

Mathematik IV für Maschinenbau und Informatik (Stochastik)
Universität Rostock, Institut für Mathematik
Sommersemester 2007

Prof. Dr. F. LIESE

Dipl.-Math. M. HELWICH

Serie 9

Termin: 8. Juni 2007

Aufgabe 1 (3 Punkte)

X sei eine diskrete Zufallsvariable, die die Werte $x_1, \dots, x_8$ mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $p_i = P(X = x_i)$ annimmt:

x_i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
p_i	0.1	0.05	0.1	0.25	0.25	0.1	0.05	0.1

Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$ der Zufallsvariablen X .

Lösung: Offenbar ist X hier eine diskrete Zufallsgröße mit Werten $x_1, \dots, x_8$. Demnach gilt für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^8 x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^8 x_i p_i \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.05 + \frac{3}{2} \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.25 + \frac{5}{2} \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.1 + \frac{7}{2} \cdot 0.05 + 4 \cdot 0.1 \\ &= 2.25. \end{aligned}$$

Für die Ermittlung der Varianz mittels der Definition würde man

$$V(X) = \sum_{i=1}^8 (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) = \sum_{i=1}^8 (x_i - 2.25)^2 p_i$$

berechnen. Günstiger ist aber oftmals die sogenannte Verschiebungsformel

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X).$$

Diese verwendend erhalten wir mit

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=1}^8 x_i^2 p_i \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0.1 + 1^2 \cdot 0.05 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.25 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 0.25 \\ &\quad + 3^2 \cdot 0.1 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \cdot 0.05 + 4^2 \cdot 0.1 \\ &= 5.975 \end{aligned}$$

den Wert

$$V(X) = 5.975 - 5.0625 = 0.9125.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

X und Y seien die Augenzahlen beim ersten bzw. zweiten Wurf eines Würfels. Berechnen Sie den Erwartungswert von $X \cdot Y$.

Hinweis: Ermitteln Sie zunächst die Wahrscheinlichkeiten $p_{ij} = P(X = i, Y = j)$.

Lösung: Beim zweimaligen Wurf eines Würfels kann von Unabhängigkeit der Ereignisse ausgegangen werden. Wir erhalten demnach die Wahrscheinlichkeiten

$$p_{ij} = P(X = i, Y = j) = P(X = i) P(Y = j) = \frac{1}{6} \frac{1}{6} = \frac{1}{36}, \quad i, j = 1, \dots, 6.$$

Es sind 36 Elementarereignisse möglich, die jeweils gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit besitzen. Damit bestimmen wir die Verteilung der Zufallsgröße $Z = X \cdot Y$, aus der sich dann der Erwartungswert berechnen lässt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} P(Z = 1) &= P((1, 1)) = \frac{1}{36} \\ P(Z = 2) &= P((1, 2) \vee (2, 1)) = \frac{2}{36} \\ P(Z = 3) &= P((1, 3) \vee (3, 1)) = \frac{2}{36} \\ P(Z = 4) &= P((1, 4) \vee (2, 2) \vee (4, 1)) = \frac{3}{36} \\ P(Z = 5) &= P((1, 5) \vee (5, 1)) = \frac{2}{36} \\ P(Z = 6) &= P((1, 6) \vee (2, 3) \vee (3, 2) \vee (6, 1)) = \frac{4}{36} \\ P(Z = 8) &= P((2, 4) \vee (4, 2)) = \frac{2}{36} \\ P(Z = 9) &= P((3, 3)) = \frac{1}{36} \\ P(Z = 10) &= P((2, 5) \vee (5, 2)) = \frac{2}{36} \\ P(Z = 12) &= P((2, 6) \vee (3, 4) \vee (4, 3) \vee (6, 2)) = \frac{4}{36} \\ P(Z = 15) &= P((3, 5) \vee (5, 3)) = \frac{2}{36} \\ P(Z = 16) &= P((4, 4)) = \frac{1}{36} \\ P(Z = 18) &= P((3, 6) \vee (6, 3)) = \frac{2}{36} \\ P(Z = 20) &= P((4, 5) \vee (5, 4)) = \frac{2}{36} \\ P(Z = 24) &= P((4, 6) \vee (6, 4)) = \frac{2}{36} \\ P(Z = 25) &= P((5, 5)) = \frac{1}{36} \\ P(Z = 30) &= P((5, 6) \vee (6, 5)) = \frac{2}{36} \\ P(Z = 36) &= P((6, 6)) = \frac{1}{36} \end{aligned}$$

