

## Zusatzmaterial zur Analysis I – Übung zu Serie 1

### Aussagenlogik

- Eine **Hauptaufgabe von Mathematikern** ist es, Aussagen zu beweisen. Dazu braucht man aber zunächst eine geeignete Sprache, in der man Aussagen präzise formulieren kann, und eine Übereinkunft, welche Argumente man verwenden darf, um aus als wahr angenommenen Aussagen (sogenannte **Axiomen**) neue wahre Aussagen herzuleiten.

In den folgenden Abschnitten wollen wir kurz darstellen, wie man dies formal machen kann. Auch wenn Sie im Laufe ihres Studiums viele der dabei nötigen formalen kleinen Schritte durch natürlichsprachige Formulierungen abkürzen werden, sollten Sie sich doch bewusst sein, dass ihre Argumentation nur dann ein solides Fundament hat, wenn sie wenigstens prinzipiell auch in der folgenden formalen Weise durchgeführt werden kann.

- Um mathematische Aussagen präzise zu formulieren, braucht man zunächst eine geeignete formale Sprache (die sogenannte **Prädikatenlogik erster Stufe**. In dieser erlaubt man sich, Symbole für
  - Variablen (meist  $x, y, \dots$  oder  $x_1, x_2, \dots$ ),
  - Konstanten (meist  $c, d, \dots$ ),
  - $n$ -stellige Funktionen (meist  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ),
  - $n$ -stellige Relationen <sup>1</sup> meist  $R(x_1, \dots, x_n)$ )

zu verwenden. Beispielsweise benutzt man für die zweistellige Relation „ist gleich“ das Symbol  $=$  und schreibt statt  $= (t_1, t_2)$  einfach  $t_1 = t_2$ .

- Mit diesen Symbolen kann man **Terme** und **Aussagen** (auch Formeln genannt) bilden:
  - Jede Variable und jede Konstante ist ein Term. Sind  $t_1, \dots, t_n$  Terme und ist  $f$  eine  $n$ -stellige Funktion  $f$ , so ist auch  $f(t_1, \dots, t_n)$  ein Term.
  - Sind  $t_1, \dots, t_n$  Terme und ist  $R$  eine  $n$ -stellige Relation, dann ist  $R(t_1, \dots, t_n)$  eine Aussage, in der alle vorkommenden Variablen *frei* sind.
- Die logischen Symbole erlauben nun, aus vorhandenen Aussagen neue Aussagen zu bilden:

Sind  $A$  und  $B$  Aussagen, dann sind auch

- $A \Rightarrow B$  („ $A$  impliziert  $B$ “)
- $A \wedge B$  („ $A$  und  $B$ “)
- $A \vee B$  („ $A$  oder  $B$ “)
- $\neg A$  („nicht  $A$ “)

Aussagen. Anstelle von  $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$  führt man noch abkürzend  $A \Leftrightarrow B$  („ $A$  ist äquivalent zu  $B$ “) ein.

- Ist darüber hinaus  $x$  eine freie Variable in der Aussage  $A$ , so erlaubt man sich auch, mittels der **Quantoren**  $\forall$  („für alle“) und  $\exists$  („es gibt (mindestens) ein“) die Aussagen
  - $\forall x : A(x)$  („für jedes  $x$  gilt  $A(x)$ “)
  - $\exists x : A(x)$  („es gibt ein  $x$ , für das  $A(x)$  gilt“)

zu bilden. In diesen Aussagen ist dann  $x$  keine freie Variable mehr, sondern *gebunden*.

- Um übereinzukommen, welche logischen Schlüsse erlaubt sind, gibt man sich **logische Axiome** vor. Wir werden ausschließlich mit den Axiomen der Booleschen (oder klassischen) Logik arbeiten, es gibt aber auch weniger strenge Logiken, z.B. die intuitionistische Logik.

---

<sup>1</sup>Statt Relation sagt man veraltet auch Prädikat, daher der Name Prädikatenlogik.

Hier kann man schon sehen, dass Mathematik entgegen einer weit verbreiteten Meinung überhaupt nicht starr, sondern sehr flexibel ist. Man kann nämlich sogar die Grundfesten der Logik ändern und trotzdem noch korrekte Mathematik betreiben. Wir wollen aber nur die **Boolesche Logik** verwenden.

In der Booleschen Logik verlangt man, dass jede Aussage entweder wahr oder falsch ist, und bei Bildung von neuen Aussagen ist deren Gültigkeit durch die folgenden Wahrheitstafeln festgelegt:

$A$	$B$	$A \Rightarrow B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$
$w$	$w$	$w$	$w$	$w$	$f$
$w$	$f$	$f$	$f$	$w$	$f$
$f$	$w$	$w$	$f$	$w$	$w$
$f$	$f$	$w$	$f$	$f$	$w$

Aus diesen kann man beispielsweise ablesen, dass  $A \wedge B \Rightarrow A$  eine wahre Aussage ist, egal ob  $A, B$  wahre oder falsche Aussagen sind (wie man durch Überprüfen aller Möglichkeiten nachrechnen kann).

Darüberhinaus verlangt man für Aussagen mit Quantoren als logische Axiome die Gültigkeit von

- $(\forall x : A(x)) \Rightarrow A(t)$ ,
- $A(t) \Rightarrow (\exists x : A(x))$ ,
- $\forall x : (B \Rightarrow A(x)) \Rightarrow (B \Rightarrow \forall x : A(x))$ ,
- $\forall x : (A(x) \Rightarrow B) \Rightarrow ((\exists x : A(x)) \Rightarrow B)$ ,

wobei  $A(x)$  eine Aussage mit freier Variable  $x$ ,  $t$  einen Term und  $B$  eine Aussage, in der die Variable  $x$  nicht vorkommt, bezeichnet.

- In einer mathematischen Theorie gibt man sich nun neben einer formalen Sprache (mit festgelegten Konstanten-, Funktions- und Relationssymbolen) und den obigen logischen Axiomen auch noch gewisse nichtlogische Axiome vor, die man zusätzlich zu den logischen Axiomen als gültig betrachtet.
- Ein **formaler Beweis** einer Aussage  $F$  innerhalb einer Theorie ist dann eine Aneinanderreihung von Aussagen, von denen jede entweder ein (logisches oder nichtlogisches) Axiom der Theorie ist oder direkt aus vorher in der Aneinanderreihung vorkommenden Aussagen hervorgeht:
  - Standen vorher schon die Aussagen  $B \Rightarrow A$  und  $B$ , dann darf danach auch  $A$  stehen
  - oder stand vorher schon die Aussage  $A(x)$  mit einer freien Variable  $x$ , dann darf danach auch  $\forall x : A(x)$  stehen.
- Natürlich sind Sie in Zukunft nie gezwungen, Theorien so genau anzugeben und Beweise auf so kleinschrittige und formale Weise zu führen. Sie sollten sich jedoch immer fragen, ob sich Ihre Argumente wenigstens prinzipiell auch im strengen vorher angesprochenen Sinne formulieren ließen und nicht einen Haken haben, der Ihren vermeintlichen Beweis inkorrekt macht.

## Mengenlehre

- Die Theorie der Mengenlehre ist ganz einfach: In der Sprache der Mengenlehre gibt man sich nämlich nur eine **zweistellige Relation**  $\in$  („ist Element von“) vor, und man verlangt als nichtlogische Axiome die von Zermelo-Fraenkel<sup>2</sup> (ZFC) (oder Neumann-Bernays-Gödel<sup>3</sup> (NBG)). Diese
  - definieren Gleichheit von Mengen durch das **Extensionalitätsaxiom**

$$A = B \iff \forall x : (x \in A \iff x \in B),$$

- sichern die Existenz der **leeren Menge** durch das Axiom  $\boxed{\exists x : \forall y : \neg(y \in x)}$  zu, und da die leere Menge  $x$  nach dem Extensionalitätsaxiom dann auch eindeutig ist, kann man ohne Probleme für sie das neue Symbol  $\emptyset$  einführen,

<sup>2</sup>Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953), Adolf (Abraham Halevi) Fraenkel (1891-1965)

<sup>3</sup>János von Neumann zu Margitta (1903-1957), Paul Bernays (1888-1977), Kurt Gödel (1906-1978)

- sichern die Existenz von **Paarmengen** durch das Axiom

$$\forall x : \forall y : \exists z : (u \in z \Leftrightarrow (u = x \vee u = y))$$

zu, und da die Paarmenge  $z$  dann nach dem Extensionalitätsaxiom auch eindeutig ist, kann man ohne Probleme für sie das neue Symbol  $\{x, y\}$  einführen,

- sichern die Existenz der **Vereinigungsmenge** durch das Axiom

$$\forall x : \exists y : \forall z : (z \in y \Leftrightarrow \exists u : (u \in x \wedge z \in u))$$

zu, und man schreibt dann für  $y$  das Symbol  $\bigcup_{u \in x} u$ ,

- sichern die Existenz der **Potenzmenge** durch das Axiom

$$\forall x : \exists y : \forall z : (z \in y \Leftrightarrow \forall u : (u \in z \Rightarrow u \in x))$$

zu, und man schreibt dann für  $y$  das Symbol  $\mathcal{P}(x)$ ,

- sichern die Existenz der Teilmenge von Elementen mit einer bestimmten Eigenschaft  $A(\cdot)$  durch das **Aussonderungssaxiom**

$$\forall x : \exists y : \forall z : (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge A(z))$$

zu, und man schreibt dann für  $y$  das Symbol  $\{z \in x \mid A(z)\}$ ,

und enthalten noch eine ganze Reihe weiterer Axiome.

- Warum betreibt man überhaupt solch einen Aufwand – kann man nicht einfach mit Symbolen  $\{x \mid A(x)\}$  für Mengen arbeiten? Würde man so naiv über Mengen sprechen, dann würden Konstrukte wie

$$M := \{x \mid x \notin x\} \quad (\text{Russellsches}^4 \text{ Paradoxon})$$

einen Widerspruch zum letzten logischen Axiom ergeben (es gilt nämlich  $M \in M \Leftrightarrow M \notin M$ ).

In der ZERMELO-FRAENKEL-Mengenlehre kann man dagegen solch ein Konstrukt gar nicht formen (es gibt kein Axiom, das einem  $\exists y : (x \in y \Leftrightarrow A(x))$  zusichert).

In der NEUMANN-BERNAYS-GÖDEL-Mengenlehre würde folgen, dass  $\{x \mid x \notin x\}$  gar keine Menge, sondern eine echte Klasse ist (ebenso wie beispielsweise die Klasse aller Mengen  $\{x \mid x = x\}$  eine echte Klasse ist).

Mit Konstrukten von der Form  $\{z \in x \mid A(z)\}$ , wobei  $x$  eine Menge ist, darf man allerdings so naiv umgehen. Nach dem Aussonderungssaxiom sind dies Mengen nämlich Teilmengen von  $M$ . Da uns üblicherweise nur solche Mengen interessieren, betreiben wir im folgenden also eine Art naiver Mengenlehre. Man sollte sich aber der Probleme beim Formen „zu großer Mengen“ bewusst sein.

- Nun können wir auch Abbildungen von einer Menge  $A \neq \emptyset$  in eine weitere Menge  $B \neq \emptyset$  definieren. Eine Teilmenge  $F \subset A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$  mit der Eigenschaft

$$\forall x \in A \exists! y \in B : F(x) = y$$

(sprich: für jedes  $x$  Element in  $A$  existiert genau ein  $y$  Element in  $B$ , so dass  $F(x) = y$ ) wollen wir **Funktion von A nach B** nennen. Wir schreiben abkürzend  $F : A \rightarrow B$ . Weiterhin nennen wir für  $U \subset A$  die Menge  $F(U) := \{y \in B : \exists x \in U \text{ mit } F(x) = y\}$  das **Bild von U unter F**. Gilt  $F(A) = B$  so heißt die Funktion  $F : A \rightarrow B$  **surjektiv**. Für eine Menge  $V \subset B$  heißt die Menge  $F^{-1}(V) := \{x \in A : F(x) \in V\}$  das **Urbild von V unter F**. Schließlich heißt eine Funktion  $F : A \rightarrow B$  **injektiv**, falls  $\forall x, \tilde{x} \in A : (F(x) = F(\tilde{x}) \Rightarrow x = \tilde{x})$  gilt.

## Natürliche Zahlen

- Aus den bisher geschilderten Axiomen der Mengenlehre kann man zwar die Existenz von Vereinigungsmengen  $x_1 \cup \dots \cup x_n$  und Durchschnitten  $\bigcap_{y \in x} y$  gewinnen, aber bisher garantiert kein Axiom der Mengenlehre die Existenz einer unendlichen Menge. Tatsächlich könnten wir ohne solch ein Axiom nur über endliche Mengen reden, aber in der Analysis wollen wir uns gerade mit unendlichen Mengen beschäftigen, wie z.B. mit der Menge der natürlichen Zahlen.

<sup>4</sup>Bertrand Arthur William Russell (1872-1970)

Deswegen fordern wir als Axiom die Existenz einer induktiven Menge, d.h. einer Menge, die die leere Menge  $\emptyset$  enthält und für die mit jedem Element  $y$  auch  $y \cup \{y\}$  ein Element der Menge ist. Formell verlangen wir also das nichtlogische Axiom

$$\exists x : (\emptyset \in x \wedge (\forall y : y \in x \implies (y \cup \{y\}) \in x))$$

in der Mengenleere.

- Die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen ist nun der Durchschnitt aller induktiven Mengen, d.h. die kleinste induktive Menge. Symbolisch kann man sie als  $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \dots\}$  schreiben, aber üblicherweise bezeichnet man ihre Elemente mit  $1 := \emptyset$ ,  $2 := \{\emptyset\}$ ,  $3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ,  $4 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ ,  $\dots$ .

- Mittels der Nachfolgeabbildung  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $s(y) := y \cup \{y\}$ , kann man durch  $n + 1 := s(n)$  und  $n + m := s(s(\dots s(n)\dots)) = s^m(n)$  (der  $m$ -maligen Anwendung von  $s$  auf  $n$ ) eine kommutative Addition auf der Menge der natürlichen Zahlen definieren. Jedoch ist  $(\mathbb{N}, +)$  keine Gruppe, es gibt keine additiven Inverse, selbst wenn man die natürlichen Zahlen durch  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  und  $0 + n = n$  noch um ein neutrales Element erweitert.

- Aufgrund der Definition der natürlichen Zahlen als kleinster induktiver Menge kann man Aussagen über natürliche Zahlen der Gestalt

$$\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$$

dadurch beweisen, dass man

$$A(1) \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbb{N} : A(n) \implies A(n + 1)$$

beweist. Dies nennt man einen Beweis der Aussage  $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$  per **Induktion**.

- Da  $\mathbb{N}$  die kleinste induktive Menge ist, kann man darüber hinaus Folgen  $a_1, a_2, a_3, \dots$  rekursiv definieren, indem man sich einen Anfangswert  $a_1$  und eine Vorschrift  $a_{n+1} := f(a_n)$  vorgibt.
- Um eine Gruppe zu gewinnen, erweitert man  $\mathbb{N}$  zur Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$$

(genauer definiert man  $\mathbb{Z}$  mittels einer Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ). Die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  werden dann mit der Addition  $+$  zu einer Gruppe, die Lösung von  $n + x = 0$  ist  $x = -n$ .

- In den natürlichen Zahlen kann man darüber hinaus auch eine Multiplikation definieren durch  $n \cdot m = n + \dots + n$  ( $m$ -malige Addition), und dies überträgt sich auf  $\mathbb{Z}$ . Aber selbst bei  $n \neq 0$  kann man die Gleichung  $n \cdot x = m$  in  $\mathbb{Z}$  nur lösen, wenn  $n$  die Zahl  $m$  ohne Rest teilt. Um solche Gleichungen allgemein lösen zu können, erweitert man die Menge der ganzen Zahlen zur Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

(genauer definiert man  $\mathbb{Q}$  wiederum mittels einer Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ). Die Menge  $\mathbb{Q}$  wird dann mit  $+$  und  $\cdot$  ein Körper, insbesondere gelten die Assoziativ-, Distributiv- und Kommutativgesetze und es gibt additive sowie multiplikative Inverse.

**Zusatzaufgabe 1.1:** Es seien  $A, B$  und  $C$  Mengen

- (a) Zeigen Sie, dass eine der folgenden Formeln immer richtig ist und dass die andere unter Umständen falsch sein kann:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C; \quad A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$$

- (b) Geben Sie eine Bedingung an, unter der die falsche Formel richtig wird.

**Lösung zu Zusatzaufgabe 1.1:**

- (a) Für  $A = B$  und  $C \neq \emptyset$  mit  $B \cap C = \emptyset$  ergibt sich

$$A \setminus (B \setminus C) = A \setminus B = \emptyset \neq C = \emptyset \cup C = (A \setminus B) \cup C,$$

somit ist die erste Formel im Allgemeinen nicht wahr. Dagegen ist die zweite immer erfüllt, denn es gelten

$$x \in A \setminus (B \cup C) \iff (x \in A \wedge \neg x \in (B \cup C)) \iff (x \in A \wedge \neg x \in B \wedge \neg x \in C)$$

und

$$x \in (A \setminus B) \setminus C \iff (x \in (A \setminus B) \wedge \neg x \in C) \iff (x \in A \wedge \neg x \in B \wedge \neg x \in C)$$

also für alle  $x$  tatsächlich

$$x \in A \setminus (B \cup C) \iff x \in (A \setminus B) \setminus C$$

und somit  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ .

- (b) Die erste Formel wird beispielsweise unter der Zusatzbedingung  $C \subset A$  und  $B \cap C = \emptyset$  wahr, da dann

$$A \setminus (B \setminus C) = A \setminus B = (A \setminus B) \cup C.$$

### Zusatzaufgabe 1.2:

Zeigen Sie: Der Durchschnitt aller induktiven Mengen, d.h. aller Mengen  $M$  mit  $\emptyset \in M$  und  $x \in M \Rightarrow (x \cup \{x\}) \in M$ , ist selbst wieder eine induktive Menge.

### Lösung zu Zusatzaufgabe 1.2:

Mit anderen Worten ist zu zeigen, dass die Menge  $\mathbb{N} := \bigcap_{M \text{ induktiv}} M$  selbst induktiv ist.

Nun gilt einerseits  $\emptyset \in \mathbb{N}$ , da für jede induktive Menge  $M$  ja  $\emptyset \in M$  gilt.

Andererseits folgt aus  $x \in \mathbb{N}$  ja  $x \in M$  für alle induktiven  $M$ , also nach Definition der Induktivität auch  $x \cup \{x\} \in M$  für alle induktiven  $M$ , und daher  $x \cup \{x\} \in \mathbb{N}$ .

Demnach ist auch  $\mathbb{N}$  induktiv.

### Zusatzaufgabe 1.3: :

- (a) Beweisen Sie per Induktion für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Gleichung  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ .
- (b) Beweisen Sie per Induktion für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dass  $10^n - 3^n$  durch 7 teilbar ist.
- (c) Beweisen Sie per Induktion für alle  $x \geq -1$  und  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung  $(1+x)^n \geq 1+nx$ .
- (d) Beweisen Sie per Induktion für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung  $2^n > n$ .

### Lösung zu Zusatzaufgabe 1.3:

- (a) Induktionsanfang:  $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$  ( $A(1)$ )

Induktionsschluss: Nach Induktionsvoraussetzung gelte  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  ( $A(n)$ ). Dann gilt aber auch

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left( \sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

d.h. die Aussage  $A(n+1)$ , die zu zeigen war.

- (b) Induktionsanfang:  $10^1 - 3^1 = 7$  ist durch 7 teilbar ( $A(1)$ )

Induktionsschluss: Nach Induktionsvoraussetzung sei  $10^n - 3^n$  durch 7 teilbar ( $A(n)$ ). Dann ist wegen  $10^{n+1} - 3^{n+1} = 10 \cdot (10^n - 3^n) + 7 \cdot 3^n$  auch  $10^{n+1} - 3^{n+1}$  durch 7 teilbar ( $A(n+1)$ ), denn die beiden Summanden sind durch 7 teilbar. Dies war zu zeigen.

- (c) Induktionsanfang: Es gilt  $(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x$  ( $A(1)$ )

Induktionsschluss: Nach Induktionsvoraussetzung gelte  $(1+x)^n \geq 1+nx$  ( $A(n)$ ). Dann gilt auch

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x \quad (A(n+1)),$$

wobei  $1+x \geq 0$  und  $x^2 \geq 0$  benutzt wurde.

(d) Induktionsanfang: Es gilt  $2^1 = 2 > 1$  ( $A(1)$ )

Induktionsschluss: Sei  $n \geq 1$ . Nach Induktionsvoraussetzung gelte  $2^n > n$  ( $A(n)$ ). Dann gilt wegen  $n \geq 1$  aber auch

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n = n + n \geq n + 1,$$

d.h. die Aussage  $A(n+1)$ , die zu zeigen war.

**Zusatzaufgabe 1.4:** Seien  $M, N$  Mengen und  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Für  $U, V \subset M$  gelten  $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$  und  $f(M \setminus U) \supset f(M) \setminus f(U)$ .

(b) Für  $U, V \subset N$  gelten

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \cap V) &= f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \\ f^{-1}(U \cup V) &= f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) \\ f^{-1}(N \setminus U) &= M \setminus f^{-1}(U) \end{aligned}$$

**Lösung zu Zusatzaufgabe 1.4:**

(a) • Die Mengen  $f(U \cup V)$  und  $f(U) \cup f(V)$  sind gleich, denn es gilt

$$\begin{aligned} y \in f(U \cup V) &\iff (\exists x \in (U \cup V) : f(x) = y) \\ &\iff ((\exists x \in U : f(x) = y) \vee (\exists x \in V : f(x) = y)) \\ &\iff (y \in f(U) \vee y \in f(V)) \\ &\iff y \in (f(U) \cup f(V)) . \end{aligned}$$

• Die Menge  $f(M \setminus U)$  ist eine Obermenge von  $f(M) \setminus f(U)$ , denn es gilt

$$\begin{aligned} y \in f(M) \setminus f(U) &\implies (\exists x \in M : f(x) = y) \wedge \neg(\exists x \in U : f(x) = y) \\ &\implies (\exists x \in M : f(x) = y \wedge \neg(x \in U)) \\ &\implies (\exists x \in (M \setminus U) : f(x) = y) \\ &\implies y \in f(M \setminus U) . \end{aligned}$$

(b) • Die Mengen  $f^{-1}(U \cap V)$  und  $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$  sind gleich, denn es gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(U \cap V) &\iff (\exists y \in (U \cap V) : f(x) = y) \\ &\iff ((\exists y \in U : f(x) = y) \wedge (\exists y \in V : f(x) = y)) \\ &\iff (x \in f^{-1}(U)) \wedge (x \in f^{-1}(V)) \\ &\iff x \in (f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)) , \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile verwendet worden ist, dass  $f$  eine Abbildung ist und somit  $f(x) = y$  und  $f(x) = \tilde{y}$  nur bei  $y = \tilde{y}$  gelten kann.

• Die Mengen  $f^{-1}(U \cup V)$  und  $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$  sind gleich, denn es gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(U \cup V) &\iff (\exists y \in (U \cup V) : f(x) = y) \\ &\iff ((\exists y \in U : f(x) = y) \vee (\exists y \in V : f(x) = y)) \\ &\iff (x \in f^{-1}(U)) \vee (x \in f^{-1}(V)) \\ &\iff x \in (f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)) . \end{aligned}$$

• Die Mengen  $f^{-1}(N \setminus U)$  und  $M \setminus f^{-1}(U)$  sind gleich, denn es gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(N \setminus U) &\iff (\exists y \in (N \setminus U) : f(x) = y) \\ &\iff (\exists y \in N : f(x) = y \wedge \neg(y \in U)) \\ &\iff (\exists y \in N : f(x) = y \wedge \neg(f(x) \in U)) \\ &\iff \neg(f(x) \in U) \\ &\iff \neg(x \in f^{-1}(U)) \\ &\iff x \in (M \setminus f^{-1}(U)) . \end{aligned}$$

## Zusatzmaterial zur Analysis I – Übung zu Serie 2

### Induktion

- Nach dem Induktionsprinzip gilt eine Aussage  $A(n)$  für alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  bereits dann, wenn  $A(1)$  gilt und wenn für jedes  $n \in \mathbb{N}$  aus der Aussage  $A(n)$  die Aussage  $A(n+1)$  folgt.
- Den Beweis von  $A(1)$  nennt man Induktionsanfang, und den Beweis von der Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N} : (A(n) \implies A(n+1))$$

Induktionsschluss oder Induktionsschritt. Im Induktionsschritt hat man also für jedes  $n \in \mathbb{N}$  zu zeigen, dass aus der als wahr angenommenen Aussage  $A(n)$  (die man Induktionsvoraussetzung nennt) die Aussage  $A(n+1)$  (die man Induktionsbehauptung nennt) folgt.

