

Aufgabe 13.1:

- (a) Wo konvergieren die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} (x-1)^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x+1)^{2n}$?
- (b) Bestimmen Sie für die auf $] -1, 1[$ durch $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)x^n$ gegebene Funktion eine explizite Formel.

Aufgabe 13.2:

- (a) Geben Sie das Taylorpolynom ersten und zweiten Grades der Funktion $f(x) = \sqrt[4]{x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 := 1$ an. Bestimmen Sie das Lagrangesche Restglied zum Taylorpolynom ersten Grades, und schätzen Sie ab, wie weit dieses Taylorpolynom auf dem Intervall $[\frac{9}{10}, \frac{11}{10}]$ von f maximal abweicht.
- (b) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der Funktion $f :] -2, 2[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{4x-9}{x^2-5x+6}$, um den Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ und überprüfen Sie, ob die Taylorreihe auf $] -2, 2[$ gegen f konvergiert.

Aufgabe 13.3:

- (a) Ermitteln Sie die reelle Fourier-Reihe von $f(x) := 2(\cos(x))^2$.
- (b) Zu vorgegebenen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sei die 2π -periodische Funktion g definiert durch die Gleichung

$$g(x) = \begin{cases} c_1 & \text{für } -\pi < x \leq 0 \\ c_2 & \text{für } 0 < x \leq \pi \end{cases} .$$

- (i) Ermitteln Sie die reelle Fourier-Reihe von g .
- (ii) Zeigen Sie mit Hilfe der (reellen) Parsevalschen Gleichung (bzw. Vollständigkeitsrelation) die Konvergenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} .$$

Aufgabe 13.4:

- (a) Zeigen Sie, dass für ungerades N das Skalarprodukt $\langle u, v \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{u}v \, dx$ der Funktionen $u(x) := \sum_{k=0}^N e^{ikx}$ und $v(x) := \sum_{k=0}^N (-1)^k e^{ikx}$ verschwindet.
- (b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2π -periodische Funktion mit $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty$.
Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, dx = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, dx = 0$ gilt.