Spezial – Approximation mittels Bernsteinpolynomen

Spezialaufgabe 14.S: (Bernsteinpolynome)

(a) Für $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, ist das k-te Bernstein-Polynom vom Grad n definiert durch

$$B_k^{(n)}(x) \ := \ \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Zeigen Sie mit Hilfe von $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, dass die folgenden Identitäten erfüllt werden:

(i) $\sum\limits_{k=0}^{n} B_k^{(n)}(x) = 1$ und $B_k^{(n)}(x) \geq 0$ in $[0,1]$ (nichtnegative Zerlegung der Einheit),

(ii) $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot B_k^{(n)}(x) = nx$, (iii) $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1) \cdot B_k^{(n)}(x) = n(n-1)x^2$, (iv) $\sum\limits_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \cdot B_k^{(n)}(x) = nx(1-x)$.

(b) Sei f eine auf dem Intervall $[0,1]$ stetige Funktion. Begründen Sie, warum $\|f\|_\infty := \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ existiert. Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass für jedes $\varepsilon \geq 0$ ein Polynom $p_\varepsilon(x)$ mit $\|p_\varepsilon - f\|_\infty < \varepsilon$ existiert.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die durch $p_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_k^{(n)}(x)$ definierte Polynom-Folge $(p_n)_{n=1}^\infty$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen f konvergiert.

(c) Verallgemeinern Sie die Aussage von (b) auf reellwertige stetige Funktionen über einem beliebigen beschränkten und abgeschlossenen Intervall $[a,b]$.

Lösung zu Spezialaufgabe 14.S:

(a) (i) Für $x \in [0,1]$ ist auch $(1-x) \in [0,1]$, womit $B_k^{(n)}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$ aufgrund der Nichtnegativität der Binomialkoeffizienten gilt. Somit stellen die Bernsteinpolynome wegen

$$\sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)}(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \ = \ (x + (1-x))^n \ = \ 1$$

eine nichtnegative Zerlegung der Eins dar.

(ii) Differenziert man die Formel $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ einmal nach x, multipliziert beide Seiten mit x und setzt für y wiederum $(1-x)$ ein, gelangt man zu (ii).

(iii) Differenziert man die Formel hingegen gleich zweimal nach x, multipliziert auf beiden Seiten mit x^2 und ersetzt y anschließend durch $(1-x)$, erhält man (iii).

(iv) Mit den Formeln (i)-(iii) folgt nun

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 B_k^{(n)}(x) \ &= \ n^2x^2 \sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)}(x) - 2nx \sum_{k=0}^{n} k \cdot B_k^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot B_k^{(n)}(x) \\
&= \ n^2x^2 \cdot 1 - 2nx \cdot nx + \left[\sum_{k=0}^{n} k \cdot B_k^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \cdot B_k^{(n)}(x) \right] \\
&= \ -n^2x^2 + [nx + n(n-1)x^2] \ = \ nx(1-x) \implies \text{(iv)}.
\end{aligned}$$

(b) Da f auf $[0,1]$ stetig ist, existiert ein $0 < M < \infty$ mit $\|f\|_\infty := \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq M$.[1]

[1] Durch $\|\cdot\|_\infty$ ist tatsächlich eine Norm auf dem Raum der stetigen Funktionen über dem Intervall $[0,1]$ gegeben, denn sie besitzt die drei folgenden auf einem linearen Raum eine Norm definierenden Eigenschaften:

(i) $\|f\|_\infty = 0 \iff \forall x \in [0,1] : |f(x)| = 0 \iff \forall x \in [0,1] : f(x) = 0 \iff f \equiv 0$

(ii) $\|cf\|_\infty = |c| \cdot \|f\|_\infty$ für ein Skalar $c \in \mathbb{R}$

(iii) $\|f+g\|_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)+g(x)| \leq \max\limits_{x\in[0,1]} (|f(x)| + |g(x)|) \leq \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| + \max\limits_{x\in[0,1]} |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