**Zusatzaufgabe 2.1:** Gegeben sei das Axiomensystem bestehend aus den beiden Axiomen

$$A \implies (B \implies A), \tag{1.1}$$

$$(A \implies (B \implies C)) \implies ((A \implies B) \implies (A \implies C)). \tag{1.2}$$

- Beweisen Sie formal nur mit Hilfe der beiden logischen Axiome (1.1) und (1.2) sowie direkten Schließens die logische Aussage  $A \implies A$  (Reflexivität von  $\implies$ ).
- Beweisen Sie nur mit Hilfe der logischen Axiome (1.1) und (1.2) sowie direkten Schließens, dass aus den Annahmen  $A \implies B$  und  $B \implies C$  die Aussage  $A \implies C$  folgt (Transitivität von  $\implies$ ).

### Lösung zu Zusatzaufgabe 2.1:

- Das zweite logische Axiom (1.2) mit  $A$  für  $A$ , mit  $B \implies A$  für  $B$  und mit  $A$  für  $C$  ergibt

$$(A \implies ((B \implies A) \implies A)) \implies ((A \implies (B \implies A)) \implies (A \implies A)). \tag{1.1a}$$

Das erste logische Axiom (1.1) mit  $A$  für  $A$  und mit  $B \implies A$  für  $B$  ergibt

$$A \implies ((B \implies A) \implies A). \tag{1.2a}$$

Direktes Schließen liefert aus (1.1a) und (1.2a) somit

$$((A \implies (B \implies A)) \implies (A \implies A)). \tag{1.3a}$$

Das erste logische Axiom (1.1) ist

$$A \implies (B \implies A) \tag{1.4a}$$

und nochmaliges direktes Schließen liefert aus (1.3a) und (1.4a) die gewünschte Aussage

$$A \implies A. \tag{1.5a}$$

Die Liste der Aussagen (1.1a) bis (1.5a) ist also ein formaler Beweis der Aussage  $A \implies A$ .

- Die Annahmen dürfen wir als Erstes in unseren formalen Beweis schreiben:

$$A \implies B, \tag{1.1b}$$

$$B \implies C. \tag{1.2b}$$

Das zweite logische Axiom (1.2) lautet

$$(A \implies (B \implies C)) \implies ((A \implies B) \implies (A \implies C)). \tag{1.3b}$$

Das erste logische Axiom (1.1) mit  $B \implies C$  für  $A$  und mit  $A$  für  $B$  lautet

$$(B \implies C) \implies (A \implies (B \implies C)). \quad (1.4b)$$

Direktes Schließen liefert aus (1.2b) und (1.4b) demnach

$$A \implies (B \implies C). \quad (1.5b)$$

Wiederum durch direktes Schließen erhält man aus (1.3b) und (1.5b) dann

$$(A \implies B) \implies (A \implies C). \quad (1.6b)$$

Abschließend erhält man durch direktes Schließen aus (1.1b) und (1.6b) wie gewünscht

$$A \implies C. \quad (1.7b)$$

### Zusatzaufgabe 2.2:

Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige Mengen  $A, B, C$  wahr? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

(a)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(b)  $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$

(c)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

### Lösung zu Zusatzaufgabe 2.2:

(a) knappe Variante:

Die Aussage  $x \in A \cap (B \cup C)$  ist äquivalent zu  $x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$ . Diese Aussage ist äquivalent zu  $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$ , was wiederum äquivalent ist zu  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Nach dem Extensionalitätsaxiom folgt somit die Gleichheit der Mengen  $A \cap (B \cup C)$  und  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

ausführliche Variante mit Fallunterscheidung:

„ $\subseteq$ “: Sei  $x \in A \cap (B \cup C)$ . Diese Aussage ist äquivalent zu  $x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$ . Dann ist in jedem Fall  $x \in A$ .

Fall 1:  $x \in B$ . Da dann  $x \in A$  und  $x \in B$ , gilt  $x \in (A \cap B)$ . Da für beliebige Mengen  $M_1, M_2$  stets  $M_1 \subseteq (M_1 \cup M_2)$  gilt, folgt aus  $x \in (A \cap B)$  demnach auch  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

Fall 2:  $x \in C$ . Da dann  $x \in A$  und  $x \in C$ , gilt  $x \in (A \cap C)$ . Mit demselben Argument wie eben, folgt dann auch  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

Fall 1 und Fall 2 ergeben nun zusammen  $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

„ $\supseteq$ “: Sei  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ , also  $x \in (A \cap B)$  oder  $x \in (A \cap C)$ .

Fall 1:  $x \in A \cap B$ , also  $x \in A$  und  $x \in B$ . Da für beliebige Mengen  $M_1, M_2$  stets  $M_1 \subseteq (M_1 \cup M_2)$  gilt, folgt aus  $x \in B$  sofort auch, dass  $x \in (B \cup C)$ . Zusammen mit  $x \in A$  folgt somit  $x \in A \cap (B \cup C)$ .

Fall 2:  $x \in A \cap C$ , also  $x \in A$  und  $x \in C$ . Mit demselben Argument wie eben, folgt aus  $x \in C$  auch  $x \in B \cup C$ . Zusammen mit  $x \in A$  folgt somit auch  $x \in A \cap (B \cup C)$ .

Fall 1 und Fall 2 ergeben nun zusammen  $A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Da die Teilmengenbeziehung somit in beide Richtungen gezeigt worden ist, folgt nun die Gleichheit der beiden Mengen.

(b) Die Aussage  $x \in (A \setminus B) \cap C$  ist äquivalent zu  $(x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \in C$ . Diese Aussage ist äquivalent zu  $(x \in A \wedge x \in C) \wedge x \notin B$ , was wiederum äquivalent ist zu  $x \in (A \cap C) \setminus B$ . Nach dem Extensionalitätsaxiom folgt somit die Gleichheit der Mengen  $(A \setminus B) \cap C$  und  $(A \cap C) \setminus B$ .

(c) Gegenbeispiel:  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3\}$ ,  $C = \{1, 3\}$ . Dann gilt nämlich einerseits  $A \setminus (B \cup C) = \{1, 2\} \setminus \{1, 2, 3\} = \emptyset$ , aber andererseits  $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$ .

### Zusatzaufgabe 2.3:

- (a) Was ist an folgendem „Induktionsbeweis“ für die Behauptung  $\forall n \in \mathbb{N}_0 : 4n = 0$  falsch?

Induktionsanfang:  $4 \cdot 0 = 0$ .

Induktionsschluss: Gilt  $4k = 0$  für alle  $k < n$ , so gilt auch  $4n = 0$ . Denn es gibt  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$  mit  $n = k_1 + k_2$  und  $k_1, k_2 < n$ , also gilt  $4n = 4k_1 + 4k_2 = 0$ .

- (b) Zeigen Sie per Induktion: Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ .

- (c) Ab welcher Zahl  $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$  gilt  $n! \geq 2^n$ ? Führen Sie einen Induktionsbeweis.

- (d) Für welche  $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$  ist  $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$  wieder in  $\mathbb{N}_0$ . Führen Sie einen Induktionsbeweis.

- (e) Was lässt sich aus dem Beweis von (d) für die Summe der  $n$  ersten Kubikzahlen ablesen?

### Lösung zu Zusatzaufgabe 2.3:

- (a) Für  $n = 1$  gibt es keine zwei  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$  mit  $k_1, k_2 < 1$  und  $1 = k_1 + k_2$ , denn  $k_1, k_2 < 1$  und  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$  impliziert  $k_1 = 0 = k_2$  und somit  $k_1 + k_2 = 0 \neq 1$ .

- (b) Induktionsanfang:  $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$

Induktionsschluss: Nach Induktionsvoraussetzung gelte  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ . Dann gilt auch

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

- (c) Für  $n = 0$  gilt  $0! = 1 \geq 1 = 2^0$ . Aber für  $n = 1$  gilt  $1! = 1 < 2 = 2^1$ , und ebenso  $2! = 2 < 4 = 2^2$  für  $n = 2$  bzw.  $3! = 6 < 8 = 2^3$  für  $n = 3$ . Tatsächlich gilt die Formel erst ab  $n = 4$  allgemein, wie der folgende Induktionsbeweis zeigt.

Induktionsanfang: Offenbar gilt  $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \geq 16 = 2^4$ . (A(4))

Induktionsschluss:

Induktionsvoraussetzung: Für ein  $n \geq 4$  gelte  $n! \geq 2^n$ . (A(n))

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch  $(n+1)! \geq 2^{n+1}$ . (A(n+1))

Beweis: Es gilt

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \stackrel{\text{IV}}{\geq} (n+1)2^n \stackrel{n \geq 1}{\geq} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

für  $n \geq 1$ , was wegen  $n \geq 4$  der Fall ist.

Beachten Sie: Beim Induktionsschluss haben wir  $n \geq 1$  benötigt. Daher muss der Induktionsanfang mindestens bei  $n = 1$  liegen. Wie wir aber gesehen haben, ist die Ungleichung für  $n = 1, 2, 3$  falsch. Deswegen konnte die Induktion erst bei  $n = 4$  verankert werden, die Ungleichung  $n! \geq 2^n$  gilt somit nur für alle  $n \geq 4$  (und  $n = 0$ ).

- (d) Für alle Zahlen  $n \in \mathbb{N}_0$  ist  $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$  wieder eine Zahl in  $\mathbb{N}_0$  nach folgendem Induktionsbeweis:

Induktionsanfang: Offenbar gilt  $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{0^2 \cdot (0+1)^2}{4} = 0 \in \mathbb{N}_0$ . (A(0))

Induktionsschluss:

Induktionsvoraussetzung: Für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  gelte  $\frac{n^2(n+1)^2}{4} \in \mathbb{N}_0$ . (A(n))

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch  $\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \in \mathbb{N}_0$ . (A(n+1))

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} &= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{(n+1)^2 \cdot 4(n+1)}{4} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3. \end{aligned}$$

Da nun der erste Summand nach Induktionsvoraussetzung in  $\mathbb{N}_0$  liegt und  $n+1$  eine natürliche Zahl ist und da das Produkt sowie die Summe von Zahlen aus  $\mathbb{N}_0$  nicht aus  $\mathbb{N}_0$  herzuführen, ist damit die Induktionsbehauptung gezeigt.

- (e) Offenbar haben wir einen expliziten Ausdruck für die  $n$ -te Partialsumme der  $n$  ersten Kubikzahlen gefunden, d.h., es gilt

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ , denn für  $n=1$  ist der Induktionsanfang durch

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = 1 = \frac{1 \cdot 4}{4} = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

gemacht. Gilt nun  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  (IV), dann auch wie oben ausgerechnet

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 \stackrel{\text{(IV)}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

und damit die Induktionsbehauptung.

#### Zusatzaufgabe 2.4:

Es seien  $A$  und  $B$  nichtleere Mengen sowie  $f: A \rightarrow B$  eine Abbildung und  $I_A: A \rightarrow A$  diejenige Abbildung, welche jedes Element  $a \in A$  auf sich selbst abbildet. Zeigen Sie:

$$\exists \text{ Abbildung } g: B \rightarrow A \text{ mit } g \circ f = I_A \iff f \text{ injektiv}$$

#### Lösung zu Zusatzaufgabe 2.4:

„ $\implies$ “ Sei  $g: B \rightarrow A$  eine Abbildung mit  $g \circ f = I_A$ .

Gilt nun  $f(x) = f(\tilde{x})$  für  $x, \tilde{x} \in A$ , muss nun – da  $g$  eine Abbildung ist – auch  $g(f(x)) = g(f(\tilde{x}))$  gelten. Nach Voraussetzung ist nun aber auch  $g \circ f = I_A$ , so dass insgesamt

$$x = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(\tilde{x})) = (g \circ f)(\tilde{x}) = \tilde{x}$$

folgt. Damit folgt aus  $f(x) = f(\tilde{x})$  stets auch  $x = \tilde{x}$ . Dies ist aber genau die Injektivität von  $f$ .

„ $\impliedby$ “ Sei nun  $f: A \rightarrow B$  injektiv.

Dann ist das Urbild von einelementigen Teilmengen  $\{b\} \subset B$  leer oder einelementig, denn:

**Annahme:** Es gäbe eine einelementige Teilmenge  $\{b\} \subset B$  mit  $f^{-1}(\{b\}) \supset \{a, \tilde{a}\}$ , d.h.,  $a \neq \tilde{a}$ , dann wäre  $f(a) = f(\tilde{a})$  und  $a \neq \tilde{a}$ , was im Widerspruch zur Injektivität von  $f$  stünde.

Da nun  $A$  und  $B$  nicht leer waren, können wir ein Element  $a^* \in A$  auswählen. Somit ist die Abbildung

$$g: B \rightarrow A \text{ durch } g(b) = \begin{cases} a, & \exists a \in A : \{a\} \subset f^{-1}(\{b\}) \\ a^*, & f^{-1}(\{b\}) = \emptyset, \text{ d.h., } b \notin f(A) \end{cases}$$

wohldefiniert. Für diese Abbildung gilt nun  $(g \circ f)(a) = a$  für alle  $a \in A$ , wie behauptet.

## Zusatzmaterial zur Analysis I – Übung zu Serie 3

### Körper

- Eine **Gruppe** ist ein Tupel  $(M, *)$  bestehend aus einer nichtleeren Menge  $M$ , auf der eine Abbildung  $*$  :  $M \times M \rightarrow M$ ,  $(m, n) \mapsto m * n$ , definiert ist, welche den folgenden Axiomen genügt:

(i)  $\forall k, l, m \in M : k * (l * m) = (k * l) * m$  (Assoziativität)

(ii)  $\exists m_0 \forall m \in M : m * m_0 = m = m_0 * m$  (Existenz eines neutralen Elementes)

(iii)  $\forall m \in M \exists n \in M : m * n = m_0 = n * m$  (Existenz von Inversen)

- Eine Gruppe  $(M, *)$  heißt **kommutativ** oder **abelsch**,<sup>1</sup> falls ihre Verknüpfung  $*$  zusätzlich

(iv)  $\forall k, l \in M : k * l = l * k$  (Kommutativität)

erfüllt. Beispiele:

- Das Tupel  $(\mathbb{N}_0, +)$  ist KEINE Gruppe, denn es fehlen die Inversen.
- Das Tupel  $(\mathbb{Z}, +)$  dagegen ist eine Gruppe, die sogar abelsch ist.
- Die Gruppen  $(\mathbb{R}, +)$  und  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  sind ebenso abelsch.<sup>2</sup>

- Ein **Körper** ist ein Tripel  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  bestehend aus einer nichtleeren Menge  $\mathbb{K}$ , auf der zwei assoziative Verknüpfungen  $+$  :  $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $(k_1, k_2) \mapsto k_1 + k_2$  und  $\cdot$  :  $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $(k_1, k_2) \mapsto k_1 \cdot k_2$  so definiert sind, dass

(1)  $(\mathbb{K}, +)$  eine abelsche Gruppe mit neutralem Element  $e_+$  ist,

(2)  $(\mathbb{K} \setminus e_+, \cdot)$  eine abelsche Gruppe ist

und zusätzlich

(3)  $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$  (Distributivität)<sup>3</sup>

erfüllt wird. Beispiele:

- Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ , d.h. die Brüche  $\frac{n}{m}$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  und  $m \in \mathbb{N}$  (wobei man Brüche identifiziert, die durch Kürzen bzw. Erweitern auseinander hervorgehen), bilden einen Körper, indem man  $+$  durch  $\frac{n}{m} + \frac{n'}{m'} := \frac{nm' + n'm}{mm'}$  und  $\cdot$  durch  $\frac{n}{m} \cdot \frac{n'}{m'} := \frac{nn'}{mm'}$  definiert. Das neutrale Element der Addition ist  $0 = \frac{0}{1}$ , das neutrale Element der Multiplikation ist  $1 = \frac{1}{1}$ .
- Auch die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  bilden mit  $+$  und  $\cdot$  einen Körper.
- Es gibt auch Körper mit nur endlich vielen Elementen (siehe weiter unten).

### Anordnung

- Eine **2-stellige** (oder **binäre**) **Relation**  $R$  auf einer nichtleeren Menge  $M$  ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts von  $M$  mit sich selbst, d.h.  $R \subset M \times M$ .
- Eine binäre Relation  $R$  auf der Menge  $M$  heißt
  - (a) **reflexiv**, falls  $\forall m \in M : (m, m) \in R$ .
  - (b) **symmetrisch**, falls  $\forall m, n \in M : ((m, n) \in R \Rightarrow (n, m) \in R)$ .

<sup>1</sup>nach dem norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel (1802-1829)

<sup>2</sup>Die Eigenschaften (i)-(iv) entsprechen für  $(\mathbb{R}, +)$  genau den im Forster angegebenen Axiomen (I.1)-(I.4).

<sup>3</sup>Dies ist für die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  genau das Axiom III im Forster. Da aus diesem  $x \cdot 0 = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  folgt (siehe unten), sind (1),(2) und (3) für die reellen Zahlen äquivalent zu den Axiomen I,II und III im Forster.

(c) **antisymmetrisch**, falls  $\forall m, n \in M : ((m, n) \in R \wedge (n, m) \in R \implies m = n)$ .

(d) **transitiv**, falls  $\forall k, m, n \in M : ((k, m) \in R \wedge (m, n) \in R \implies (k, n) \in R)$ .

- Eine **Äquivalenzrelation**  $R$  auf einer Menge  $M \neq \emptyset$  ist eine 2-stellige Relation auf  $M$ , welche reflexiv, symmetrisch und transitiv ist (d.h., die Eigenschaften (a),(b) und (d) erfüllt). Statt  $(x, y) \in R$  schreibt man in diesem Fall auch häufig  $x \sim y$ .
- Eine **Ordnungsrelation**  $R$  auf einer Menge  $M \neq \emptyset$  ist eine 2-stellige Relation auf  $M$ , welche reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist (d.h., die Eigenschaften (a),(c) und (d) erfüllt). Statt  $(x, y) \in R$  schreibt man in diesem Fall auch häufig  $x \leq y$ .
- Ein **angeordneter Körper** ist ein Körper  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  versehen mit einer Ordnungsrelation  $\leq$ , bzgl. der je zwei Elemente  $a, b \in \mathbb{K}$  vergleichbar sind, d.h. für alle  $a, b \in \mathbb{K}$  gilt  $a \leq b$  oder  $b \leq a$ , und die in folgender Weise mit Addition und Multiplikation verträglich ist:<sup>4</sup>
  - Aus  $a \leq b$  folgt  $a + c \leq b + c$  für beliebiges  $c \in \mathbb{K}$ .
  - Aus  $a \geq 0$  und  $b \geq 0$  folgt  $ab \geq 0$ .
- In einem angeordneten Körper definiert man  $|x| := x$ , falls  $x \geq 0$  gilt, und  $|x| := -x$ , falls  $x < 0$  gilt. Die so entstandene Abbildung heißt **Absolutbetrag**.

### $\mathbb{N}_0$ als kleinste induktive Teilmenge der axiomatisch eingeführten Menge $\mathbb{R}$

- In der Vorlesung haben wir eine Menge  $\mathbb{R} \neq \emptyset$  mit zwei Verknüpfungen  $+$  :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\cdot$  :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eingeführt, welche die Körperaxiome und die Anordnungsaxiome erfüllen.<sup>5</sup> Eine Teilmenge  $A$  dieser axiomatisch eingeführten Menge  $\mathbb{R}$  nennen wir nun **induktiv** genau dann, wenn  $0 \in A$  und aus  $x \in A$  stets auch  $x + 1 \in A$  folgt, also

$$A \subset \mathbb{R} \text{ induktiv} \iff 0 \in A \wedge \forall x : (x \in A \implies x + 1 \in A) . \quad (\text{Gl.1})$$

Nun definieren wir

$$\mathbb{N}_0 := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \forall A \subset \mathbb{R} : (A \text{ induktiv} \implies x \in A) \right\} . \quad (\text{Gl.2})$$

Dann ist  $\mathbb{N}_0$  die kleinste induktive Menge in  $\mathbb{R}$ , d.h., es gilt

- (i)  $\mathbb{N}_0$  ist induktiv.
- (ii)  $S \text{ induktiv} \wedge S \subset \mathbb{N}_0 \implies S = \mathbb{N}_0$ .

Beweis:

- (i) Es gilt  $\forall A \subset \mathbb{R} : (A \text{ induktiv} \implies 0 \in A)$ , also ist  $0 \in \mathbb{N}_0$  nach (Gl.2). Sei nun  $x \in \mathbb{N}_0$ . Nach (Gl.2) gilt dann  $\forall A \subset \mathbb{R} : (A \text{ induktiv} \implies x \in A)$ . Aus der Induktivität (Gl.1) der Mengen  $A$  folgt dann  $\forall A \subset \mathbb{R} : (A \text{ induktiv} \implies x + 1 \in A)$ , also  $x + 1 \in \mathbb{N}_0$  nach (Gl.2). Somit ist  $\mathbb{N}_0$  induktiv.
- (ii) Ist  $S$  induktiv und  $x \in \mathbb{N}_0$ , so ist nach Definition (Gl.2) von  $\mathbb{N}_0$  auch  $x \in S$ . Demzufolge gilt auch  $\mathbb{N}_0 \subset S$ . Falls nun auch noch  $S \subset \mathbb{N}_0$  erfüllt ist, folgt  $S = \mathbb{N}_0$ .

**Hinweis:** Wir hätten bei (Gl.1) für eine induktive Menge auch  $1 \in A$  anstelle von  $0 \in A$  fordern können, die rechte Seite von (Gl.2) ergäbe dann  $\mathbb{N}$  und die obigen Aussagen würden dann in gleicher Weise für  $\mathbb{N}$  anstelle von  $\mathbb{N}_0$  folgen.<sup>6</sup>

- Sei  $A(n)$  eine Eigenschaft der Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$ . Angenommen  $A(0)$  gilt und

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : (A(n) \text{ gilt} \implies A(n + 1) \text{ gilt}) .$$

Dann gilt  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Beweis:

---

<sup>4</sup>Man beachte, dass dies äquivalent zu den Anordnungsaxiomen (A.1)-(A.3) im Forster ist, bei denen die Menge der positiven  $x$  vorgegeben wird, indem man  $x$  positiv nennt, wenn  $-x \leq 0$  und  $x \neq 0$  gilt. Ganz analog definiert man  $x < 0$  und  $x \geq 0$ .

<sup>5</sup>vgl. Forster, Körperaxiome (I.1)-(I.4), (II.1)-(II.4) sowie (III) und Anordnungsaxiome (A.1)-(A.3)

<sup>6</sup>Hier sieht man wiederum die Notwendigkeit, sich auf eine gemeinsame Definition zu einigen.

Wir betrachten die Menge  $S = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid A(n) \text{ gilt}\}$ . Nach Definition ist  $S \subset \mathbb{N}_0$  und nach Voraussetzung ist  $S$  auch induktiv, da  $0 \in S$  ist und aus  $n \in S$ , d.h.  $A(n)$  gilt, auch die Gültigkeit von  $A(n+1)$  folgt, also  $n+1 \in S$ . Wie zuvor gezeigt, folgt nun aus  $S \subset \mathbb{N}_0$  und  $S$  induktiv bereits  $S = \mathbb{N}_0$ . Also muss  $A(n)$  tatsächlich für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gelten.

Dies nennt man das **Beweisprinzip mittels vollständiger Induktion**.

- Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper,  $n \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq 1$  und seien  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ . Die Summe  $\sum_{k=1}^n a_k$  definieren wir rekursiv durch

$$\sum_{k=1}^1 a_k := a_1, \quad \sum_{k=1}^{m+1} a_k := \left( \sum_{k=1}^m a_k \right) + a_{m+1} \quad (n-1 \geq m \geq 1). \quad (\text{Gl.3})$$

Analog definieren wir das Produkt  $\prod_{k=1}^n a_k$  rekursiv durch

$$\prod_{k=1}^1 a_k := a_1, \quad \prod_{k=1}^{m+1} a_k := \left( \prod_{k=1}^m a_k \right) \cdot a_{m+1} \quad (n-1 \geq m \geq 1). \quad (\text{Gl.4})$$

**Zusatzaufgabe 3.1:** Beweisen Sie für (Gl.2) mit dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion:

- $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (n = 0 \vee n - 1 \in \mathbb{N}_0)$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall m \in \mathbb{N}_0 : (m - n \in \mathbb{N}_0 \vee n - m \in \mathbb{N}_0)$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall m \in \mathbb{N}_0 : n + m \in \mathbb{N}_0$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall m \in \mathbb{N}_0 : n \cdot m \in \mathbb{N}_0$ .

