Prof. Dr. J. Rossmann J. Erdmann, J. Merker, E. Galakov

Aufgabe 4.1: (2+2+2 P)

(a) Verwenden Sie die Formel von Moivre $(\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi)+\mathrm{i}\sin(n\varphi)$, um die folgenden Funktionen allein mit Hilfe von $\cos(\varphi)$ und $\sin(\varphi)$ auszudrücken:

(i) $\cos(3\varphi)$ (ii) $\sin(2\varphi)+\cos(4\varphi)$

(b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} .$$

(c) Verwenden Sie (a) und (b), um $1+\cos(\varphi)+\cos(2\varphi)+\cdots+\cos(n\varphi)$ für beliebig große $n \in \mathbb{N}$ allein mit Hilfe von $\cos((n+1)\varphi)$, $\sin((n+1)\varphi)$, $\cos(\varphi)$ und $\sin(\varphi)$ auszudrücken.

Lösung:

(a) (i) Es ist

$$\begin{aligned}\cos(3\varphi) &= \mathrm{Re}(\cos(3\varphi)+\mathrm{i}\sin(3\varphi)) = \mathrm{Re}\left((\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi))^3\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\cos(\varphi)^3+3\mathrm{i}\cos(\varphi)^2\sin(\varphi)-3\cos(\varphi)\sin(\varphi)^2-\mathrm{i}\sin(\varphi)^3\right)\\ &= \cos(\varphi)^3-3\cos(\varphi)\sin(\varphi)^2\end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned}\sin(2\varphi)+\cos(4\varphi) &= \mathrm{Im}(\cos(2\varphi)+\mathrm{i}\sin(2\varphi))+\mathrm{Re}(\cos(4\varphi)+\mathrm{i}\sin(4\varphi))\\ &= \mathrm{Im}\left((\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi))^2\right)+\mathrm{Re}\left((\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi))^4\right)\\ &= 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)+\cos(\varphi)^4-6\cos(\varphi)^2\sin(\varphi)^2+\sin(\varphi)^4\end{aligned}$$

(b) sei $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ beliebig, fest.

- Induktionsanfang: Für $n=0$ gilt $\sum\limits_{k=0}^{0} z^k = 1 = \frac{1-z}{1-z}$.
- Induktionsschritt: Gelte $\sum\limits_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. Dann gilt auch

$$\sum_{k=0}^{n+1} z^k = \left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right)+z^{n+1} = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}+z^{n+1} = \frac{1-z^{n+2}}{1-z} ,$$

und somit ist der Induktionsschritt von n auf $n+1$ vollzogen.

(c) Nun zur Bestimmung einer einfachen Formel für $1+\cos(\varphi)+\cos(2\varphi)+\cdots+\cos(n\varphi)$: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\cos(k\varphi) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\cos(k\varphi)+\mathrm{i}\sin(k\varphi)\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}(\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi))^k\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1-(\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi))^{n+1}}{1-\cos(\varphi)-\mathrm{i}\sin(\varphi)}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-\cos((n+1)\varphi)-\mathrm{i}\sin((n+1)\varphi)}{1-\cos(\varphi)-\mathrm{i}\sin(\varphi)}\right)\\ &= \frac{(1-\cos((n+1)\varphi))(1-\cos(\varphi))+\sin((n+1)\varphi)\sin(\varphi)}{(1-\cos(\varphi))^2+\sin(\varphi)^2} .\end{aligned}$$

Aufgabe 4.2: (4+2 P)

(a) Zeigen Sie die Ungleichungen:

(i) $$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$ (ii) $$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \leq \sqrt{n} \max_{k=1,\dots,n} |a_k|$$

(b) Wann wird in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und wann wird in der Minkowski-Ungleichung jeweils Gleichheit angenommen ?

Lösung:

(a) (i) Die Ungleichung ist äquivalent zu $(a_1+\cdots+a_n)^2 \leq n(a_1^2+\cdots+a_n^2)$ und kann per Induktion bewiesen werden.

- Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $\frac{a_1}{1} \leq |a_1| = \sqrt{\frac{a_1^2}{1}}$.
- Induktionsschritt: Gelte $(a_1 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$, dann gilt auch

$$\begin{aligned}
(n+1)(a_1^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2) &= n(a_1^2 + \cdots + a_n^2) + na_{n+1}^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2 \\
&\geq (a_1 + \cdots + a_n)^2 + na_{n+1}^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2 \\
&\geq (a_1 + \cdots + a_n)^2 + 2(a_1 + \cdots + a_n)a_{n+1} + a_{n+1}^2 \\
&= (a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1})^2
\end{aligned}$$

wegen $a_{n+1}^2 + a_i^2 \geq 2a_i a_{n+1}$ für alle $i = 1, \dots, n$. Also ist der Induktionsschritt von n auf $n+1$ vollzogen.

(ii) Verwenden wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

mit dem Vektor mit Einträgen $b_k = 1,\ k = 1, \dots, n$, dann ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$$

und somit die erste Ungleichung. Die zweite Ungleichung gilt wegen

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\max_{k=1,\dots,n} |a_k| \right)^2} = \sqrt{n} \max_{k=1,\dots,n} |a_k| \ .$$

(b) (i) In der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt die Gleichheit

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

genau dann, wenn einer der Vektoren $(|a_1|, \dots, |a_n|)$ und $(|b_1|, \dots, |b_n|)$ ein Vielfaches des anderen ist. Im Fall, dass einer beiden Vektoren $(|a_1|, \dots, |a_n|)$ und $(|b_1|, \dots, |b_n|)$ mit dem Nullvektor übereinstimmt, ist dies offensichtlich. Andernfalls ist die Cauchy-Schwarz-Ungleichung mit

$$\lambda \;:=\; \frac{\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k|}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \;\in\; \mathbb{R}$$

nur ein Spezialfall von

$$0 \le \sum_{k=1}^{n}(\lambda|a_k| - |b_k|)^2 \;=\; \lambda^2\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2\lambda\sum_{k=1}^{n}|a_k||b_k| + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \;=\; -\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k||b_k|\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

und in dieser Ungleichung gilt offenbar die Gleichheit genau dann, wenn $\lambda|a_k| = |b_k|$ gilt.

(ii) In der Minkowski-Ungleichung gilt die Gleichheit

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2} \;=\; \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

genau dann, wenn einer der Vektoren $(a_1,\ldots,a_n)$ und $(b_1,\ldots,b_n)$ ein nichtnegatives Vielfaches des anderen ist. Denn die Minkowskische Ungleichung ist nur der Spezialfall

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 \;&=\; \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_kb_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \;\le\; \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}|a_k||b_k| + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\\ &\le\; \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \;=\; \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k}\right)^2\end{aligned}$$

der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, und in dieser Ungleichung kann man das erste $\le$ durch $=$ ersetzen, wenn a_k und b_k dasselbe Vorzeichen haben, während das zweite $\le$ durch $=$ ersetzt werden kann, wenn in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung Gleichheit gilt.

Aufgabe 4.3: (4+2+2 P)

(a) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert

(i) $\dfrac{3n^3-5n+1}{4n^3-2n^2+2}$ (ii) $\dfrac{n^2+1}{n-2} - \dfrac{n^3}{(n+1)(n-3)}$ (iii) $\left(\dfrac{3+4\mathrm{i}}{5}\right)^n$ (iv) $\sqrt[n]{n^3-n^2+1}$

(b) Beweisen Sie die Konvergenz $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) \longrightarrow \dfrac{1}{2}$.

(c) Zeigen Sie, dass die Kettenbruchfolge $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}$, die genauer durch die Rekursion $a_0 := 1$, $a_{n+1} := 1+\frac{1}{a_n}$, gegeben ist, gegen den goldenen Schnitt g konvergiert.

Lösung:

(a) (i) Die Folge ist konvergent und es gilt $\dfrac{3n^3-5n+1}{4n^3-2n^2+2} \;=\; \dfrac{3-\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{4-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^3}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{3}{4}$

(ii) Die Folge ist konvergent und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{n^2+1}{n-2} - \frac{n^3}{(n+1)(n-3)} \;&=\; \frac{(n^2+1)(n+1)(n-3) - n^3(n-2)}{(n-2)(n+1)(n-3)} \;=\; \frac{-2n^2-2n-3}{n^3-4n^2+n+6}\\ &=\; \frac{-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}-\frac{3}{n^3}}{1-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{6}{n^3}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\;.\end{aligned}$$

