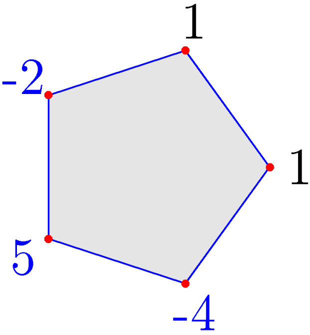
Ein Experiment



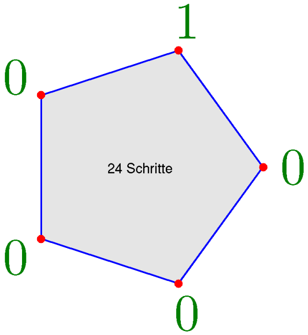
Ein Experiment



Nach 7 Schritten

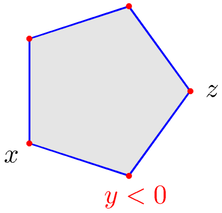


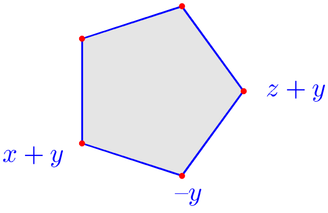
Nach 24 Schritten



E.W.: IMO 1986, Aufgabe 3

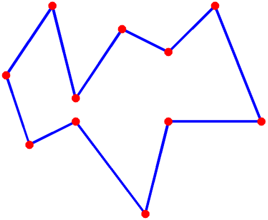
An jedem Eckpunkt eines Fünfecks steht eine ganze Zahl. Die Summe aller fünf Zahlen ist positiv. Wenn an drei aufeinanderfolgenden Eckpunkten die Zahlen x, y und z stehen und y negativ ist, so können diese durch $x + y$, $-y$ und $z + y$ ersetzt werden. Man beweise, dass nach endlich vielen Ersetzungen alle Zahlen positiv sein müssen.



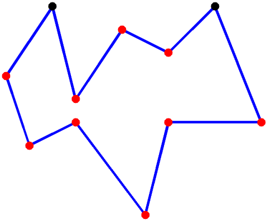


1961 Kazarinoff: Ein geometrisches Problem

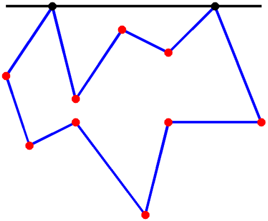
Gegeben sei ein (nicht-konvexer) geschlossener Polygonzug.



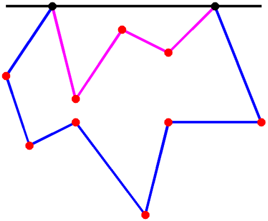
Wir wählen zwei Eckpunkte aus ...



... und betrachten die Gerade durch diese Eckpunkte

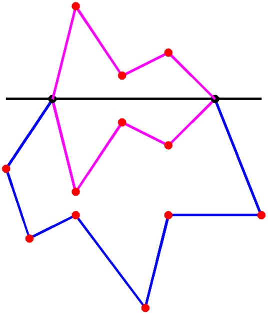


Liegen beide Teilstücke auf derselben Seite der Geraden ...

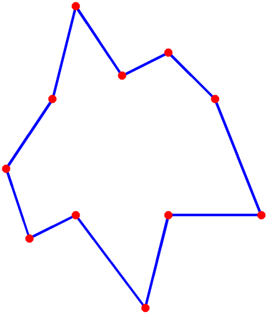


1961 Kazarinoff: Ein geometrisches Problem

... wird eines der Teilstücke an der Geraden gespiegelt.

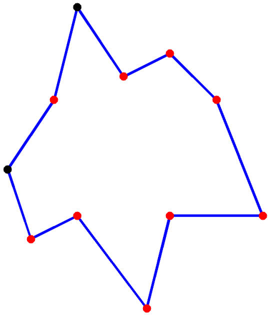


So entsteht ein neuer Polygonzug.



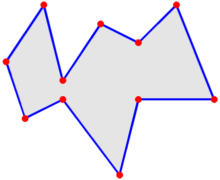
1961 Kazarinoff: Ein geometrisches Problem

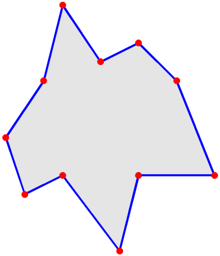
Dieses Verfahren wird solange wie möglich fortgesetzt.



1961 Kazarinoff: Ein geometrisches Problem

Wird der Polygonzug nach endlich vielen Schritten konvex? Muss das Spiegelungsverfahren notwendigerweise abbrechen?

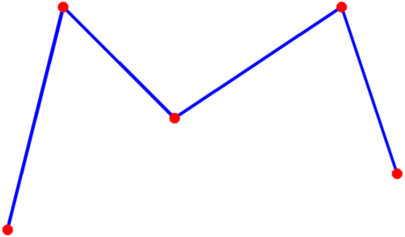




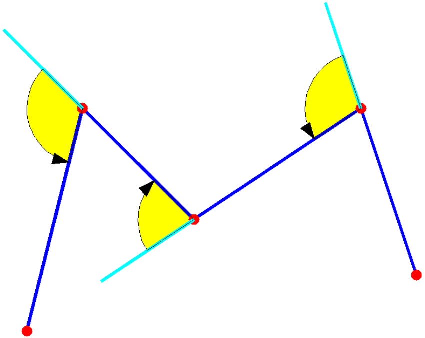
1985 Bernd Noack: Vorstellung des Problems bei einer Beratung der Aufgabenkommission für die Mathematik–Olympiaden.

1985: Von der Geometrie zur Arithmetik

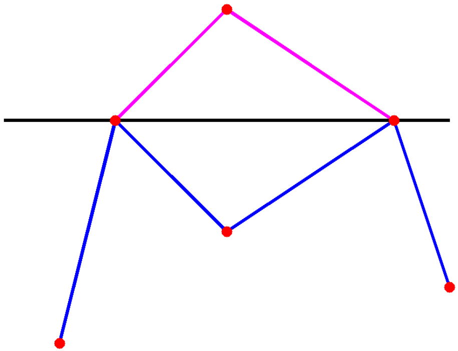
Wie ändern sich metrische Größen (Fläche, Winkel)?



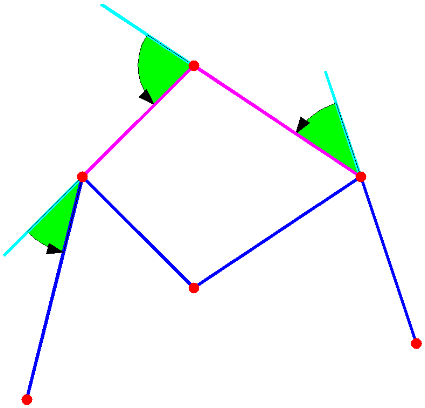
Betrachten „Drehwinkel“ beim Durchlaufen des Polygonzugs



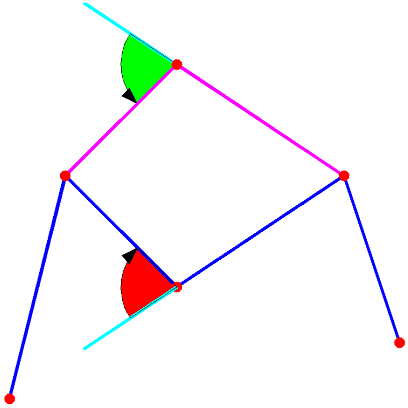
Bei der Spiegelung an dieser Geraden ...



... ändern sich die (orientierten) Drehwinkel.

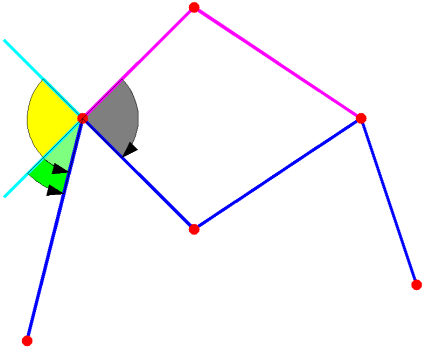


Diese beiden sind gerade entgegengesetzt gleich.

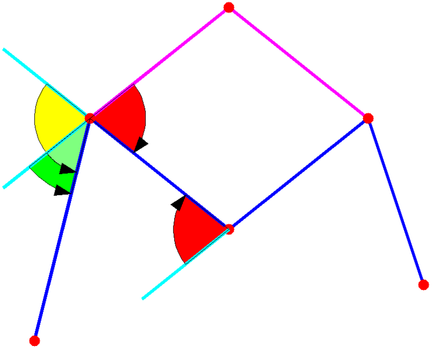


1985: Von der Geometrie zur Arithmetik

Hier gilt „grün gleich gelb plus grau“, aber wie groß ist „grau“?



Sind die Polygonseiten gleich lang, ist „grün gleich gelb plus rot“



Spezialisierung von Kazarinoffs Problem:

- Alle Polygonseiten sind gleich lang.

Spezialisierung von Kazarinoffs Problem:

- Alle Polygonseiten sind gleich lang.
- Nur Spiegelung an Geraden durch Eckpunkte im Abstand zwei.

1985: Von der Geometrie zur Arithmetik

Spezialisierung von Kazarinoffs Problem:

- Alle Polygonseiten sind gleich lang.
- Nur Spiegelung an Geraden durch Eckpunkte im Abstand zwei.

Winkel an den zugehörigen drei Ecken seien x, y, z. Dann gilt:

- Konkavitätsbedingung lautet $y < 0$.

1985: Von der Geometrie zur Arithmetik

Spezialisierung von Kazarinoffs Problem:

- Alle Polygonseiten sind gleich lang.
- Nur Spiegelung an Geraden durch Eckpunkte im Abstand zwei.

Winkel an den zugehörigen drei Ecken seien x, y, z. Dann gilt:

- Konkavitätsbedingung lautet $y < 0$.
- Neue Winkel ergeben sich aus alten Winkeln durch

$$x \mapsto x + y, \quad y \mapsto -y, \quad z \mapsto z + y.$$

1985: Von der Geometrie zur Arithmetik

Spezialisierung von Kazarinoffs Problem:

- Alle Polygonseiten sind gleich lang.
- Nur Spiegelung an Geraden durch Eckpunkte im Abstand zwei.

Winkel an den zugehörigen drei Ecken seien x, y, z. Dann gilt:

- Konkavitätsbedingung lautet $y < 0$.
- Neue Winkel ergeben sich aus alten Winkeln durch

$$x \mapsto x + y, \quad y \mapsto -y, \quad z \mapsto z + y.$$

Für $n = 5$ sind das gerade die Regeln des Pentagonspiels.

1985: Von der Geometrie zur Arithmetik

Spezialisierung von Kazarinoffs Problem:

- Alle Polygonseiten sind gleich lang.
- Nur Spiegelung an Geraden durch Eckpunkte im Abstand zwei.

Winkel an den zugehörigen drei Ecken seien x, y, z. Dann gilt:

- Konkavitätsbedingung lautet $y < 0$.
- Neue Winkel ergeben sich aus alten Winkeln durch

$$x \mapsto x + y, \quad y \mapsto -y, \quad z \mapsto z + y.$$

Für $n = 5$ sind das gerade die Regeln des Pentagonspiels.

Neue Aufgaben findet man, indem man versucht, alte zu lösen.

300 v.Ch.: Eine Lösungsidee !

Duobus numeris datis non primis adinuicem, maximã eorum communem dimensionem inuenire.