Als Erwartungswert erhalten wir dann

$$E(X) = \sum_{i=1}^{36} i P(Z = i) = \frac{441}{36} \approx 12.25.$$

Beachte dass $P(Z = i) = 0$ für alle i , die nicht in der obigen Liste auftauchen. Die Summenschreibweise ist demnach korrekt.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Die Zufallsvariable X möge eine Gleichverteilung auf $[a, b]$ besitzen, wobei a und b unbekannt sind. Gegeben seien aber $E(X) = 5$ und $V(X) = \frac{25}{12}$. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

- a) $P(X > 6)$,
- b) $P(1 \leq X < 9)$,
- c) $P(2 \leq X < 12)$.

Lösung: Eine auf $[a, b]$ gleichverteilte Zufallsgröße X besitzt den Erwartungswert

$$E(X) = \frac{1}{2}(a + b)$$

und die Varianz

$$V(X) = \frac{1}{12}(b - a)^2.$$

Aus der Kenntnis $E(X) = 5$ folgt durch einfaches Umstellen die Beziehung $b = 10 - a$. Dies eingesetzt in die Formel der Varianz mit $V(X) = \frac{25}{12}$ liefert die Gleichung

$$\begin{aligned} 25 &= ((10 - a) - a)^2 \\ 25 &= (10 - 2a)^2 = 100 - 40a + 4a^2. \end{aligned}$$

Der Wert a ist also eine Nullstelle der quadratischen Funktion $y(x) = 4x^2 - 40x + 75$. Diese sind gegeben durch 7.5 und 2.5.

Durch Beziehung $b = 10 - a$ und die Nebenbedingung $a \leq b$ kommt aber nur die Lösung $a = 2.5$ in Frage. Somit erhalten wir als Intervallgrenzen für den Träger der gesuchten Gleichverteilung die Werte $a = 2.5$ und $b = 7.5$.

Die Verteilungsfunktion einer gleichverteilten Zufallsgröße auf dem Intervall $[a, b]$ ist gegeben durch

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a}, & a \leq t \leq b \\ 1, & t > b \end{cases}$$

Damit errechnen sich die gesuchten Wahrscheinlichkeiten wie folgt:

- a) $P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - F_X(6) = 1 - 0.7 = 0.3$
- b) $P(1 \leq X < 9) = F_X(9) - F_X(1) = 1 - 0 = 1$
- c) $P(2 \leq X < 12) = F_X(12) - F_X(2) = 1 - 0 = 1$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Der Anteil der Autofahrer, die an einer Tankstelle Super bzw. Superplus bzw. Diesel wählen ist 30% bzw. 20% bzw. 50%. Im Laufe eines Tages tanken 1000 Autofahrer. Sei Y die Anzahl der Autofahrer, die Super tanken. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y .

Hinweis: Sei

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls der } i\text{-te Autofahrer Super tankt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Stellen Sie Y mit Hilfe der X_i dar und berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X_i !

Lösung: Die Zufallsgröße X_i ist bernoulliverteilt mit den Einzelwahrscheinlichkeiten

$$P(X_i = 1) = p = 0.3 \quad \text{und} \quad P(X_i = 0) = 1 - p = 0.7.$$

Ihr Erwartungswert ist demnach

$$E(X_i) = \sum_{i=0}^1 i P(X_i = i) = 0 \cdot P(X_i = 0) + 1 \cdot P(X_i = 1) = p = 0.3$$

Die Varianz ergibt sich wieder aus der Formel $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$, wobei hier

$$E(X_i^2) = 0^2 \cdot P(X_i = 0) + 1^2 \cdot P(X_i = 1) = 0.3$$

und damit

$$V(X_i) = 0.3 - 0.3^2 = 0.3(1 - 0.3) = 0.21.$$

Für die Zufallsgröße Y gilt $Y = \sum_{i=1}^{1000} X_i$, denn falls die i -te Person Super tankt, nimmt X_i den Wert 1 an und die Summe erhöht sich um 1.