**Lösung zu Zusatzaufgabe 3.1:**

- Induktionsanfang: Für  $n = 0$  gilt offenbar  $(n = 0 \vee n - 1 \in \mathbb{N}_0)$ . (A(0))  
Induktionsschluss:

Induktionsvoraussetzung: Für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  gelte  $(n = 0 \vee n - 1 \in \mathbb{N}_0)$ . (A(n))

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch  $(n + 1 = 0 \vee n \in \mathbb{N}_0)$ . (A(n + 1))

Beweis: Nach Induktionsvoraussetzung gilt  $n = 0$  oder  $n - 1 \in \mathbb{N}_0$ , dann folgt für jeden der beiden Fälle aus der Induktivität von  $\mathbb{N}_0$  offenbar  $n \in \mathbb{N}_0$ , denn im ersten Fall ist  $n = 0 \in \mathbb{N}_0$  und im zweiten Fall wegen  $n - 1 \in \mathbb{N}_0$  auch  $n = (n - 1) + 1 \in \mathbb{N}_0$ , wobei wir hier die Körperaxiome verwendet haben.

- Induktionsanfang: Für  $n = 0$  gilt wegen  $m - 0 = m$  offenbar  $\forall m \in \mathbb{N}_0 : m - 0 \in \mathbb{N}_0$  und somit dann auch

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 : (m - 0 \in \mathbb{N}_0 \vee 0 - m \in \mathbb{N}_0) \quad (\text{A(0)}).$$

Induktionsschluss: Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Induktionsvoraussetzung:  $\forall m \in \mathbb{N}_0 : (m - n \in \mathbb{N}_0 \vee n - m \in \mathbb{N}_0)$ . (A(n))

Induktionsbehauptung:  $\forall m \in \mathbb{N}_0 : (m - (n + 1) \in \mathbb{N}_0 \vee (n + 1) - m \in \mathbb{N}_0)$ . (A(n + 1))

Beweis: Sei nun  $m \in \mathbb{N}_0$  beliebig.

Fall 1: Ist  $m = 0$ , dann ist  $(n + 1) - 0 = n + 1 \in \mathbb{N}_0$ , da nach Voraussetzung  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $\mathbb{N}_0$  induktiv. Also gilt auch  $(0 - (n + 1) \in \mathbb{N}_0 \vee n + 1 - 0 \in \mathbb{N}_0)$

Fall 2: Ist  $m \neq 0$ , dann folgt  $m - 1 \in \mathbb{N}_0$  nach Aufgabenteil (a). Nach Induktionsvoraussetzung folgt nun aber  $((m - 1) - n \in \mathbb{N}_0 \vee n - (m - 1) \in \mathbb{N}_0)$ . Nach den Körperaxiomen gilt jedoch  $(m - 1) - n = m - (n + 1)$  und  $n - (m - 1) = (n + 1) - m$ . Somit ist dann auch  $(m - (n + 1) \in \mathbb{N}_0 \vee (n + 1) - m \in \mathbb{N}_0)$  erfüllt.

Aus den beiden Fällen folgt nun tatsächlich  $\forall m \in \mathbb{N}_0 : (m - (n + 1) \in \mathbb{N}_0 \vee (n + 1) - m \in \mathbb{N}_0)$ .

(c) Induktionsanfang: Für  $n = 0$  gilt wegen  $m + 0 = m$  offenbar  $\forall m \in \mathbb{N}_0 : m + 0 \in \mathbb{N}_0$ . (A(0))  
 Induktionsschluss:

Induktionsvoraussetzung: Für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  gelte  $\forall m \in \mathbb{N}_0 : n + m \in \mathbb{N}_0$ . (A(n))

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch  $\forall m \in \mathbb{N}_0 : (n + 1) + m \in \mathbb{N}_0$ . (A(n + 1))

Beweis: Sei nun  $m \in \mathbb{N}_0$  beliebig. Da  $\mathbb{N}_0$  induktiv, ist somit auch  $m + 1 \in \mathbb{N}_0$ . Nach Induktionsvoraussetzung folgt nun aber  $n + (m + 1) \in \mathbb{N}_0$ . Nach den Körperaxiomen gilt jedoch  $n + (m + 1) = (n + 1) + m$ , also gilt auch  $(n + 1) + m \in \mathbb{N}_0$ . Da  $m \in \mathbb{N}_0$  beliebig war, folgt daraus  $\forall m \in \mathbb{N}_0 : (n + 1) + m \in \mathbb{N}_0$ .

(d) Induktionsanfang: Für  $n = 0$  gilt wegen  $m \cdot 0 = 0$  offenbar  $\forall m \in \mathbb{N}_0 : m \cdot 0 \in \mathbb{N}_0$ . (A(0))  
 Induktionsschluss:

Induktionsvoraussetzung: Für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  gelte  $\forall m \in \mathbb{N}_0 : n \cdot m \in \mathbb{N}_0$ . (A(n))

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch  $\forall m \in \mathbb{N}_0 : (n + 1) \cdot m \in \mathbb{N}_0$ . (A(n + 1))

Beweis: Sei nun  $m \in \mathbb{N}_0$  beliebig. Da  $(n + 1) \cdot m = n \cdot m + 1 \cdot m = n \cdot m + m$  nach den Körperaxiomen und neben  $m \in \mathbb{N}_0$  nach Induktionsvoraussetzung auch  $n \cdot m \in \mathbb{N}_0$  gilt, folgt aus Aufgabenteil (c) auch  $(n \cdot m + m) \in \mathbb{N}_0$  und somit  $(n + 1) \cdot m \in \mathbb{N}_0$ . Aufgrund der Beliebigkeit von  $m \in \mathbb{N}_0$  folgt daraus  $\forall m \in \mathbb{N}_0 : (n + 1) \cdot m \in \mathbb{N}_0$ .

### Zusatzaufgabe 3.2:

Auf der Menge  $\mathbb{N}_0$  sei die Verknüpfung  $\oplus : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  durch

$$n \oplus m := \max\{n, m\} := \begin{cases} n, & \text{falls } m \leq n \\ m, & \text{falls } n \leq m \end{cases} \quad (\text{Gl.5})$$

gegeben. Überprüfen Sie, ob  $(\mathbb{N}_0, \oplus)$  eine Gruppe ist.

### Lösung zu Zusatzaufgabe 3.2:

Zunächst einmal ist die Verknüpfung wohldefiniert, da  $\mathbb{N}_0$  Teilmenge (mindestens) eines angeordneten Körpers ist (also für zwei Elemente immer  $m \leq n \wedge n \leq m$  gilt) und da im Fall  $m \leq n \wedge n \leq m$  sofort  $n = m$  aufgrund des ersten Anordnungsaxioms bzw. aus der Antisymmetrie der Ordnungsrelation  $\leq$  folgt. Offenbar ist  $n = 0$  das neutrale Element bezüglich der Verknüpfung  $\oplus$ , denn für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt  $0 \leq n$  und somit  $\max\{0, n\} = n$ . Kommutativ ist die Verknüpfung auch, da für die Mengen  $\{n, m\} = \{m, n\}$  gilt und somit für alle  $n, m \in \mathbb{N}_0$  dann auch  $n \oplus m = \max\{n, m\} = \max\{m, n\} = m \oplus n$  gilt. Darüber hinaus ist  $\oplus$  assoziativ, d.h. es gilt  $\forall m, n, p \in \mathbb{N}_0 : m \oplus (n \oplus p) = (m \oplus n) \oplus p$ . Dies sehen wir so:

**Fall 1:**  $m \leq n \wedge m \leq p$ : Dann gilt auch  $m \leq \max(n, p)$  und damit

$$m \oplus (n \oplus p) = \max(m, \max(n, p)) = \max(n, p) = \max(\max(m, n), p) = (m \oplus n) \oplus p.$$

**Fall 2:**  $n \leq m$  und  $n \leq p$ : Es gilt dann

$$m \oplus (n \oplus p) = \max(m, \max(n, p)) = \max(m, p) = \max(\max(m, n), p) = (m \oplus n) \oplus p.$$

**Fall 3:**  $p \leq m$  und  $p \leq n$ : Es gilt dann

$$m \oplus (n \oplus p) = \max(m, \max(n, p)) = \max(m, n) = \max(\max(m, n), p) = (m \oplus n) \oplus p.$$

In jedem Fall gilt also  $m \oplus (n \oplus p) = (m \oplus n) \oplus p$ .

Dennoch ist  $(\mathbb{N}_0, \oplus)$  keine Gruppe, denn mit  $\left( (n, m \in \mathbb{N}_0 \wedge \max(n, m) = 0) \implies (n = 0 \wedge m = 0) \right)$  folgt, dass nur 0 ein Inverses bezüglich  $\oplus$  besitzt.

### Zusatzaufgabe 3.3: Zeigen Sie:

- (a) Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Für gegebene  $a, b \in \mathbb{K}$  ist eine Lösung  $x$  der Gleichung  $b = x + a$  eindeutig.  
 (b) In einem Körper  $\mathbb{K}$  gilt: Die Multiplikation mit dem neutralen Element der Addition ergibt stets das neutrale Element der Addition, d.h.,  $\forall x \in \mathbb{K} : 0 \cdot x = 0$ .

(c) Ein Körper ist **nullteilerfrei**: Aus  $xy = 0$  folgt zwingend, dass  $x = 0$  oder  $y = 0$  ist.

**Lösung zu Zusatzaufgabe 3.3:**

(a) Dies ist wahr, denn sind  $x, x'$  zwei Lösungen, dann gilt

$$x \stackrel{a+(-a)=0}{=} x + (a + (-a)) \stackrel{\text{assoziativ}}{=} (x + a) + (-a) \stackrel{b=x+a}{=} b + (-a) \stackrel{b=x'+a}{=} (x' + a) + (-a) \\ \stackrel{\text{assoziativ}}{=} x' + (a + (-a)) \stackrel{a+(-a)=0}{=} x'.$$

(b) Es gilt  $0 + 0 = 0$  (da  $0$  neutrales Element der Addition). Daher gilt auch

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x \stackrel{\text{distributiv}}{=} 0 \cdot x + 0 \cdot x.$$

Andererseits gilt auch  $0 \cdot x = 0 + 0 \cdot x$ . Da wir nach (a) wissen, dass für gegebene  $a, b$  eine Lösung  $x$  der Gleichung  $b = x + a$  eindeutig ist, können wir  $0 \cdot x = 0$  folgern.

(c) Sei  $xy = 0$  und angenommen  $x \neq 0$ . Dann besitzt  $x$  ein Inverses  $x^{-1}$ , und mit diesem gilt

$$y \stackrel{1 \text{ neutral}}{=} 1 \cdot y \stackrel{x^{-1}x=1}{=} (x^{-1}x)y \stackrel{\text{assoziativ}}{=} x^{-1}(xy) = x^{-1} \cdot 0 \stackrel{\text{kommutativ}}{=} 0 \cdot x^{-1} \stackrel{(b)}{=} 0.$$

Also folgt aus  $xy = 0$  und  $x \neq 0$  automatisch  $y = 0$ , wodurch die Aussage bewiesen ist.

**Zusatzaufgabe 3.4:**

Eine Verknüpfung  $* : M \times M \rightarrow M$  auf einer endlichen Menge  $M \neq \emptyset$  kann durch eine sogenannte Verknüpfungstabelle angegeben werden (vergleiche Wertetabellen für Funktionen). Gegeben sei nun die Menge  $M = \{0, 1\}$  mit zwei Verknüpfungen  $+ : M \times M \rightarrow M$  und  $\cdot : M \times M \rightarrow M$ , welche durch die Verknüpfungstabellen

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{d.h.} \quad \begin{array}{l} 0+0 = 0 \\ 0+1 = 1 \\ 1+0 = 1 \\ 1+1 = 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{d.h.} \quad \begin{array}{l} 0 \cdot 0 = 0 \\ 0 \cdot 1 = 0 \\ 1 \cdot 0 = 0 \\ 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

definiert seien.

- (a) Ist  $(M, +)$  eine Gruppe? Ist sie abelsch? Ist  $(M, \cdot)$  eine Gruppe?
- (b) Aus wieviel Elementen besteht die kleinste existierende Gruppe?
- (c) Ist  $(M, +, \cdot)$  ein Körper? Welche Aussage lässt sich über den minimalen Körper ableiten?
- (d) Kann man  $(M, +, \cdot)$  anordnen?

**Lösung zu Zusatzaufgabe 3.4:**

(a) Ja,  $(M, +)$  ist eine Gruppe, die sogar abelsch ist, denn es gilt

- Das neutrale Element ist  $0$ , denn  $0 + 0 = 0$  und  $1 + 0 = 1 = 0 + 1$ .
- Die Kommutativität gilt offenbar wegen  $0 + 1 = 1 = 1 + 0$ .
- Wegen  $0 + 0 = 0$  ist  $0$  zu sich selbst invers, genauso wie  $1$  zu sich selbst invers ist wegen  $1 + 1 = 0$ .
- Die Assoziativität gilt wegen

$$\begin{array}{l} (0+0)+1 = 0+1 = 1 = 0+1 = 0+(0+1), \\ (0+1)+0 = 1+0 = 1 = 1+0 = 0+(1+0), \\ (0+1)+1 = 1+1 = 0 = 1+1 = 0+(1+1), \\ (1+0)+0 = 1+0 = 1 = 1+0 = 1+(0+0), \\ (1+0)+1 = 1+1 = 0 = 1+1 = 1+(0+1), \\ (1+1)+0 = 0+0 = 0 = 1+1 = 1+(1+0) \end{array}$$

und trivialerweise  $(0+0)+0 = 0+(0+0)$  sowie  $(1+1)+1 = 1+(1+1)$  (aufgrund der Kommutativität).

- (b) Die kleinste existierende Gruppe enthält nur ein Element, denn definieren wir auf  $M = \{g\}$  die Verknüpfung  $*$ :  $M \times M \rightarrow M$  durch  $g * g = g$ , dann ist  $g$  das neutrale Element, zu sich selbst invers und offenbar ist die Assoziativität auch erfüllt. Darüber hinaus ist dann  $(M, *)$  auch noch abelsch.
- (c) Ja,  $(M, +, \cdot)$  ist ein Körper, denn nach Aufgabenteil (a) ist  $(M, +)$  eine abelsche Gruppe mit neutralem Element  $0$  und aus Aufgabenteil (b) erkennen wir, dass  $(M \setminus \{0\}, \cdot)$  ein Beispiel für eine minimale und sogar abelsche Gruppe darstellt. Desweiteren ist auch die Distributivität erfüllt, denn es gilt

$$\begin{aligned} 0 \cdot (0 + 0) &= 0 \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 0 = 0 + 0 \cdot 0 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0, \\ 0 \cdot (0 + 1) &= 0 \cdot 1 = 0 = 0 \cdot 1 = 0 + 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1, \\ 0 \cdot (1 + 0) &= 0 \cdot 1 = 0 = 0 \cdot 0 = 0 + 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0, \\ 0 \cdot (1 + 1) &= 0 \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 0 = 0 + 0 \cdot 1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1, \\ 1 \cdot (0 + 0) &= 1 \cdot 0 = 0 = 0 + 0 = 0 + 1 \cdot 0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0, \\ 1 \cdot (0 + 1) &= 1 \cdot 1 = 1 = 0 + 1 = 0 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1, \\ 1 \cdot (1 + 0) &= 1 \cdot 1 = 1 = 1 + 0 = 1 + 1 \cdot 0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0, \\ 1 \cdot (1 + 1) &= 1 \cdot 0 = 0 = 1 + 1 = 1 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1. \end{aligned}$$

Dies ist übrigens der kleinste Körper, der nur aus den beiden neutralen Elementen der beiden Verknüpfungen besteht.<sup>7</sup>

- (d) Nein, denn wäre  $0 \leq 1$ , dann würde  $1 = 0 + 1 \leq 1 + 1 = 0$  gelten, also nach der Antisymmetrie  $1 = 0$ , Widerspruch. Also kann man diesen Körper nicht anordnen.

### Zusatzaufgabe 3.5:

- (a) Ist die Menge  $\mathbb{F}_p := \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$  mit der Addition  $x \oplus y := x + y \pmod p$  und der Multiplikation  $x \otimes y := x \cdot y \pmod p$  für eine Primzahl  $p \in \mathbb{N}$  ein Körper?
- (b) Finden Sie für ein  $n \neq 1$  ein Beispiel, so dass  $\mathbb{F}_n$  mit den obigen Verknüpfungen kein Körper ist.

### Lösung zu Zusatzaufgabe 3.5:

- (a) Ja, denn Modulo-Rechnung ist auf  $\mathbb{Z}$  mit  $+$  und  $\cdot$  vertauschbar, also gelten Assoziativität, Kommutativität und Distributivität. Offensichtlich sind  $0$  und  $1$  die neutralen Elemente. Darüber hinaus ist zu  $x \in \mathbb{F}_p$  das additive Inverse durch  $p - x$  (bzw.  $0$  bei  $x = 0$ ) gegeben, denn  $x + (p - x) \pmod p = p \pmod p = 0$ . Bezüglich der Modulo-Rechnung ist desweiteren  $x \in \mathbb{F}_p$  genau dann invertierbar, wenn es ein  $y \in \mathbb{Z}$  mit  $xy \pmod p = 1$  gibt. Dies ist gleichbedeutend damit, dass es ein  $n \in \mathbb{Z}$  gibt mit  $1 = xy + np$ <sup>8</sup>. Dies bedeutet aber, dass  $x$  und  $p$  teilerfremd sind. Jedoch ist jedes  $x \in \mathbb{F}_p$  nur genau dann teilerfremd zu  $p$ , wenn  $p$  eine Primzahl ist.
- (b) Nach den Bemerkungen aus Aufgabenteil (a) können wir  $n$  als die kleinste natürliche Zahl ungleich  $1$  wählen, welche keine Primzahl ist. Die Menge  $\{0, 1, 2, 3\}$  bildet mit den aus der Modulo-Rechnung resultierenden Verknüpfungen  $\oplus$  und  $\otimes$  keinen Körper, denn beispielsweise besitzt  $2 \pmod 4$  kein Inverses.

Es gilt  $2 \otimes 2 = 2 \cdot 2 \pmod 4 = 0 \pmod 4$  und  $2 \otimes 3 = (2 \cdot 3) \pmod 4 = 2 \pmod 4$  und somit sind weder  $2 \pmod 4$  noch  $3 \pmod 4$  invers zu  $2 \pmod 4$ . Dagegen ist beispielsweise  $3 \pmod 4$  invertierbar mit Inversem  $3 \pmod 4$  wegen  $3 \otimes 3 = (3 \cdot 3) \pmod 4 = 1 \pmod 4$ .

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\otimes$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Alle Zusatzaufgaben sind verfügbar unter: <https://studip.uni-rostock.de/studip/>

<sup>7</sup>Dies ist das einfachste Beispiel für einen endlichen Körper. Er wird manchmal  $\mathbb{F}_2$  genannt, da er ein Zahlkörper (engl. number field) mit 2 Elementen ist. Man kann die Elemente von  $\mathbb{F}_2$  als (Rest-)Klassen auffassen. Identifiziert man beispielsweise die Klasse aller geraden ganzen Zahlen mit  $0$  und mit  $1$  dementsprechend die Klasse der ungeraden ganzen Zahlen, dann können wir also  $1 + 1 = 0$  in der Weise interpretieren, dass die Addition zweier ungerader ganzer Zahlen eine gerade ganze Zahl ergibt.

<sup>8</sup>Angenommen,  $x$  und  $p$  hätten einen gemeinsamen Teiler  $t$ , dann würde  $t$  auch die gewichtete Summe auf der rechten Seite und somit auch  $1$  teilen; daher kann  $t$  nur  $1$  selbst sein, d.h.  $x$  und  $p$  sind teilerfremd

## Zusatzmaterial zur Analysis I – Übung zu Serie 4

### Archimedisches Axiom

- Erfüllt ein angeordneter Körper (siehe Zusatzmaterial zu Serie 3) das Archimedische Axiom<sup>1</sup>

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \left( (x > 0 \wedge y > 0) \implies \exists n \in \mathbb{N}_0 : nx > y \right),$$

dann sprechen wir von einem **archimedisches angeordneten Körper**. Ein Beispiel dafür ist der angeordnete Körper der reellen Zahlen  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ .

### Konvergenz/Divergenz/Beschränktheit/bestimmte Divergenz von Folgen

- Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Zahlenfolge, d.h.  $a_n \in \mathbb{R}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann heißt die Zahlenfolge  $a_n$  **konvergent**, falls es ein  $a \in \mathbb{R}$  mit der folgenden Eigenschaft gibt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \left( n \geq N(\varepsilon) \implies |a_n - a| < \varepsilon \right).$$

Andernfalls heißt die Folge **divergent**.

Die Zahl  $a$  ist bei Existenz eindeutig bestimmt und heißt der **Grenzwert** der Folge  $a_n$ . Schreibweise:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

- Folgen, die gegen die reelle Zahl 0 konvergieren, nennen wir kurz **Nullfolgen**.
- Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Zahlenfolge. Dann heißt die Zahlenfolge  $a_n$  **nach oben beschränkt**, falls es ein  $M \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq M$ . Analog nennen wir die Zahlenfolge  $a_n$  **nach unten beschränkt**, falls es ein  $M \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq M$ . Ist eine Folge sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt, so nennen wir sie **beschränkt**.
- Mittels Dreiecksungleichung haben wir in der Vorlesung gezeigt, dass jede konvergente Folge beschränkt ist (also jede unbeschränkte Folge divergent sein muss).  
**Achtung:** Die Umkehrung gilt jedoch im Allgemeinen nicht, z.B. ist die alternierende Folge  $a_n := (-1)^n$  beschränkt, besitzt jedoch keinen Grenzwert.
- Eine Folge  $a_n$  heißt **bestimmt divergent** gegen  $+\infty$ , falls

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists N = N(K) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \left( n \geq N(K) \implies a_n > K \right).$$

Analog nennen wir eine Folge  $a_n$  **bestimmt divergent** gegen  $-\infty$ , falls

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists N = N(K) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \left( n \geq N(K) \implies a_n < K \right).$$

**Zusatzaufgabe 4.1:** Seien  $\mathbb{N}_0$  und  $\mathbb{Z}$  wie in Übungsserie 3 definiert. Zeigen Sie:

- $\forall k, n \in \mathbb{Z} : (k < n \implies k \leq n - 1)$ .
- Gilt  $\emptyset \neq M \subset \mathbb{N}_0$  und ist  $M$  nach oben beschränkt, dann besitzt  $M$  ein größtes Element.
- Gilt  $\emptyset \neq M \subset \mathbb{Z}$  und ist  $M$  nach oben (bzw. unten) beschränkt, dann besitzt  $M$  ein größtes (bzw. kleinstes) Element.
- $\forall x \in \mathbb{R} \exists! n \in \mathbb{Z} : n \leq x < n + 1$ .

---

<sup>1</sup>Diese Formulierung ist wegen des Anordnungsaxiom  $\forall a, b, c : (a > b \wedge c > 0 \implies ac > bc)$  äquivalent zu  $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}_0 : x < n$ .

### Lösung zu Zusatzaufgabe 4.1:

- (a) Nach Definition von  $\mathbb{Z}$  ist mit  $k \in \mathbb{Z}$  auch  $-k \in \mathbb{Z}$ . Nach Übungsaufgabe 3.1 und den Körperaxiomen ist somit auch  $n - k = n + (-k) \in \mathbb{Z}$ . Nach den Anordnungsaxiomen gilt weiterhin  $n - k > 0$ . Nach Übungsaufgabe 3.2 (a) ist somit  $n - k \in \mathbb{N}_0$  und wegen  $n - k \neq 0$  folgt auch  $n - k - 1 \in \mathbb{N}_0$  nach Zusatzaufgabe 3.1 (a). Wiederum nach Übungsaufgabe 3.2 (a) ergibt sich  $n - k - 1 \geq 0$ , so dass nach den Anordnungsaxiomen  $n - 1 \geq k$  wie behauptet.
- (b) Wie betrachten die Menge  $A := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \forall m \in M : m < n\}$ . Da die Menge  $M$  nach Voraussetzung nach oben beschränkt ist, existiert ein  $x \in \mathbb{R} \forall m \in M : m \leq x$ . Nach dem Archimedischen Axiom finden wir ein  $\tilde{n} \in \mathbb{N}_0 : x < \tilde{n}$ . Für dieses gilt  $\tilde{n} \in A$ , also insbesondere  $A \neq \emptyset$ . Da ebenfalls  $M \neq \emptyset$  ist, existiert ein  $m \in M \forall n \in A : n > m \geq 0$  nach Übungsaufgabe 3.2 (a), also insbesondere gilt  $\forall n \in A : n > 0$ . Zusammen mit Übungsaufgabe 3.2 (b) ergibt sich daraus, dass die nichtleere Menge  $A$  ein kleinstes Element  $n_0 > 0$  enthält. Aus Zusatzaufgabe 3.1 (a) ergibt sich damit  $n_0 - 1 \in \mathbb{N}_0$ . Da  $n_0$  aber kleinstes Element in  $A$  war, ist auch  $n_0 - 1 \notin A$ . Nach Definition von  $A$  gibt es somit ein  $m_0 \in M$  mit  $n_0 - 1 \leq m_0$ . Auf der anderen Seite gilt wegen  $n_0 \in A$  auch  $\forall k \in M : k < n_0$ , woraus wegen  $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$  mit Aufgabenteil (a) insgesamt die Gültigkeit von  $\forall k \in M : k \leq n_0 - 1 \leq m_0$  folgt, d.h. jedoch genau, dass  $m_0$  ein größtes Element von  $M$  ist. (Die Eindeutigkeit folgt nun aus der Antisymmetrie der vollständigen Ordnungsrelation  $\leq$ ).
- (c) Sei  $M$  zunächst nach oben beschränkt.