THEON ex Zamb. Sint dati bini numeri non primi adinuicem, αβ & γδ: oportet iam ipsorum αβ & γδ, maximam dimensionem inuenire. Si quidem γδ ipsum αβ metitur, metitur autem & seipsum. Igitur γδ, ipsorum γδ & αβ communis dimensio est, & manifestum est quòd maxima, nullus enim maior ipso γδ, ipsum γδ metietur. Si autem γδ non metitur ipsum αβ, ipsorum αβ & γδ sublato (per primã septimi) semper minore à maiore, sumetur numerus aliquis qui metietur præcedentem, unitas quidem non sumetur. Si autem non, erunt αβ & γδ primi adinuicem, quod non supponitur. Sumetur aliquis numerus igitur qui metietur præcedentem, & γδ quidem ipsum αβ metiens, (per primam septimi) relinquat se minorem αε: αε autem ipsum γδ metiẽs, relinquat se minorem γζ, & γζ ipsum αε metiatur. Quoniam igitur γζ ipsum αε metitur, & αε ipsum δζ metitur: igitur γζ ipsum δζ metietur, metitur & seipsum, & totũ igitur γδ metietur. At γδ ipsum βε metitur, & γζ igitur ipsum βε metitur: metitur autem & εα, igitur & totum βα metietur, metietur quoque ipsum γδ, igitur γζ ipsos αβ & γδ metitur. Igitur γζ ipsorum αβ & γδ communis dimensio est. Dico enim quòd & maxima, si γζ ipsorum αβ & γδ non est maxima communis mensura, metietur ipsos αβ & γδ numeros aliquis numerus maior existens, ipso γζ metiatur, estóq; η. Et quoniam η ipsum γδ, & γδ ipsum βε metitur, & η igitur ipsum βε metitur. Metitur autem & totum αβ, & reliquum igitur αε metietur: at αε ipsum δζ metitur, & η igitur ipsum δζ metietur: metietur autem & totum γδ, & reliquũ igitur γζ metietur, maior minorem, quod est impoßibile. Igitur ipsos αβ & γδ numeros numerus non metietur, maior existens ipso γζ. Igitur γζ ipsorum αβ & γδ maxima est communis mensura: quod oportebat facere.

β .... α

δ .... γ

β ...... ε .... α

δ .... ζ .. γ

β ...... ε .... α

η ...

δ .... ζ .. γ

300 v.Ch.: Eine Lösungsidee !

Duobus numeris datis non primis adinuicem, maximã eorum communem dimenſionem inuenire.

THEON ex Zamb. Sint dati bini numeri non primi adinuicem, αβ & γδ: oportet iam ipſorum αβ & γδ, maximam dimenſionem inuenire. Si quidem γδ ipſum αβ metitur, metitur autem & ſeipſum. Igitur γδ, ipſorum γδ & αβ communis dimenſio eſt, & manifeſtum eſt quòd maxima, nullus enim maior ipſo γδ, ipſum γδ metietur. Si autem γδ non metitur ipſum αβ, ipſorum αβ & γδ ſublato (per primã ſeptimi) ſemper minore à maiore, ſumetur numerus aliquis qui metietur præcedentem, unitas quidem non ſumetur. Si autem non, erunt αβ & γδ primi adinuicem, quod non ſupponitur. Sumetur aliquis numerus igitur qui metietur præcedentem, & γδ quidem ipſum αβ metiens, (per primam ſeptimi) relinquat ſe minorem αε: αε autem ipſum γδ metiẽs, relinquat ſe minorem γζ, & γζ ipſum αε metiatur. Quoniam igitur γζ ipſum αε metitur, & αε ipſum δζ metitur: igitur γζ ipſum δζ metietur, metitur & ſeipſum, & totũ igitur γδ metietur. At γδ ipſum βε metitur, & γζ igitur ipſum βε metitur: metitur autem & εα, igitur & totum βα metietur, metietur quoque ipſum γδ, igitur γζ ipſos αβ & γδ metitur. Igitur γζ ipſorum αβ & γδ communis dimenſio eſt. Dico enim quòd & maxima, ſi γζ ipſorum αβ & γδ non eſt maxima communis menſura, metietur ipſos αβ & γδ numeros aliquis numerus maior exiſtens, ipſo γζ metiatur, eſtóq; η. Et quoniam η ipſum γδ, & γδ ipſum βε metitur, & η igitur ipſum βε metitur. Metitur autem & totum αβ, & reliquum igitur αε metietur: at αε ipſum δζ metitur, & η igitur ipſum δζ metietur: metietur autem & totum γδ, & reliquũ igitur γζ metietur, maior minorem, quod eſt impoßibile. Igitur ipſos αβ & γδ numeros numerus non metietur, maior exiſtens ipſo γζ. Igitur γζ ipſorum αβ & γδ maxima eſt communis menſura: quod oportebat facere.

β . . . . α
δ . . . . γ
β . . . . . . ε . . . . α
δ . . . . ζ . . γ
β . . . . . . ε . . . . α
η . . .
δ . . . . ζ . . γ

Euklids Elemente, 7. Buch, Proposition 2 (Basel 1546).

Euklidischer Algorithmus

Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von a und b mit $a > b > 0$:

$$
\begin{aligned}
a &= q_1 \cdot b \quad + r_1 && (0 \le r_1 < b)\\
b &= q_2 \cdot r_1 \quad + r_2 && (0 \le r_2 < r_1)\\
r_1 &= q_3 \cdot r_2 \quad + r_3 && (0 \le r_3 < r_2)\\
&\vdots\\
r_{n-2} &= q_n \cdot r_{n-1} + r_n && (0 \le r_n < r_{n-1})\\
r_{n-1} &= q_{n+1} \cdot r_n
\end{aligned}
$$

Dann ist $ggT(a, b) = r_n$.

Euklidischer Algorithmus

Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von a und b mit $a > b > 0$:

$$\begin{aligned}
a &= q_1 \cdot b \quad + r_1 \qquad && (0 \leq r_1 < b) \\
b &= q_2 \cdot r_1 \quad + r_2 \qquad && (0 \leq r_2 < r_1) \\
r_1 &= q_3 \cdot r_2 \quad + r_3 \qquad && (0 \leq r_3 < r_2) \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= q_n \cdot r_{n-1} + r_n \qquad && (0 \leq r_n < r_{n-1}) \\
r_{n-1} &= q_{n+1} \cdot r_n
\end{aligned}$$

Dann ist $ggT(a, b) = r_n$. Warum endet der Algorithmus ?

Euklidischer Algorithmus

Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von a und b mit $a > b > 0$:

$$\begin{aligned} a &= q_1 \cdot b \quad + r_1 & (0 \le r_1 < b) \\ b &= q_2 \cdot r_1 \quad + r_2 & (0 \le r_2 < r_1) \\ r_1 &= q_3 \cdot r_2 \quad + r_3 & (0 \le r_3 < r_2) \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= q_n \cdot r_{n-1} + r_n & (0 \le r_n < r_{n-1}) \\ r_{n-1} &= q_{n+1} \cdot r_n \end{aligned}$$

Dann ist $ggT(a, b) = r_n$. Warum endet der Algorithmus ?

Streng monoton fallende Folge $r_1, r_2, r_3, \ldots$ nichtnegativer ganzer Zahlen muss endlich sein.

Die erste Lösung des Pentagonproblems

Suchen positive und streng monoton fallende Bewertungsfunktion.

Die erste Lösung des Pentagonproblems

Suchen positive und streng monoton fallende Bewertungsfunktion.

Zahlen („Marken") an den Eckpunkten seien x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Die erste Lösung des Pentagonproblems

Suchen positive und streng monoton fallende Bewertungsfunktion.

Zahlen („Marken“) an den Eckpunkten seien x_1,x_2,x_3,x_4,x_5.

Definieren Funktion f von $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ durch

$$f(x) := (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2.$$

Die erste Lösung des Pentagonproblems

Suchen positive und streng monoton fallende Bewertungsfunktion.

Zahlen („Marken") an den Eckpunkten seien x_1,x_2,x_3,x_4,x_5.

Definieren Funktion f von $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ durch

$$f(x) := (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2.$$

Eine zweizeilige Rechnung zeigt

$$f(x_{\rm neu}) = f(x_{\rm alt}) + 2\, x_j\, s < f(x_{\rm alt}),$$

wobei x_j das ausgewählte negative Element bezeichnet und

$$s := x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 0.$$

Die erste Lösung des Pentagonproblems

Suchen positive und streng monoton fallende Bewertungsfunktion.

Zahlen („Marken") an den Eckpunkten seien x_1,x_2,x_3,x_4,x_5.

Definieren Funktion f von $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ durch

$$f(x) := (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2.$$

Eine zweizeilige Rechnung zeigt

$$f(x_{\mathrm{neu}}) = f(x_{\mathrm{alt}}) + 2\,x_j\,s < f(x_{\mathrm{alt}}),$$

wobei x_j das ausgewählte negative Element bezeichnet und

$$s := x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 0.$$

Die Summe s bleibt invariant.

Die erste Lösung des Pentagonproblems

Suchen positive und streng monoton fallende Bewertungsfunktion.

Zahlen („Marken“) an den Eckpunkten seien x_1,x_2,x_3,x_4,x_5.

Definieren Funktion f von $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ durch

$$f(x) := (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2.$$

Eine zweizeilige Rechnung zeigt

$$f(x_{\text{neu}}) = f(x_{\text{alt}}) + 2\, x_j\, s < f(x_{\text{alt}}),$$

wobei x_j das ausgewählte negative Element bezeichnet und

$$s := x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 0.$$

Die Summe s bleibt invariant. Weil alle Werte von f nichtnegative ganze Zahlen sind, muss der Prozess nach endlich vielen Schritten enden.

Bewertung der Lösung: Fragen und Antworten

Olympiadeteilnehmer:

Bewertung der Lösung: Fragen und Antworten

Olympiadeteilnehmer: Habe ich das Problem gelöst ?

Bewertung der Lösung: Fragen und Antworten

Olympiadeteilnehmer: Habe ich das Problem gelöst ? Ja.

Bewertung der Lösung: Fragen und Antworten

Olympiadeteilnehmer: Habe ich das Problem gelöst ? Ja.

Mathematiker:

Bewertung der Lösung: Fragen und Antworten

Olympiadeteilnehmer: Habe ich das Problem gelöst ? Ja.

Mathematiker: Habe ich das Problem verstanden ?

Bewertung der Lösung: Fragen und Antworten

Olympiadeteilnehmer: Habe ich das Problem gelöst ?   Ja.

Mathematiker: Habe ich das Problem verstanden ?

- Die Lösung funktioniert – aber wieso ?

Bewertung der Lösung: Fragen und Antworten

Olympiadeteilnehmer: Habe ich das Problem gelöst ? Ja.

Mathematiker: Habe ich das Problem verstanden ?

- Die Lösung funktioniert – aber wieso ?
- Was geschieht für reelle Marken x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ?

Olympiadeteilnehmer: Habe ich das Problem gelöst ? Ja.

Mathematiker: Habe ich das Problem verstanden ?

- Die Lösung funktioniert – aber wieso ?
- Was geschieht für reelle Marken x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ?
- Kann man die Eckenzahl 5 durch andere Werte n ersetzen ?

Bewertung der Lösung: Fragen und Antworten

Olympiadeteilnehmer: Habe ich das Problem gelöst ? Ja.

Mathematiker: Habe ich das Problem verstanden ?

- Die Lösung funktioniert – aber wieso ?
- Was geschieht für reelle Marken x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ?
- Kann man die Eckenzahl 5 durch andere Werte n ersetzen ?

Für $n > 5$ sind die naheliegenden Verallgemeinerungen der Funktion f ungeeignet.

Bewertung der Lösung: Fragen und Antworten

Olympiadeteilnehmer: Habe ich das Problem gelöst ? Ja.

Mathematiker: Habe ich das Problem verstanden ? Nein !

- Die Lösung funktioniert – aber wieso ?
- Was geschieht für reelle Marken x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ?
- Kann man die Eckenzahl 5 durch andere Werte n ersetzen ?

Für $n > 5$ sind die naheliegenden Verallgemeinerungen der Funktion f ungeeignet.

Bewertung der Lösung: Fragen und Antworten

Olympiadeteilnehmer: Habe ich das Problem gelöst ? Ja.

Mathematiker: Habe ich das Problem verstanden ? Nein !

- Die Lösung funktioniert – aber wieso ?
- Was geschieht für reelle Marken x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ?
- Kann man die Eckenzahl 5 durch andere Werte n ersetzen ?

Für $n > 5$ sind die naheliegenden Verallgemeinerungen der Funktion f ungeeignet.

Wie findet man passende Bewertungsfunktionen f ?