Es kann davon ausgegangen werden, dass die Zufallsgrößen X_i unabhängig sind. Identische Verteilung, also insbesondere gleichen Erwartungswert und gleiche Varianz haben sie sowieso. Somit ist für Y als Summe von unabhängigen Zufallsgrößen der Erwartungswert gegeben als Summe aller Erwartungswerte und die Varianz als Summe aller Varianzen. Also

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i\right) = \sum_{i=1}^{1000} E(X_i) = \sum_{i=1}^{1000} 0.3 = 1000 \cdot 0.3 = 300$$

und

$$V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i\right) = \sum_{i=1}^{1000} V(X_i) = \sum_{i=1}^{1000} 0.21 = 1000 \cdot 0.21 = 210.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Die Zufallsgröße X möge eine Binomialverteilung mit den Parametern n und p besitzen. Berechnen Sie den Erwartungswert von X .

Lösung: Die Binomialverteilung einer Zufallsgröße X mit den Parametern n und p ist charakterisiert durch die Einzelwahrscheinlichkeiten

$$P(X = x) = b_{n,p}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

Definitionsgemäß wäre der Erwartungswert zu berechnen als

$$E(X) = \sum_{i=0}^n i P(X = i) = \sum_{i=0}^n i b_{n,p}(i) = \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

Dies ist jedoch ein wenig kompliziert.

Wesentlich einfacher gestaltet sich die Sache, wenn man analog zur vorherigen Aufgabe vorgeht.

Eine binomialverteilte Zufallsgröße kann versanden werden als Summe von n unabhängigen bernoulliverteilten Zufallsgrößen, die gleiche Erfolgswahrscheinlichkeiten und damit auch gleiche Erwartungswerte und Varianzen haben. Es gilt also

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{mit} \quad P(X_i = 1) = p \quad \text{mit} \quad P(X_i = 0) = 1 - p.$$

Wie oben ist dann $E(X_i) = p$ und $V(X_i) = p(1-p)$.

Für $E(X)$ und $V(X)$ ergeben sich dann

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n p = np$$

und

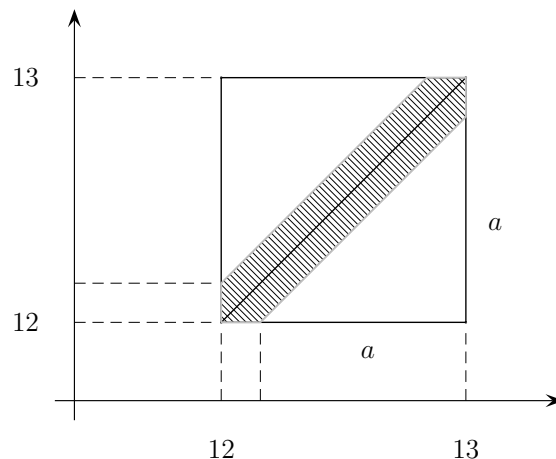
$$V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = \sum_{i=1}^n p(1-p) = np(1-p).$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Zwei Freunde wollen sich zwischen 12.00 Uhr und 13.00 Uhr treffen. Da es im Nahverkehr Unregelmäßigkeiten gibt, sind Ihre Ankunftszeiten X_1 und X_2 unabhängige und im Zeitintervall 12.00-13.00 gleichverteilte Zufallsvariable. Die Freunde verabreden, gegenseitig 10 Minuten zu warten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Freunde treffen?

Hinweis: Ermitteln Sie das Gebiet, in dem der Punkt (X_1, X_2) liegen muss, damit ein Treffen stattfindet.

Lösung: Die schraffierte Fläche des nachstehenden Bildes zeigt den Zeitbereich, in dem sich beide Freunde treffen können. Auf der Diagonale des Quadrats liegen beispielsweise alle Punkte für die gilt $X_1 = X_2$.



Der gesamte Flächeninhalt des Quadrates ist 1 und somit ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass sich beide Freunde treffen gleich dem Anteil der schraffierten Fläche an der Gesamtfläche. Man muss also von der Fläche 1 nur den Flächeninhalt der beiden nichtschraffierten rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecke mit $a = \frac{5}{6}$ abziehen.