**Fall 1:**  $M \cap \mathbb{N}_0 \neq \emptyset$ . Dann ist  $M \cap \mathbb{N}_0$  als Teilmenge von  $M$  ebenso nach oben beschränkt und besitzt (da auch Teilmenge von  $\mathbb{N}_0$ ) ein größtes Element. Dieses ist dann auch größtes Element von  $M$ , da aus Übungsaufgabe 3.2 (a) folgt, dass alle Elemente in  $M \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0)$  negativ und somit kleiner als jedes Element aus  $\mathbb{N}_0$  sind.

**Fall 2:**  $M \cap \mathbb{N}_0 = \emptyset$ . Nach Definition von  $\mathbb{Z}$  muss dann  $-M \subset \mathbb{N}_0$  gelten. Aus Übungsaufgabe 3.2 (b) wissen wir aber, dass  $-M := \{m \in \mathbb{Z} : -m \in M\} \subset \mathbb{N}_0$  als nichtleere Menge ein kleinstes Element  $-m_0 \in -M$  besitzt, also  $\forall m \in M : -m \geq -m_0$  und nach den Anordnungsaxiomen demnach  $\forall m \in M : m_0 \geq m$  gilt. Wegen  $-m_0 \in -M$  gilt auch  $m_0 \in M$ , also ist dies genau ein größtes Element. (Die Eindeutigkeit folgt wieder aus der Antisymmetrie der vollständigen Ordnungsrelation  $\leq$ ).

Sei nun  $M$  nach unten beschränkt. Dann ist  $-M$  nach oben beschränkt und wir erhalten aus dem bisher Bewiesenen, dass  $-M$  ein größtes Element  $-m_0 \in -M$  enthält, also  $\forall m \in M : -m \leq -m_0$  gilt. Nach den Anordnungsaxiomen folgt nun auch  $\forall m \in M : m_0 \leq m$ , also wegen  $-m_0 \in -M$  und somit  $m_0 \in M$  wie gewünscht die Existenz eines kleinsten Elementes.

- (d) Sei  $x \in \mathbb{R}$  beliebig. Wir betrachten die Menge  $A := \{m \in \mathbb{Z} : x < m\}$ . Wegen  $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$  ist diese Menge nach dem Archimedischen Axiom nicht leer und ebenso nach unten beschränkt. Somit folgt aus Aufgabenteil (c) die Existenz eines kleinsten Elementes  $m_0 \in A \subset \mathbb{Z}$ , so dass nach Übungsaufgabe 3.1 dann auch  $m_0 - 1 \in \mathbb{Z}$  gilt. Da  $m_0$  kleinstes Element von  $A$  ist, muss  $m_0 - 1 \in \mathbb{Z} \setminus A$  und nach Definition von  $A$  insgesamt schließlich  $m_0 - 1 \leq x < m_0$  gelten. Für  $n := m_0 - 1$  gilt nun wie gewünscht  $n \in \mathbb{Z} \wedge n \leq x < n + 1$ .

Um die Eindeutigkeit zu zeigen nehmen wir an, es gäbe eine weitere Zahl  $m \in \mathbb{Z}$  mit  $m \leq x < m + 1$ . Insbesondere folgt daraus dann die Gültigkeit von  $n \leq x < m + 1$  und  $m \leq x < n + 1$ , also insgesamt  $n < m + 1$  und  $m < n + 1$ . Aus Aufgabenteil (a) folgt nun auch, dass  $n \leq (m + 1) - 1$  und  $m \leq (n + 1) - 1$ , also nach den Körperaxiomen  $n \leq m \wedge m \leq n$ . Aus der Antisymmetrie der Ordnungsrelation  $\leq$  erhalten wir nun  $m = n$ , womit die Eindeutigkeit gezeigt ist.

**Zusatzaufgabe 4.2:** Zeigen Sie mit Hilfe der Körperaxiome:

- (a)  $\forall x \in \mathbb{R} : -x = (-1)x$ .
- (b)  $\forall x, y \in \mathbb{R} : (-x)(-y) = xy$ .

**Lösung zu Zusatzaufgabe 4.2:**

- (a) Sei  $x \in \mathbb{R}$  beliebig. Da  $\mathbb{R}$  ein Körper ist und es additive Inverse gibt, besitzt die Gleichung  $0 = y + x$  eine Lösung  $y$ , die nach Zusatzaufgabe 3.3 (a) eindeutig ist. Wegen der Eindeutigkeit

bezeichnen wir diese Lösung als  $-x$ , da es sich um das additive Inverse handelt.

Unter Verwendung des Distributivgesetzes und unter Verwendung von Zusatzaufgabe 3.3 (b) ergibt sich nun auch

$$0 = 0 \cdot x = ((-1) + 1) \cdot x = (-1)x + 1 \cdot x = (-1)x + x,$$

also  $(-1)x$  als Lösung  $y$  der Gleichung  $0 = y + x$ . Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung folgt nun wie gewünscht  $(-1)x = -x$ .

- (b) Zunächst halten wir fest, dass nach Definition des additiven Inversen von  $x$  und  $-x$  wegen  $0 = x + (-x)$  und  $0 = (-(-x)) + (-x)$  sowohl  $x$  als auch  $(-(-x))$  Lösungen der Gleichung  $0 = y + (-x)$  sind. Wiederum wegen der aus Zusatzaufgabe 3.3 (a) folgenden Eindeutigkeit der Lösung muss nun  $x = (-(-x))$  gelten. Mit Aufgabenteil (a) und der Assoziativität und Kommutativität ergibt sich nun

$$(-x)(-y) = (-x)((-1)y) = ((-x)(-1))y = ((-1)(-x))y = (-(-x))y = xy$$

wie behauptet.

### Zusatzaufgabe 4.3:

- (a) Zeigen Sie: Für jedes  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt  $x^2 > 0$ .
- (b) Sei  $x \neq 0$ . Zeigen Sie: Ist  $x > 0$  (bzw.  $x < 0$ ), so ist auch  $x^{-1} > 0$  (bzw.  $x^{-1} < 0$ ).
- (c) Zeigen Sie:  $x \leq y \wedge z \geq 0 \implies xz \leq yz$ .
- (d) Zeigen Sie: Aus  $0 < x < y$  folgt  $x^{-1} > y^{-1}$ .
- (e) Sei  $b \in \mathbb{R}$  mit  $b > 1$ . Zeigen Sie: Dann gibt es zu jedem  $K > 0$  ein  $n \in \mathbb{N}_0$  mit  $b^n > K$ .

**Hinweis:** Verwenden Sie die in einer früheren Aufgabe bewiesene **Bernoulli-Ungleichung**

$$\forall x \geq -1 \forall n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0\} : (1+x)^n \geq 1+nx.$$

- (f) Sei  $0 < b < 1$ . Zeigen Sie: Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n \in \mathbb{N}_0$  mit  $b^n < \varepsilon$ .

### Lösung zu Zusatzaufgabe 4.3:

- (a) Aus dem Anordnungsaxiom  $a \geq 0 \wedge b \geq 0 \implies ab \geq 0$  erhalten wir im Fall  $x \geq 0$  somit  $x^2 \geq 0$ . Wissen wir zusätzlich  $x \neq 0$ , dann kann der Fall der Gleichheit aufgrund der Nullteilerfreiheit eines Körpers nicht eintreten, also ist dann  $x^2 > 0$ .  
Ist nun  $x \leq 0$ , so muss  $-x \geq 0$  gelten und es folgt  $x^2 = x \cdot x = (-x) \cdot (-x) \geq 0$  mit Hilfe der Körperaxiome. Ist zusätzlich  $x \neq 0$  folgt nun wiederum aus der Nullteilerfreiheit  $x^2 > 0$ .
- (b) Da die Multiplikation mit 0 stets 0 ergibt und  $x^{-1}x = 1$ , muss auch  $x^{-1} \neq 0$  gelten. Nach Aufgabenteil (a) wissen wir somit auch  $(x^{-1})^2 > 0$ . Ist nun  $x > 0$ , so können wir aus dem Anordnungsaxiom  $a \geq 0 \wedge b \geq 0 \implies ab \geq 0$  schlussfolgern, dass auch  $x(x^{-1})^2 \geq 0$ . Wegen der Nullteilerfreiheit eines Körpers kann die Gleichheit wiederum nicht eintreten. Da aufgrund der Körperaxiome  $x(x^{-1})^2 = (xx^{-1})x^{-1} = 1 \cdot x^{-1} = x^{-1}$  gilt, ist dies die Behauptung für  $x > 0$ . (Im Fall  $x < 0$ , verwenden wir analog die  $-x > 0$  und dass aus den Körperaxiomen  $-x = (-1) \cdot x$  folgt.)
- (c) Aus dem Axiom  $\forall a, b, c : (a \leq b \implies a + c \leq b + c)$  folgt aus  $x \leq y$  mit  $c = -x$  dann sofort  $0 = x + (-x) \leq y + (-x)$ . Mit dem Axiom  $a \geq 0 \wedge b \geq 0 \implies ab \geq 0$  folgt daraus auch  $0 \leq (y + (-x))z = yz + (-xz)$ . Wiederum aus dem Axiom  $\forall a, b, c : (a \leq b \implies a + c \leq b + c)$  folgt mit  $c = xz$  dann wie gewünscht  $xz \leq (yz + (-xz)) + xz = yz + (-xz) + xz = yz + 0 = yz$ .
- (d) Aus der Positivität von  $x$  und  $y$  folgt nach Aufgabenteil (b) auch die Positivität von  $x^{-1}$  und  $y^{-1}$  und demnach mit dem Anordnungsaxiom  $a \geq 0 \wedge b \geq 0 \implies ab \geq 0$  und der Nullteilerfreiheit eines Körpers dann auch  $x^{-1}y^{-1} > 0$ . Analog Aufgabenteil (c) folgt mit  $x < y$  dann  $x(x^{-1}y^{-1}) < y(x^{-1}y^{-1})$  und zusammen mit den Körperaxiomen

$$y^{-1} \overset{\text{Neutrales Element}}{=} 1 \cdot y^{-1} \quad \overset{\text{Existenz Inverser}}{=} (xx^{-1})y^{-1} \quad \overset{\text{asso-ziativ}}{=} x(x^{-1}y^{-1}) < y(x^{-1}y^{-1}) \quad \overset{\text{kom-mutativ}}{=} y(y^{-1}x^{-1}) \\ \overset{\text{asso-ziativ}}{=} (yy^{-1})x^{-1} \quad \overset{\text{Inverse}}{=} 1 \cdot x^{-1} \quad \overset{\text{Neutrales Element}}{=} x^{-1}.$$

- (e) Sei  $K > 0$  beliebig. Im Fall  $K \leq 1$  können wir wegen  $b > 1$  sofort  $n = 1$  wählen und erhalten  $b^1 > K$ . Andernfalls ist  $K > 1$  und somit  $y := K - 1 > 0$ . Mit  $b > 1$  ist auch  $x := b - 1 > 0$ , so dass einerseits  $b^m = (1 + x)^m \geq 1 + mx$  für jedes  $m \in \mathbb{N}_0$  nach der Bernoulli-Ungleichung gilt und wir außerdem ein  $n \in \mathbb{N}_0$  mit  $nx > y$  nach dem Archimedischen Axiom finden. Also folgt insgesamt

$$b^n = (1 + (b - 1))^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx > 1 + y = 1 + (K - 1) = K$$

und somit  $b^n > K$  wie behauptet.

- (f) Wegen  $1 \cdot 1 = 1$  ist  $1^{-1} = 1$  und somit folgt nach Aufgabenteil d aus  $0 < b < 1$  sofort auch  $b^{-1} > 1^{-1} = 1$ . Nach Aufgabenteil (b) ist mit  $\varepsilon > 0$  auch  $\varepsilon^{-1} > 0$ . Somit finden wir nach Aufgabenteil (e) ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $(b^{-1})^n > \varepsilon^{-1}$ . Nach dem Anordnungsaxiom  $a \geq 0 \wedge b \geq 0 \implies ab \geq 0$  folgt nun mit der Nullteilerfreiheit und per Induktion aus  $b > 0$  und  $\varepsilon > 0$  auch  $b^n > 0$  und weiter  $b^n \varepsilon > 0$ . Verwenden wir nun noch  $x^{nm} = (x^n)^m$  für beliebige ganze Zahlen  $n, m$ , so folgt aus  $(b^{-1})^n > \varepsilon^{-1}$  analog Aufgabenteil (c) und unter Verwendung der Körperaxiome

$$\varepsilon = \varepsilon(b^n(b^n)^{-1}) = (\varepsilon b^n)(b^n)^{-1} = (b^n \varepsilon)(b^{-1})^n > (b^n \varepsilon)\varepsilon^{-1} = b^n(\varepsilon \varepsilon^{-1}) = b^n.$$

#### Zusatzaufgabe 4.4:

Beweisen Sie für die nachstehend definierten Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen die Konvergenz gegen den vorgegebenen Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$ , indem Sie zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  angeben, mit dem  $\forall n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| \leq \varepsilon$  gilt.

- (a)  $a_n := \frac{n}{n+1}$  konvergiert gegen  $a := 1$   
 (b)  $a_n := \frac{n-2}{3n+10}$  konvergiert gegen  $a := \frac{1}{3}$   
 (c)  $a_n := \frac{n^2}{n+1} - n$  konvergiert gegen  $a := -1$

#### Lösung zu Zusatzaufgabe 4.4:

- (a) Sei  $\varepsilon > 0$ . Offenbar gilt

$$|a_n - a| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

genau dann, wenn  $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$  gilt. Also können wir  $N(\varepsilon) := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil + 1$  wählen, wobei  $\lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} : x \leq n\}$  ist. Denn dann gilt für jedes  $n \geq N(\varepsilon)$  auch  $\frac{1}{\varepsilon} < n + 1$  und somit  $\forall n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$ .

- (b) Sei  $\varepsilon > 0$ . Zunächst gilt

$$|a_n - a| = \left| \frac{n-2}{3n+10} - \frac{1}{3} \right| = \frac{16}{9n+30}.$$

Sei nun  $n \geq 1$ . Wegen  $9n + 30 > 9n \iff \frac{1}{9n} > \frac{1}{9n+30}$  erhalten wir dann weiter

$$|a_n - a| < \frac{16}{9n}.$$

Wegen  $\frac{16}{9n} \leq \varepsilon \iff \frac{16}{9\varepsilon} \leq n$  können wir nun  $N(\varepsilon) := \left\lceil \frac{16}{9\varepsilon} \right\rceil$  wählen, denn dann folgt aus  $n \geq N(\varepsilon)$  auch  $\frac{16}{9\varepsilon} \leq n$  und wie oben hergeleitet dann auch  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

- (c) Sei  $\varepsilon > 0$ . Offenbar gilt

$$|a_n - a| = \left| \frac{n^2}{n+1} - n - (-1) \right| = \left| \frac{n^2 - n(n+1) - (-1)(n+1)}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}.$$

Demzufolge können wir wie bei (a) etwa  $N(\varepsilon) := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil + 1$  wählen, denn dann gilt wiederum für jedes  $n \geq N(\varepsilon)$  auch  $\frac{1}{\varepsilon} < n + 1$  und somit  $\forall n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$ .

**Zusatzaufgabe 4.5:** Sei  $(a_n)$  die durch  $a_1 := 1$  und  $a_{n+1} := \frac{1}{2}a_n + 1$  rekursiv definierte Folge.

- (a) Zeigen Sie für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dass  $|a_n - 2| = \frac{2}{2^n}$ .
- (b) Zeigen Sie nun, dass  $(a_n)$  gegen  $a = 2$  konvergiert, indem Sie zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  eine natürliche Zahl  $N(\varepsilon)$  bestimmen, so dass  $\forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N(\varepsilon) \implies |a_n - a| < \varepsilon)$  gilt.

**Lösung zu Zusatzaufgabe 4.5:**

- (a) Wir zeigen zunächst per Induktion, dass  $|a_n - 2| = \frac{2}{2^n}$ :

**Induktionsanfang:** Für  $n = 1$  gilt offenbar  $|a_1 - 2| = |1 - 2| = 1 = \frac{2}{2^1}$ . (A(1))

**Induktionsschritt:**

**Induktionsvoraussetzung:** Für ein  $n \geq 1$  gelte  $|a_n - 2| = \frac{2}{2^n}$  (A(n))

**Induktionsbehauptung:** Dann gilt auch  $|a_{n+1} - a| = \frac{2}{2^{n+1}}$  (A(n+1))

**Beweis:** Mit der Rekursionsvorschrift und der Induktionsvoraussetzung erhalten wir

$$|a_{n+1} - 2| \stackrel{\text{Rekursion}}{=} \left| \frac{1}{2}a_n + 1 - 2 \right| = \left| \frac{1}{2}(a_n - 2) \right| = \frac{1}{2} \cdot |a_n - 2| \stackrel{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2^n} = \frac{2}{2^{n+1}}$$

wie behauptet.

- (b) Da wir aus (a) wissen, dass  $|a_n - 2| = \frac{2}{2^n}$ , müssen wir noch zeigen, dass  $\frac{2}{2^n}$  eine Nullfolge ist. Bereits in Zusatzaufgabe 1.3 (d) zeigten wir für  $n \geq 1$  per Induktion  $2^n > n$ , also folgt für  $n \geq 1$  die Ungleichungskette

$$|a_n - 2| = \frac{2}{2^n} < \frac{2}{n} \leq \varepsilon,$$

falls  $n \geq N(\varepsilon) := \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil$  (denn dann gilt  $\frac{2}{\varepsilon} \leq n \iff \frac{2}{n} \leq \varepsilon$  und wie oben hergeleitet dann auch  $\forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N(\varepsilon) \implies |a_n - a| < \varepsilon)$ ).

**Zusatzaufgabe 4.6:** Zeigen Sie direkt mittels der **Definition des Grenzwertes**:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ .
- (b) Es sei  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  eine gegen  $a \in \mathbb{R}$  konvergente Folge reeller Zahlen und  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  eine gegen  $b \in \mathbb{R}$  konvergente Folge reeller Zahlen.

Dann konvergiert die Folge  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  mit  $c_n = 3a_n - 5b_n$  gegen den Grenzwert  $3a - 5b$ .

**Lösung zu Zusatzaufgabe 4.6:**

- (a) Es sei  $\varepsilon > 0$  beliebig und fest. Als  $N(\varepsilon)$  wählen wir irgendeine natürliche Zahl  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , für die  $N(\varepsilon) > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$  gilt.

(Warum gibt es ein solches  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ?  $\mathbb{R}$  erfüllt das **Archimedische Axiom!**)

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N(\varepsilon)$ . Aus  $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$  folgt dann  $n^2 > \frac{1}{\varepsilon} > 0$  und schließlich

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

- (b) Es ist zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N(\varepsilon) \implies |c_n - (3a - 5b)| < \varepsilon)$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig,  $\eta := \frac{\varepsilon}{6}$  und  $\nu := \frac{\varepsilon}{10}$ .

Nach Voraussetzung existiert ein  $M$ , so dass  $\forall n \geq M$  die Bedingung  $|a_n - a| < \eta = \frac{\varepsilon}{6}$  gilt.

Weiter existiert nach Vor. ein  $K$ , so dass  $\forall n \geq K$  die Bedingung  $|b_n - b| < \nu = \frac{\varepsilon}{10}$  gilt.

Wir setzen nun  $N(\varepsilon) := \max(M, K)$ . Es sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N(\varepsilon)$ .

Da  $n \geq M$ , folgt  $|a_n - a| < \eta = \frac{\varepsilon}{6}$  und ebenso auch  $|b_n - b| < \nu = \frac{\varepsilon}{10}$  wegen  $n \geq K$ .

Insgesamt folgt nun:

$$|(3a_n - 5b_n) - (3a - 5b)| = |3(a_n - a) - 5(b_n - b)| \leq 3|a_n - a| + 5|b_n - b| < 3 \frac{\varepsilon}{6} + 5 \frac{\varepsilon}{10} = \varepsilon.$$

**Zusatzaufgabe 4.7:** Zeigen Sie direkt mittels der **Definition des Grenzwertes**:

- (a) Die Folge  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$  konvergiert nicht gegen 1.
- (b) Die Folge  $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$  ist nicht konvergent.
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4 - n^2 + 1} = 0$ .

**Lösung zu Zusatzaufgabe 4.7:**

- (a) Wir verwenden die Beweismethode mit Widerspruch:

Annahme:  $\frac{1}{n} \rightarrow 1$ .

Dann gilt:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N(\varepsilon) \implies \left|\frac{1}{n} - 1\right| < \varepsilon)$ .

Insbesondere gäbe es dann ein  $N\left(\frac{1}{2}\right)$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N\left(\frac{1}{2}\right)$ :  $\left|\frac{1}{n} - 1\right| < \frac{1}{2}$ .

Es sei nun  $n := \max\left(N\left(\frac{1}{2}\right), 3\right)$ . Dann gilt  $n \geq N\left(\frac{1}{2}\right)$ , also  $\left|\frac{1}{n} - 1\right| < \frac{1}{2}$ . Andererseits gilt aber auch  $n \geq 3$ , also  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{3}$ . Es folgt somit

$$\frac{2}{3} \leq 1 - \frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n} - 1\right| < \frac{1}{2} \quad \text{Widerspruch.}$$

- (b) Wir verwenden die Beweismethode mit Widerspruch:

Annahme:  $\exists a \in \mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = a$

Dann gilt:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N(\varepsilon) \implies |(-1)^n - a| < \varepsilon)$

Insbesondere gäbe es ein  $N\left(\frac{1}{2}\right)$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N\left(\frac{1}{2}\right)$ :  $|(-1)^n - a| < \frac{1}{2}$ .

1. Fall:  $N\left(\frac{1}{2}\right)$  ist gerade. Dann ist auch  $n := N\left(\frac{1}{2}\right)$  gerade und es gilt

$$|a_n - a| = |(-1)^n - a| = |1 - a| < \frac{1}{2}.$$

Weiterhin ist dann  $n' := N\left(\frac{1}{2}\right) + 1$  ungerade und somit

$$|a_{n'} - a| = |(-1)^{n'} - a| = |-1 - a| = |1 + a| < \frac{1}{2}.$$

Es folgt insgesamt  $2 = |1 - a + (1 + a)| \stackrel{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} |1 - a| + |1 + a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ .  
Widerspruch!

2. Fall:  $N\left(\frac{1}{2}\right)$  ist ungerade. Dann ist  $n := N\left(\frac{1}{2}\right) + 1$  gerade und  $n' := N\left(\frac{1}{2}\right) + 2$  ungerade, so dass analog ein Widerspruch konstruiert werden kann.

- (c) Es sei  $\varepsilon > 0$  beliebig und fest. Als  $N(\varepsilon)$  wählen wir ein  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit  $N(\varepsilon) > \max\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ .  
(Dieses existiert nach dem Archimedischen Axiom.)

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N(\varepsilon)$ . Dann gilt  $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \iff \frac{1}{n^2} < \varepsilon$ .

Aus  $n > \sqrt{2} > 0$  folgt  $n^2 > 2$  und  $n^4 - n^2 + 1 = n^2 \underbrace{(n^2 - 1)}_{>1} + 1 > n^2$  und somit

$$\left| \frac{1}{n^4 - n^2 + 1} - 0 \right| = \frac{1}{n^4 - n^2 + 1} < \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Bemerkung: Wir brauchen nur irgendein  $N(\varepsilon)$ , nicht zwingend das kleinstmögliche.