1986 Joseph G. Keane: Alternative Lösung

Problem von 11 Teilnehmern gelöst. Alle obige Lösung – außer einem.

$$\begin{array}{llll}
x_1, & x_1 + x_2, & x_1 + x_2 + x_3, & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
x_2, & x_2 + x_3, & x_2 + x_3 + x_4, & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\
x_3, & x_3 + x_4, & x_3 + x_4 + x_5, & x_3 + x_4 + x_5 + x_1 \\
x_4, & x_4 + x_5, & x_4 + x_5 + x_1, & x_4 + x_5 + x_1 + x_2 \\
x_5, & x_5 + x_1, & x_5 + x_1 + x_2, & x_5 + x_1 + x_2 + x_3
\end{array}$$

1986 Joseph G. Keane: Alternative Lösung

Problem von 11 Teilnehmern gelöst. Alle obige Lösung – außer einem.

$$\begin{array}{llll}
x_1, & x_1 + x_2, & x_1 + x_2 + x_3, & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
x_2, & x_2 + x_3, & x_2 + x_3 + x_4, & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\
x_3, & x_3 + x_4, & x_3 + x_4 + x_5, & x_3 + x_4 + x_5 + x_1 \\
x_4, & x_4 + x_5, & x_4 + x_5 + x_1, & x_4 + x_5 + x_1 + x_2 \\
x_5, & x_5 + x_1, & x_5 + x_1 + x_2, & x_5 + x_1 + x_2 + x_3
\end{array}$$

Nach Substitution $x_1 \mapsto -x_1,\ x_2 \mapsto x_2 + x_1,\ x_5 \mapsto x_5 + x_1$:

$$\begin{array}{llll}
-x_1, & x_2, & x_2 + x_3, & x_2 + x_3 + x_4 \\
x_1 + x_2, & x_1 + x_2 + x_3, & x_1 + x_2 + x_3 + x_4, & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_1 \\
x_3, & x_3 + x_4, & x_3 + x_4 + x_5, & x_3 + x_4 + x_5 + x_1 \\
x_4, & x_4 + x_5, & x_4 + x_5 + x_1, & x_4 + x_5 + x_1 + x_2 \\
x_5 + x_1, & x_5, & x_5 + x_1 + x_2, & x_5 + x_1 + x_2 + x_3
\end{array}$$

1986 Joseph G. Keane: Alternative Lösung

Vorher:

$x_1,$	$x_1+x_2,$	$x_1+x_2+x_3,$	$x_1+x_2+x_3+x_4$
$x_2,$	$x_2+x_3,$	$x_2+x_3+x_4,$	$x_2+x_3+x_4+x_5$
$x_3,$	$x_3+x_4,$	$x_3+x_4+x_5,$	$x_1+x_3+x_4+x_5$
$x_4,$	$x_4+x_5,$	$x_4+x_5+x_1,$	$x_1+x_2+x_4+x_5$
$x_5,$	$x_5+x_1,$	$x_5+x_1+x_2,$	$x_1+x_2+x_3+x_5$

Nachher:

$-x_1,$	$x_2,$	$x_2+x_3,$	$x_2+x_3+x_4$
$x_1+x_2,$	$x_1+x_2+x_3,$	$x_1+x_2+x_3+x_4,$	$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_1$
$x_3,$	$x_3+x_4,$	$x_3+x_4+x_5,$	$x_1+x_3+x_4+x_5$
$x_4,$	$x_4+x_5,$	$x_4+x_5+x_1,$	$x_1+x_2+x_4+x_5$
$x_5+x_1,$	$x_5,$	$x_5+x_1+x_2,$	$x_1+x_2+x_3+x_5$

1986 Joseph G. Keane: Alternative Lösung

Vorher:

$$\begin{array}{llll}
x_1, & x_1+x_2, & x_1+x_2+x_3, & x_1+x_2+x_3+x_4 \\
x_2, & x_2+x_3, & x_2+x_3+x_4, & x_2+x_3+x_4+x_5 \\
x_3, & x_3+x_4, & x_3+x_4+x_5, & x_1+x_3+x_4+x_5 \\
x_4, & x_4+x_5, & x_4+x_5+x_1, & x_1+x_2+x_4+x_5 \\
x_5, & x_5+x_1, & x_5+x_1+x_2, & x_1+x_2+x_3+x_5
\end{array}$$

Nachher:

$$\begin{array}{llll}
-x_1, & x_2, & x_2+x_3, & x_2+x_3+x_4 \\
x_1+x_2, & x_1+x_2+x_3, & x_1+x_2+x_3+x_4, & x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_1 \\
x_3, & x_3+x_4, & x_3+x_4+x_5, & x_1+x_3+x_4+x_5 \\
x_4, & x_4+x_5, & x_4+x_5+x_1, & x_1+x_2+x_4+x_5 \\
x_5+x_1, & x_5, & x_5+x_1+x_2, & x_1+x_2+x_3+x_5
\end{array}$$

1986 Joseph G. Keane: Alternative Lösung

Vorher:

$$\begin{array}{llll}
x_1, & x_1+x_2, & x_1+x_2+x_3, & x_1+x_2+x_3+x_4 \\
x_2, & x_2+x_3, & x_2+x_3+x_4, & s-x_1 \\
x_3, & x_3+x_4, & x_3+x_4+x_5, & x_1+x_3+x_4+x_5 \\
x_4, & x_4+x_5, & x_4+x_5+x_1, & x_1+x_2+x_4+x_5 \\
x_5, & x_5+x_1, & x_5+x_1+x_2, & x_1+x_2+x_3+x_5
\end{array}$$

Nachher:

$$\begin{array}{llll}
-x_1, & x_2, & x_2+x_3, & x_2+x_3+x_4 \\
x_1+x_2, & x_1+x_2+x_3, & x_1+x_2+x_3+x_4, & s+x_1 \\
x_3, & x_3+x_4, & x_3+x_4+x_5, & x_1+x_3+x_4+x_5 \\
x_4, & x_4+x_5, & x_4+x_5+x_1, & x_1+x_2+x_4+x_5 \\
x_5+x_1, & x_5, & x_5+x_1+x_2, & x_1+x_2+x_3+x_5
\end{array}$$

1986 Joseph G. Keane: Alternative Lösung

Summation über die absoluten Beträge aller Einträge ergibt positive Bewertungsfunktion f. Bei Substitution $x_j \mapsto -x_j$ etc. gilt

$$f(x_{\text{neu}}) - f(x_{\text{alt}}) = |s + x_j| - |s - x_j| < 0.$$

1986 Joseph G. Keane: Alternative Lösung

Summation über die absoluten Beträge aller Einträge ergibt positive Bewertungsfunktion f. Bei Substitution $x_j \mapsto -x_j$ etc. gilt

$$f(x_{\text{neu}}) - f(x_{\text{alt}}) = |s + x_j| - |s - x_j| < 0.$$

Diese Lösung von Keane wurde auf der IMO 1986 mit einem Sonderpreis ausgezeichnet.

1986 Joseph G. Keane: Alternative Lösung

Summation über die absoluten Beträge aller Einträge ergibt positive Bewertungsfunktion f. Bei Substitution $x_j \mapsto -x_j$ etc. gilt

$$f(x_{\text{neu}}) - f(x_{\text{alt}}) = |s + x_j| - |s - x_j| < 0.$$

Diese Lösung von Keane wurde auf der IMO 1986 mit einem Sonderpreis ausgezeichnet.

Sie erlaubt als einzige der Wettbewerbslösungen die Verallgemeinerung vom Pentagon auf beliebige n-Ecke.

1986 Joseph G. Keane: Alternative Lösung

Summation über die absoluten Beträge aller Einträge ergibt positive Bewertungsfunktion f. Bei Substitution $x_j \mapsto -x_j$ etc. gilt

$$f(x_{\text{neu}}) - f(x_{\text{alt}}) = |s + x_j| - |s - x_j| < 0.$$

Diese Lösung von Keane wurde auf der IMO 1986 mit einem Sonderpreis ausgezeichnet.

Sie erlaubt als einzige der Wettbewerbslösungen die Verallgemeinerung vom Pentagon auf beliebige n-Ecke.

Mit einer kleinen Zusatzüberlegung arbeitet sie auch für reelle Zahlen x_j.

1986 Joseph G. Keane: Alternative Lösung

Summation über die absoluten Beträge aller Einträge ergibt positive Bewertungsfunktion f. Bei Substitution $x_j \mapsto -x_j$ etc. gilt

$$f(x_{\text{neu}}) - f(x_{\text{alt}}) = |s + x_j| - |s - x_j| < 0.$$

Diese Lösung von Keane wurde auf der IMO 1986 mit einem Sonderpreis ausgezeichnet.

Sie erlaubt als einzige der Wettbewerbslösungen die Verallgemeinerung vom Pentagon auf beliebige n-Ecke.

Mit einer kleinen Zusatzüberlegung arbeitet sie auch für reelle Zahlen x_j.

Wir haben das Problem besser verstanden

1986 Joseph G. Keane: Alternative Lösung

Summation über die absoluten Beträge aller Einträge ergibt positive Bewertungsfunktion f. Bei Substitution $x_j \mapsto -x_j$ etc. gilt

$$f(x_{\text{neu}}) - f(x_{\text{alt}}) = |s + x_j| - |s - x_j| < 0.$$

Diese Lösung von Keane wurde auf der IMO 1986 mit einem Sonderpreis ausgezeichnet.

Sie erlaubt als einzige der Wettbewerbslösungen die Verallgemeinerung vom Pentagon auf beliebige n-Ecke.

Mit einer kleinen Zusatzüberlegung arbeitet sie auch für reelle Zahlen x_j.

Wir haben das Problem besser verstanden – aber noch nicht vollständig.

1986 Joseph G. Keane: Alternative Lösung

Summation über die absoluten Beträge aller Einträge ergibt positive Bewertungsfunktion f. Bei Substitution $x_j \mapsto -x_j$ etc. gilt

$$f(x_{\text{neu}}) - f(x_{\text{alt}}) = |s + x_j| - |s - x_j| < 0.$$

Diese Lösung von Keane wurde auf der IMO 1986 mit einem Sonderpreis ausgezeichnet.

Sie erlaubt als einzige der Wettbewerbslösungen die Verallgemeinerung vom Pentagon auf beliebige n-Ecke.

Mit einer kleinen Zusatzüberlegung arbeitet sie auch für reelle Zahlen x_j.

Wir haben das Problem besser verstanden – aber noch nicht vollständig.

Wieviele Züge braucht man höchstens/mindestens ?

