Aufgabe 13.1:

(a) Zeigen Sie, dass die Folge der Funktionen $f_n(x) := \frac{x}{n^2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}$ auf $[0,\infty[$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, aber für das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f_n(x)\,dx = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass bei gleichmäßiger Konvergenz von $y_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ gegen $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ auch die Integrale $\int_a^b f(y_n(x))\,dx$ für $n \to \infty$ gegen $\int_a^b f(y(x))\,dx$ konvergieren, falls alle Integrale existieren und endlich sind.

(c) Die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $y_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien stetig. Desweiteren sei $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ der auf $[a,b]$ gleichmäßige Grenzwert der Funktionen y_n. Zeigen Sie, dass die Integrale $\int_a^b f(y_n(x))\,dx$ und $\int_a^b f(y(x))\,dx$ existieren und endlich sind sowie $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f(y_n(x))\,dx = \int_a^b f(y(x))\,dx$ gilt.

Aufgabe 13.2:

(a) Sei $b > 0$ gegeben. Konvergiert dann die durch $f_n(x) := \ln\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ definierte Folge von Funktionen $f_n : [1,b] \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[1,b]$ punktweise? Konvergiert sie auf $[1,b]$ auch gleichmäßig?

(b) Betrachten wir die Folge f_n aus (a) nun als Funktionen $f_n : [1,\infty[\to \mathbb{R}$. Konvergiert f_n nun auch auf $[1,\infty[$ noch gleichmäßig?

(c) Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,dx$?

Aufgabe 13.3:

(a) Überprüfen Sie mittels des Integralvergleichskriteriums, ob die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{k^3}}$ konvergiert.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty (-1)^n\,(x-3)^{2n}$ und geben Sie anschließend an, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe konvergiert.

Aufgabe 13.4:

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades von $f(x) := \operatorname{arsinh}(x)$ im Punkt $x_0 := 0$.

(b) Zeigen Sie: Die Taylorreihe von $g(x) := \ln(1+x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ ist $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$

(c) Überprüfen Sie, ob die Taylorreihe von g aus (b) auf dem Intervall $[0,1]$ gleichmäßig konvergiert.