**Zusatzaufgabe 4.8:**

Untersuchen Sie für ein festes  $x \in \mathbb{R}$  das Konvergenzverhalten der Folge  $a_n := x^n$ . Betrachten Sie dabei die Fälle  $|x| < 1$ ,  $x = 1$ ,  $x = -1$  und  $|x| > 1$ .

**Hinweis:** Zusatzaufgabe 4.3 (e) und (f).

**Lösung zu Zusatzaufgabe 4.8:**

siehe Forster, Analysis 1, S.31, Beispiel (4.7).

## Zusatzmaterial zur Analysis I – Übung zu Serie 5

### Rechenregeln für konvergente Folgen<sup>1</sup>

- Seien  $a_n, b_n$  konvergente Folgen in  $\mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Dann gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab.$$

Im Fall  $b \neq 0$  gilt außerdem: es gibt ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $b_n \neq 0$  für  $n \geq N$ , und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}.$$

- Seien  $a_n, b_n$  konvergente Folgen in  $\mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Existiert ein  $N$ , so dass  $a_n \geq b_n$  für alle  $n \geq N$ , so gilt  $a \geq b$ .

Insbesondere folgt aus  $A \leq a_n \leq B$  für alle  $n \geq N$  auch  $A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq B$ .

- Gilt  $a_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  (bzw.  $a_n < 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ) und ist  $a_n$  eine Nullfolge, so divergiert die Folge  $\frac{1}{a_n}$  bestimmt gegen  $+\infty$  (bzw. gegen  $-\infty$ ).
- Divergiert  $a_n$  bestimmt gegen  $+\infty$  (bzw. gegen  $-\infty$ ), dann gibt es ein  $N$ , so dass  $a_n \neq 0$  für alle  $n \geq N$ , und die für  $n \geq N$  definierte Folge  $\frac{1}{a_n}$  ist dann eine Nullfolge.

### Cauchy-Folge, Vollständigkeitsaxiom, Satz von Bolzano-Weierstraß

- Eine Folge  $a_n$  in  $\mathbb{R}$  heißt **Cauchy-Folge**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : (n, m \geq N(\varepsilon) \implies |a_n - a_m| < \varepsilon)$$

- Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.<sup>2</sup> Die Umkehrung heißt

- **Vollständigkeitsaxiom:**<sup>3</sup> In  $\mathbb{R}$  konvergiert jede Cauchy-Folge.

**Achtung:** Eine Cauchy-Folge  $a_n \in \mathbb{Q}$  braucht dagegen keinen Grenzwert in  $\mathbb{Q}$  (dem Körper der rationalen Zahlen) zu besitzen. Eine Konsequenz aus der Vollständigkeit ist der

- **Satz von Bolzano-Weierstraß:**<sup>4</sup>

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge, d.h. gilt  $|a_n| \leq M$  für alle  $n$ , dann gibt es Indizes  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ , so dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$  existiert.

- Die Grenzwerte von Teilfolgen nennt man auch **Häufungspunkte** der Folge.
- Aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß folgt, dass jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge konvergiert. Ebenso konvergiert jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge.<sup>5</sup>
- Insbesondere kann man reelle Zahlen in  $b$ -adische Brüche entwickeln, welche man als Reihen auffassen kann. Dabei ist eine **Reihe** die zu einer Folge  $a_k$  zugehörige Folge der Partialsummen  $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$ . Im Fall der Existenz nennen wir den Grenzwert abkürzend  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .
- Genauso kann man aufgrund der Folgerung aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß Wurzeln von positiven reellen Zahlen bilden (siehe unten).

<sup>1</sup>vgl. Forster, §4, Sätze 3,4,5 sowie 8,9

<sup>2</sup>vgl. Forster, §5, Satz 1

<sup>3</sup>vgl. Forster, §5, S. 44

<sup>4</sup>vgl. Forster, §5, Satz 6 benannt nach den Mathematikern Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848) und Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815-1897)

<sup>5</sup>vgl. Forster, §5, Satz 7

**Zusatzaufgabe 5.1:** Bestimmen Sie durch Anwendung der Rechenregeln für Folgen die Grenzwerte

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 6n + 1}{n^2 - 6n - 1} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 1}{2n + 3} - \frac{n^3 + 1}{2n^2 - 1} \right) \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!} \quad (d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{6^n}{4^n + 1} - \frac{3^{n-1}}{2^n - 1} \right)$$

**Lösung zu Zusatzaufgabe 5.1:**

(a) Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 6n + 1}{n^2 - 6n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left( 1 + \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left( 1 - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1 + 0 + 0}{1 - 0 + 0} = 1.$$

(b) Da die einzelnen Summanden gegen  $+\infty$  bestimmt divergieren, müssen wir hier zunächst zusammenfassen und erhalten dann

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{2n + 3} - \frac{n^3 + 1}{2n^2 - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1)(2n^2 - 1) - (n^3 + 1)(2n + 3)}{(2n + 3)(2n^2 - 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^3 + n^2 - 2n - 4}{4n^3 + 6n^2 - 2n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{4}{n^3}}{4 + \frac{6}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}} = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

(c) Für alle  $n \geq 3$  gilt  $0 \leq \frac{n^2}{n!} \leq \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)}$  und somit  $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)}$ .

Da nun  $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{0}{1 - 0 + 0} = 0$ , folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!} = 0.$$

(d) Wiederum divergieren die einzelnen Summanden bestimmt gegen  $+\infty$ . Wegen

$$\frac{6^n}{4^n + 1} - \frac{3^{n-1}}{2^n - 1} = \frac{12^n - 6^n - 4 \cdot 12^{n-1} - 3^{n-1}}{8^n - 4^n + 2^n - 1} = \frac{12^{n-1} \left( 12 - 6 \frac{1}{2^{n-1}} - 4 - \frac{1}{4^{n-1}} \right)}{12^{n-1} \left( 8 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1} - 4 \frac{1}{3^{n-1}} + 2 \frac{1}{6^{n-1}} - \frac{1}{12^{n-1}} \right)}$$

sehen wir, dass in der Klammer des Nenners nur Nullfolgen stehen, während in der Klammer des Zählers eine gegen 8 konvergente Folge steht. Demzufolge handelt es sich um eine unbeschränkte, also in keinem Fall konvergente Folge, so dass kein Grenzwert existiert.

**Zusatzaufgabe 5.2:**

(a) Sei  $a > 0$  eine reelle und  $k \geq 2$  eine natürliche Zahl. Beweisen Sie, dass für jeden Startwert  $x_0 > 0$  die rekursiv durch

$$x_{n+1} := \frac{1}{k} \left( (k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right)$$

definierte Folge gegen die (d.h. eindeutige) positive Lösung der Gleichung  $x^k = a$  konvergiert. Diese bezeichnet man mit  $\sqrt[k]{a}$  und nennt sie die (positive)  $k$ -te Wurzel von  $a$ .

(b) Sei  $k \geq 2$  eine beliebige natürliche Zahl und  $a_n$  eine konvergente Folge nicht-negativer reeller Zahlen mit Grenzwert  $a \geq 0$ . Zeigen Sie, dass dann die durch  $b_n := \sqrt[k]{a_n}$  gegebene Folge gegen den Grenzwert  $b := \sqrt[k]{a}$  konvergiert.

(c) Bestimmen Sie die Grenzwerte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^4 + n^2} + \sqrt{n}}{n \sqrt[3]{n} + n + 1}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1} \right)$ .

**Lösung zu Zusatzaufgabe 5.2:**

(a) Wie gehen in mehreren Schritten vor:

(i) Es gilt  $\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_n > 0$ :

Induktionsanfang: Nach Voraussetzung gilt  $x_0 > 0$ . (A(0))

Induktionsschluss:

Induktionsvoraussetzung: Für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  gelte  $x_n > 0$ . (A(n))

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch  $x_{n+1} > 0$ . (A(n+1))

Beweis: Aus  $x_n > 0$  folgt

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left( \underbrace{(k-1)}_{\geq 1} \underbrace{x_n}_{>0} + \underbrace{\frac{a}{x_n^{k-1}}}_{>0} \right) > 0.$$

(ii) Es gilt  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n^k \geq a$ , denn für beliebiges  $n+1 \geq 1$  folgt aus (i) sofort

$$\begin{aligned} x_{n+1}^k &= \left( \frac{k-1}{k} x_n + \frac{a}{k x_n^{k-1}} \right)^k \\ &= \left( x_n + \frac{a - x_n^k}{k x_n^{k-1}} \right)^k = x_n^k \left( 1 + \frac{a - x_n^k}{k x_n^k} \right)^k \stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} x_n^k \left( 1 + \frac{a - x_n^k}{x_n^k} \right) = a \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Bernoulli-Ungleichung  $(1+y)^k \geq 1+ky$  benutzt haben (was wegen  $\frac{a-x_n^k}{k x_n^k} = \frac{1}{k} \left( \frac{a}{x_n^k} - 1 \right) \geq -1$  auch erlaubt ist).

(iii) Die Folge  $x_n$  ist monoton fallend, denn

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{k} \left( (k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right) - x_n \\ &= \left( 1 - \frac{1}{k} \right) x_n - x_n + \frac{a}{k x_n^{k-1}} = \frac{1}{k} x_n \left( \frac{a}{x_n^k} - 1 \right) \leq 0 \end{aligned}$$

wegen  $x_n^k \geq a$  (wie in (ii) gezeigt) und  $x_n > 0$  (wie in (i) gezeigt).

Also ist die Folge  $x_n$  nach unten beschränkt (durch 0) und monoton fallend, konvergiert also (Folgerung aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß, vgl. Forster, §5, Satz 7). Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen ergibt sich, dass der Grenzwert  $x$  dann

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left( (k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right) = \frac{1}{k} \left( (k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}} \right)$$

erfüllt und daher auch  $kx = (k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}}$ , d.h.  $x^k = a$ .

Außerdem ist die positive Lösung dieser Gleichung eindeutig, denn aus

$$0 = x^k - y^k = (x-y) \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j} y^j = (x-y) \left( x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + xy^{k-2} + y^{k-1} \right)$$

(vgl. Übungsaufgabe 1.2(b)) folgt wegen der Positivität der Klammer sofort  $x = y$ .

(b) Wie in Übungsaufgabe 1.2(b) bereits per Induktion bewiesen wurde, gilt

$$a_n - a = b_n^k - b^k = (b_n - b) \sum_{j=0}^{k-1} b_n^{k-1-j} b^j = (b_n - b) \left( b_n^{k-1} b^0 + b_n^{k-2} b^1 + \dots + b_n b^{k-2} + b_n^0 b^{k-1} \right).$$

Die zweite Klammer ist in jedem Fall nicht negativ.

- Ist  $a = 0$  (und also auch  $b = 0$ ), dann erhält man  $|a_n| = |b_n|^k$ . Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig, dann gibt es zu  $\varepsilon^k$  ein  $N$  mit  $|a_n| \leq \varepsilon^k$  für  $n \geq N$ , und mit diesem  $N$  gilt dann auch  $|b_n| \leq \varepsilon$  für  $n \geq N$ .
- Ist  $a > 0$ , also auch  $b > 0$ , dann gibt es aufgrund der Konvergenz der Folge  $a_n$  gegen  $a$  ein

$$M := M \left( \frac{a(2^k - 1)}{2^k} \right),$$

so dass  $a_n > \frac{a}{2^k} > 0$  und somit  $b_n > \frac{b}{2} > 0$  für alle  $n \geq M$ . Also kann man ohne Bedenken durch die zweite Klammer dividieren und anschließend auf beiden Seiten den Betrag nehmen. Damit ergibt sich

$$|b_n - b| = \frac{|a_n - a|}{\left( b_n^{k-1} b^0 + b_n^{k-2} b^1 + \dots + b_n b^{k-2} + b^{k-1} \right)} \leq \frac{|a_n - a|}{b^{k-1}}$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig, dann gibt es zu diesem  $\varepsilon > 0$  ein  $N$  mit  $|a_n - a| \leq b^{k-1}\varepsilon$  für  $n \geq N$ , und mit diesem  $N$  gilt dann auch  $|b_n - b| \leq \varepsilon$  für  $n \geq N$ .

Dies beweist in beiden Fällen die Konvergenz von  $b_n$  gegen  $b$ .

(c) Unter Verwendung von Aufgabenteil (b) und den Rechenregeln für Grenzwerte ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^4 + n^2} + \sqrt{n}}{n\sqrt[3]{n} + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\sqrt[6]{n^5}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}} = \frac{\sqrt[3]{2+0} + 0}{1+0+0} = \sqrt[3]{2}$$

für den ersten Grenzwert. Da beim zweiten Grenzwert die beiden Terme  $\sqrt{n^2+1}$  und  $\sqrt{n^2-1}$  gegen  $+\infty$  bestimmt divergieren, darf man beim Subtrahieren keine Rechenregeln für Folgen anwenden!

Stattdessen erweitern wir für  $n \geq 2$  geschickt mittels dritter Binomischer Formel und erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1) - (n^2-1)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = 0 \end{aligned}$$

wegen  $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$  und somit  $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

**Zusatzaufgabe 5.3:** Berechnen Sie die  $N$ -te Partialsumme und den Grenzwert von

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 9} \qquad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n^2 - 1)}$$

**Lösung zu Zusatzaufgabe 5.3:**

$$(a) \text{ Partialbruchzerlegung liefert die Identität } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+3} \right).$$

Also ergibt sich für die  $N$ -te Partialsumme

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+3} \right) \stackrel{l=n-1, k=n+2}{=} \frac{1}{3} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{2(l+1)-3} - \frac{1}{3} \sum_{k=3}^{N+2} \frac{1}{2(k-2)+3} \\ &= \frac{1}{3} \left( \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{2n-1} \right) \quad (\text{Rücksubstitution } n = l = k) \\ &= \frac{1}{3} \left( -1 + 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2(N+1)-1} - \frac{1}{2(N+2)-1} \right). \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 9} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{1}{9}.$$

$$(b) \text{ Partialbruchzerlegung liefert } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n^2 - 1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n(n+1)} \right).$$

Also ergibt sich für die  $N$ -te Partialsumme

$$S_N = \sum_{n=2}^N \left( \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n(n+1)} \right) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(n+1)((n+1)-1)} - \sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N(N+1)}$$

und als Grenzwert somit

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n^2 - 1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{1}{2}.$$

## Zusatzmaterial zur Analysis I – Übung zu Serie 6

### Supremum, Infimum, Teilfolgen, Häufungspunkte, Limes superior, Limes inferior

(a) Sei  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$  beschränkt. Dann heißt  $K$  das **Supremum** von  $A$  genau dann, wenn

- (i)  $\forall x \in A : x \leq K$  (d.h.  $K$  ist eine obere Schranke für  $A$ ) und
- (ii)  $\forall \tilde{K} \in \mathbb{R} \left( (\forall x \in A : x \leq \tilde{K}) \implies K \leq \tilde{K} \right)$  (d.h.  $K$  ist kleinstmöglich)

Wir schreiben  $\sup(A) = K$ . Entsprechend heißt  $K$  das **Infimum** von  $A$  genau dann, wenn

- (i)  $\forall x \in A : x \geq K$  (d.h.  $K$  ist eine untere Schranke für  $A$ ) und
- (ii)  $\forall \tilde{K} \in \mathbb{R} \left( (\forall x \in A : x \geq \tilde{K}) \implies K \geq \tilde{K} \right)$  (d.h.  $K$  ist größtmöglich)

Wir schreiben  $\inf(A) = K$ . Jede nichtleere beschränkte Teilmenge aus  $\mathbb{R}$  besitzt sowohl ein Infimum als auch ein Supremum.<sup>1</sup> Für nach oben unbeschränkte Mengen  $B$  setzen wir  $\sup(B) := +\infty$ . Für nach unten unbeschränkte Mengen  $B$  setzen wir entsprechend  $\inf(B) := -\infty$ .

Ist  $A$  eine indizierte Menge, d.h. gibt es eine beliebige Indexmenge  $I \neq \emptyset$ , so dass  $A = \bigcup_{i \in I} \{a_i\}$ , so schreiben wir auch  $\sup_{i \in I} a_i$  anstelle von  $\sup(A)$  und entsprechend  $\inf_{i \in I} a_i$  anstelle von  $\inf(A)$ .

(b) Besitzt eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit Grenzwert  $a$  (d.h. dann also  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ ), so nennen wir  $a$  einen **Häufungspunkt** der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Eine konvergente Folge besitzt genau einen Häufungspunkt, d.h. aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$  folgt auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$  für jede Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Insbesondere können wir die Konvergenz einer jeden Teilfolge aus der Konvergenz von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  schließen.

(c) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen. Der **Limes superior** und der **Limes inferior** werden dann definiert durch

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k$$

Insbesondere fällt der Limes superior mit dem größten und der Limes inferior mit dem kleinsten Häufungspunkt zusammen. Für konvergente Folgen gilt somit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n .$$

### Reihen

(a) Zu jeder Folge  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$  bezeichnet  $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$  die  $n$ -te **Partialsumme** von  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ .

(b) Die **Reihe** einer zugehörigen Folge  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$  ist die Folge  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \right\}_{n=1}^{\infty}$  der  $n$ -ten Partialsummen.

(c) Eine Reihe heißt **konvergent**, wenn für die Folge  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  der Partialsummen eine Zahl  $S \in \mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  existiert.

*Bezeichnung:*  $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$

**ACHTUNG:** Häufig ist mit  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  auch die Reihe selbst gemeint, unabhängig davon, ob sie konvergent ist oder nicht.

(d) Eine Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  konvergiert.

<sup>1</sup>vgl. Forster, §9, Satz 3

## Hinreichende Konvergenzkriterien für Reihen

- **CAUCHYSches Konvergenzkriterium:** (vgl. Forster, § 7 Satz 1)

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert genau dann, wenn gilt:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , so dass  $\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$  für alle  $n \geq m \geq N(\varepsilon)$ .

- **LEIBNIZ-Kriterium:** (vgl. Forster, § 7 Satz 4)

Sei  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ . Dann

konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ .

- **Majorantenkriterium:** (vgl. Forster, § 7 Satz 6)

Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  eine konvergente Reihe mit  $c_k \geq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Weiter sei  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine Folge

mit  $|a_k| \leq c_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut.

- **Quotientenkriterium:** (Folgerung aus dem Majorantenkriterium) (vgl. Forster, § 7 Satz 7)

Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine Reihe mit  $a_k \neq 0$  für alle  $k \geq k_0$ . Weiterhin gebe es eine reelle Zahl  $\theta$  mit

$0 < \theta < 1$ , so dass  $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq \theta$  für alle  $k \geq k_0$ . Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut.

- **Wurzelkriterium:** (Folgerung aus dem Majorantenkriterium)

Sei  $0 < q < 1$  eine feste Zahl und  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine Reihe mit  $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$  für alle  $k \geq k_0$  mit einem

$k_0 \in \mathbb{N}$ . Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut.

### Bemerkungen:

(a) Beim Quotienten- und Wurzelkriterium genügt es offenbar bereits, ein  $\tilde{\theta} < 1$  zu finden, für welches  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq \tilde{\theta}$  bzw.  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \tilde{\theta}$  gilt.

(b) Das CAUCHY'sche Konvergenzkriterium ist auch eine **notwendige** Bedingung für die Konvergenz einer Reihe.

(c) Eine **notwendige** Bedingung für die Konvergenz einer Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ . Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend.

( Bsp.:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ , aber  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$  ... **harmonische Reihe.** )

(vgl. Forster, § 7 Satz 2 und Beispiel (7.1))

(d) Eine weitere **hinreichende** Bedingung für die Konvergenz einer Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist die absolute Konvergenz. Sie ist jedoch nicht notwendig.

( Beispiel:  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$  ist konvergent nach dem Leibniz-Kriterium, jedoch nicht absolut kon-

vergent, denn wie eben erwähnt ist  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  bestimmt divergent gegen  $\infty$ . )

(vgl. Forster, § 7 Satz 5 und Beispiele (7.3) und (7.1))

(e) Das sogenannte **Minorantenkriterium** ist ein Kriterium für die Divergenz einer Reihe.

Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  eine bestimmt divergente Reihe mit  $c_k \geq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Weiter sei  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$

eine Folge mit  $a_k \geq c_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Dann divergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

### Zusatzaufgabe 6.1:

Zeigen Sie, dass die  $k$ -te Wurzel streng monoton wachsend ist.

### Lösung zu Zusatzaufgabe 6.1:

Eine Funktion  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton  $\iff (\forall x, y \in A : (y > x \implies f(y) > f(x)))$ .

In Aufgabe 1.2 (b) haben wir per Induktion gezeigt, dass  $a^k - b^k = (a - b) \sum_{j=0}^{k-1} a^j b^{k-1-j}$  für beliebige reelle Zahlen  $a, b$  gilt. Demnach ergibt sich für die  $k$ -te Wurzel aus  $y > x \geq 0$  somit auch

$$\sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{x} = \frac{y - x}{\sum_{j=0}^{k-1} (\sqrt[k]{x})^j (\sqrt[k]{y})^{k-1-j}} > 0$$

da der Nenner aus nichtnegativen Summanden besteht und mit  $(\sqrt[k]{x})^0 (\sqrt[k]{y})^{k-1-0} = (\sqrt[k]{y})^{k-1}$  mindestens ein Term echt positiv ist. Aus  $y > x$  folgt demnach  $\sqrt[k]{y} > \sqrt[k]{x}$ , was die strenge Monotonie der Wurzel bedeutet.

**Zusatzaufgabe 6.2:** Berechnen Sie mittels Rechenregeln für konvergente Folgen die Grenzwerte

- (a)  $\frac{3n}{3^n}$       (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+10} - \sqrt{n}}$       (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n(n-1)}$   
(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+7}$       (e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 1} - n)$       (Hinweis:  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ )

### Lösung zu Zusatzaufgabe 6.2:

(a) Da für  $n \geq 2$  die Abschätzung  $3^n = (1+2)^n \geq \binom{n}{2} 2^2 = 2n(n-1)$  erfüllt ist, erhalten wir

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{3^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n(n-1)} = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} = 0,$$

also insgesamt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{3^n} = 0$ .

(b) Unter zusätzlicher Verwendung der Zusatzaufgabe 5.2 (b) erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+10} - \sqrt{n}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+10} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+10} - \sqrt{n})(\sqrt{n+10} + \sqrt{n})} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n+10} + \sqrt{n})}{((n+10) - n)(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{((n+1) - (n-1))(\sqrt{n+10} + \sqrt{n})}{10(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} \right) \\ &= \frac{2}{10} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{1 + \frac{10}{n}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \right) = \frac{2}{10} \cdot \frac{\sqrt{1+0} + 1}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = \frac{2}{10} \end{aligned}$$

(c) Für alle  $n \geq 2$  gilt  $1 \leq \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n(n-1)} \leq \sqrt[n]{n^2} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}$ . Da nun  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right) = 1 \cdot 1 = 1 \text{ nach Aufgabe 5.4 (b), folgt auch}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n(n-1)} = 1.$$

(d) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $1 \leq \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n+7} \leq \sqrt[n]{8n} = \sqrt[n]{8} \cdot \sqrt[n]{n}$ . Da nun  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{8} \cdot \sqrt[n]{n}) = 1 \cdot 1 = 1 \text{ nach Aufgabe 5.4 (a) und (b), folgt auch } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+7} = 1.$$

$$\begin{aligned}
(e) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 1} - n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n^3 + 2n^2 + 1) - n^3}{\sqrt[3]{(n^3 + 2n^2 + 1)^2 + n^3 \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 1} + n^2}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}} + 1}} \right) = \frac{2 + 0}{\sqrt[3]{(1 + 0 + 0)^2 + \sqrt[3]{1 + 0 + 0} + 1}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

**Zusatzaufgabe 6.3:** Prüfen Sie mittels Konvergenzkriterien, ob die folgenden Reihen konvergieren:

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2 + 1} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{7k - 4} \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k} \quad (d) \sum_{k=1}^{\infty} k 3^{-k^2} \quad (e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + (-1)^{k+1}}$$

**Lösung zu Zusatzaufgabe 6.3:**

(a) Bei  $a_k = \frac{k}{k^2 + 1}$  handelt es sich wegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{k}{k^2 + 1} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{1}{k^2}} \right) = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{k+1}{(k+1)^2 + 1} < \frac{k}{k^2 + 1} &\iff (k^2 + 1)(k+1) < k(k+1)^2 + k \\
&\iff k^3 + k^2 + k + 1 < k^3 + 2k^2 + 2k \\
&\iff 1 < k^2 + k
\end{aligned}$$

um eine **monotone** (hier monoton fallende) **Nullfolge**. Nach dem Leibnizkriterium ist demnach die **alternierende** Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2 + 1}$  konvergent.

