

Weihnachtsvorlesung – §16 Lokale Extrema, Konvexität, Bernoulli-L'Hospital'sche Regeln

Wiederholende Zusammenfassung (Vorlesungen von Mittwoch):

In der letzten Vorlesung haben Sie kennengelernt:

- **Definition [lokale Extrema]:** Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sagen wir, f besitzt in $x \in]a, b[$
 - ein **lokales Maximum** $\iff \exists \varepsilon > 0 \forall \xi \in]a, b[: (|x - \xi| < \varepsilon \implies f(x) \geq f(\xi))$
 - ein **lokales Minimum** $\iff \exists \varepsilon > 0 \forall \xi \in]a, b[: (|x - \xi| < \varepsilon \implies f(x) \leq f(\xi))$

Tritt die Gleichheit nur im Fall $\xi = x$ ein, sprechen wir von einem **strengen** lokalen Extremum.

- **Satz 1 [Notwendiges Kriterium für lokale Extrema]:** Besitzt die Funktion $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in]a, b[$ ein lokales Extremum und ist f in x differenzierbar, so gilt $f'(x) = 0$.

Bemerkung: Die Bedingung ist NICHT hinreichend, denn für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt $f'(x) = (2n+1)x^{2n}$ und somit $f'(0) = 0$, jedoch besitzt f in 0 kein lokales Extremum.

- **Satz 2 [Satz von Rolle]:** Für $a < b$ sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine in $]a, b[$ differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b)$, welche stetig in den Randpunkten ist. Dann existiert ein $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = 0$.

Corollar 1 [Mittelwertsatz der Differentialrechnung]: Für $a < b$ sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $]a, b[$ und stetig in den Randpunkten. Dann existiert ein $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Corollar 2 [Schrankensatz]: Für $a < b$ sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $]a, b[$ und stetig in den Randpunkten. Weiter gäbe es ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $\forall \xi \in]a, b[: |f'(\xi)| \leq M$.

Dann gilt: $\forall x_1, x_2 \in [a, b] : (x_1 \leq x_2 \implies -M(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq M(x_2 - x_1))$.

Corollar 3: Für $a < b$ sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $]a, b[$ und stetig in den Randpunkten. Verschwindet für alle $x \in]a, b[$ die Ableitung, so ist f konstant.

- **Satz 3 [Charakterisierung von e^x]:** Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = A$, welche für alle $x \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung $f'(x) = cf(x)$ erfüllt, so gilt $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = Ae^{cx}$.
- **Satz 4 [Monotonie]:** Für $a < b$ sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $]a, b[$ und stetig am Rand.

- Dann gilt: f ist in $[a, b]$ monoton fallend $\iff \forall x \in]a, b[: f'(x) \leq 0$
- Dann gilt: f ist in $[a, b]$ monoton wachsend $\iff \forall x \in]a, b[: f'(x) \geq 0$
- Weiter gilt $\forall x \in]a, b[: f'(x) > 0 \implies f$ streng monoton wachsend.
- Ebenso gilt $\forall x \in]a, b[: f'(x) < 0 \implies f$ streng monoton fallend.

Bemerkung: Die Umkehrung der letzten beiden Aussagen ist im Allgemeinen falsch ($f(x) = x^3$).

- **Satz 5a [Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema]:** Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es gebe ein $x \in]a, b[$ mit $f'(x) = 0$. Gilt dann:

$$\left(\exists \varepsilon > 0 \forall \xi, \eta \in]a, b[: (x - \varepsilon < \xi < x < \eta < x + \varepsilon \implies f'(\xi) \leq 0 \leq f'(\eta)) \right)$$

bzw.

$$\left(\exists \varepsilon > 0 \forall \xi, \eta \in]a, b[: (x - \varepsilon < \xi < x < \eta < x + \varepsilon \implies f'(\xi) \geq 0 \geq f'(\eta)) \right)$$

so besitzt f in x ein lokales Minimum bzw. Maximum.

Bemerkung: Im Fall $f'(\xi) < 0 < f'(\eta)$ bzw. $f'(\xi) > 0 > f'(\eta)$ liegt sogar ein strenges lokales Extremum vor.

Nachtrag: Lokale Extrema

Variante a von Satz benötigt lediglich die Differenzierbarkeit der Funktion f . Wissen wir sogar, dass f in x zweimal differenzierbar ist, können wir den Satz 5 wie folgt formulieren.