Erweiterung von Keanes Tabelle durch Fortsetzung der Zeilen

$$
\begin{array}{llll}
x_1, & x_1 + x_2, & x_1 + x_2 + x_3, & s - x_5 \\
x_2, & x_2 + x_3, & x_2 + x_3 + x_4, & s - x_1 \\
x_3, & x_3 + x_4, & x_3 + x_4 + x_5, & s - x_2 \\
x_4, & x_4 + x_5, & x_4 + x_5 + x_1, & s - x_3 \\
x_5, & x_5 + x_1, & x_5 + x_1 + x_2, & s - x_4
\end{array}
$$

Erweiterung von Keanes Tabelle durch Fortsetzung der Zeilen

$$\begin{array}{lllll}
x_1, & x_1 + x_2, & x_1 + x_2 + x_3, & s - x_5, & s \\
x_2, & x_2 + x_3, & x_2 + x_3 + x_4, & s - x_1 & \\
x_3, & x_3 + x_4, & x_3 + x_4 + x_5, & s - x_2 & \\
x_4, & x_4 + x_5, & x_4 + x_5 + x_1, & s - x_3 & \\
x_5, & x_5 + x_1, & x_5 + x_1 + x_2, & s - x_4 &
\end{array}$$

1986 Bernard Chazelle: Neue Einsichten

Erweiterung von Keanes Tabelle durch Fortsetzung der Zeilen

$$
\begin{array}{llllll}
x_1, & x_1 + x_2, & x_1 + x_2 + x_3, & s - x_5, & s, & s + x_1 \\
x_2, & x_2 + x_3, & x_2 + x_3 + x_4, & s - x_1 & & \\
x_3, & x_3 + x_4, & x_3 + x_4 + x_5, & s - x_2 & & \\
x_4, & x_4 + x_5, & x_4 + x_5 + x_1, & s - x_3 & & \\
x_5, & x_5 + x_1, & x_5 + x_1 + x_2, & s - x_4 & &
\end{array}
$$

1986 Bernard Chazelle: Neue Einsichten

Erweiterung von Keanes Tabelle durch Fortsetzung der Zeilen

$$
\begin{array}{lllllll}
x_1, & x_1 + x_2, & x_1 + x_2 + x_3, & s - x_5, & s, & s + x_1, & s + x_1 + x_2 \\
x_2, & x_2 + x_3, & x_2 + x_3 + x_4, & s - x_1 & & & \\
x_3, & x_3 + x_4, & x_3 + x_4 + x_5, & s - x_2 & & & \\
x_4, & x_4 + x_5, & x_4 + x_5 + x_1, & s - x_3 & & & \\
x_5, & x_5 + x_1, & x_5 + x_1 + x_2, & s - x_4 & & &
\end{array}
$$

1986 Bernard Chazelle: Neue Einsichten

Erweiterung von Keanes Tabelle durch Fortsetzung der Zeilen

$$
\begin{array}{llllllll}
x_1, & x_1 + x_2, & x_1 + x_2 + x_3, & s - x_5, & s, & s + x_1, & s + x_1 + x_2, & \ldots \\
x_2, & x_2 + x_3, & x_2 + x_3 + x_4, & s - x_1 \\
x_3, & x_3 + x_4, & x_3 + x_4 + x_5, & s - x_2 \\
x_4, & x_4 + x_5, & x_4 + x_5 + x_1, & s - x_3 \\
x_5, & x_5 + x_1, & x_5 + x_1 + x_2, & s - x_4
\end{array}
$$

Erweiterung von Keanes Tabelle durch Fortsetzung der Zeilen

$$
\begin{array}{llllllll}
x_1, & x_1+x_2, & x_1+x_2+x_3, & s-x_5, & s, & s+x_1, & s+x_1+x_2, & \ldots \\
x_2, & x_2+x_3, & x_2+x_3+x_4, & s-x_1, & s, & s+x_2, & s+x_2+x_3, & \ldots \\
x_3, & x_3+x_4, & x_3+x_4+x_5, & s-x_2 & & & & \\
x_4, & x_4+x_5, & x_4+x_5+x_1, & s-x_3 & & & & \\
x_5, & x_5+x_1, & x_5+x_1+x_2, & s-x_4 & & & &
\end{array}
$$

1986 Bernard Chazelle: Neue Einsichten

Erweiterung von Keanes Tabelle durch Fortsetzung der Zeilen

$$
\begin{array}{llllllll}
x_1, & x_1+x_2, & x_1+x_2+x_3, & s-x_5, & s, & s+x_1, & s+x_1+x_2, & \ldots \\
x_2, & x_2+x_3, & x_2+x_3+x_4, & s-x_1, & s, & s+x_2, & s+x_2+x_3, & \ldots \\
x_3, & x_3+x_4, & x_3+x_4+x_5, & s-x_2, & s, & s+x_3, & s+x_3+x_4, & \ldots \\
x_4, & x_4+x_5, & x_4+x_5+x_1, & s-x_3 & & & & \\
x_5, & x_5+x_1, & x_5+x_1+x_2, & s-x_4 & & & &
\end{array}
$$

1986 Bernard Chazelle: Neue Einsichten

Erweiterung von Keanes Tabelle durch Fortsetzung der Zeilen

$$\begin{array}{llllllll}
x_1, & x_1+x_2, & x_1+x_2+x_3, & s-x_5, & s, & s+x_1, & s+x_1+x_2, & \ldots \\
x_2, & x_2+x_3, & x_2+x_3+x_4, & s-x_1, & s, & s+x_2, & s+x_2+x_3, & \ldots \\
x_3, & x_3+x_4, & x_3+x_4+x_5, & s-x_2, & s, & s+x_3, & s+x_3+x_4, & \ldots \\
x_4, & x_4+x_5, & x_4+x_5+x_1, & s-x_3, & s, & s+x_4, & s+x_4+x_5, & \ldots \\
x_5, & x_5+x_1, & x_5+x_1+x_2, & s-x_4 & & & &
\end{array}$$

1986 Bernard Chazelle: Neue Einsichten

Erweiterung von Keanes Tabelle durch Fortsetzung der Zeilen

$$\begin{array}{llllllll}
x_1, & x_1+x_2, & x_1+x_2+x_3, & s-x_5, & s, & s+x_1, & s+x_1+x_2, & \dots \\
x_2, & x_2+x_3, & x_2+x_3+x_4, & s-x_1, & s, & s+x_2, & s+x_2+x_3, & \dots \\
x_3, & x_3+x_4, & x_3+x_4+x_5, & s-x_2, & s, & s+x_3, & s+x_3+x_4, & \dots \\
x_4, & x_4+x_5, & x_4+x_5+x_1, & s-x_3, & s, & s+x_4, & s+x_4+x_5, & \dots \\
x_5, & x_5+x_1, & x_5+x_1+x_2, & s-x_4, & s, & s+x_5, & s+x_5+x_1, & \dots
\end{array}$$

Erweiterung von Keanes Tabelle durch Fortsetzung der Zeilen

$$
\begin{array}{lllllll}
x_1, & x_1 + x_2, & x_1 + x_2 + x_3, & s - x_5, & s, & s + x_1, & \dots \\
x_2, & x_2 + x_3, & x_2 + x_3 + x_4, & s - x_1, & s, & s + x_2, & \dots \\
x_3, & x_3 + x_4, & x_3 + x_4 + x_5, & s - x_2, & s, & s + x_3, & \dots \\
x_4, & x_4 + x_5, & x_4 + x_5 + x_1, & s - x_3, & s, & s + x_4, & \dots \\
x_5, & x_5 + x_1, & x_5 + x_1 + x_2, & s - x_4, & s, & s + x_5, & \dots
\end{array}
$$

Nach Substitution $x_1 \mapsto -x_1$ etc.:

$$
\begin{array}{lllllll}
-x_1, & x_2, & x_2 + x_3, & x_2 + x_3 + x_4, & s, & s - x_1, & \dots \\
x_1 + x_2, & x_1 + x_2 + x_3, & s - x_5, & s + x_1, & s, & s + x_1 + x_2, & \dots \\
x_3, & x_3 + x_4, & x_3 + x_4 + x_5, & s - x_2, & s, & s + x_3, & \dots \\
x_4, & x_4 + x_5, & x_4 + x_5 + x_1, & s - x_3, & s, & s + x_4, & \dots \\
x_5 + x_1, & x_5, & x_5 + x_1 + x_2, & s - x_4, & s, & s + x_5 + x_1, & \dots
\end{array}
$$

1986 Bernard Chazelle: Neue Einsichten

Vorher:

$x_1,$	$x_1+x_2,$	$x_1+x_2+x_3,$	$s-x_5,$	$s,$	$s+x_1,$	$\ldots$
$x_2,$	$x_2+x_3,$	$x_2+x_3+x_4,$	$s-x_1,$	$s,$	$s+x_2,$	$\ldots$
$x_3,$	$x_3+x_4,$	$x_3+x_4+x_5,$	$s-x_2,$	$s,$	$s+x_3,$	$\ldots$
$x_4,$	$x_4+x_5,$	$x_4+x_5+x_1,$	$s-x_3,$	$s,$	$s+x_4,$	$\ldots$
$x_5,$	$x_5+x_1,$	$x_5+x_1+x_2,$	$s-x_4,$	$s,$	$s+x_5,$	$\ldots$

Nachher:

$-x_1,$	$x_2,$	$x_2+x_3,$	$x_2+x_3+x_4,$	$s,$	$s-x_1,$	$\ldots$
$x_1+x_2,$	$x_1+x_2+x_3,$	$s-x_5,$	$s+x_1,$	$s,$	$s+x_1+x_2,$	$\ldots$
$x_3,$	$x_3+x_4,$	$x_3+x_4+x_5,$	$s-x_2,$	$s,$	$s+x_3,$	$\ldots$
$x_4,$	$x_4+x_5,$	$x_4+x_5+x_1,$	$s-x_3,$	$s,$	$s+x_4,$	$\ldots$
$x_5+x_1,$	$x_5,$	$x_5+x_1+x_2,$	$s-x_4,$	$s,$	$s+x_5+x_1,$	$\ldots$

1986 Bernard Chazelle: Neue Einsichten

Vorher:

x_1,	$x_1 + x_2$,	$x_1 + x_2 + x_3$,	$s - x_5$,	s,	$s + x_1$,	$\ldots$
x_2,	$x_2 + x_3$,	$x_2 + x_3 + x_4$,	$s - x_1$,	s,	$s + x_2$,	$\ldots$
x_3,	$x_3 + x_4$,	$x_3 + x_4 + x_5$,	$s - x_2$,	s,	$s + x_3$,	$\ldots$
x_4,	$x_4 + x_5$,	$x_4 + x_5 + x_1$,	$s - x_3$,	s,	$s + x_4$,	$\ldots$
x_5,	$x_5 + x_1$,	$x_5 + x_1 + x_2$,	$s - x_4$,	s,	$s + x_5$,	$\ldots$

Nachher:

$-x_1$,	x_2,	$x_2 + x_3$,	$x_2 + x_3 + x_4$,	s,	$s - x_1$,	$\ldots$
$x_1 + x_2$,	$x_1 + x_2 + x_3$,	$s - x_5$,	$s + x_1$,	s,	$s + x_1 + x_2$,	$\ldots$
x_3,	$x_3 + x_4$,	$x_3 + x_4 + x_5$,	$s - x_2$,	s,	$s + x_3$,	$\ldots$
x_4,	$x_4 + x_5$,	$x_4 + x_5 + x_1$,	$s - x_3$,	s,	$s + x_4$,	$\ldots$
$x_5 + x_1$,	x_5,	$x_5 + x_1 + x_2$,	$s - x_4$,	s,	$s + x_5 + x_1$,	$\ldots$

Vorher:

$$
\begin{array}{lllllll}
x_1, & x_1+x_2, & x_1+x_2+x_3, & s-x_5, & s, & s+x_1, & \ldots \\
x_2, & x_2+x_3, & x_2+x_3+x_4, & s-x_1, & s, & s+x_2, & \ldots \\
x_3, & x_3+x_4, & x_3+x_4+x_5, & s-x_2, & s, & s+x_3, & \ldots \\
x_4, & x_4+x_5, & x_4+x_5+x_1, & s-x_3, & s, & s+x_4, & \ldots \\
x_5, & x_5+x_1, & x_5+x_1+x_2, & s-x_4, & s, & s+x_5, & \ldots
\end{array}
$$

Nachher:

$$
\begin{array}{lllllll}
-x_1, & x_2, & x_2+x_3, & x_2+x_3+x_4, & s, & s-x_1, & \ldots \\
x_1+x_2, & x_1+x_2+x_3, & s-x_5, & s+x_1, & s, & s+x_1+x_2, & \ldots \\
x_3, & x_3+x_4, & x_3+x_4+x_5, & s-x_2, & s, & s+x_3, & \ldots \\
x_4, & x_4+x_5, & x_4+x_5+x_1, & s-x_3, & s, & s+x_4, & \ldots \\
x_5+x_1, & x_5, & x_5+x_1+x_2, & s-x_4, & s, & s+x_5+x_1, & \ldots
\end{array}
$$

1986 Bernard Chazelle: Neue Einsichten

Vorher:

$$\begin{array}{lllllll}
x_1, & x_1+x_2, & x_1+x_2+x_3, & s-x_5, & s, & s+x_1, & \dots \\
x_2, & x_2+x_3, & x_2+x_3+x_4, & s-x_1, & s, & s+x_2, & \dots \\
x_3, & x_3+x_4, & x_3+x_4+x_5, & s-x_2, & s, & s+x_3, & \dots \\
x_4, & x_4+x_5, & x_4+x_5+x_1, & s-x_3, & s, & s+x_4, & \dots \\
x_5, & x_5+x_1, & x_5+x_1+x_2, & s-x_4, & s, & s+x_5, & \dots
\end{array}$$

