Analysis I — **Wintersemester 2004/2005, Universität Rostock**
Serie 7 — **Abgabetermin:** spätestens 30.11.2004, 09:00 Uhr
Prof. Dr. J. Rossmann — J. Erdmann, J. Merker, E. Galakhov

Aufgabe 7.1: (2+3 P)

(a) Zeigen Sie, dass für die durch

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n} & \text{für } n \equiv 0 \mod 2\,, \\ 3^{-n} & \text{für } n \equiv 1 \mod 2\,, \end{cases}$$

gegebene reelle Zahlenfolge mit Hilfe des Quotientenkriteriums keine Aussage über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ möglich ist, wohl aber mit Hilfe des Wurzelkriteriums.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ gegen eine Zahl kleiner als $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ konvergiert, jedoch nicht absolut konvergiert. Finden Sie weiterhin eine Umordnung $\tau : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, so dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\tau(n)} \frac{1}{2\tau(n)+1}$ gegen eine Zahl größer als $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ konvergiert.

Aufgabe 7.2: (1+2+4 P)

(a) Berechnen Sie für $|x| < 1$ das Cauchy-Produkt $\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k\right)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ konvergiert (jedoch nicht absolut), wohingegen das Cauchy-Produkt der Reihe mit sich selbst divergiert.

(c) Für $s, n \in \mathbb{N}$ sind die Binomialkoeffizienten durch $\binom{s}{n} := \frac{s\cdot(s-1)\cdot\ldots\cdot(s-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$ definiert. Sie geben an, wieviele Möglichkeiten man hat, aus s verschiedenen Objekten n auszuwählen.

(i) Zeigen Sie, dass $(1+x)^s = \sum_{n=0}^{s} \binom{s}{n} x^n$ gilt und damit dann $\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k}\binom{t}{n-k} = \binom{s+t}{n}$.

(ii) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $\binom{\alpha}{n} := \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha-k+1}{k}$. Zeigen Sie, dass die Binomialreihe $B_\alpha(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ für $|x| < 1$ absolut konvergiert und für das Cauchy-Produkt $B_\alpha(x) B_\beta(x) = B_{\alpha+\beta}(x)$ gilt.

Aufgabe 7.3: Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen: (1+1+1+1+1 P)

(a) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.

(b) Jede überabzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthält ein Intervall.

(c) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

(d) Die Menge $\{A \subset \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ endlich}\}$ aller coendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

(e) Zwischen je zwei Intervallen gibt es eine Bijektion, d.h. je zwei Intervalle sind gleichmächtig.

Aufgabe 7.4: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte: (1+1+1 P)

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{6x^2 - 4x - 2}{2x^2 + x - 3}$

(b) $\lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2}}$

(c) $\lim_{x\to 3} \ln(|x^2 - 5x + 6|) - \ln(|x - 3|)$

Alle Übungsaufgaben und Lösungsvorschläge sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`