(iii) Die Folge $\left(\frac{3+4\mathrm{i}}{5}\right)^n$ konvergiert nicht, denn es ist $\left|\frac{3+4\mathrm{i}}{5}\right| = 1$ und daher entspricht die Multiplikation mit $\frac{3+4\mathrm{i}}{5}$ der Drehung um einen Winkel $\varphi \neq 0$, die Hintereinanderausführung von Drehungen konvergiert jedoch nicht. Mathematisch präziser: Sei $\frac{3+4\mathrm{i}}{5} = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$, dann gilt

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{3+4\mathrm{i}}{5}\right)^{n+1} - \left(\frac{3+4\mathrm{i}}{5}\right)^{n}\right| &= |\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi)|^n \cdot |1-\cos(\varphi)-\mathrm{i}\sin(\varphi)| \\ &= 1\cdot\sqrt{2-2\cos(\varphi)} > 0\end{aligned}$$

für $\varphi \notin 2\pi\mathbb{Z}$, und daher ist $\left(\frac{3+4\mathrm{i}}{5}\right)^n$ keine Cauchy-Folge und kann somit nicht konvergieren.

(iv) Die Folge ist konvergent mit $\sqrt[n]{n^3-n^2+1} = (\sqrt[n]{n})^3\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}} \xrightarrow{n\to\infty} 1\cdot 1 = 1$.

(b) Es gilt

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\dots\cdot\frac{n^2-1}{n^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2},$$

da man drei aufeinander folgende Terme wie folgt kürzen kann:

$$\begin{aligned}\frac{(k-1)^2-1}{(k-1)^2}\cdot\frac{k^2-1}{k^2}\cdot\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2} &= \frac{(k-2)k}{(k-1)(k-1)}\cdot\frac{(k-1)(k+1)}{kk}\cdot\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+1)} \\ &= \frac{k-2}{k-1}\cdot 1\cdot\frac{k+2}{k+1}.\end{aligned}$$

Somit bleiben am Ende des Kürzens nur noch die Randterme $\frac{1}{2}$ und $\frac{n+1}{n}$ übrig. Nun ist $\frac{n+1}{n}-1 = \frac{1}{n} < 2\varepsilon$ für $n > \frac{1}{2\varepsilon}$, daher gilt mit $N(\varepsilon) := \lceil\frac{1}{2\varepsilon}\rceil + 1$ die Ungleichung

$$\left|\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}-1\right) < \frac{1}{2}\cdot 2\varepsilon = \varepsilon$$

für $n \geq N(\varepsilon)$, also konvergiert a_n gegen $\frac{1}{2}$.

(c) Zunächst bemerken wir, dass ein möglicher Grenzwert a der Folge die Gleichung $a = 1+\frac{1}{a}$ und damit die für den goldenen Schnitt charakteristische Gleichung $a^2 = a+1$ erfüllen muss, und dass wegen $a_n \geq 1$ für beliebiges $n\in\mathbb{N}$ (Warum? Beweis per Induktion!) nach Corollar zu Satz 4.5 (Forster I) nur noch der goldene Schnitt g selbst als Grenzwert möglich ist (beachte $g > 1$). Um zu zeigen, dass $|a_n - g|$ beliebig klein wird, beweisen wir per Induktion, dass $|a_n-g| \leq \frac{1}{g^n}$ gilt.

- Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt $|a_0 - g| = |1-g| = \left|-\frac{1}{g}(g^2-g)\right| = \frac{1}{g} < 1 = \frac{1}{g^0}$.
- Induktionsschritt: Gelte $|a_n - g| \leq \frac{1}{g^n}$, dann gilt

$$|a_{n+1}-g| = \left|1+\frac{1}{a_n}-g\right| = \frac{\left|g+\frac{g}{a_n}-g^2\right|}{g} \overset{g^2=g+1}{=} \frac{\left|\frac{g}{a_n}-1\right|}{g} = \frac{|g-a_n|}{a_n g} \leq \frac{1}{a_n g g^n},$$

wobei in der letzten Ungleichung die Induktionsvoraussetzung verwendet worden ist. Also gilt wegen $a_n \geq 1$ auch die Ungleichung $|a_{n+1}-g| \leq \frac{1}{a_n}\frac{1}{g^{n+1}} \leq \frac{1}{g^{n+1}}$, die zu beweisen war.

Wegen der monotonen Konvergenz von $\frac{1}{g^n} \to 0$ (beachte $g > 1$) gilt nun auch $a_n \to g$, da es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N gibt, so dass für alle $n > N$ die Ungleichung $|a_n - g| \leq \frac{1}{g^n} \leq \varepsilon$ gilt.