Nachher:

$$\begin{array}{lllllll}
-x_1, & x_2, & x_2+x_3, & x_2+x_3+x_4, & s, & s-x_1, & \dots \\
x_1+x_2, & x_1+x_2+x_3, & s-x_5, & s+x_1, & s, & s+x_1+x_2, & \dots \\
x_3, & x_3+x_4, & x_3+x_4+x_5, & s-x_2, & s, & s+x_3, & \dots \\
x_4, & x_4+x_5, & x_4+x_5+x_1, & s-x_3, & s, & s+x_4, & \dots \\
x_5+x_1, & x_5, & x_5+x_1+x_2, & s-x_4, & s, & s+x_5+x_1, & \dots
\end{array}$$

Wir betrachten das unendliche Tableau

$$\begin{array}{lllllll} x_1, & x_1+x_2, & x_1+x_2+x_3, & s-x_5, & s, & s+x_1, & \dots \\ x_2, & x_2+x_3, & x_2+x_3+x_4, & s-x_1, & s, & s+x_2, & \dots \\ x_3, & x_3+x_4, & x_3+x_4+x_5, & s-x_2, & s, & s+x_3, & \dots \\ x_4, & x_4+x_5, & x_4+x_5+x_1, & s-x_3, & s, & s+x_4, & \dots \\ x_5, & x_5+x_1, & x_5+x_1+x_2, & s-x_4, & s, & s+x_5, & \dots . \end{array} \tag{1}$$

1986 Bernard Chazelle: Neue Einsichten

Wir betrachten das unendliche Tableau

$$\begin{array}{lllllll} x_1, & x_1+x_2, & x_1+x_2+x_3, & s-x_5, & s, & s+x_1, & \ldots \\ x_2, & x_2+x_3, & x_2+x_3+x_4, & s-x_1, & s, & s+x_2, & \ldots \\ x_3, & x_3+x_4, & x_3+x_4+x_5, & s-x_2, & s, & s+x_3, & \ldots \\ x_4, & x_4+x_5, & x_4+x_5+x_1, & s-x_3, & s, & s+x_4, & \ldots \\ x_5, & x_5+x_1, & x_5+x_1+x_2, & s-x_4, & s, & s+x_5, & \ldots. \end{array} \tag{1}$$

Wegen $s > 0$ sind nur endlich viele dieser Zahlen negativ.

1986 Bernard Chazelle: Neue Einsichten

Wir betrachten das unendliche Tableau

$$\begin{array}{lllllll} x_1, & x_1+x_2, & x_1+x_2+x_3, & s-x_5, & s, & s+x_1, & \dots \\ x_2, & x_2+x_3, & x_2+x_3+x_4, & s-x_1, & s, & s+x_2, & \dots \\ x_3, & x_3+x_4, & x_3+x_4+x_5, & s-x_2, & s, & s+x_3, & \dots \\ x_4, & x_4+x_5, & x_4+x_5+x_1, & s-x_3, & s, & s+x_4, & \dots \\ x_5, & x_5+x_1, & x_5+x_1+x_2, & s-x_4, & s, & s+x_5, & \dots . \end{array} \tag{1}$$

Wegen $s > 0$ sind nur endlich viele dieser Zahlen negativ.
Jeder Schritt der Prozedur bewirkt die Vertauschung von Einträgen und die Änderung genau eines Wertes von $x_j < 0$ zu $-x_j > 0$.

Wir betrachten das unendliche Tableau

$$\begin{array}{lllllll}
x_1, & x_1 + x_2, & x_1 + x_2 + x_3, & s - x_5, & s, & s + x_1, & \dots \\
x_2, & x_2 + x_3, & x_2 + x_3 + x_4, & s - x_1, & s, & s + x_2, & \dots \\
x_3, & x_3 + x_4, & x_3 + x_4 + x_5, & s - x_2, & s, & s + x_3, & \dots \\
x_4, & x_4 + x_5, & x_4 + x_5 + x_1, & s - x_3, & s, & s + x_4, & \dots \\
x_5, & x_5 + x_1, & x_5 + x_1 + x_2, & s - x_4, & s, & s + x_5, & \dots .
\end{array} \tag{1}$$

Wegen $s > 0$ sind nur endlich viele dieser Zahlen negativ.
Jeder Schritt der Prozedur bewirkt die Vertauschung von Einträgen und die Änderung genau eines Wertes von $x_j < 0$ zu $-x_j > 0$.

Fazit: Die Prozedur bricht ab und die Anzahl der Schritte ist gleich der Anzahl der negativen Einträge in (1).

1986 Bernard Chazelle: Neue Einsichten

Wir betrachten das unendliche Tableau

$$\begin{array}{ccccccc} x_1, & x_1+x_2, & x_1+x_2+x_3, & s-x_5, & s, & s+x_1, & \dots \\ x_2, & x_2+x_3, & x_2+x_3+x_4, & s-x_1, & s, & s+x_2, & \dots \\ x_3, & x_3+x_4, & x_3+x_4+x_5, & s-x_2, & s, & s+x_3, & \dots \\ x_4, & x_4+x_5, & x_4+x_5+x_1, & s-x_3, & s, & s+x_4, & \dots \\ x_5, & x_5+x_1, & x_5+x_1+x_2, & s-x_4, & s, & s+x_5, & \dots . \end{array} \tag{1}$$

Wegen $s > 0$ sind nur endlich viele dieser Zahlen negativ.
Jeder Schritt der Prozedur bewirkt die Vertauschung von Einträgen und die Änderung genau eines Wertes von $x_j < 0$ zu $-x_j > 0$.

Fazit: Die Prozedur bricht ab und die Anzahl der Schritte ist gleich der Anzahl der negativen Einträge in (1).

Die Schrittzahl ist unabhängig von der Auswahl der negativen Marken !

Bewertung

Wir haben das Problem jetzt gut verstanden:

- Die Lösung arbeitet für beliebige Polygone.
- Die Marken $x_1, x_2 \ldots, x_n$ können auch reell sein.
- Die Schrittzahl läßt sich bestimmen.

Bewertung

Wir haben das Problem jetzt gut verstanden – aber noch nicht perfekt.

- Die Lösung arbeitet für beliebige Polygone.
- Die Marken $x_1, x_2 \ldots, x_n$ können auch reell sein.
- Die Schrittzahl läßt sich bestimmen.

Bewertung

Wir haben das Problem jetzt gut verstanden – aber noch nicht perfekt.

- Die Lösung arbeitet für beliebige Polygone.
- Die Marken $x_1, x_2 \ldots, x_n$ können auch reell sein.
- Die Schrittzahl läßt sich bestimmen.

Fragen:

- Ist auch die Endkonfiguration eindeutig bestimmt?
- Wenn ja, wie kann man sie finden?

Bewertung

Wir haben das Problem jetzt gut verstanden – aber noch nicht perfekt.

- Die Lösung arbeitet für beliebige Polygone.
- Die Marken $x_1, x_2 \ldots, x_n$ können auch reell sein.
- Die Schrittzahl läßt sich bestimmen.

Fragen:

- Ist auch die Endkonfiguration eindeutig bestimmt?
- Wenn ja, wie kann man sie finden?

Beobachtungen:

- Das Chazellesche Tableau (1) hat zu viele Einträge.
- Die Bewegung der Einträge ist schwer nachvollziehbar.

Ökonomisierung

Wir betrachten die ersten fünf Zahlen der ersten Zeile von (1).

$$
\begin{aligned}
y_1 &:= x_1 \\
y_2 &:= x_1 + x_2 \\
y_3 &:= x_1 + x_2 + x_3 \\
y_4 &:= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
y_5 &:= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = s.
\end{aligned}
$$

Ökonomisierung

Wir betrachten die ersten fünf Zahlen der ersten Zeile von (1).

$$
\begin{aligned}
y_1 &:= x_1 & x_1 &= y_1 - y_5 + s \\
y_2 &:= x_1 + x_2 & x_2 &= y_2 - y_1 \\
y_3 &:= x_1 + x_2 + x_3 & x_3 &= y_3 - y_2 \\
y_4 &:= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & x_4 &= y_4 - y_3 \\
y_5 &:= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = s. & x_5 &= y_5 - y_4.
\end{aligned}
$$

Aus den y_j und s können die x_j berechnet werden.

Ökonomisierung

Wir betrachten die ersten fünf Zahlen der ersten Zeile von (1).

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - y_5 + s \\ x_2 &= y_2 - y_1 \\ x_3 &= y_3 - y_2 \\ x_4 &= y_4 - y_3 \\ x_5 &= y_5 - y_4. \end{aligned}$$

Aus den y_j und s können die x_j berechnet werden.

Ökonomisierung

Wir betrachten die ersten fünf Zahlen der ersten Zeile von (1).

$$x_1 = y_1 - y_5 + s$$
$$x_2 = y_2 - y_1$$
$$x_3 = y_3 - y_2$$
$$x_4 = y_4 - y_3$$
$$x_5 = y_5 - y_4.$$

Aus den y_j und s können die x_j berechnet werden.

Diese Relationen ändern sich nicht, wenn zu allen y_j ein und dieselbe Konstante addiert wird. Wählt man diese so, dass

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 0,$$

sind die y_j durch die x_j eindeutig bestimmt.

Übersetzung von x_j zu y_j

Wir übersetzen die Regeln der Prozedur für die x_j in Regeln für y_j.

Übersetzung von x_j zu y_j

Wir übersetzen die Regeln der Prozedur für die x_j in Regeln für y_j.

Betrachten zunächst x_2. Dann ist $x_2 < 0$ äquivalent zu $y_1 > y_2$ und Substitution $x_2 \mapsto -x_2$ etc. bewirkt

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \mapsto (y_2, y_1, y_3, y_4, y_5).$$

Übersetzung von x_j zu y_j

Wir übersetzen die Regeln der Prozedur für die x_j in Regeln für y_j.

Betrachten zunächst x_2. Dann ist $x_2 < 0$ äquivalent zu $y_1 > y_2$ und Substitution $x_2 \mapsto -x_2$ etc. bewirkt

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \mapsto (y_2, y_1, y_3, y_4, y_5).$$

Eine analoge Regel gilt für x_3, x_4, x_5.

Übersetzung von x_j zu y_j

Wir übersetzen die Regeln der Prozedur für die x_j in Regeln für y_j.

Betrachten zunächst x_2. Dann ist $x_2 < 0$ äquivalent zu $y_1 > y_2$ und Substitution $x_2 \mapsto -x_2$ etc. bewirkt

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \mapsto (y_2, y_1, y_3, y_4, y_5).$$

Eine analoge Regel gilt für x_3, x_4, x_5. Für x_1 ist $x_1 < 0$ äquivalent zu $y_5 > y_1 + s$ und dann bewirkt $x_1 \mapsto -x_1$ etc.

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \mapsto (y_5 - s, y_2, y_3, y_4, y_1 + s).$$

Übersetzung von x_j zu y_j

Wir übersetzen die Regeln der Prozedur für die x_j in Regeln für y_j.

Betrachten zunächst x_2. Dann ist $x_2 < 0$ äquivalent zu $y_1 > y_2$ und Substitution $x_2 \mapsto -x_2$ etc. bewirkt

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \mapsto (y_2, y_1, y_3, y_4, y_5).$$

Eine analoge Regel gilt für x_3, x_4, x_5. Für x_1 ist $x_1 < 0$ äquivalent zu $y_5 > y_1 + s$ und dann bewirkt $x_1 \mapsto -x_1$ etc.

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \mapsto (y_5 - s, y_2, y_3, y_4, y_1 + s).$$

Jede Ersetzung der x_j impliziert eine Ersetzung der y_j. Die letztere ist im wesentlichen ein Sortiervorgang.