- **Satz 5b [Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema]:** Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x \in]a, b[$ derart, dass $f'(x) = 0$ und f in x zweimal differenzierbar mit $f''(x) > 0$ (bzw. $f''(x) < 0$). Dann besitzt f in x ein strenges lokales Minimum (bzw. Maximum).

Beweis:

(1) Sei $f''(x) > 0$. Aufgrund der Definition des Grenzwertes existiert wegen

$$0 < f''(x) = \lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi \neq x}} \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x}$$

ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\forall \xi : \left(0 < |x - \xi| < \varepsilon \implies \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} > 0 \right).$$

Wegen $f'(x) = 0$ folgt daraus

$$\begin{cases} f'(\xi) < 0 & \text{falls } x - \varepsilon < \xi < x, \\ f'(\xi) > 0 & \text{falls } x < \xi < x + \varepsilon. \end{cases}$$

Nach Satz 4 ist f demnach auf dem Intervall $]x - \varepsilon, x[$ streng monoton fallend und auf dem Intervall $]x, x + \varepsilon[$ streng monoton wachsend, womit f in x ein strenges lokales Minimum besitzt. ■

Bemerkung: Die Bedingung ist NICHT notwendig, da $f(x) = x^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) sowohl $f'(0) = 0$ als auch $f''(0) = 0$ erfüllt, jedoch bei 0 ein strenges lokales (sogar globales) Minimum vorliegt.

(2) Sei $f''(x) < 0$. Aufgrund der Definition des Grenzwertes existiert wegen

$$0 > f''(x) = \lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi \neq x}} \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x}$$

ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\forall \xi : \left(0 < |x - \xi| < \varepsilon \implies \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} < 0 \right).$$

Wegen $f'(x) = 0$ folgt daraus

$$\begin{cases} f'(\xi) > 0 & \text{falls } x - \varepsilon < \xi < x, \\ f'(\xi) < 0 & \text{falls } x < \xi < x + \varepsilon. \end{cases}$$

Nach Satz 4 ist f demnach auf dem Intervall $]x - \varepsilon, x[$ streng monoton wachsend und auf dem Intervall $]x, x + \varepsilon[$ streng monoton fallend, womit f in x ein strenges lokales Maximum besitzt. ■

Konvexität

- **Definition [Konvexität]:** Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **konvex**

$$:\iff \forall x, y \in D \forall \lambda \in \mathbb{R} : \left(0 < \lambda < 1 \implies f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \right).$$

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **konkav**, falls $-f$ konvex ist. Im Fall $<$ (bzw. $>$), nennen wir die Funktion **streng konvex** bzw. **streng konkav**.

Bemerkung: Konvexität auf dem Intervall $[x_1, x_2]$ bedeutet, dass der Graph von f unterhalb der durch die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ verlaufenden Sekante liegt.

- **Satz 6 [Hinreichendes und notwendiges Kriterium für Konvexität]:** Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$f \text{ konvex} \iff \forall x \in D : f''(x) \geq 0.$$

Beweis:

„ \implies “: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Angenommen, es gelte $\neg(\forall x \in D : f''(x) \geq 0)$, also $\exists \xi \in D : f''(\xi) < 0$. Zu $c := f'(\xi)$ betrachten wir zunächst die Funktion

$$\varphi(x) := f(x) - c(x - \xi). \quad \text{Dann gilt auch} \quad \begin{cases} \varphi(\xi) & = f(\xi), \\ \varphi'(\xi) & = f'(\xi) - c = 0, \\ \varphi''(\xi) & = f''(\xi) < 0. \end{cases}$$

Nach Satz 5b besitzt nun φ in ξ ein strenges lokales Maximum, so dass wir ein $h > 0$ sowohl mit $[\xi - h, \xi + h] \subset D$ als auch mit $\varphi(\xi - h) < \varphi(\xi)$ und $\varphi(\xi + h) < \varphi(\xi)$ finden. Addition der beiden Ungleichungen liefert

$$2f(\xi) = 2\varphi(\xi) > \varphi(\xi - h) + \varphi(\xi + h).$$

Mit $x := \xi - h$, $y = \xi + h$ sowie $\lambda = \frac{1}{2}$ ist dies wegen $\xi = \frac{1}{2}(\xi - h) + (1 - \frac{1}{2})(\xi + h)$ zu

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

äquivalent, was jedoch einen Widerspruch zur Konvexität von f darstellt.