Beispielsweise nach Forster (§11, Satz 4) ist jede auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall stetige reellwertige Funktion dort auch gleichmäßig stetig.
Demnach gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle Punkte $x, y \in [0,1]$ gilt: Falls $|x-y| < \delta$, folgt auch $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Aufgrund der nichtnegativen Zerlegung der Einheit der Bernstein-Polynome ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} |f(x)-p_n(x)| = \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_k^{(n)}(x) \right| &\overset{\text{(a).(i)}}{=} \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) B_k^{(n)}(x) \right| \\ &\overset{\text{(a).(i)}}{\leq} \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_k^{(n)}(x). \end{aligned}$$

An dieser Stelle bietet sich eine Unterteilung der Summe in den Teil der Summanden, für die $|k-nx| < \delta n$ gilt, und in die restlichen Summanden an. Wegen der Äquivalenz zu $|\frac{k}{n} - x| < \delta$ und der auf $[0,1]$ gleichmäßigen Stetigkeit von f gilt für den ersten Teil

$$\sum_{\substack{|k-nx|<\delta n \\ k\in\{1,\ldots,n\}}} \underbrace{\left|f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} B_k^{(n)}(x) < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)}(x)}_{=1} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Für den zweiten Teil der Summe werden die Beschränktheit der Funktionswerte von f und die für die hier vorkommenden Summanden zutreffende Relation $\frac{|k-nx|}{|\delta n|} \geq 1$ benötigt:

$$\sum_{\substack{|k-nx|\geq\delta n \\ k\in\{1,\ldots,n\}}} \underbrace{\left|f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right|}_{\leq 2M} B_k^{(n)}(x) \;<\; 2M \cdot \sum_{\substack{|k-nx|\geq\delta n \\ k\in\{1,\ldots,n\}}} B_k^{(n)}(x) \;\leq\; \frac{2M}{\delta^2 n^2} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 B_k^{(n)}(x)}_{=nx(1-x) \text{ nach (a).(iv)}} \;\leq\; \frac{M}{2n\delta^2}.$$

Bei der letzten Abschätzung ist verwendet worden, dass $h(x) = x(1-x) \geq 0$ auf $[0,1]$, $h'(x) = 1-2x$, $h''(x) = -2$ und somit $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ den maximalen Wert von h darstellt.
Insgesamt folgt nun, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(x)-p_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2\delta^2 n} \quad \text{für alle } x \in [0,1]$$

und für alle $n > \frac{M}{\delta^2\varepsilon}$ ist dann wegen $\frac{M}{n\delta^2} < \varepsilon$ die Bedingung

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x)-p_n(x)| < \varepsilon$$

erfüllt, womit die Polynomfolge $p_n(x)$ auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen die stetige Funktion f konvergiert.

(c) Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(y) := g((b-a)y + a)$ für $0 \leq y \leq 1$, ebenfalls stetig auf $[0,1]$. Die affin lineare Abbildung $x = (b-a)y + a$ besitzt die Umkehrabbildung $y = \frac{x-a}{b-a}$, so dass demnach $g(x) = f\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ für $a \leq x \leq b$ gilt.
Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Nach (b) existiert für $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ein Polynom p mit $\|f-p\|_\infty < \varepsilon$. Definiert man $q(x) := p\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ für $a \leq x \leq b$, so ist $q : [a,b] \to \mathbb{R}$ ein Polynom, für das

$$|g(x)-q(x)| = \left| f\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - p\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right|$$

für alle $x \in [a,b]$ gilt. Demzufolge ist

$$\sup_{x\in[a,b]} |g(x)-q(x)| \;=\; \max_{y\in[0,1]} |f(y)-p(y)| \;=\; \|f-p\|_\infty \;<\; \varepsilon \;,$$

womit die Dichtheit der Polynome über $[a,b]$ in der Menge der stetigen Funktionen über $[a,b]$ gezeigt wurde, d.h., dass zu jeder stetigen Funktion f bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ eine Cauchy-Folge von Polynomen existiert, die gegen f konvergiert.

Alle Zusatzaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`