Ein Sortierprozess

1987 Sergej Steinberg, John Campbell. Zwei Regeln:

$$
\begin{aligned}
y_j > y_{j+1}: &\quad (\ldots, y_j, y_{j+1}, \ldots) \mapsto (\ldots, y_{j+1}, y_j, \ldots) \\
y_5 > y_1 + s: &\quad (y_1, \ldots, \ldots, y_5) \mapsto (y_5 - s, \ldots, \ldots, y_1 + s)
\end{aligned}
$$

Ein Sortierprozess

1987 Sergej Steinberg, John Campbell. Zwei Regeln:

$$\begin{aligned} y_j > y_{j+1}: &\quad (\ldots, y_j, y_{j+1}, \ldots) \mapsto (\ldots, y_{j+1}, y_j, \ldots) \\ y_5 > y_1 + s: &\quad (y_1, \ldots, \ldots, y_5) \mapsto (y_5 - s, \ldots, \ldots, y_1 + s) \end{aligned}$$

1. Benachbarte Marken werden ausgetauscht, wenn die linke Zahl kleiner ist als die rechte.

Ein Sortierprozess

1987 Sergej Steinberg, John Campbell. Zwei Regeln:

$$
\begin{aligned}
y_j > y_{j+1}: \quad & (\ldots, y_j, y_{j+1}, \ldots) \mapsto (\ldots, y_{j+1}, y_j, \ldots) \\
y_5 > y_1 + s: \quad & (y_1, \ldots, \ldots, y_5) \;\; \mapsto (y_5 - s, \ldots, \ldots, y_1 + s)
\end{aligned}
$$

1. Benachbarte Marken werden ausgetauscht, wenn die linke Zahl kleiner ist als die rechte.

2. Überschreitet die Differenz $y_5 - y_1$ den Wert s, wird y_5 um s verringert, y_1 um s erhöht und beide werden vertauscht.

Ein Sortierprozess

1987 Sergej Steinberg, John Campbell. Zwei Regeln:

$$
\begin{array}{lll}
y_j > y_{j+1}: & (\ldots, y_j, y_{j+1}, \ldots) & \mapsto (\ldots, y_{j+1}, y_j, \ldots) \\
y_5 > y_1 + s: & (y_1, \ldots, \ldots, y_5) & \mapsto (y_5 - s, \ldots, \ldots, y_1 + s)
\end{array}
$$

1. Benachbarte Marken werden ausgetauscht, wenn die linke Zahl kleiner ist als die rechte.

2. Überschreitet die Differenz $y_5 - y_1$ den Wert s, wird y_5 um s verringert, y_1 um s erhöht und beide werden vertauscht.

Interpretation mit Spielkarten: Prozess endet (Hausaufgabe).

Ein Sortierprozess

1987 Sergej Steinberg, John Campbell. Zwei Regeln:

$$\begin{aligned} y_j > y_{j+1}: \quad & (\ldots, y_j, y_{j+1}, \ldots) \mapsto (\ldots, y_{j+1}, y_j, \ldots) \\ y_5 > y_1 + s: \quad & (y_1, \ldots, \ldots, y_5) \mapsto (y_5 - s, \ldots, \ldots, y_1 + s) \end{aligned}$$

1. Benachbarte Marken werden ausgetauscht, wenn die linke Zahl kleiner ist als die rechte.

2. Überschreitet die Differenz $y_5 - y_1$ den Wert s, wird y_5 um s verringert, y_1 um s erhöht und beide werden vertauscht.

Interpretation mit Spielkarten: Prozess endet (Hausaufgabe).

Endkonfiguration der y_j ist eindeutig bestimmt und kann unschwer ermittelt werden. Daraus folgen Endwerte der x_j.

Bewertung der Lösung

Sind wir nun zufrieden ?

Bewertung der Lösung

Sind wir nun zufrieden ?

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1 - y_5 + s\\
x_2 &= y_2 - y_1\\
x_3 &= y_3 - y_2\\
x_4 &= y_4 - y_3\\
x_5 &= y_5 - y_4
\end{aligned}
$$

Bewertung der Lösung

Sind wir nun zufrieden ? Schönheitsfehler: Symmetriebruch.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1 - y_5 + s \\
x_2 &= y_2 - y_1 \\
x_3 &= y_3 - y_2 \\
x_4 &= y_4 - y_3 \\
x_5 &= y_5 - y_4
\end{aligned}
$$

Bewertung der Lösung

Sind wir nun zufrieden ? Schönheitsfehler: Symmetriebruch.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1 - y_5 + s \\
x_2 &= y_2 - y_1 \\
x_3 &= y_3 - y_2 \\
x_4 &= y_4 - y_3 \\
x_5 &= y_5 - y_4
\end{aligned}
$$

Besser:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1 - y_5 + s/5 \\
x_2 &= y_2 - y_1 + s/5 \\
x_3 &= y_3 - y_2 + s/5 \\
x_4 &= y_4 - y_3 + s/5 \\
x_5 &= y_5 - y_4 + s/5
\end{aligned}
$$

Bewertung der Lösung

Sind wir nun zufrieden ? Schönheitsfehler: Symmetriebruch.

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - y_5 + s \\ x_2 &= y_2 - y_1 \\ x_3 &= y_3 - y_2 \\ x_4 &= y_4 - y_3 \\ x_5 &= y_5 - y_4 \end{aligned}$$

Besser:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - y_5 + s/5 \\ x_2 &= y_2 - y_1 + s/5 \\ x_3 &= y_3 - y_2 + s/5 \\ x_4 &= y_4 - y_3 + s/5 \\ x_5 &= y_5 - y_4 + s/5 \end{aligned}$$

Übersetzung der Regeln für x_j in Sprache der y_j (mit $y_0 \equiv y_5$):

$$y_{j-1} > y_j + s/n : \qquad y_{j-1} \mapsto y_j + s/n, \qquad y_j \mapsto y_{j-1} - s/n.$$

Sind wir nun zufrieden ? Schönheitsfehler: Symmetriebruch.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1 - y_5 + s \\
x_2 &= y_2 - y_1 \\
x_3 &= y_3 - y_2 \\
x_4 &= y_4 - y_3 \\
x_5 &= y_5 - y_4
\end{aligned}
\qquad \text{Besser:} \qquad
\begin{aligned}
x_1 &= y_1 - y_5 + s/5 \\
x_2 &= y_2 - y_1 + s/5 \\
x_3 &= y_3 - y_2 + s/5 \\
x_4 &= y_4 - y_3 + s/5 \\
x_5 &= y_5 - y_4 + s/5
\end{aligned}
$$

Übersetzung der Regeln für x_j in Sprache der y_j (mit $y_0 \equiv y_5$):

$$y_{j-1} > y_j + s/n : \qquad y_{j-1} \mapsto y_j + s/n, \qquad y_j \mapsto y_{j-1} - s/n.$$

Neue Prozedur: Sortieren mit Schwellenwert

Die zweite Metamorphose

Betrachten Ersetzungsregel

$$y_{j-1} > y_j + s/n: \qquad y_{j-1} \mapsto y_j + s/n, \qquad y_j \mapsto y_{j-1} - s/n.$$

Die zweite Metamorphose

Betrachten Ersetzungsregel

$$y_{j-1} > y_j + s/n: \qquad y_{j-1} \mapsto y_j + s/n, \qquad y_j \mapsto y_{j-1} - s/n.$$

Modifikation (ohne Austausch)

$$y_{j-1} > y_j + s/n: \qquad y_j \mapsto y_j + s/n, \qquad y_{j-1} \mapsto y_{j-1} - s/n.$$

Die zweite Metamorphose

Betrachten Ersetzungsregel

$$y_{j-1} > y_j + s/n : \qquad y_{j-1} \mapsto y_j + s/n, \qquad y_j \mapsto y_{j-1} - s/n.$$

Modifikation (ohne Austausch)

$$y_{j-1} > y_j + s/n : \qquad y_j \mapsto y_j + s/n, \qquad y_{j-1} \mapsto y_{j-1} - s/n.$$

Ist Reihenfolge der y_j für Endlichkeit des Verfahrens wesentlich ?

Die zweite Metamorphose

Betrachten Ersetzungsregel

$$y_{j-1} > y_j + s/n : \qquad y_{j-1} \mapsto y_j + s/n, \qquad y_j \mapsto y_{j-1} - s/n.$$

Modifikation (ohne Austausch)

$$y_{j-1} > y_j + s/n : \qquad y_j \mapsto y_j + s/n, \qquad y_{j-1} \mapsto y_{j-1} - s/n.$$

Ist Reihenfolge der y_j für Endlichkeit des Verfahrens wesentlich ? Nein !

Die zweite Metamorphose

Betrachten Ersetzungsregel

$$y_{j-1} > y_j + s/n : \qquad y_{j-1} \mapsto y_j + s/n, \qquad y_j \mapsto y_{j-1} - s/n.$$

Modifikation (ohne Austausch)

$$y_{j-1} > y_j + s/n : \qquad y_j \mapsto y_j + s/n, \qquad y_{j-1} \mapsto y_{j-1} - s/n.$$

Ist Reihenfolge der y_j für Endlichkeit des Verfahrens wesentlich ? Nein !

Reelle Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und Schwellenwert $d := s/n > 0$ seien gegeben. Ersetzungsregel

$$y_k > y_j + d : \qquad y_j \mapsto y_j + d, \quad y_k \mapsto y_k - d.$$

Die zweite Metamorphose

Betrachten Ersetzungsregel

$$y_{j-1} > y_j + s/n : \qquad y_{j-1} \mapsto y_j + s/n, \qquad y_j \mapsto y_{j-1} - s/n.$$

Modifikation (ohne Austausch)

$$y_{j-1} > y_j + s/n : \qquad y_j \mapsto y_j + s/n, \qquad y_{j-1} \mapsto y_{j-1} - s/n.$$

Ist Reihenfolge der y_j für Endlichkeit des Verfahrens wesentlich ? Nein !

Reelle Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und Schwellenwert $d := s/n > 0$ seien gegeben. Ersetzungsregel

$$y_k > y_j + d : \qquad y_j \mapsto y_j + d, \quad y_k \mapsto y_k - d.$$

Es ist nicht schwer zu sehen (HA), dass dieses Verfahren abbrechen muss.

Die zweite Metamorphose

Betrachten Ersetzungsregel

$$y_{j-1} > y_j + s/n : \qquad y_{j-1} \mapsto y_j + s/n, \qquad y_j \mapsto y_{j-1} - s/n.$$

Modifikation (ohne Austausch)

$$y_{j-1} > y_j + s/n : \qquad y_j \mapsto y_j + s/n, \qquad y_{j-1} \mapsto y_{j-1} - s/n.$$

Ist Reihenfolge der y_j für Endlichkeit des Verfahrens wesentlich ? Nein !

Reelle Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und Schwellenwert $d := s/n > 0$ seien gegeben. Ersetzungsregel

$$y_k > y_j + d : \qquad y_j \mapsto y_j + d, \quad y_k \mapsto y_k - d.$$

Es ist nicht schwer zu sehen (HA), dass dieses Verfahren abbrechen muss. Pentagonspiel muss enden, weil seine Regeln restriktiver sind.

Bewertung

Sind wir nun zufrieden ?

Bewertung

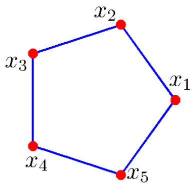
Sind wir nun zufrieden ?   Ja.

Bewertung

Sind wir nun zufrieden ? Ja. Allenfalls ...

Sind wir nun zufrieden ? Ja. Allenfalls ... könnte man fragen, warum gerade diese Wahl der y_j zum Erfolg führt.

$$x_1 = y_1 - y_5 + s/5$$
$$x_2 = y_2 - y_1 + s/5$$
$$x_3 = y_3 - y_2 + s/5$$
$$x_4 = y_4 - y_3 + s/5$$
$$x_5 = y_5 - y_4 + s/5$$



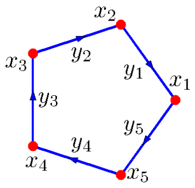
Deutung der Marken x_j und y_j

Sind wir nun zufrieden ? Ja. Allenfalls ... könnte man fragen, warum gerade diese Wahl der y_j zum Erfolg führt.

Wir orientieren die Kanten des Fünfecks und suchen Werte y_j, so dass die "Flussbilanz"

$$x_j = y_j - y_{j-1}$$

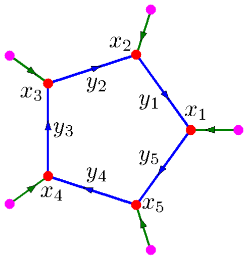
stimmt. Nur möglich, wenn Summe aller x_j gleich 0 ist.



Deutung der Marken x_j und y_j

Sind wir nun zufrieden ? Ja. Allenfalls ... könnte man fragen, warum gerade diese Wahl der y_j zum Erfolg führt.