„ \Leftarrow “: Es gelte $\forall x \in D : f''(x) \geq 0$. Da f'' die Ableitung von $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist, ist letztere nach Satz 4 monoton wachsend. Seien nun $x, y \in D$ mit $x < y$ (der Fall $x = y$ ist uninteressant und für $x > y$ vertausche im folgenden die Rollen) und $0 < \lambda < 1$. Dann gilt $x < \xi < y$ für $\xi := \lambda x + (1 - \lambda)y$. Nach dem Mittelwertsatz existieren nun Zwischenstellen $\eta_1 \in]x, \xi[$ und $\eta_2 \in]\xi, y[$ mit

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = f'(\eta_1) \leq f'(\eta_2) = \frac{f(y) - f(\xi)}{y - \xi}$$

(da f' monoton wachsend wie oben begründet). Wegen

$$\xi := \lambda x + (1 - \lambda)y \iff \begin{cases} \xi - x = (1 - \lambda)(y - x), \\ y - \xi = \lambda(y - x) \end{cases}$$

erhalten wir nach Multiplikation mit $y - x > 0$ zuerst

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{1 - \lambda} \leq \frac{f(y) - f(\xi)}{\lambda} \iff \lambda f(\xi) + (1 - \lambda)f(\xi) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

und mit $\xi = \lambda x + (1 - \lambda)y$ daraus schließlich wie gewünscht

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

also die Konvexität von f . \blacksquare

Corollar [Young-Ungleichung]: Seien $p, q \in]1, \infty[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \left((x \geq 0 \wedge y \geq 0) \implies x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q} \right)$$

Beweis: Gilt $x = 0$ oder $y = 0$, so ist wegen $0 \leq 0 + 0$ nichts zu zeigen. Andernfalls ist $x > 0$ und $y > 0$. Da der Logarithmus für $\xi > 0$ die Ableitung $-\frac{1}{\xi^2} < 0$, ist $-\ln(x)$ nach Satz 6 eine konvexe, der Logarithmus also eine konkave Funktion. Demnach gilt

$$\ln\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \geq \frac{1}{p}\ln(x) + \frac{1}{q}\ln(y) = \ln\left(x^{\frac{1}{p}}\right) + \ln\left(y^{\frac{1}{q}}\right) \stackrel{e^x \text{ monoton}}{\implies} \frac{x}{p} + \frac{y}{q} \geq e^{\ln\left(x^{\frac{1}{p}}\right) + \ln\left(y^{\frac{1}{q}}\right)},$$

so dass mit Potenzgesetzen die Behauptung folgt. \blacksquare

• **Definition [p-Norm]:** Sei $p \geq 1$ eine reelle Zahl. Die Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \rightarrow [0, \infty[$ definieren wir dann durch

$$\|\mathbf{x}\|_p := \left(\sum_{\nu=1}^n |x_\nu|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n).$$

Diese erfüllt die drei eine **Norm** definierenden Eigenschaften

- (a) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : (\|\mathbf{x}\|_p = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0})$ (Definitheit)
- (b) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \forall c \in \mathbb{C} : \|c\mathbf{x}\|_p = |c|\|\mathbf{x}\|_p$ (Homogenität)
- (c) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n : \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$ (Dreiecksungleichung)

Beweis:

(a) Gilt $\mathbf{x} = \mathbf{0} := (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$, so ist nach Definition

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{\nu=1}^n |x_\nu|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{\nu=1}^n |0|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Ist umgekehrt $\|\mathbf{x}\|_p = 0$, somit auch

$$0 = \|\mathbf{x}\|_p^p = \sum_{\nu=1}^n |x_\nu|^p.$$

Aufgrund der Nichtnegativität von $|x_\nu|^p$ ist jedoch nur $x_\nu = 0$, $\nu = 1, \dots, n$, möglich, also $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) Seien $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $c \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann folgt

$$\|c\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{\nu=1}^n |cx_\nu|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{\nu=1}^n (|c| \cdot |x_\nu|)^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(|c|^p \sum_{\nu=1}^n |x_\nu|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |c| \left(\sum_{\nu=1}^n |x_\nu|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |c| \cdot \|\mathbf{x}\|_p$$

(c) Die Dreiecksungleichung ist hier genau die Minkowski-Ungleichung (siehe Satz 8).