(b) Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{7k - 4}$  divergiert, da die Folge  $(-1)^k \frac{k}{7k - 4}$  wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{k}{7k - 4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{7 - \frac{4}{k}} \right) = \frac{1}{7 - 0} = \frac{1}{7}$$

**keine Nullfolge** ist (notwendiges Kriterium verletzt!), sondern nur die beiden Häufungspunkte  $\pm \frac{1}{7}$  besitzt.

$$(c) \text{ Wegen } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{(k+1)^3}{2^{k+1}}}{\frac{k^3}{2^k}} \right) = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{k^3} \right) = \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{oder wegen } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{k^3}{2^k}} = \frac{1}{2} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} \right)^3 = \frac{1}{2} \cdot 1^3 = \frac{1}{2} < 1$$

konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}$  nach Quotienten- oder Wurzelkriterium.

(d) Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} k 3^{-k^2}$  konvergiert nach dem Wurzelkriterium, denn es gilt

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{k}{3^{k^2}}} = \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3^k} \right) \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} \right) = 0 \cdot 1 = 0.$$

(e) Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + (-1)^{k+1}}$  divergiert nach dem Minorantenkriterium mit der harmonischen Reihe als divergente Minorante, denn wegen  $0 \leq k + (-1)^{k+1} \leq k + 1$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + (-1)^{k+1}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \stackrel{n=k+1}{=} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

**Zusatzaufgabe 6.4:** Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren:

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+4} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3+1} \quad (d) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{mit} \quad a_k := \begin{cases} 3^{-k} & \text{für gerade } k \\ 5^{-k} & \text{für ungerade } k \end{cases}$$

**Lösung zu Zusatzaufgabe 6.4:**

(a) Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+4}$  divergiert (bestimmt gegen  $+\infty$ ) nach dem Minorantenkriterium, denn da  $\frac{k}{k^2+4} \geq \frac{1}{2k}$  für  $k \geq 2$  aufgrund der Äquivalenz zu  $2k^2 \geq k^2+4$  gilt, ist  $\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$  eine divergente Minorante der Reihe  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^2+4}$ , welche somit nach dem Minorantenkriterium bestimmt gegen  $+\infty$  divergiert.

(b) Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  konvergiert nach dem Majorantenkriterium, denn für alle  $k \geq 2$  erhalten wir  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$  wegen  $k^2 \geq k^2 - k$  und als Majorante die konvergente Teleskopreihe

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = 1 \end{aligned}$$

(c) Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3+1}$  konvergiert (sogar absolut), denn da  $\frac{k+1}{k^3+1} \leq \frac{2}{k^2}$  für  $k \geq 1$  aufgrund der Äquivalenz zu  $k^3+k^2 \leq 2k^3+2$  gilt, ist  $2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  eine konvergente Majorante der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3+1}$ , welche somit nach dem Majorantenkriterium konvergiert.

(d) Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  mit  $a_k := 3^{-k}$  für gerade  $k$  und  $a_k := 5^{-k}$  für ungerade  $k$  konvergiert (sogar absolut), denn es gilt

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \max\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{3} < 1 \quad ,$$

also konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium. Man bemerke, dass das Quotientenkriterium hier nicht anwendbar ist, denn  $\frac{a_{k+1}}{a_k}$  wechselt immer zwischen  $\frac{5^{-(k+1)}}{3^{-k}} = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^k < 1$  und  $\frac{3^{-(k+1)}}{5^{-k}} = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{3}\right)^k > 1$  (für  $k \geq 3$ ) hin und her.

**Hinweis:** Dies ist ein Beispiel dafür, dass das Quotientenkriterium kein notwendiges, sondern nur ein hinreichendes Kriterium ist.

**Zusatzaufgabe 6.5:** Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

**Lösung zu Zusatzaufgabe 6.5:**

(a) Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$  konvergiert (sogar absolut) nach dem Quotientenkriterium, denn es gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^4}{3^{n+1}}}{\frac{n^4}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^4} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 = \frac{1}{3} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}\right)^4 = \frac{1}{3}.$$

Somit gibt es ein  $N$  (wähle beispielsweise ein  $N(\frac{1}{6})$  zur obigen konvergenten Folge), so dass

$$\forall n \geq N : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Damit haben wir  $q = \frac{1}{2} < 1$  wie für das Quotientenkriterium benötigt gefunden.

(b) Zunächst halten wir fest, dass sich aus der Bernoulli-Ungleichung die Abschätzung

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2 \quad (6.1b)$$

ergibt. Demnach ist das Quotientenkriterium mit  $q := \frac{1}{2} < 1$  anwendbar, denn für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{2}.$$

Also konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$  (sogar absolut).

(c) Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$  konvergiert (sogar absolut) nach dem Wurzelkriterium, denn mit (6.1b) folgt für alle  $n \in \mathbb{N}$  wiederum sofort

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n \cdot n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{2} < 1.$$

**Zusatzaufgabe 6.6:** Bestimmen Sie mittels geometrischer Reihe/Exponentialreihe die Grenzwerte:

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-2k} \quad (b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{15 + 9(-7)^k}{11^k} \quad (b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{7 + 5^k}{k!} \quad (d) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{3k}}{(k+1)!}$$

**Lösung zu Zusatzaufgabe 6.6:**

(a) Mittels geometrischer Reihe erhalten wir  $\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-2k} = \sum_{k=1}^{\infty} 9^{-k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^k\right) - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} - 1 = \frac{1}{8},$

die triadische Entwicklung von  $\frac{1}{8}$  lautet also 0.010101...

(b) Mittels geometrischer Reihen erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{15 + 9(-7)^k}{11^k} = 15 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{11^k} + 9 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-7}{11}\right)^k = 15 \frac{1}{1 - \frac{1}{11}} + \frac{9}{1 + \frac{7}{11}} = \frac{33}{2} + \frac{11}{2} = 22.$$

(c) Es ergibt sich  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7 + 5^k}{k!} = 7 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} = 7 \exp(1) + \exp(5) = 7e + e^5 \approx 167, 4411 \dots$

(d) Mittels Exponentialreihe erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{3k}}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-8)^k}{(k+1)!} = -\frac{1}{8} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-8)^k}{k!}\right) + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} \exp(-8) + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} e^{-8} + \frac{1}{8} \approx 0.1249 \dots$$

## Zusatzmaterial zur Analysis I – Übung zu Serie 7

### Endliche/Unendliche Mengen, Abzählbarkeit, Überabzählbarkeit

- Seien  $X$  und  $Y$  Mengen. Dann heißt  $X$  **gleichmächtig** zu  $Y$  genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  gibt. Offenbar ist  $X$  genau dann gleichmächtig zu  $Y$ , wenn  $Y$  gleichmächtig zu  $X$  ist. Wir schreiben  $|X| = |Y|$ .
- Eine Menge  $X$  heißt **endlich** genau dann, wenn es ein  $n \in \mathbb{N}_0$  gibt, so dass  $X$  gleichmächtig zur Menge  $\{k \in \mathbb{N}_0 : k < n\} = \{0, 1, \dots, n-1\}$  ist. Andernfalls heißt  $X$  **unendlich**.

**Satz 7.1(z):** Im Fall der Endlichkeit ist die obige Zahl  $n$  eindeutig bestimmt (Anzahl der Elemente von  $X$ ). Wir schreiben  $|X| = n$  und nennen dies die **Mächtigkeit** der Menge  $X$ . Insbesondere ist  $\emptyset$  endlich mit  $|\emptyset| = 0$ .

**Satz 7.2(z):** Die Menge der natürlichen Zahlen ist unendlich.

- Eine Menge  $X$  heißt **abzählbar unendlich** genau dann, wenn  $X$  gleichmächtig zu  $\mathbb{N}$  ist.
- Eine Menge  $X$  heißt **abzählbar**, falls  $X$  endlich oder abzählbar unendlich ist. Andernfalls heißt  $X$  **überabzählbar**.

**Satz 7.3(z):** Die Menge  $X \neq \emptyset$  ist abzählbar  $\iff \exists f : \mathbb{N} \rightarrow X$  surjektiv

**Satz 7.4(z):** Sei  $A \subset \mathbb{N}$ . Dann ist  $A$  genau dann endlich, wenn  $A$  beschränkt ist. Insbesondere heißt dies, dass  $A$  genau dann unendlich ist, wenn  $A$  unbeschränkt ist.

**Satz 7.5(z):** Ist  $Y$  endlich und  $X \subset Y$ , dann ist auch  $X$  endlich mit  $|X| \leq |Y|$ .

**Satz 7.6(z):** Ist  $Y$  abzählbar und  $X \subset Y$ , dann ist auch  $X$  abzählbar.

#### • Beispiele:

- Die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen ist abzählbar.
- Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar (vgl. Forster §9, Satz 1).
- Die Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen ist abzählbar (vgl. Forster §9, Corollar 1 zu Satz 1).
- Die Menge  $\mathbb{R}$  aller reellen Zahlen ist überabzählbar (vgl. Forster §9, Satz 2). Insbesondere ist  $]0, 1[$  und daher auch jedes nichtleere offene Intervall  $]a, b[$  überabzählbar.
- Die Menge  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  der irrationalen Zahlen ist überabzählbar (Forster §9, Corollar zu Satz 2).

### Intervalle als Teilmengen von $\mathbb{R}$

- Intervalle der Gestalt  $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  für reellen Zahlen  $a \leq b$  heißen **abgeschlossen**.
- Intervalle der Gestalt  $]a, b[ := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  für reelle Zahlen  $a < b$  heißen **offen**.
- Intervalle der Form  $[a, b[ := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  sowie  $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$  für reelle Zahlen  $a < b$  nennt man **halboffen**.
- **Uneigentliche** Intervalle sind für beliebiges  $a \in \mathbb{R}$  Intervalle der Gestalt

$$\begin{aligned} [a, +\infty[ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}, & ]-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}, \\ ]a, +\infty[ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, & ]-\infty, a[ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}. \end{aligned}$$

- Die Menge der reellen Zahlen wird manchmal auch als  $] - \infty, \infty [$  dargestellt.

- Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine **numerische** Folge, d.h.  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \bar{\mathbb{R}}$ , und sei  $a \in \bar{\mathbb{R}}$ .
  - Ist  $a \in \mathbb{R}$ , so definieren wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a : \iff$ 

$$\left( \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \implies a_n \in \mathbb{R}) \right) \wedge \left( \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \implies |a_n - a| < \varepsilon) \right)$$
  - Ist  $a = \infty$ , so definieren wir
 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a : \iff \forall K \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \implies a_n > K)$$
  - Ist  $a = -\infty$ , so definieren wir
 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a : \iff \forall K \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \implies a_n < K)$$

- Sei  $D \subset \bar{\mathbb{R}}$  und seien  $a, c \in \bar{\mathbb{R}}$ . Weiterhin betrachten wir eine **numerische** Funktion  $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ .
  - Als den **Grenzwert einer Funktion an der Stelle**  $a$  definieren wir nun  $c = \lim_{x \rightarrow a} f(x) : \iff$ 

$$\left( \exists (\xi_n)_n \text{ aus } D : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = a \right) \wedge \left( \forall \text{ Folge } (x_n)_n \text{ aus } D : \left( \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \right) \implies \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c \right) \right) \right)$$

**Bemerkung:** Dies ist der Grenzwertbegriff für eine Funktion nach Dieudonné bzw. Bourbaki. Insbesondere im Fall isolierter Punkte des Definitionsbereiches  $D$  wird hier die Existenz eines Grenzwertes der Funktion sichergestellt.

- Bezeichne nun  $P(x)$  eine Eigenschaft von  $x$  und  $E = \{x \in D \mid P(x)\}$  sowie  $f|_E : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  die Einschränkung der Funktion  $f$  auf die Menge  $E$ . Dann definieren wir

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ P(x)}} f(x) = c \quad : \iff \quad \lim_{x \rightarrow a} f|_E(x) = c$$

Somit lassen sich die **einseitigen Grenzwerte** definieren durch

$$\lim_{x \searrow a} f(x) := \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow a} f(x) := \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$$

**Bemerkung:** Der klassische Grenzwertbegriff für eine Funktion nach Weierstraß ist

$$"c = \lim_{x \rightarrow a} f(x)" \quad : \iff \quad c = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x).$$

- Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $a \in D$ . Die Funktion  $f$  heißt **stetig im Punkt**  $a$ , falls  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Die Funktion  $f$  heißt **stetig in**  $D$ , falls  $f$  in jedem Punkt von  $D$  stetig ist.

**Zusatzaufgabe 7.1:**

Konvergiert die Reihe  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  gegen denselben Grenzwert wie die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots - \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} + \frac{1}{2n+3} + \dots \quad ?$$

**Lösung zu Zusatzaufgabe 7.1:**

Nein, denn die Reihe  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  lässt sich als  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$  darstellen und ist konvergent nach dem LEIBNIZ-Kriterium, aber wegen  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$  nicht absolut konvergent. Sei  $S$  ihr Grenzwert. Die zweite Reihe ist eine Umordnung der ersten, und da für die Partialsummen  $S_n$  bzw.  $T_n$  der ersten bzw. zweiten Reihe wegen

$$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \frac{8k - 4k - (4k - 2)}{(4k - 2)(4k)} = \frac{1}{(2k - 1)(4k)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2k - 1} - \frac{1}{2k} \right)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Gleichung  $T_{3n} = \frac{1}{2}S_{2n}$  gilt und außerdem die Einzelglieder gegen Null konvergieren, man also zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N$  mit  $|T_{3n-1} - T_{3n}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ ,  $|T_{3n-2} - T_{3n}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$  für alle  $n \geq N$  findet, gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}S_{2n} = \frac{1}{2}S$ . Also konvergiert auch die Umordnung, aber nur gegen den halben Grenzwert  $\frac{1}{2}S$ .

**Bemerkung:** Solche Kuriositäten treten bei absolut konvergenten Reihen nicht auf.

**Zusatzaufgabe 7.2:** Begründen Sie Ihre Antworten auf die folgenden Fragen:

- (a) Sei  $k \geq 2$  eine natürliche Zahl. Ist die Menge  $k\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n\}$  abzählbar unendlich?
- (b) Ist das kartesische Produkt  $A \times B$  abzählbarer Mengen  $A, B$  selbst wieder abzählbar?
- (c) Ist die Menge  $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  eine abzählbare Teilmenge von  $\mathbb{R}$ ?
- (d) Sind alle irrationalen Zahlen (bis auf abzählbar viele) Wurzeln aus rationalen Zahlen?
- (e) Sind je zwei abgeschlossene (nicht entartete, also keine Punkt-) Intervalle gleichmächtig?

**Lösung zu Zusatzaufgabe 7.2:**

- (a) Ja, denn die Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow k\mathbb{N}$ ,  $n \mapsto kn$ , ist sowohl surjektiv (denn ist  $a \in k\mathbb{N}$ , dann ist  $a$  durch  $k$  teilbar, so dass eine natürliche Zahl  $b$  mit  $a = bk$  existiert) als auch injektiv (denn sind  $a, b \in k\mathbb{N}$  mit  $a = b$ , dann existieren  $c, d \in \mathbb{N}$  mit  $a = kc, b = kd$ , woraus sofort  $0 = a - b = k(c - d)$ , also  $c = d$  aus der Nullteilerfreiheit von  $\mathbb{R}$  folgt).
- (b) Ja, seien  $a, b : \mathbb{N} \rightarrow A, B$  Abzählungen von  $A, B$ , dann ist die Diagonalfolge
 
$$(a_1, b_1) \mid (a_1, b_2), (a_2, b_1) \mid (a_3, b_1), (a_2, b_2), (a_1, b_3) \mid (a_1, b_4), \dots$$
 eine Abzählung von  $A \times B$ .
- (c) Ja, sei  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  abgezählt durch  $a = (a_1, a_2) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ , dann ist  $b_n := a_{n,1} + a_{n,2}\sqrt{2}$  eine surjektive Abbildung von  $\mathbb{N}$  auf die gegebene Menge.
- (d) Nein, denn die Menge  $\{\sqrt{a} \mid a \in \mathbb{Q}\}$  der Wurzeln aus rationalen Zahlen ist abzählbar, die Menge aller irrationalen Zahlen aber ist überabzählbar.
- (e) Ja, denn sind  $[a, b]$  und  $[c, d]$  Intervalle, dann ist beispielsweise  $f : x \mapsto c + \frac{d-c}{b-a}(x - a)$  eine Bijektion von  $[a, b]$  auf  $[c, d]$ . Denn  $f(x) = y$  ist äquivalent zu  $x = a + \frac{b-a}{d-c}(y - c)$  und daher gibt es zu jedem  $x \in [a, b]$  genau ein  $y \in [c, d]$  mit  $f(x) = y$ .

**Zusatzaufgabe 7.3:**

- (a) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie: Der Limes superior ist genau das Supremum der Häufungspunkte der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , der Limes inferior entsprechend das Infimum der Häufungspunkte von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- (b) Geben Sie für die folgenden Mengen  $M_k$  jeweils das Supremum  $\sup M_k$  und das Infimum  $\inf M_k$ , das Maximum  $\max M_k$  und das Minimum  $\min M_k$  an, falls diese existieren:

$$\begin{aligned} M_1 &:= \mathbb{N}, & M_2 &:= \{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}, & M_3 &:= \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}, \\ M_4 &:= \mathbb{Z}, & M_5 &:= \{(-2)^n : n \in \mathbb{N}\}, & M_6 &:= \left\{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}, \\ M_7 &:= \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, & M_8 &:= \left\{1 + \frac{1}{x} : x \in [1, 2)\right\}, & M_9 &:= \{x \in \mathbb{Q} : |x| < |x - 2|\}. \end{aligned}$$

- (c) Bestimmen Sie zu  $M = \left\{ \left( \frac{(125)^{\frac{n}{3}} - (-5)^n}{2 \cdot (25)^{\frac{n}{2}}} \right)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$  das Supremum und das Infimum.

**Lösung zu Zusatzaufgabe 7.3:**

- (a) Nach Voraussetzung ist die Folge  $(a_n)$  beschränkt, so dass sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß konvergente Teilfolgen besitzt, deren Grenzwerte genau die Häufungspunkte der Folge  $(a_n)$  sind. Insbesondere ist die Menge  $A$  der Häufungspunkte nicht leer.

Sei  $K := \sup(A)$ . Es gilt  $K \in \mathbb{R}$  (denn andernfalls ließe sich ein Widerspruch zur Beschränktheit der Folge konstruieren).

Angenommen  $K > M := \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

Dann existiert eine Zahl  $\varepsilon > 0$  mit  $K := 3\varepsilon + M$ . Da  $K$  Supremum aller Häufungspunkte ist, gibt es mindestens einen Häufungspunkt  $P$  mit  $0 \leq K - P < \varepsilon$ , also  $K - \varepsilon < P$ . Da  $P$  Häufungspunkt der Folge  $a_n$  ist, gibt es eine Teilfolge  $a_{n_k}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = P$  und zu dieser Teilfolge ein  $N_P(\varepsilon)$ , so dass

$$\forall k \in \mathbb{N} \left( n_k \geq N_P(\varepsilon) \implies -\varepsilon < P - a_{n_k} < \varepsilon \right)$$

Da  $M = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ , existiert ein  $N_M(\varepsilon)$ , so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} \left( n \geq N_M(\varepsilon) \implies a_n < M + \varepsilon \right)$$

Somit folgt insgesamt für  $N := \max(N_M(\varepsilon), N_P(\varepsilon))$ , dass

$$\forall k \in \mathbb{N} \left( n_k \geq N \implies a_{n_k} < M + \varepsilon = K - 2\varepsilon < P - \varepsilon < a_{n_k} \right) \quad \text{Widerspruch!}$$

Angenommen  $K < M := \limsup a_n$ .

Dann existiert eine Zahl  $\varepsilon > 0$  mit  $M := 3\varepsilon + K$ , und ganz analog wie zuvor folgt ein Widerspruch.

(b) Wir erhalten

$\mathbb{M}_k$	$\sup \mathbb{M}_k$	$\inf \mathbb{M}_k$	$\max \mathbb{M}_k$	$\min \mathbb{M}_k$
$\mathbb{N}$	$+\infty$	1	—	1
$\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$	1	-1	1	-1
$\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$	2	1	2	—
$\mathbb{Z}$	$+\infty$	$-\infty$	—	—
$\{(-2)^n : n \in \mathbb{N}\}$	$+\infty$	$-\infty$	—	—
$\{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$	$+\infty$	2	—	2
$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	0	$-\infty$	0	—
$\{1 + \frac{1}{x} : x \in [1, 2)\}$	2	$\frac{3}{2}$	2	—
$\{x \in \mathbb{Q} :  x  <  x - 2 \} = \{x \in \mathbb{Q} : x < 1\}$	1	$-\infty$	—	—

(c) Offenbar ist  $M = \{0, 1\}$ , denn für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt die Gleichungskette

$$a_n = \left( \frac{(125)^{\frac{n}{3}} - (-5)^n}{2 \cdot (25)^{\frac{n}{2}}} \right)^n = \left( \frac{(\sqrt[3]{125})^n - (-5)^n}{2 \cdot (\sqrt{25})^n} \right)^n = \left( \frac{5^n(1 - (-1)^n)}{2 \cdot 5^n} \right)^n = \left( \frac{1 - (-1)^n}{2} \right)^n.$$

Somit folgt  $\sup(M) = 1$  und  $\inf(M) = 0$ .

**Zusatzaufgabe 7.4:** Zeigen Sie:

- Die konstanten Funktionen  $f_c : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) sind in  $\mathbb{R}$  stetig.
- Monome  $m_k(x) = x^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) sind stetig.
- Die Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen übertragen sich sinngemäß.

**Lösung zu Zusatzaufgabe 7.4:**

(a) Sei  $c \in \mathbb{R}$  und  $f_c(x) = c$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Sei  $a \in \mathbb{R}$  beliebig, fest und  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  eine beliebige Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Dann ist die Folge  $(f_c(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$  identisch mit der konstanten Folge  $(c)_{n \in \mathbb{N}}$ , welche – wegen  $|f_c(a_n) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$  für alle  $\varepsilon$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$  – gegen  $c$  konvergiert. Da ebenfalls  $f_c(a) = c$  gilt, ist  $f_c$  in  $a$  stetig. Da  $a \in \mathbb{R}$  beliebig war, ist  $f_c$  in ganz  $\mathbb{R}$  stetig.

(b) Sei  $a \in \mathbb{R}$  beliebig, fest und  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  eine beliebige Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

Ist  $a = 0$ , so existiert zu jedem  $\varepsilon \in ]0, 1[$  ein  $N(\varepsilon)$ , so dass  $|a_n^k| = |a_n|^k < \varepsilon^k < \varepsilon$  für alle  $n \geq N(\varepsilon)$ , also  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_k(a_n) = 0 = m_k(a)$ .

Ist  $a \neq 0$ , dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \frac{|a|}{2}$  für alle  $n \geq n_0$ . Mit Aufgabe 1.2 (b) folgt

$$\left| a_n^k - a^k \right| = |a_n - a| \cdot \left| \sum_{j=0}^{k-1} a_n^{k-1-j} a^j \right| \leq |a_n - a| \sum_{j=0}^{k-1} |a_n|^{k-1-j} |a|^j \leq |a_n - a| \cdot k \cdot \left( \frac{3|a|}{2} \right)^{k-1} < \varepsilon$$

für alle  $n \geq N := \max \left\{ n_0, N \left( \frac{2^{k-1}\varepsilon}{(3|a|)^{k-1}k} \right) \right\}$  und somit  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_k(a_n) = a^k = m_k(a)$ .

(c) Sind  $f$  und  $g$  in  $x$  stetig, dann folgt nach Definition für jede Folge  $(x_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x)$  und nach Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f \pm g)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) \pm g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \pm \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = f(x) \pm g(x)$$

sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f \cdot g)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) \cdot g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = f(x) \cdot g(x).$$

Entsprechend sind also Summen, Differenzen und Produkte von stetigen Funktionen wiederum stetig. (Analog auch Quotienten, falls der Divisor  $g(x_n)$  nicht gegen Null konvergiert.)

## Zusatzmaterial zur Analysis I – Übung zu Serie 8

### Stetige Funktionen, Sätze über stetige Funktionen, $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition, Gleichmäßige Stetigkeit

- Beispiele für stetige Funktionen:
  - Konstanten, Identität, Absolutbetrag, Wurzeln, Exponentialfunktion, floor-Funktion auf  $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$
  - Summen, Produkte, Quotienten (solange definiert), skalare Vielfache und Kompositionen (falls definiert) stetiger Funktionen sind wiederum stetig (vgl. Sätze 1 und 2, §10 Forster).
  - Polynome/rationale Funktionen auf ihrem Definitionsbereich (vgl. Corollar zu Satz 1, §10)

- **Zwischenwertsatz:** (vgl. Satz 1, §11 Forster)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Dann existiert ein  $\xi \in ]a, b[$  mit  $f(\xi) = 0$ .