Um dies zu erreichen, fügen wir zusätzliche Knoten und Kanten hinzu.



Deutung der Marken x_j und y_j

Sind wir nun zufrieden? Ja. Allenfalls ... könnte man fragen, warum gerade diese Wahl der y_j zum Erfolg führt.

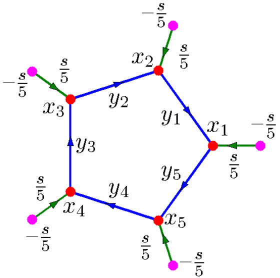
Mit der angegeben Belegung der zusätzlichen Knoten und Kanten existieren nun auch die y_j mit

$$x_j = y_j - y_{j-1} + s/5.$$

Ultimative Lösung: Die Funktion

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2$$

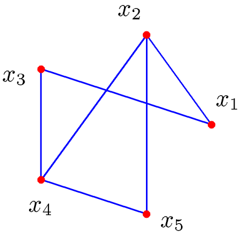
ist streng monoton fallend.



1993: Eine neue Herausforderung

J. Akiyama, K. Hosono and M. Urabe, „Some combinatorial problems“, Discrete Mathematics **116** (1993) 291–298:

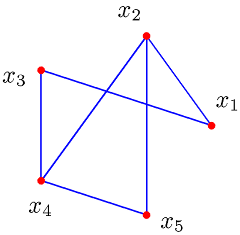
Kann man „analoge“ Prozeduren auf allgemeinen Graphen betrachten?



1993: Eine neue Herausforderung

J. Akiyama, K. Hosono and M. Urabe, „Some combinatorial problems“, Discrete Mathematics **116** (1993) 291–298:

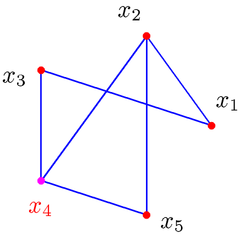
Die Knoten eines Graphen seien mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bewertet.



1993: Eine neue Herausforderung

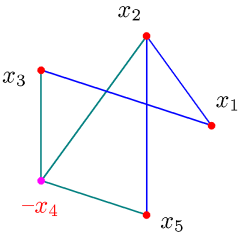
J. Akiyama, K. Hosono and M. Urabe, „Some combinatorial problems“, Discrete Mathematics **116** (1993) 291–298:

Die Summe $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ sei positiv. Ist $x_j < 0$, ...



J. Akiyama, K. Hosono and M. Urabe, „Some combinatorial problems“, Discrete Mathematics **116** (1993) 291–298:

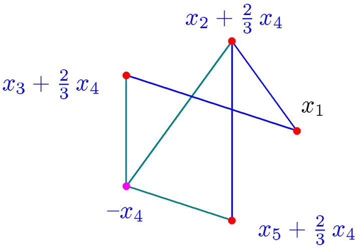
... wird das Vorzeichen von x_j umgekehrt ...



1993: Eine neue Herausforderung

J. Akiyama, K. Hosono and M. Urabe, „Some combinatorial problems“, Discrete Mathematics **116** (1993) 291–298:

... und der Überschuss $2\,x_j$ gleichmäßig auf seine Nachbarn verteilt.



2007: Die Antwort

J. Akiyama, K. Hosono and M. Urabe, „Some combinatorial problems“, Discrete Mathematics **116** (1993) 291–298:

Ist die Prozedur für reguläre Graphen immer endlich ?

2007: Die Antwort

J. Akiyama, K. Hosono and M. Urabe, „Some combinatorial problems“, Discrete Mathematics **116** (1993) 291–298:

Ist die Prozedur für reguläre Graphen immer endlich ?

ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

Relaxation procedures on graphs

Elias Wegert[a,*], Christian Reiher[b]

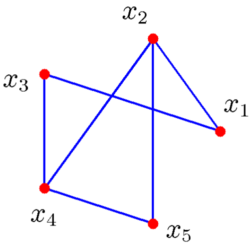
Relaxation procedures on graphs

DISCRETE APPLIED MATHEMATICS

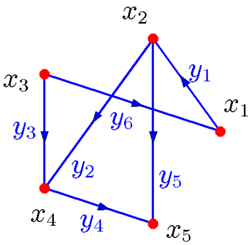
www.elsevier.com/locate/dam

Die Prozedur ist für alle Graphen endlich.

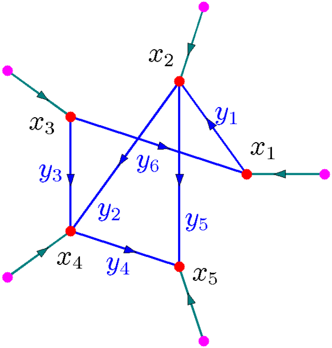
Dualität: Übergang von Ecken zu Kanten



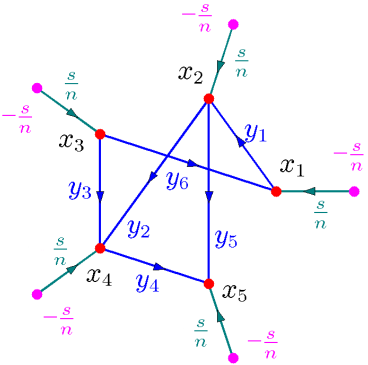
Dualität: Übergang von Ecken zu Kanten



Dualität: Übergang von Ecken zu Kanten



Dualität: Übergang von Ecken zu Kanten



Bei Vorgabe von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gibt es passende $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Die Übersetzung der Regeln

Jedes x_j besitzt eine Darstellung

$$x_j = \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \ldots + \eta_m y_m + s/n, \quad \text{mit} \quad \eta_j \in \{-1, 0, 1\}.$$

Die Übersetzung der Regeln

Jedes x_j besitzt eine Darstellung

$$x_j = \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \ldots + \eta_m y_m + s/n, \quad \text{mit} \quad \eta_j \in \{-1, 0, 1\}.$$

Ist $x_j < 0$ und wird die Substitution $x_j \mapsto -x_j$ etc. vorgenommen, dann gibt es eine Konstante c, so dass die Substitution

$$y_j \mapsto y_j + \eta_j\, c, \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

zu den neuen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ passende Werte der $y_1, y_2, \ldots, y_m$ liefert.

Die Übersetzung der Regeln

Jedes x_j besitzt eine Darstellung

$$x_j = \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \ldots + \eta_m y_m + s/n, \quad \text{mit} \quad \eta_j \in \{-1, 0, 1\}.$$

Ist $x_j < 0$ und wird die Substitution $x_j \mapsto -x_j$ etc. vorgenommen, dann gibt es eine Konstante c, so dass die Substitution

$$y_j \mapsto y_j + \eta_j\, c, \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

zu den neuen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ passende Werte der $y_1, y_2, \ldots, y_m$ liefert.

Bricht eine x_j–Prozedur nicht ab, so gilt dies auch für die zugehörige y_j–Prozedur.

Die dritte Metamorphose

Allgemeine Probleme sind einfacher zu lösen als spezielle.

Die dritte Metamorphose

Allgemeine Probleme sind einfacher zu lösen als spezielle.

Untersuchen neue Prozedur, die die obige als Spezialfall enthält.

Die dritte Metamorphose

Allgemeine Probleme sind einfacher zu lösen als spezielle.

Untersuchen neue Prozedur, die die obige als Spezialfall enthält.

Gegeben seien Zahlen $y_1, \ldots, y_n$ und positiver Schwellenwert d.

Die dritte Metamorphose

Allgemeine Probleme sind einfacher zu lösen als spezielle.

Untersuchen neue Prozedur, die die obige als Spezialfall enthält.

Gegeben seien Zahlen $y_1, \ldots, y_n$ und positiver Schwellenwert d.

Betrachten vorzeichenbehaftete Summen

$$S := \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \ldots + \eta_n y_n, \quad \text{mit} \quad \eta_j \in \{-1, 0, 1\}.$$

Die dritte Metamorphose

Allgemeine Probleme sind einfacher zu lösen als spezielle.

Untersuchen neue Prozedur, die die obige als Spezialfall enthält.

Gegeben seien Zahlen $y_1, \ldots, y_n$ und positiver Schwellenwert d.

Betrachten vorzeichenbehaftete Summen

$$S := \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \ldots + \eta_n y_n, \quad \text{mit} \quad \eta_j \in \{-1, 0, 1\}.$$

Ersetzungsregel: Wenn eine solche Summe S den Schwellenwert d übersteigt, sei $c := 2\,(S - d)/\sum \eta_j^2$ und wir substituieren

$$y_j \mapsto y_j - \eta_j\, c, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Die dritte Metamorphose

Allgemeine Probleme sind einfacher zu lösen als spezielle.

Untersuchen neue Prozedur, die die obige als Spezialfall enthält.

Gegeben seien Zahlen $y_1, \ldots, y_n$ und positiver Schwellenwert d.

Betrachten vorzeichenbehaftete Summen

$$S := \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \ldots + \eta_n y_n, \quad \text{mit} \quad \eta_j \in \{-1, 0, 1\}.$$

Ersetzungsregel: Wenn eine solche Summe S den Schwellenwert d übersteigt, sei $c := 2\,(S - d)/\sum \eta_j^2$ und wir substituieren

$$y_j \mapsto y_j - \eta_j\, c, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ende: Alle möglichen vorzeichenbehafteten Summen der Zahlen sind (betragsmäßig) kleiner als d.

Die Signierte-Mittelwert-Prozedur

Gegeben seien reelle Zahlen $y_1, \ldots, y_n$ und eine positive Konstante d. Wenn es Zahlen (Vorzeichen) $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \in \{-1, 0, 1\}$ gibt, so dass

$$s := \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \ldots + \eta_n y_n > d, \tag{2}$$

dann setze man $m := \eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_n^2$ und substituiere

$$y_j \mapsto y_j - 2\,\eta_j \left(\frac{s-d}{m}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Dies werde wiederholt, so lange Zahlen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \in \{-1, 0, 1\}$ mit (2) existieren.

Die Signierte-Mittelwert-Prozedur

Gegeben seien reelle Zahlen $y_1, \ldots, y_n$ und eine positive Konstante d. Wenn es Zahlen (Vorzeichen) $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \in \{-1, 0, 1\}$ gibt, so dass

$$s := \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \ldots + \eta_n y_n > d, \tag{2}$$

dann setze man $m := \eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_n^2$ und substituiere

$$y_j \mapsto y_j - 2\,\eta_j \left(\frac{s-d}{m} \right), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Dies werde wiederholt, so lange Zahlen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \in \{-1, 0, 1\}$ mit (2) existieren.

Theorem (Christian Reiher und E.W.)

Die Signierte-Mittelwert-Prozedur ist stets endlich.

In what follows we assume that there is a procedure which does not stop.

1. The function $f(y) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$ is strictly decreasing. In fact

$$f(y_{\text{old}}) - f(y_{\text{new}}) = \sum_{j=1}^{n} y_j^2 - \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - 2\eta_j \, \frac{s-d}{m} \right)^2 = 4 \, \frac{d(s-d)}{m} > 0. \tag{4}$$

Let f_k denote the value of f at step k. Since the sequence (f_k) is monotone and bounded it converges to a limit f^*.

2. Let s_k, m_k and $y_{j,k}$ denote the values of s, m, and y_j in the k-th step, respectively. Since $1 \le m_k \le n$ it follows from (4) that

$$0 < s_k - d \le \frac{n}{4d} \, (f_k - f_{k+1}). \tag{5}$$

Beweis: Etwas Analysis

We write $f_1 - f^*$ as a (absolutely) convergent telescopic series,

$$f_1 - f^* = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k - f_{k+1}).$$

Together with (5) this shows the (absolute) convergence of $\sum_{k=1}^{\infty}(s_k - d)$, and in particular we have $s_k \to d$. Further, by (3),

$$|y_{j,k+1} - y_{j,k}| \le 2\,(s_k - d), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Consequently, the convergent series

$$y_{j,1} + 2\sum_{k=1}^{\infty}(s_k - d)$$

serves as a majorant for the representation

$$y_{j,k+1} = y_{j,1} + \sum_{i=1}^{k} |y_{j,i+1} - y_{j,i}|.$$

This implies that all sequences $(y_{j,k})$ converge to certain limits Y_j as k tends to infinity.