Bemerkung 1: Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ beschreibt $\|\mathbf{x}\|_2$ genau die euklidische Länge des Vektors \mathbf{x} .

Bemerkung 2: Für $p = \infty$ definiert $\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{\nu=1, \dots, n} |x_\nu|$ ebenfalls eine Norm (Übungsaufgabe).

• **Satz 7 [Hölder-Ungleichung]:** Seien $p, q \in]1, \infty[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n : \sum_{\nu=1}^n |x_\nu y_\nu| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q$$

Beweis: Falls $\|\mathbf{x}\|_p = 0$, dann ist $x_\nu = 0$ für alle $\nu \in \{1, \dots, n\}$, so dass auch $\sum_{\nu=1}^n |x_\nu y_\nu| = 0$ folgt.

Demzufolge ist in dieser Situation nichts zu beweisen (denn $0 \leq 0$ ist eine wahre Aussage). Analoges gilt im Fall $\|\mathbf{y}\|_q = 0$. Bleibt also der Fall für $\|\mathbf{x}\|_p > 0$ und $\|\mathbf{y}\|_q > 0$ zu untersuchen. Dazu definieren wir für $\nu \in \{1, \dots, n\}$ die Hilfsgrößen

$$\xi_\nu := \frac{|x_\nu|^p}{\|\mathbf{x}\|_p^p}, \quad \eta_\nu := \frac{|y_\nu|^q}{\|\mathbf{y}\|_q^q}.$$

Für diese ergeben sich dann $\sum_{\nu=1}^n \xi_\nu = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_p^p} \sum_{\nu=1}^n |x_\nu|^p = 1$, $\sum_{k=\nu}^n \eta_\nu = \frac{1}{\|\mathbf{y}\|_q^q} \sum_{\nu=1}^n |y_\nu|^q = 1$.

Mit der Young-Ungleichung (vgl. Corollar zu Satz 6) ergeben sich weiter die n Ungleichungen

$$\frac{|x_\nu y_\nu|}{\|\mathbf{x}\|_p \cdot \|\mathbf{y}\|_q} = \xi_\nu^{\frac{1}{p}} \eta_\nu^{\frac{1}{q}} \leq \frac{\xi_\nu}{p} + \frac{\eta_\nu}{q} \quad (\nu \in \{1, \dots, n\}),$$

welche sich nach Aufsummieren zu

$$\frac{1}{\|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q} \sum_{\nu=1}^n |x_\nu y_\nu| = \sum_{\nu=1}^n \frac{|x_\nu y_\nu|}{\|\mathbf{x}\|_p \cdot \|\mathbf{y}\|_q} \leq \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{\xi_\nu}{p} + \frac{\eta_\nu}{q} \right) = \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^n \xi_\nu + \frac{1}{q} \sum_{\nu=1}^n \eta_\nu = 1$$

zusammenfassen lassen. Durch Umstellen folgt nun wie behauptet die Hölder-Ungleichung. ■

Bemerkung: Im Spezialfall $p = 2$ erhalten wir die bekannte **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**.

• **Satz 8 [Minkowski-Ungleichung]:** Für $p \in [1, \infty[$ gilt: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n : \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$.

Beweis: Im Fall $p = 1$ ergibt sich aus der Dreiecksungleichung des Betrages genau

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p = \left(\sum_{\nu=1}^n |x_\nu + y_\nu|^1 \right)^{\frac{1}{1}} = \sum_{\nu=1}^n |x_\nu + y_\nu| \leq \sum_{\nu=1}^n (|x_\nu| + |y_\nu|) = \left(\sum_{\nu=1}^n |x_\nu|^1 \right)^{\frac{1}{1}} + \left(\sum_{\nu=1}^n |y_\nu|^1 \right)^{\frac{1}{1}} = \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$$