**Corollar 1:** (vgl. Corollar 1 zu Satz 1, §11 Forster)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $f(a) \leq f(b)$  bzw.  $f(b) \leq f(a)$  und sei  $c \in ]f(a), f(b)[$  bzw.  $c \in ]f(b), f(a)[$ . Dann existiert ein  $\xi \in ]a, b[$  mit  $f(\xi) = c$ .

**Corollar 2:** (vgl. Corollar 2 zu Satz 1, §11 Forster)

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein (eigentliches oder uneigentliches) Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist auch das Bild  $f(I) \subset \mathbb{R}$  ein Intervall.

- **Satz vom Minimum/Maximum:** (vgl. Satz 2, §11 Forster)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist das Bild  $f([a, b])$  beschränkt und  $f$  nimmt sein Minimum und sein Maximum an, d.h., es gibt  $\xi, \eta \in [a, b]$  mit  $f(\xi) \leq f(x) \leq f(\eta)$  für alle  $x \in [a, b]$ .

**Bem.:** Wir werden später sehen, dass der Satz bereits gilt, wenn der Definitionsbereich von  $f$  beschränkt und abgeschlossen ist (also beispielsweise auch aus einer Vereinigung endlich vieler ggf. auch entarteter abgeschlossener Intervalle bestehen darf).

- **$\varepsilon$ - $\delta$ -Definition der Stetigkeit** (vgl. Satz 3, §11 Forster)

Sei  $D \subset \mathbb{R}$  und  $a \in D$  sowie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann gilt:

$$f \text{ stetig in } a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, a) > 0 \forall x \in D : (|x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \varepsilon).$$

**Corollar:** (vgl. Corollar zu Satz 3, §11 Forster)

Sei  $D \subset \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a \in D$  mit  $f(a) \neq 0$ . Dann existiert für ein  $\delta > 0$  eine  $\delta$ -Umgebung  $U_\delta := D \cap ]a - \delta, a + \delta[$  von  $a$ , so dass  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in U_\delta$  gilt.

- **Definition:** (gleichmäßige Stetigkeit): Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **gleichmäßig stetig auf  $D$**

$$:\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x, y \in D : (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

**Bem.:** Gleichmäßige Stetigkeit impliziert Stetigkeit. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

- **Satz:** (vgl. Satz 4, §11 Forster)

Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist  $f$  auf  $[a, b]$  sogar gleichmäßig stetig.

**Bem.:** Abgeschlossenheit und Beschränktheit des Intervalls sind hier wesentliche Voraussetzungen!

## Monotonie, Umkehrfunktion monotoner Funktionen, natürlicher Logarithmus

- **Definition:** Sei  $D \subset \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann heißt  $f$

$$\begin{array}{ll} \text{monoton wachsend,} & \text{falls } \forall x, y \in D : \left( x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \right); \\ \text{streng monoton wachsend,} & \text{falls } \forall x, y \in D : \left( x < y \implies f(x) < f(y) \right); \\ \text{monoton fallend,} & \text{falls } \forall x, y \in D : \left( x \leq y \implies f(x) \geq f(y) \right); \\ \text{streng monoton fallend,} & \text{falls } \forall x, y \in D : \left( x < y \implies f(x) > f(y) \right). \end{array}$$

Wir nennen  $f$  **monoton**, falls  $f$  eine der vier obigen Eigenschaften besitzt und **streng monoton**, falls sie streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

- **Satz:** (vgl. Satz 1, §12 Forster)

Sei  $D \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton. Dann existiert genau eine Funktion  $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g \circ f = \text{Id}_D$  und  $f \circ g = \text{Id}_{f(D)}$ . Insbesondere ist  $g$  stetig und besitzt dasselbe Monotonieverhalten wie  $f$ .

**Bem.:** Gelegentlich nennt man  $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$  auch die Umkehrfunktion von  $f$  und schreibt  $f^{-1}$ . Die Bijektion besteht jedoch nur zwischen  $D$  und  $f(D)$ . Als eine Anwendung erhalten wir für die stetigen und streng monotonen Monomfunktionen  $f_k : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^k$  wegen  $f([0, \infty[) = ]0, \infty[$  die Stetigkeit (und strenge Monotonie) der  $k$ -ten Wurzeln  $g_k : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \sqrt[k]{x}$  (Satz 2, §12).

- **Funktionalgleichung der Exponentialfunktion:**<sup>1</sup>  $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ .
- **Satz/Definition des natürlichen Logarithmus**<sup>2</sup>

Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton wachsend und bildet  $\mathbb{R}$  bijektiv auf  $]0, \infty[$ . Die Umkehrfunktion  $\ln : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **natürlicher Logarithmus** und ist stetig, streng monoton wachsend. Es gilt die Funktionalgleichung  $\forall x, y \in ]0, \infty[ : \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ .

**Zusatzaufgabe 8.1:** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a) \text{ Berechnen Sie } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad (b) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{3x^2 - 2x - 1}{4x^2 + 2x - 6} \quad (c) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x \neq 2}} \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 8}{3x^2 - 3x - 6}}$$

**Lösung zu Zusatzaufgabe 8.1:**

$$(a) \text{ Es gilt } (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = x + 1 - x = 1, \text{ also } \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow 0$$

und daher  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0$ .

$$(b) \text{ Offenbar gilt } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{3x^2 - 2x - 1}{4x^2 + 2x - 6} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{(x-1)(3x+1)}{(x-1)(4x+6)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{4x+6} = \frac{3+1}{4+6} = \frac{2}{5}.$$

$$(c) \text{ Es gilt } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x \neq 2}} \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 8}{3x^2 - 3x - 6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ denn Wurzeln sind stetige Funktionen und es ist}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x \neq 2}} \frac{x^2 + 2x - 8}{3x^2 - 3x - 6} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x \neq 2}} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(3x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{3x+3} = \frac{2}{3}.$$

**Zusatzaufgabe 8.2:**

- (a) In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass aus der  $\varepsilon$ - $\delta$ -Eigenschaft die Stetigkeit folgt. Zeigen Sie nun auch, dass aus der Stetigkeit die  $\varepsilon$ - $\delta$ -Eigenschaft folgt.
- (b) Beweisen Sie das Corollar zur  $\varepsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung der Stetigkeit.

<sup>1</sup>vgl. Satz 4, §8 Forster

<sup>2</sup>vgl. Satz 3, §12 Forster

### Lösung zu Zusatzaufgabe 8.2:

- (a) Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a \in D$ , d.h., für jede Folge  $(x_n)_n$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  gelte  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ . Angenommen, es gäbe ein  $\varepsilon > 0$ , so dass zu jedem  $\delta > 0$  mindestens ein  $x \in D$  mit  $|x - a| < \delta$  und  $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$  existiert. Insbesondere gibt es dann zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in \mathbb{N}$  mit

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Folglich ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  und nach Voraussetzung dann auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ . Dies steht aber im Widerspruch zu  $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- (b) Sei  $D \subset \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a \in D$  mit  $f(a) \neq 0$ . Dann ist auch  $\varepsilon := \frac{|f(a)|}{2} > 0$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $f$  in  $a \in D$  gibt es ein  $\delta := \delta(\varepsilon, a)$ , so dass für alle  $x \in D$  mit  $|x - a| < \delta$  auch  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  gilt. Wegen

$$|x - a| < \delta \iff -\delta < x - a < \delta \iff a - \delta < x < a + \delta \iff x \in ]a - \delta, a + \delta[$$

und

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x) - f(a) < \varepsilon \iff f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$$

ist dies mit der Abkürzung  $U_\delta := D \cap ]a - \delta, a + \delta[$  äquivalent zu

$$\forall x \in U_\delta : f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon. \quad (8.1b)$$

Wegen  $f(a) \neq 0$  nach Voraussetzung haben wir die beiden Fälle  $f(a) > 0$  und  $f(a) < 0$  zu untersuchen:

- Falls  $f(a) > 0$ , liefert (8.1b) dann  $\forall x \in U_\delta : 0 < \frac{f(a)}{2} = f(a) - \frac{|f(a)|}{2} = f(a) - \varepsilon < f(x)$ .
- Falls  $f(a) < 0$ , liefert (8.1b) dann  $\forall x \in U_\delta : f(x) < f(a) + \varepsilon = f(a) + \frac{|f(a)|}{2} = -\frac{|f(a)|}{2} < 0$ .

Also folgt aus (8.1b) in jedem Fall  $\forall x \in U_\delta : f(x) \neq 0$  wie behauptet.

### Zusatzaufgabe 8.3:

- (a) Ist die Funktion  $f(x) := \begin{cases} x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$  auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig?
- (b) Ist die Funktion  $f : ]1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) := (\ln(x))^5$  stetig auf  $]1, \infty[$ ?
- (c) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $f([a, b]) \subset [a, b]$ . Beweisen Sie, dass  $f$  mindestens einen Fixpunkt hat, d.h. dass es ein  $\xi \in [a, b]$  gibt mit  $F(\xi) = \xi$ .
- (d) Gegeben sei die Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) := cx + d$  mit  $c, d \in \mathbb{R}$ . Besitzt diese Funktion ein Minimum oder ein Maximum?

### Lösung zu Zusatzaufgabe 8.3:

- (a) Die Stetigkeit in jedem Punkt der Intervalle  $] - \infty, 0[$  und  $]0, \infty[$  ist aufgrund der Stetigkeit von  $x$  und  $\frac{\pi}{2}$  sowie  $\cos(x)$  auf  $\mathbb{R}$  und  $\frac{1}{x}$  auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  gegeben, denn Produkte und Kompositionen (solange definiert) stetiger Funktionen sind wiederum stetig. Somit bleibt nur die Stetigkeit in 0 zu zeigen. Diese folgt jedoch sofort, denn für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < \varepsilon$  gilt

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x| < \varepsilon.$$

Somit finden wir zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta := \varepsilon > 0$ , so dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - 0| = |x| < \delta$  auch  $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$  gilt. Demnach ergibt sich die Stetigkeit in 0 hier mit Hilfe der  $\varepsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung.

- (b) Ja, die Funktion  $f(x) := (\ln(x))^5$  ist stetig auf  $]1, \infty[$ , denn die wiederholte Anwendung der Funktionalgleichung des Logarithmus liefert

$$\ln(a^5) = \ln(a \cdot a^4) = \ln(a) + \ln(a^4) = \dots = \ln(a) + \ln(a) + \ln(a) + \ln(a) + \ln(a) = 5 \ln(a)$$

für beliebiges  $a > 0$  und somit  $(\ln(x))^5 \stackrel{(*)}{=} \exp(\ln((\ln(x))^5)) = \exp(5 \ln(\ln(x)))$ , womit  $f$  eine Komposition der stetigen Funktionen  $\ln$ ,  $t \mapsto 5t$  und  $\exp$  und als solche selbst wiederum stetig ist.

**Achtung:** Wegen  $\ln(x) \leq 0$  für  $x \leq 1$  ist die Umformung  $(\star)$  nur für reelle Zahlen  $x > 1$  erlaubt.

- (c) Wir halten zunächst fest, dass wegen  $f([a, b]) \subset [a, b]$  offenbar die Ungleichungskette  $a \leq f(x) \leq b$  für jedes  $x \in [a, b]$  erfüllt ist. Betrachten wir nun die stetige Funktion  $g(x) = f(x) - x$ , dann gilt  $g(a) \geq 0$ ,  $g(b) \leq 0$ . Ist  $g(a) = 0$  bzw.  $g(b) = 0$ , haben wir wegen  $f(a) - a = 0$  bzw.  $f(b) - b = 0$  unseren Fixpunkt bei  $a$  bzw.  $b$  gefunden. Andernfalls gilt  $g(b) < 0 < g(a)$  und aus dem Zwischenwertsatz folgt dann, dass es ein  $\xi \in ]a, b[$  mit  $g(\xi) = 0$  gibt. Für dieses gilt dann  $f(\xi) = \xi$ .
- (d) Ja, denn als Polynom ersten Grades ist es eine stetige Funktion und das Intervall  $[a, b]$  ist abgeschlossen und beschränkt. Aufgrund der Monotonie können wir die Extrema hier sogar angeben:

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) = \begin{cases} f(a) = ca + d, & \text{falls } c \geq 0, \\ f(b) = cb + d, & \text{falls } c < 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad \max_{x \in [a, b]} f(x) = \begin{cases} f(a) = ca + d, & \text{falls } c \leq 0, \\ f(b) = cb + d, & \text{falls } c > 0. \end{cases}$$

#### Zusatzaufgabe 8.4:

- (a) Sei  $a \in D$  und  $f : D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann heißt  $f$  im Punkt  $a$  stetig fortsetzbar, falls  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x)$  existiert und endlich ist. Für welche Konstanten  $a, b > 0$  ist die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{ax + b} & x > 0 \\ \frac{1}{a - bx} & x < 0 \end{cases}$$

stetig in den Punkt 0 fortsetzbar?

- (b) Ist die Funktion  $f(x) := x^2$  auf  $[0, b]$ ,  $b > 0$ , gleichmäßig stetig? Auch auf  $[0, \infty[$ ?
- (c) Bestimmen Sie zu  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , die Konstanten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  derart, dass für die Funktion  $f(x) := \sqrt{ax^2 + bx + c} - \alpha x - \beta$  die Konvergenz  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  gilt.
- (d) Zeigen Sie, dass die in (c) ermittelte Funktion  $f$  auf  $[K, \infty[$  gleichmäßig stetig ist, wobei  $K \in \mathbb{R}$  so groß sei, dass  $f(x)$  für  $x \geq K$  wohldefiniert ist.

#### Lösung zu Zusatzaufgabe 8.4:

- (a) Die in 0 nicht definierte Funktion  $f$  ist genau dann stetig in den Punkt 0 fortsetzbar, wenn der linksseitige Grenzwert  $\lim_{x \nearrow 0} f(x)$  und der rechtsseitige Grenzwert  $\lim_{x \searrow 0} f(x)$  existieren und endlich sind und übereinstimmen (Hausaufgabe). In unserem Fall gilt einerseits  $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} \sqrt{ax + b} = \sqrt{b}$  und andererseits  $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{a - bx} = \frac{1}{a}$ . Also stimmen die beiden Grenzwerte genau bei  $b = \frac{1}{a^2}$  überein, und nur in diesem Fall ist  $f$  stetig fortsetzbar in den Punkt 0, indem man  $f(0) := \frac{1}{a} = \sqrt{b}$  definiert.
- (b) Die Funktion  $f(x) = x^2$  ist stetig auf  $[0, \infty[$ , da nach den Rechenregeln für Folgen  $x_n \rightarrow a$  die Konvergenz  $x_n^2 \rightarrow a^2$  impliziert. Also ist  $f$  als stetige Funktion auf dem beschränkten und abgeschlossenem Intervall  $[0, b]$  auch gleichmäßig stetig.

Die Funktion  $f(x) = x^2$  ist aber auf  $[0, \infty[$  nicht gleichmäßig stetig, denn:

Angenommen,  $f$  wäre gleichmäßig stetig, dann gäbe es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  für alle  $x, y \geq 0$  mit  $|x - y| < \delta$ .

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\delta < 2\sqrt{2\varepsilon}$ . Wählen wir nun  $x = \frac{2\varepsilon}{\delta} + \frac{\delta}{4}$  und  $y = \frac{2\varepsilon}{\delta} - \frac{\delta}{4}$  (es ist  $y > 0 \iff \frac{2\varepsilon}{\delta} > \frac{\delta}{4} \iff 8\varepsilon > \delta^2$  wegen  $0 < \delta < 2\sqrt{2\varepsilon}$ ), dann gilt

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y| = \frac{4\varepsilon}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2} = 2\varepsilon > \varepsilon,$$

obwohl  $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$ , Widerspruch.

(c) Mit Hilfe der dritten binomischen Formel ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{ax^2 + bx + c} - \alpha x - \beta) \cdot (\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta)}{\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a - \alpha^2)x^2 + (b - 2\alpha\beta)x + (c - \beta^2)}{\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a - \alpha^2)x^2}{\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b - 2\alpha\beta}{\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + \alpha + \frac{\beta}{x}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(c - \beta^2)}{\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a - \alpha^2)x^2}{\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta} + \frac{b - 2\alpha\beta}{\sqrt{a} + \alpha} + 0 \quad .
 \end{aligned}$$

Daher ist der Limes genau dann gleich Null, wenn  $a = \alpha^2$  und  $b = 2\alpha\beta$  gilt, d.h.  $\alpha = \sqrt{a}$  ( $-\sqrt{a}$  geht nicht! denn sonst würde  $f$  für große  $x$  gegen  $\infty$  streben, da dann der Wurzelterm (wegen  $a > 0$ ) und der lineare Term in die gleiche Richtung wachsen würden) und  $\beta = \frac{b}{2\sqrt{a}}$  gilt.

(d) Die Funktion  $f$  aus (c) ist für die Konstanten  $\alpha = \sqrt{a}$  und  $\beta = \frac{b}{2\sqrt{a}}$  sogar gleichmäßig stetig auf  $[K, \infty[$  (im Fall  $b^2 < 4ac$  kann man  $K$  beliebig klein wählen, im Fall  $b^2 \geq 4ac$  muss man  $K \geq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  wählen).

Denn jede stetige Funktion auf  $[K, \infty[$  mit  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  ist auch gleichmäßig stetig:

Zu  $\varepsilon > 0$  sei nämlich  $L > K$  so groß, dass  $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$  für  $x \geq L$  gilt, und  $\delta > 0$  so, dass  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$  für  $x, y \in [K, L]$  mit  $|x - y| < \delta$  gilt (ersteres ist wegen  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  möglich, letzteres wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der stetigen Funktion  $f$  auf dem Kompaktum  $[K, L]$ ). Dann gilt aber  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  auch bei  $x < L \leq y$  mit  $|x - y| < \delta$  bzw. bei  $L < x, y$ , denn

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(L)| + |f(L)| + |f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

(hierbei wurde  $|x - L| < \delta$  benutzt) bzw.

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \quad .$$

### Zusatzaufgabe 8.5:

- Zeigen Sie: Eine streng monotone Funktion ist injektiv.
- Sei  $D \subset \mathbb{R}$  ein (nicht entartetes) Intervall und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige und streng monotone Funktion. Zeigen Sie, dass  $f$  eine Bijektion von  $D$  auf  $E := f(D)$  ist und auf  $E$  eine stetige und streng monotone Umkehrfunktion besitzt.
- Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion streng monoton ist.

### Lösung zu Zusatzaufgabe 8.5:

- Angenommen, es gäbe  $x \neq y$  mit  $f(x) = f(y)$ . Dann gilt entweder  $x < y$  oder  $x > y$ . Der erste Fall kann nicht eintreten, denn aus der strengen Monotonie von  $f$  folgt  $f(x) < f(y)$  falls  $f$  monoton wachsend bzw.  $f(x) > f(y)$  falls  $f$  monoton fallend ist, also insbesondere  $f(x) \neq f(y)$ . Der zweite Fall kann jedoch ebenfalls nicht eintreten, denn wiederum aus der strengen Monotonie von  $f$  folgt  $f(x) > f(y)$  falls  $f$  monoton wachsend bzw.  $f(x) < f(y)$  falls  $f$  monoton fallend ist, also insbesondere wieder  $f(x) \neq f(y)$ . Damit muss die Annahme falsch und somit  $f$  injektiv sein.
- Nach Corollar 2 zum Zwischenwertsatz ist das Bild  $f(D)$  einer stetigen Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  wiederum ein Intervall, falls  $D \subset \mathbb{R}$  ein Intervall ist. Da  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  nach Aufgabenteil (a) aufgrund der strengen Monotonie injektiv ist, bildet  $f$  das Intervall  $D$  bijektiv auf das Intervall  $E := f(D)$  ab. Die Umkehrfunktion  $f^{-1} : E \rightarrow D$  ist wiederum streng monoton, denn angenommen es gäbe  $a, b, c, d \in E$  mit  $a < b, c < d$  und  $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$  sowie  $f^{-1}(c) > f^{-1}(d)$  (Gleichheit ist aufgrund der Bijektivität nicht möglich), so folgte einerseits  $f(f^{-1}(a)) = a < b = f(f^{-1}(b))$  und andererseits  $f(f^{-1}(c)) = c < d = f(f^{-1}(d))$ , was ein Widerspruch zur Monotonie von  $f$  wäre. Weiterhin ist

$f^{-1} : E \rightarrow D$  in jedem  $\xi \in E$  stetig, denn ist  $a \in D$  derart, dass  $f(a) = \xi$ , dann betrachte zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  das Intervall  $I := ]a - \eta, a + \eta[$  mit  $\eta := \min\{\varepsilon, \frac{a - \inf(D)}{2}, \frac{\sup(D) - a}{2}\}$  (bzw.  $I := ]a, a + \eta[$  mit  $\eta := \min\{\varepsilon, \frac{\sup(D) - a}{2}\}$  falls  $a$  linker Randpunkt von  $D$  und  $I := ]a - \eta, a[$  mit  $\eta := \min\{\varepsilon, \frac{a - \inf(D)}{2}\}$  falls  $a$  rechter Randpunkt von  $D$ ). Nach Wahl von  $\eta$  gilt nun  $I \subset D$ . Aufgrund der Stetigkeit bildet  $f$  das Intervall  $I$  bijektiv auf das Intervall  $f(I) = ]\inf f(I), \sup f(I)[$  ab. Dieses Intervall ist beschränkt, da in allen drei Fällen  $\inf(I) \in D$  und  $\sup(I) \in D$  gilt und aufgrund der Stetigkeit von  $f$  die Werte  $f(\inf(I))$  und  $f(\sup(I))$  endlich sind und  $f(I)$  aufgrund der Monotonie von  $f$  mit  $]f(\inf(I)), f(\sup(I))[,$  falls  $f$  monoton wachsend ist, und andernfalls mit  $]f(\sup(I)), f(\inf(I))[,$  übereinstimmt. Sei nun  $\delta := \min\{\xi - \inf f(I), \sup f(I) - \xi\}$  (bzw.  $\delta := \max\{\xi - \inf f(I), \sup f(I) - \xi\}$  falls  $a$  einer der Randpunkte war). Dann ist  $\delta > 0$  und das Intervall  $]\xi - \delta, \xi + \delta[ \cap E$  eine Teilmenge von  $f(I)$ , so dass

$$f^{-1}(]\xi - \delta, \xi + \delta[ \cap E) \subset I \subset ]a - \eta, a + \eta[ \subset ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[.$$

Dies heißt wegen  $f^{-1}(\xi) = a$  aber, dass für alle  $x \in E$  mit  $|x - \xi| < \delta$  auch  $|f^{-1}(x) - f^{-1}(\xi)| < \varepsilon$ .

(c) Aus der Funktionalgleichung  $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$  sehen wir zunächst

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) = \exp(x + 0) = \exp(x) \exp(0) \implies \forall x \in \mathbb{R} : 0 = \exp(x)(1 - \exp(0))$$

und da (vgl. Exponentialreihe) die Exponentialfunktion nicht identisch der Nullfunktion ist, haben wir  $\exp(0) = 1$ . Desweiteren ergibt sich wiederum aus der Funktionalgleichung

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \exp(-x) \implies \forall x \in \mathbb{R} : \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}. \quad (8.2c)$$

Für beliebiges  $\xi > 0$  ergibt sich aus der Exponentialreihe mit der Nichtnegativität der Summanden

$$\exp(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} \geq \sum_{k=0}^1 \frac{\xi^k}{k!} = 1 + \xi > 1. \quad (8.3c)$$

Zusammen mit (8.2c) ergibt sich daraus  $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0$ . Die strenge Monotonie folgt nun mit (8.3c) wegen  $\forall x, y \in \mathbb{R} : (y > x \implies \exp(y) = \exp(x + (y - x)) = \exp(x) \exp(y - x) > \exp(x))$ .

### Zusatzaufgabe 8.6:

Beweisen Sie, dass die durch  $\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$  definierte Funktion  $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Umkehrabbildung  $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt.