So weit – so gut.

3. We now consider the difference

$$(\eta_{1,k} y_{1,k} + \ldots + \eta_{n,k} y_{n,k}) - (\eta_{1,k} Y_1 + \ldots + \eta_{n,k} Y_n),$$

which converges to zero, since $y_{j,k} \to Y_j$ as $k \to \infty$. The first term in parentheses is s_k, which has been shown to converge to d. Consequently also

$$\eta_{1,k} Y_1 + \eta_{2,k} Y_2 + \ldots + \eta_{n,k} Y_n \to d. \tag{6}$$

However, the set

$$\left\{ \eta_1 Y_1 + \eta_2 Y_2 + \ldots + \eta_n Y_n : \eta_j \in \{-1, 0, +1\} \right\}$$

contains only a finite number of elements, which together with (6) then implies that

$$\eta_{1,k} Y_1 + \eta_{2,k} Y_2 + \ldots + \eta_{n,k} Y_n = d \tag{7}$$

for all sufficiently large k, say for all $k \geq K$.

So weit – so gut. Und weiter ?

3. We now consider the difference

$$(\eta_{1,k}y_{1,k} + \ldots + \eta_{n,k}y_{n,k}) - (\eta_{1,k}Y_1 + \ldots + \eta_{n,k}Y_n),$$

which converges to zero, since $y_{j,k} \to Y_j$ as $k \to \infty$. The first term in parentheses is s_k, which has been shown to converge to d. Consequently also

$$\eta_{1,k}Y_1 + \eta_{2,k}Y_2 + \ldots + \eta_{n,k}Y_n \to d. \tag{6}$$

However, the set

$$\{\eta_1 Y_1 + \eta_2 Y_2 + \ldots + \eta_n Y_n : \eta_j \in \{-1, 0, +1\}\}$$

contains only a finite number of elements, which together with (6) then implies that

$$\eta_{1,k}Y_1 + \eta_{2,k}Y_2 + \ldots + \eta_{n,k}Y_n = d \tag{7}$$

for all sufficiently large k, say for all $k \geq K$.

4. Finally, we observe that the values $I_k := \sum_{j=1}^{n} (y_{j,k} - Y_j)^2$ all converge to zero, since $y_{j,k} \to Y_j$ as $k \to \infty$. In fact all I_k are equal for $k \geq K$, namely,

$$
\begin{aligned}
I_{k+1} - I_k &= \sum_{j=1}^{n} \left(y_{j,k} - 2\eta_{j,k} \frac{s_k - d}{m_k} - Y_j \right)^2 - \sum_{j=1}^{n} (y_{j,k} - Y_j)^2 \\
&= 4 \sum_{j=1}^{n} \eta_{j,k}^2 \left(\frac{s_k - d}{m_k} \right)^2 - 4 \sum_{j=1}^{n} \eta_{j,k} \frac{s_k - d}{m_k} (y_{j,k} - Y_j) \\
&= 4 \frac{s_k - d}{m_k} \left[\sum_{j=1}^{n} \eta_{j,k}^2 \frac{s_k - d}{m_k} - \sum_{j=1}^{n} \eta_{j,k}\, y_{j,k} + \sum_{j=1}^{n} \eta_{j,k} Y_j \right] \\
&= 4 \frac{s_k - d}{m_k} \left[s_k - d - \sum_{j=1}^{n} \eta_{j,k} y_{j,k} + \sum_{j=1}^{n} \eta_{j,k} Y_j \right] = 0,
\end{aligned}
$$

where we used (2) and (7) in the last step. Since $I_k \to 0$ it follows that $I_k = 0$ for all $k \geq K$, which implies $y_{j,k} = Y_j$. But then all variables y_j would be constant after the K-th step, a contradiction.

Rückübersetzung

Eine Relaxations-Prozedur auf Graphen

Es sei G ein zusammenhängender Graph mit mindestens zwei Ecken. Jeder Ecke v_j von G sei eine reelle Zahl x_j zugeordnet, wobei $s := \sum x_j$ positiv sei. Wenn eine der Ecke v zugeordnete Zahl x negativ ist, so ist es erlaubt, $2x/m$ zu jeder der m Zahlen an den Nachbarecken von v zu addieren, und dann x durch $-x$ zu ersetzen. Dies werde solange wiederholt, wie negative Zahlen x_j existieren.

Rückübersetzung

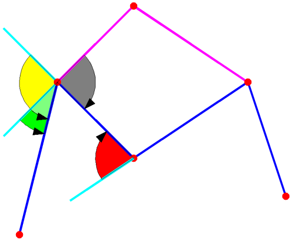
Eine Relaxations-Prozedur auf Graphen

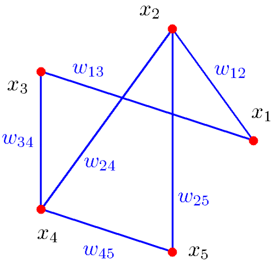
Es sei G ein zusammenhängender Graph mit mindestens zwei Ecken. Jeder Ecke v_j von G sei eine reelle Zahl x_j zugeordnet, wobei $s := \sum x_j$ positiv sei. Wenn eine der Ecke v zugeordnete Zahl x negativ ist, so ist es erlaubt, $2x/m$ zu jeder der m Zahlen an den Nachbarecken von v zu addieren, und dann x durch $-x$ zu ersetzen. Dies werde solange wiederholt, wie negative Zahlen x_j existieren.

Theorem (Christian Reiher und E.W.)

Die obige Relaxations-Prozedur ist stets endlich.

Ist das geometrische Ausgangsproblem damit auch in vollständiger Allgemeinheit gelöst?

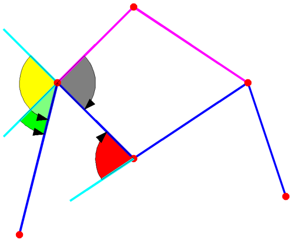


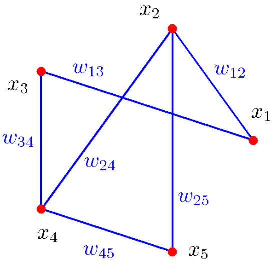


Nein: Falls Seiten unterschiedlich lang, gelten kompliziertere Regeln für Änderung der Aussenwinkel.

Zurück zu den Ursprüngen

Ist das geometrische Ausgangsproblem damit auch in vollständiger Allgemeinheit gelöst?





Nein: Falls Seiten unterschiedlich lang, gelten kompliziertere Regeln für Änderung der Aussenwinkel.

Dem entsprechen Relaxationsprozeduren auf gewichteten Graphen.

Verallgemeinerungen

Relaxationsprozeduren:

- gerichtete Graphen
- gewichtete Kanten
- veränderliche Gewichte.

Verallgemeinerungen

Relaxationsprozeduren:

- gerichtete Graphen
- gewichtete Kanten
- veränderliche Gewichte.

Offene Fragen: Endlichkeit, Anzahl der Schritte, Eindeutigkeit der Endkonfiguration.

Verallgemeinerungen

Relaxationsprozeduren:

- gerichtete Graphen
- gewichtete Kanten
- veränderliche Gewichte.

Offene Fragen: Endlichkeit, Anzahl der Schritte, Eindeutigkeit der Endkonfiguration.

Signierte–Mittelwert–Prozeduren:

- Wahl von η, z.B. $\eta_j \in [-1, 1]$.
- Wahl von c, Grenzfälle, Über- und Unterrelaxation.

Relaxationsprozeduren:

- gerichtete Graphen
- gewichtete Kanten
- veränderliche Gewichte.

Offene Fragen: Endlichkeit, Anzahl der Schritte, Eindeutigkeit der Endkonfiguration.

Signierte–Mittelwert–Prozeduren:

- Wahl von η, z.B. $\eta_j \in [-1, 1]$.
- Wahl von c, Grenzfälle, Über- und Unterrelaxation.

Beispiel: Ersetzt man $\eta_j \in \{-1, 0, 1\}$ durch $\eta_j \in [-1, 1]$, geht die Endlichkeit i.a. verloren.

Verallgemeinerungen

Relaxationsprozeduren:

- gerichtete Graphen
- gewichtete Kanten
- veränderliche Gewichte.

Offene Fragen: Endlichkeit, Anzahl der Schritte, Eindeutigkeit der Endkonfiguration.

Signierte–Mittelwert–Prozeduren:

- Wahl von η, z.B. $\eta_j \in [-1, 1]$.
- Wahl von c, Grenzfälle, Über- und Unterrelaxation.

Beispiel: Ersetzt man $\eta_j \in \{-1, 0, 1\}$ durch $\eta_j \in [-1, 1]$, geht die Endlichkeit i.a. verloren. Sie wird aber wieder hergestellt, wenn alle η_j rational sind.

Die obigen Verallgemeinerungen sind durch analytisches Denken motiviert (Konvergenz). Algebraiker oder Zahlentheoretiker sehen völlig andere Aspekte.

1987: Shahar Mozes' Zahlenspiel

Die obigen Verallgemeinerungen sind durch analytisches Denken motiviert (Konvergenz). Algebraiker oder Zahlentheoretiker sehen völlig andere Aspekte.

1987 Shahar Mozes': Verallgemeinerung des Pentagonproblems. Wird mit ganzen Zahlen x_j in den Knoten eines Graphen gespielt. Ganzzahlige Kantengewichte w_{ij} werden fixiert. Für $x_i < 0$ gilt die Ersetzungsregel

$$x_j \mapsto \begin{cases} -x_j & \text{wenn} \quad j = i, \\ x_j + w_{ij}\, x_i & \text{wenn} \quad j \neq i. \end{cases}$$

1987: Shahar Mozes' Zahlenspiel

Die obigen Verallgemeinerungen sind durch analytisches Denken motiviert (Konvergenz). Algebraiker oder Zahlentheoretiker sehen völlig andere Aspekte.

1987 Shahar Mozes': Verallgemeinerung des Pentagonproblems. Wird mit ganzen Zahlen x_j in den Knoten eines Graphen gespielt. Ganzzahlige Kantengewichte w_{ij} werden fixiert. Für $x_i < 0$ gilt die Ersetzungsregel

$$x_j \mapsto \begin{cases} -x_j & \text{wenn} \quad j = i, \\ x_j + w_{ij}\, x_i & \text{wenn} \quad j \neq i. \end{cases}$$

Mozes gab eine algebraische Charakterisierung aller Anfangstellungen die zu endlichen Spielen führen.

1987: Shahar Mozes' Zahlenspiel

Die obigen Verallgemeinerungen sind durch analytisches Denken motiviert (Konvergenz). Algebraiker oder Zahlentheoretiker sehen völlig andere Aspekte.

1987 Shahar Mozes': Verallgemeinerung des Pentagonproblems. Wird mit ganzen Zahlen x_j in den Knoten eines Graphen gespielt. Ganzzahlige Kantengewichte w_{ij} werden fixiert. Für $x_i < 0$ gilt die Ersetzungsregel

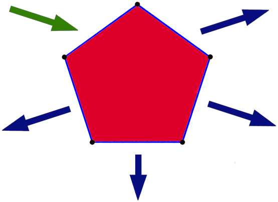
$$x_j \mapsto \begin{cases} -x_j & \text{wenn} \quad j = i, \\ x_j + w_{ij}\, x_i & \text{wenn} \quad j \neq i. \end{cases}$$

Mozes gab eine algebraische Charakterisierung aller Anfangstellungen die zu endlichen Spielen führen.
Untersuchungen wurden durch Anders Björner, Kimmo Eriksson (IMO 1985) und Robert Proctor fortgesetzt.

Die Mathematik zum Olympiadeproblem

Kazarinoffs Spiegelung

Sortierprozesse



Relaxations- Prozeduren

- harmonische Funktionen
- Kreispackungen
- numerische Verfahren

Signierte Mittelwerte

- ???

Mozes Zahlenspiel

- Coxeter Gruppen
- Greedoide
- Bruhat Lattices

ganze Zahlen

reelle Zahlen

algebraische Strukturen

Und jetzt geht es erst richtig los!