und für $p > 1$ ist $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gleichbedeutend mit $\frac{p}{q} = p - 1$. Im Fall $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$ verschwindet die linke Seite der Ungleichung, so dass dann aufgrund der Nichtnegativität der Norm nichts zu zeigen wäre. Also sei nun $\mathbf{x} \neq -\mathbf{y}$ und somit insbesondere $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p > 0$. Wiederum mit der Dreiecksungleichung für den Betrag und der Hölder-Ungleichung (Satz 7) für die Vektoren $(|x_\nu|)_{\nu=1}^n$ bzw. $(|y_\nu|)_{\nu=1}^n$ und $(|x_\nu + y_\nu|^{p-1})_{\nu=1}^n$ ergibt sich dann die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^p &= \sum_{\nu=1}^n |x_\nu + y_\nu|^p = \sum_{\nu=1}^n |x_\nu + y_\nu| |x_\nu + y_\nu|^{p-1} \leq \sum_{\nu=1}^n |x_\nu| |x_\nu + y_\nu|^{p-1} + \sum_{\nu=1}^n |y_\nu| |x_\nu + y_\nu|^{p-1} \\ &\leq \left(\left(\sum_{\nu=1}^n |x_\nu|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{\nu=1}^n |y_\nu|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\sum_{\nu=1}^n |x_\nu + y_\nu|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} = (\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p) \left(\sum_{\nu=1}^n |x_\nu + y_\nu|^p \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p) \left(\left(\sum_{\nu=1}^n |x_\nu + y_\nu|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{\frac{p}{q}} = (\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p) \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Umstellen ergibt nun wie behauptet die Minkowski-Ungleichung. \blacksquare

Bernoulli-L'Hospital'sche Regeln

Mit dem Mittelwertsatz können wir nun Regeln zur bequemen Ermittlung von Grenzwerten beweisen:

- **Lemma [Spezialfall L'Hospital]:** Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig.

(a) Ist $f :]0, a[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0$ und $\lim_{x \searrow 0} f'(x) =: c \in \mathbb{R}$, so gilt $\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x)}{x} = c$.

(b) Ist $f :]a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) =: c \in \mathbb{R}$, dann gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = c$.

Beweis:

(a) Wir betrachten zunächst den Fall $c = 0$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $\lim_{x \searrow 0} f'(x) = 0$ existiert ein $\xi_\varepsilon \in]0, a[$, so dass

$$\forall x \in]0, a[: (x < \xi_\varepsilon \implies |f'(x)| < \varepsilon).$$

Wegen $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0$ ist die Funktion f am linken Rand stetig fortsetzbar. Betrachten wir nun

zu beliebigem $\alpha \in]0, a[$ die Funktion $g_\alpha : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $g_\alpha(x) := \begin{cases} 0, & x = 0, \\ f(x), & x \in]0, \alpha[\end{cases}$.

Dann ist die Funktion g_α auf dem offenen Intervall $]0, \alpha[$ differenzierbar (da f dort differenzierbar ist) und am Rand stetig (bei 0 nach Konstruktion und bei α , weil f in $\alpha \in]0, a[$ sogar differenzierbar ist). Somit existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\eta_\alpha \in]0, \alpha[$ mit

$$\left| \frac{f(\alpha)}{\alpha} \right| = \left| \frac{g_\alpha(\alpha) - g_\alpha(0)}{\alpha - 0} \right| = |g'(\eta_\alpha)| = |f'(\eta_\alpha)| \leq \sup_{\theta \in]0, \alpha[} |f'(\theta)|.$$

Wählen wir $\alpha < \xi_\varepsilon$, folgt nun insgesamt

$$\forall x \in]0, a[: \left(x < \xi_\varepsilon \implies \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \sup_{\theta \in]0, x[} |f'(\theta)| \leq \sup_{\theta \in]0, \xi_\varepsilon[} |f'(\theta)| < \varepsilon \right)$$

und aufgrund der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ somit auch $\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Sei nun $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt sowohl $\lim_{x \searrow 0} g(x) = 0$ als auch $\lim_{x \searrow 0} g'(x) = 0$ für die in $]0, a[$ differenzierbare Funktion $g(x) := f(x) - cx$ und wie eben gezeigt demzufolge auch $\lim_{x \searrow 0} \frac{g(x)}{x} = 0$.