Der Flächeninhalt dieser beiden gleichgroßen Dreiecke beträgt $A = \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} \frac{25}{36} = \frac{25}{72}$. Demnach erhalten wir als Wahrscheinlichkeit eines Treffens beider Freunde $P(\dots) = 1 - 2 \frac{25}{72} = \frac{22}{72} \approx 0.31$.

Alternativ kann man aber auch mit der zweidimensionalen Verteilung und entsprechenden Doppelintegralen argumentieren. Das gesuchte Ereignis besteht darin, dass der Betrag der Differenz beider Ankunftszeiten kleiner als 10 Minuten (entspricht $\frac{1}{6}$ Stunden) ist. Wir haben also

$$P\left(|X_1 - X_2| \leq \frac{1}{6}\right) = P\left(X_1 \leq X_2, |X_1 - X_2| \leq \frac{1}{6}\right) + P\left(X_1 > X_2, |X_1 - X_2| \leq \frac{1}{6}\right).$$

Betrachten wir zunächst die erste dieser beiden Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned}
& P\left(X_1 \leq X_2, |X_1 - X_2| \leq \frac{1}{6}\right) \\
&= P\left(X_1 \leq X_2, X_2 - X_1 \leq \frac{1}{6}\right) \\
&= P\left(X_1 \leq X_2, X_2 \leq \frac{1}{6} + X_1\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{(-\infty, \infty) \cap \{x_1 \leq X_2\} \cap \{X_2 \leq \frac{1}{6} + x_1\}} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\{x_1 \leq X_2 \leq \frac{1}{6} + x_1\}} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_2 dx_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\{x_1 \leq X_2 \leq \frac{1}{6} + x_1\}} f_{X_2}(x_2) dx_2 \right) f_{X_1}(x_1) dx_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(F_{X_2}\left(\frac{1}{6} + x_1\right) - F_{X_2}(x_1) \right) f_{X_1}(x_1) dx_1
\end{aligned}$$

Da sowohl X_1 als auch X_2 eine Gleichverteilung besitzen, können wir mit der bekannten Verteilungsfunktion und der Dichte (konstant = 1) das obige Integral lösen.

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \left(F_{X_2}\left(\frac{1}{6} + x_1\right) - F_{X_2}(x_1) \right) f_{X_1}(x_1) dx_1 \\
&= \int_{12}^{13} \left(F_{X_2}\left(\frac{1}{6} + x_1\right) - F_{X_2}(x_1) \right) dx_1 \\
&= \int_{12}^{12+\frac{5}{6}} \left(F_{X_2}\left(\frac{1}{6} + x_1\right) - F_{X_2}(x_1) \right) dx_1 \\
&\quad + \int_{12+\frac{5}{6}}^{13} \left(F_{X_2}\left(\frac{1}{6} + x_1\right) - F_{X_2}(x_1) \right) dx_1 \\
&= \int_{12}^{12+\frac{5}{6}} \left(\frac{\frac{1}{6} + x_1 - 12}{13 - 12} - \frac{x_1 - 12}{13 - 12} \right) dx_1 \\
&\quad + \int_{12+\frac{5}{6}}^{13} \left(1 - \frac{x_1 - 12}{13 - 12} \right) dx_1 \\
&= \int_{12}^{12+\frac{5}{6}} \left(\frac{1}{6} \right) dx_1 + \int_{12+\frac{5}{6}}^{13} (1 - x_1 + 12) dx_1 \\
&= \frac{1}{6} x_1 \Big|_{12}^{12+\frac{5}{6}} + \left(-\frac{1}{2} x_1^2 + 13 x_1 \right) \Big|_{\frac{77}{6}}^{\frac{78}{6}} \\
&\approx 0.1529.
\end{aligned}$$

Für die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 > X_2, |X_1 - X_2| \leq \frac{1}{6})$ ergibt sich wegen der identischen Verteilung derselbe Wert, so dass sich die Freunde mit einer Wahrscheinlichkeit von $P(\dots) \approx 2 \cdot 0.1529 = 0.3058$ treffen.

Übungsaufgaben sind verfügbar unter:

<http://www.math.uni-rostock.de/~helwich/Uebungen.html>