Die Linearität des Grenzwertes liefert wegen $f(x) = g(x) + cx$ nun auch wie gewünscht

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{g(x) + cx}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{g(x)}{x} + c = c.$$

- (b) Wir betrachten zunächst den Fall $c = 0$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ existiert ein $\xi := \max(x_{\frac{\varepsilon}{2}}, a + 1, 1)$ so dass
- $$\forall x \in]a, \infty[: \left(x > \xi \implies |f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

Mit $M = \frac{\varepsilon}{2}$ erhalten wir aus dem Schrankensatz (Corollar 2, s.o.) demnach für beliebiges $x > \xi$ die Ungleichung $|f(x) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}(x - \xi)$. Insgesamt folgt nun mit der Dreiecksungleichung

$$\forall x \in]a, \infty[: \left(x > \max \left(\xi, \frac{2|f(\xi)|}{\varepsilon} \right) \implies \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{|f(x) - f(\xi)|}{x} + \frac{|f(\xi)|}{x} < \frac{\varepsilon x - \xi}{2x} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \right)$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus die Konvergenz $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Sei nun $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0$ offenbar für die in $]a, \infty[$ differenzierbare Funktion $g(x) := f(x) - cx$ und wie eben gezeigt demzufolge auch $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = 0$. Aufgrund der Linearität des Grenzwertes erhalten wir wegen $f(x) = g(x) + cx$ nun auch wie gewünscht

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x) + cx}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} + c = c. \quad \blacksquare$$

- **Beispiel:** Es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

- **Satz 9 [Bernoulli-L'Hospital'sche Regeln]:** Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen auf dem Intervall $I =]a, b[$ (wobei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ zugelassen ist). Weiter gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und es existiere der Grenzwert $\lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: c \in \mathbb{R}$.

Dann gelten die folgenden Implikationen:

- (a) $\lim_{x \nearrow b} f(x) = \lim_{x \nearrow b} g(x) = 0 \implies \left(\forall x \in I : g(x) \neq 0 \wedge \lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c \right)$
- (b) $\lim_{x \nearrow b} g(x) = \pm\infty \implies \left(\exists \xi \in]a, b[\forall x \in I : (x \geq \xi \implies g(x) \neq 0) \wedge \lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c \right)$

Analoge Aussagen gelten im Fall $\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: c \in \mathbb{R}$.

Beweis: Da $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ hat g' keine Vorzeichenwechsel, d.h. g ist streng monoton.

- (a) Wir nehmen an, dass g auf I monoton fällt (andernfalls betrachte $-g$). Dann gilt $g(I) =]0, A[$ mit $A := \lim_{x \searrow a} g(x)$ und es existiert die ebenfalls streng monoton fallende Umkehrabbildung $\Psi :=]0, A[\rightarrow I$ mit $\Psi \circ g = \text{Id}_I$ und $g \circ \Psi = \text{Id}_{]0, A[}$. Betrachten wir nun die Komposition $F := f \circ \Psi :]0, A[\rightarrow \mathbb{R}$ ergibt sich nach Kettenregel (bzw. auch Regel zur Ableitung der Umkehrfunktion)

$$F'(y) = f'(\Psi(y))\Psi'(y) = \frac{f'(\Psi(y))}{g'(\Psi(y))} \quad (1.1a)$$

und nach Voraussetzung (und Monotonie von Ψ) somit $\lim_{y \searrow 0} F'(y) = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$ und mit Lemma (a) weiter $\lim_{y \searrow 0} \frac{F(y)}{y} = c$. Da nun für eine beliebige Folge x_n aus I mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ die Bildfolge $y_n := g(x_n)$ eine Nullfolge ist, erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi(y_n))}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(y_n)}{y_n} = c, \quad (1.2a)$$

also $\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ wie behauptet.

- (b) Wir nehmen an, dass g auf I monoton wächst (sonst betrachte $-g$). Dann gilt $g(I) =]A, \infty[$ mit $A := \lim_{x \searrow a} g(x)$ und es existiert die ebenfalls streng monoton wachsende Umkehrabbildung $\Psi :=]A, \infty[\rightarrow I$ mit $\Psi \circ g = \text{Id}_I$ und $g \circ \Psi = \text{Id}_{]A, \infty[}$. Für die Komposition $F := f \circ \Psi :]A, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ergibt sich wiederum (1.1a) und nach Voraussetzung (und Monotonie von Ψ) hier $\lim_{y \rightarrow \infty} F'(y) = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$ und mit Lemma (b) weiter $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{F(y)}{y} = c$. Da nun für eine beliebige Folge x_n aus I mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ die Bildfolge $y_n := g(x_n)$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, erhalten wir (1.2a), also wiederum $\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ wie behauptet. \blacksquare