### Lösung zu Zusatzaufgabe 8.6:

- Einerseits kann man explizit die Umkehrabbildung durch Auflösen von  $y = \sinh(x)$  ermitteln:  
Zu  $y \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $y = \sinh(x)$  genau dann, wenn es ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $e^x - 2y - e^{-x} = 0$  gibt. Diese Gleichung läßt sich aber wie folgt nach  $x$  auflösen: Multiplizieren wir mit  $e^x$ , dann geht die Gleichung in  $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$  über. Substituieren wir nun  $z = e^x$ , dann lautet die Gleichung  $z^2 - 2yz - 1 = 0$ , welche  $z = y + \sqrt{y^2 + 1}$  als einzige positive Lösung besitzt. Also ist  $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$  die einzige Lösung von  $y = \sinh(x)$ .  
Dies beweist einerseits die Bijektivität von  $\sinh$  und andererseits, dass  $g(y) := \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$  identisch mit der Umkehrfunktion  $\operatorname{arsinh}$  von  $\sinh$  ist. Da aber  $g$  als Komposition stetiger Funktionen selbst wieder stetig ist, ist somit  $\operatorname{arsinh}$  stetig.
- Alternativ können wir argumentieren, dass  $\sinh$  auf jedem Intervall  $[a, b]$  stetig und streng monoton wachsend ist, da einerseits  $\sinh$  als Komposition stetiger Funktionen selbst stetig ist und andererseits aus  $x < y$  auch  $\sinh(x) < \sinh(y)$  wegen  $e^x < e^y$  und  $-e^{-x} < -e^{-y}$  folgt.  
Somit ist  $\sinh$  nach dem Satz über Umkehrfunktionen streng monotoner stetiger Funktionen eine Bijektion von  $[a, b]$  auf  $[\sinh(a), \sinh(b)]$  mit stetiger und streng monotoner Umkehrfunktion  $\operatorname{arsinh}$ . Da  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = -\infty$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh(x) = +\infty$  gilt, ist dann aber  $\sinh$  auch auf ganz  $\mathbb{R}$  bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung.

## Zusatzmaterial zur Analysis I – Übung zu Serie 9

### Allgemeine Potenz

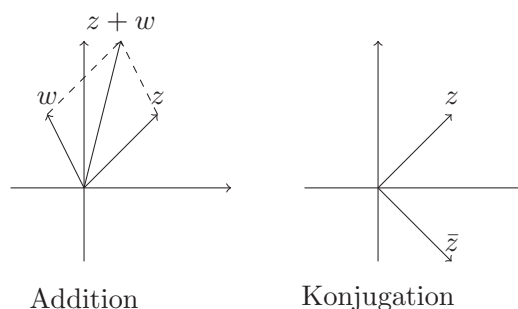
- **Definition:** Für  $a > 0$  sei die Funktion  $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $\exp_a(x) := \exp(x \cdot \ln(a))$ .
- **Satz:** (vgl. Satz 4, §12 Forster) Die Funktion  $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und es gilt:
  - (i)  $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp_a(x + y) = \exp_a(x) \exp_a(y)$
  - (ii)  $\forall n \in \mathbb{Z} : \exp_a(n) = a^n$
  - (iii)  $\forall p \in \mathbb{Z} \forall q \in \mathbb{N}, q \geq 2 : \exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p}$
- **Satz [Rechenregeln für Potenzen]:** (vgl. Satz 5, §12) Für alle  $a, b, x, y \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0, b > 0$  gilt
  - (i)  $a^x a^y = a^{x+y}$
  - (ii)  $(a^x)^y = a^{xy}$
  - (iii)  $a^x b^x = (ab)^x$
  - (iv)  $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$
- **Satz [Funktionalgleichung]:** (vgl. Satz 6, §12 Forster) Sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit
 
$$\forall x, y : F(x + y) = F(x)F(y).$$

Dann ist entweder  $F \equiv 0$  oder  $a := F(1) > 0$  und  $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = a^x$ .

### Körper der komplexen Zahlen, Betrag sowie Konvergenz und Cauchy-Folgen in $\mathbb{C}$

- Mit  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$  und  $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$  bildet die Menge  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2$  einen Körper, den man mit  $\mathbb{C}$  bezeichnet und den **Körper der komplexen Zahlen** nennt. Identifizieren wir  $x \in \mathbb{R}$  mit  $(x, 0) \in \mathbb{C}$ , so wird  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .
- Mit der **imaginären Einheit**  $i := (0, 1)$  lässt sich jede komplexe Zahl wegen  $(x, y) = x \cdot (1, 0) + (0, 1) \cdot y$  als  $x + i \cdot y$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  darstellen. Mit  $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$  gilt weiter  $i^2 = -1$ .
- Für  $z = x + iy$  bezeichnet  $\bar{z} = x - iy$  die **konjugiert komplexe Zahl** von  $z$ . Mit deren Hilfe erhalten wir für  $z$  den **Realteil** als  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = x$ , den **Imaginärteil** als  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} = y$ . Desweiteren heißt  $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$  der **Betrag** von  $z$ .
- **Satz [Eigenschaften des Betrages]:** (vgl. Satz 1, §13 Forster)
  - (a)  $\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq 0$  und  $\forall z \in \mathbb{C} : (|z| = 0 \iff z = 0)$  (Definitheit)
  - (b)  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$  (Multiplikativität)
  - (c)  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  (Dreiecksungleichung)
- Analog zu  $\mathbb{R}$  nennt man eine Folge  $z_n$  in  $\mathbb{C}$  **konvergent** gegen  $z \in \mathbb{C}$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N = N(\varepsilon)$  gibt mit  $|z_n - z| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ . Dies ist äquivalent zur Konvergenz von  $\operatorname{Re}(z_n)$  gegen  $\operatorname{Re}(z)$  und  $\operatorname{Im}(z_n)$  gegen  $\operatorname{Im}(z)$  (vgl. Satz 2, §13 Forster). Weiterhin konvergiert dann die Folge  $\bar{z}_n$  wegen  $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$  und  $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$  genau dann, falls die Folge  $z_n$  konvergent ist (vgl. Corollar zu Satz 2, §13 Forster). Offenbar gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{z}_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n}. \quad (9.1c)$$



- Ebenso analog definiert man  $z_n$  als eine **Cauchy-Folge** in  $\mathbb{C}$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N = N(\varepsilon)$  gibt mit  $|z_n - z_m| < \varepsilon$  für alle  $m \geq n \geq N$ . Dies ist wiederum äquivalent dazu, dass  $\operatorname{Re}(z_n)$  und  $\operatorname{Im}(z_n)$  Cauchy-Folgen sind (vgl. Satz 3, §13 Forster). Außerdem konvergiert jede Cauchy-Folge in  $\mathbb{C}$ , d.h.  $\mathbb{C}$  ist vollständig (vgl. Satz 4, §13 Forster).

**Achtung:** Der Körper  $\mathbb{C}$  ist nicht angeordnet!

- Analog sind Summen, Produkte und Quotienten (falls die Divisor-Folge keine Nullfolge ist) in  $\mathbb{C}$  konvergenter Folgen wiederum konvergent, es gelten die bekannten Rechenregeln (vgl. Satz 5, §13).

## Reihen komplexer Zahlenfolgen, Exponentialreihe in $\mathbb{C}$

- Analog zu  $\mathbb{R}$  definieren wir die **Reihe**  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$  zu einer komplexen Zahlenfolge  $z_n$  als Folge der zugehörigen Partialsummen  $S_n := \sum_{k=1}^n z_k$ , so dass die Konvergenz der Reihe wieder genau die Konvergenz der Folge  $(S_n)$  bedeutet. Die Reihe heißt **absolut konvergent**, falls  $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$  konvergiert.

- **Majorantenkriterium in  $\mathbb{C}$ :**

Sei  $a_n$  eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen, so dass  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert. Ist  $c_n$  eine Folge komplexer Zahlen, so dass  $\forall n \in \mathbb{N} : |c_n| \leq a_n$  gilt, dann konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  absolut.

- **Quotientenkriterium in  $\mathbb{C}$ :**

Sei  $c_n$  eine komplexe Zahlenfolge und es gebe ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $c_n \neq 0$  für alle  $n \geq n_0$ . Existiert dann ein  $\theta \in ]0, 1[$  mit  $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \leq \theta$  für alle  $n \geq n_0$ , so konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  absolut.

- Insbesondere konvergiert die Exponentialreihe  $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  für beliebige  $z \in \mathbb{C}$  und erfüllt die Funktionalgleichung  $\forall z, w \in \mathbb{C} : \exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$  (vgl. Sätze 6 und 7, §13 Forster).
- Wiederum analog zu  $\mathbb{R}$  können wir den Grenzwert einer Funktion  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  für ein  $a \in D$  und entsprechend die Stetigkeit von  $f$  definieren. Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig.

## Trigonometrische Funktionen

- Wir definieren für jede beliebige reelle Zahl  $\cos(x) := \operatorname{Re}(e^{ix})$  und  $\sin(x) := \operatorname{Im}(e^{ix})$ . Demnach erhalten wir die **Eulersche Formel:  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$** . Mit Hilfe der Stetigkeit der Exponentialfunktion im Komplexen zeigt man die Stetigkeit von  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (vgl. Satz 2, §14 Forster).

- Mittels Funktionalgleichung und Eulerscher Formel ergeben sich aus  $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$  die bekannten Additionstheoreme (vgl. Satz 3, §14 Forster)

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

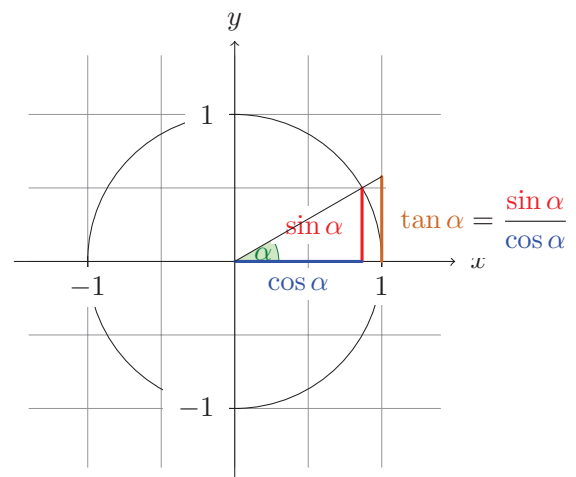
- **Satz** (vgl. Satz 4, §14 Forster) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots$$

Die Konvergenz der Reihen ist dabei sogar absolut.

- In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass  $\cos(x)$  im Intervall  $[0, 2]$  streng monoton fallend ist und dort genau eine Nullstelle besitzt, welche wir mit  $\frac{\pi}{2}$  bezeichnen. Somit erhalten wir die speziellen Werte  $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ ,  $e^{i\pi} = -1$ ,  $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$ ,  $e^{i2\pi} = 1$  (vgl. Sätze 6 und 7, §14 Forster).



### Zusatzaufgabe 9.1:

- (a) Zeigen Sie (iii) und (iv) der Rechenregeln für Potenzen.
- (b) Finden Sie alle stetigen Funktionen  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , welche die Gleichung  $g(x+y) = g(x) \cdot g(y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  erfüllen.

### Lösung zu Zusatzaufgabe 9.1:

- (a) Mit Hilfe der Funktionalgleichung des Logarithmus (vgl. Zusatzmaterial zu Serie 8 bzw. Forster §12) ergibt sich aus der Definition der allgemeinen Potenz zunächst einmal

$$(ab)^x = \exp(x \ln(ab)) = \exp(x(\ln(a) + \ln(b))) = \exp(x \ln(a) + x \ln(b)) = \exp(x \ln(a)) \exp(x \ln(b)) = a^x b^x.$$

Aus der Funktionalgleichung für den Logarithmus folgt weiter  $\ln(x) = \ln(1 \cdot x) = \ln(1) + \ln(x)$  und somit  $\ln(1) = 0$ . Somit folgt  $0 = \ln(1) = \ln\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right)$ , also  $-\ln(a) = \ln\left(\frac{1}{a}\right)$  und so auch

$$a^{-x} = \exp(-x \ln(a)) = \exp(x(-\ln(a))) = \exp\left(x \ln\left(\frac{1}{a}\right)\right) = \left(\frac{1}{a}\right)^x.$$

- (b) Wir unterscheiden die beiden Fälle:

- Ist  $g(0) = 0$ , so gilt  $g(x) = g(0+x) = g(0)g(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , also  $g \equiv 0$ .
- Ist  $g(0) \neq 0$ , so ist  $g(1) > 0$  und  $g(x) = g(1)^x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , denn:
  - Zunächst ist  $g(1) \neq 0$ , denn wäre  $g(1) = 0$ , so folgte  $g(0) = g(-1)g(1) = g(-1) \cdot 0 = 0$ . Wir hatten jedoch vorausgesetzt, dass  $g(0) \neq 0$  gelte.
  - Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $g(nx) = g(\underbrace{x + \dots + x}_{n\text{-mal}}) = g(x)^n$ .

Insbesondere haben wir damit  $g(n) = g(1)^n$  für alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$ .

- Weiter gilt für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  auch  $g\left(\frac{m}{n}\right)^n = g(m) = g(1)^m$  und somit  $g\left(\frac{m}{n}\right) = g(1)^{\frac{m}{n}}$  für alle positiven rationalen Zahlen.
- Wegen  $g(1) = g\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$  erhalten wir zusammen mit dem ersten Punkt  $g(1) > 0$ .
- Wegen  $0 \neq g(0) = g(0+0) = g(0)^2$  folgt  $g(0) = 1$ .
- Wegen  $1 = g(0) = g(x-x) = g(x)g(-x)$  folgt auch  $g(-x) = g(x)^{-1}$ .  
Mit den vorangegangenen Punkten gilt daher  $g(q) = g(1)^q$  für alle rationalen  $q \in \mathbb{Q}$ .
- Die Stetigkeit von  $g$  und die Stetigkeit der allgemeinen Potenz liefern schließlich die Gültigkeit von  $g(x) = g(1)^x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

### Zusatzaufgabe 9.2:

- (a) Zeigen Sie  $\lim_{x \searrow 0} x^x = 1$  nur unter Verwendung von  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{\exp(a)} = 0$ .

- (b) Ist die Funktion  $F(x) := (\ln(x))^{\sqrt{3}}$  definiert auf  $]1, \infty[$  stetig?

### Lösung zu Zusatzaufgabe 9.2:

- (a) Für  $x > 0$  gilt nach Definition der allgemeinen Potenz  $x^x = \exp(x \ln(x))$ . Wir wissen, dass die Exponentialfunktion überall stetig. Daher genügt es den Grenzwert

$$\lim_{x \searrow 0} x \ln(x)$$

zu betrachten. Sei  $x_n$  eine beliebige Nullfolge mit  $x_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\frac{1}{x_n}$  eine bestimmt gegen  $+\infty$  divergente Folge. Aufgrund der Stetigkeit des Logarithmus ist dann auch  $y_n := \ln\left(\frac{1}{x_n}\right)$  bestimmt divergent gegen  $+\infty$ . Mit  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{\exp(a)} = 0$  ergibt sich demnach

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \ln(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln\left(\frac{1}{x_n}\right)}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-y_n}{\exp(y_n)} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{\exp(y_n)} = -0$$

und aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n \ln(x_n)) = \exp(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \ln(x_n)) = \exp(-0) = \exp(0) = 1.$$

Da  $x_n$  eine beliebige Nullfolge positiver reeller Zahlen war, bedeutet dies genau, dass  $\lim_{x \searrow 0} x^x = 1$ .

- (b) Für beliebiges  $x \in ]1, \infty[$  gilt nach Definition der allgemeinen Potenz  $F(x) = (\ln(x))^{\sqrt{3}} = \exp(\sqrt{3} \ln(\ln(x)))$ , so dass  $F = \exp \circ f \circ \ln \circ \ln$  mit  $f : t \mapsto \sqrt{3}t$  als Komposition stetiger Funktionen wiederum stetig ist.

**Achtung:** Der Definitionsbereich von  $\ln$  darf zwar  $]0, \infty[$  sein, der für  $\ln \circ \ln$  jedoch nicht mehr!

**Zusatzaufgabe 9.3:** Zeigen Sie:

- (a) Es gelten (i)  $\forall z \in \mathbb{C} : \bar{\bar{z}} = z$ , (ii)  $\forall z, w \in \mathbb{C} : \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ , (iii)  $\forall z, w \in \mathbb{C} : \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- (b) Es gelten (i)  $\forall z \in \mathbb{C} : \exp(z) \neq 0$ , (ii)  $\forall z \in \mathbb{C} : \exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ , (iii)  $\forall x \in \mathbb{R} : |\exp(ix)| = 1$
- (c) Mit der Eulerschen Formel gilt:  $\forall x \in \mathbb{R} : \cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \wedge \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$
- (d) Ist der Kosinus eine gerade, der Sinus eine ungerade Funktion? Zeigen Sie:  $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$
- (e) Es gilt  $\forall x, y \in \mathbb{R} : \sin(x) - \sin(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \wedge \cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

**Lösung zu Zusatzaufgabe 9.3:**

- (a) Für  $z = x + iy$  und  $w = u + iv$  gilt offenbar

- (i)  $\bar{\bar{z}} = \overline{x + iy} = \overline{x - iy} = \overline{x + i(-y)} = x - i(-y) = x + iy$
- (ii)  $\overline{z+w} = \overline{(x+iy) + (u+iv)} = \overline{(x+u) + i(y+v)} = (x+u) - i(y+v) = (x-iy) + (u-iv) = \bar{z} + \bar{w}$
- (iii)  $\overline{z \cdot w} = \overline{(x+iy)(u+iv)} = \overline{(xu-yv) + i(uy+xv)} = (xu-yv) - i(uy+xv) = (x-iy) \cdot (u-iv) = \bar{z} \cdot \bar{w}$

- (b) (i) Angenommen, es gäbe ein  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\exp(z) = 0$ .  
Dann wäre  $1 = \exp(0) = \exp(z) \exp(-z) = 0 \cdot \exp(-z) = 0$  und somit  $1 = 0$  ein Widerspruch.
- (ii) Mittels Gleichung (9.1c) und wiederholter Anwendung von Aufgabenteil (a) ergibt sich

$$\forall z \in \mathbb{C} : \exp(\bar{z}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\bar{z}^k}{k!} \stackrel{(a.iii)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\overline{z^k}}{k!} \stackrel{(a.ii)}{=} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}} \stackrel{(9.1c)}{=} \overline{\exp(z)} = \overline{\exp(z)}$$

- (iii) Nach Definition des Betrages einer komplexen Zahl, mit (ii) und der Funktionalgleichung folgt

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : |\exp(ix)| &= \sqrt{\exp(ix) \cdot \overline{\exp(ix)}} \stackrel{(ii)}{=} \sqrt{\exp(ix) \cdot \exp(i\bar{x})} \\ &= \sqrt{\exp(ix) \cdot \exp(-ix)} = \sqrt{\exp(ix - ix)} = \sqrt{\exp(0)} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

- (c) Wegen  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$  und  $e^{-ix} = e^{i\bar{x}} \stackrel{(b)(ii)}{=} \overline{e^{ix}} = \overline{\cos(x) + i \sin(x)} = \cos(x) - i \sin(x)$  ergeben sich nach Addition bzw. Subtraktion  $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos(x)$  sowie  $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin(x)$ . Nach Division durch 2 bzw.  $2i$  ergeben sich die Behauptungen.

- (d) Ja, denn für beliebiges  $x \in \mathbb{R}$  folgt einerseits  $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}(e^{i(-x)} + e^{-i(-x)}) = \cos(-x)$  und andererseits  $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = -\frac{1}{2i}(e^{i(-x)} - e^{-i(-x)}) = -\sin(-x)$  nach (c).

Mit  $1 = \exp(0) = \exp(i0) = \operatorname{Re}(e^{i0}) = \cos(0)$  und dem Additionstheorem für den Kosinus folgt nun

$$1 = \cos(x+(-x)) = \cos(x) \cos(-x) - \sin(x) \sin(-x) = \cos(x) \cos(x) + \sin(x) \sin(x) = (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2$$

Alternativ liefert auch die Eulersche Formel  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$  zusammen mit (b)(iii) wie zuvor

$$1 = 1^2 = |e^{ix}|^2 = e^{ix} \cdot \overline{e^{ix}} = (\cos(x) + i \sin(x))(\cos(x) - i \sin(x)) = (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2.$$

(e) (Vgl. Corollar zu Satz 3, §14 Forster) Mit dem Additionstheorem für den Sinus erhalten wir

$$\begin{aligned}\sin(x) - \sin(y) &= \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) \\ &= \left(\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right) - \left(\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(-\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(-\frac{x-y}{2}\right)\right) \\ &= \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

und analog mit dem Additionstheorem für den Kosinus

$$\begin{aligned}\cos(x) - \cos(y) &= \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) \\ &= \left(\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right) - \left(\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(-\frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(-\frac{x-y}{2}\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

**Zusatzaufgabe 9.4:** (Abschätzung des Restgliedes, vgl. Satz 5, §14 Forster)

Für die Restglieder aus  $\cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x)$  und  $\sin(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}(x)$  gelten die Abschätzungen

$$|x| \leq 2n+3 \implies |r_{2n+2}| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}, \quad |x| \leq 2n+4 \implies |r_{2n+3}| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

**Lösung zu Zusatzaufgabe 9.4:**

Für das erste Restglied findet sich der Beweis im Forster Für das zweite Restglied gilt offenbar

$$r_{2n+3}(x) = \pm \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \left( 1 - \frac{x^2}{(2n+4)(2n+5)} + \frac{x^4}{(2n+4)(2n+5)(2n+6)(2n+7)} \mp \dots \right).$$

Wegen  $r_{2n+3}(0) = 0$  genügt es, den Fall  $x \neq 0$  zu untersuchen. Sei also nun  $x \in [-2n-4, 2n+4] \setminus \{0\}$  beliebig, aber fest gewählt. Betrachten wir dazu die durch  $b_0 := 1$  und

$$b_k := b_{k-1} \cdot \frac{x^2}{(2n+2k+2)(2n+2k+3)} \quad (k \in \mathbb{N})$$

rekursiv definierte Folge, die wegen  $b_k \geq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  nichtnegativ (wegen  $0 \neq x$  sogar positiv) und welche – da nach Voraussetzung  $x^2 \leq (2n+4)^2 < (2n+4)(2n+5) \leq (2n+2k+2)(2n+2k+3)$  und somit  $\frac{b_k}{b_{k+1}} \leq \frac{x^2}{(2n+4)(2n+5)} < 1$  gilt – streng monoton fallend ist. Mit  $\theta := \frac{x^2}{(2n+4)(2n+5)} < 1$  sehen wir weiter, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

absolut konvergiert, also auch konvergiert und daher  $b_k$  außerdem eine Nullfolge sein muss. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert nun auch die alternierende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k,$$

wobei die zugehörige Folge der Partialsummen  $T_N = \sum_{k=0}^N (-1)^k b_k$  durch die ersten beiden Folgenglieder beschränkt bleibt. Somit folgt  $1 = b_0 = T_0 \geq T_N \geq T_1 = b_0 - b_1 > 0$  und abschließend auch

$$|r_{2n+3}(x)| = \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k = \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \lim_{N \rightarrow \infty} T_N \leq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

### Zusatzaufgabe 9.5:

- (a) Skizzieren Sie  $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 2\bar{z} = \frac{8}{z}\}$ ,  $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = z\}$  und  $M_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = 6\}$ .
- (b) Was ist an  $i^2 = -1 \implies i = \sqrt{-1} \implies \frac{1}{i} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{-1} = i \implies 1 = i^2 = -1$  falsch?
- (c) Stellen Sie  $\frac{(1-i)^3}{(1+i)^4}$  und  $\frac{i^3}{(1-i\sqrt{3})^2}$  in der Gestalt  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  dar.
- (d) Lösen Sie die Gleichungen  $z^2 + 25 = 0$  sowie  $z^2 + 4z + 8 = 0$  und  $z^3 + (i-1)z^2 - \frac{1}{2}z = 0$  in  $\mathbb{C}$ .
- (e) Existiert für  $z^4 + 4z^3 + 6z^2 + (6-2i)z + 3 - 2i = 0$  eine reelle und eine rein imaginäre Lösung?

### Lösung zu Zusatzaufgabe 9.5:

- (a) (i) Wegen  $2\bar{z} = \frac{8}{z} \iff 4 = z\bar{z} = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2$  handelt es sich bei  $M_1$  um alle komplexen Zahlen, die in der Gaußschen Zahlenebene auf dem Kreis um  $0 + i \cdot 0$  mit Radius 2 liegen.
- (ii) Wegen  $\operatorname{Re}(z) = z = \operatorname{Re}(z) + i \cdot \operatorname{Im}(z)$  und somit  $\operatorname{Im}(z) = 0$  stimmt  $M_2$  genau mit der Menge der in  $\mathbb{C}$  eingebetteten reellen Zahlen überein, welche durch die reelle Achse repräsentiert wird.
- (iii) Aufgrund der Äquivalenz von  $z + \bar{z} = 6$  und  $3 = \frac{z+\bar{z}}{2} = \operatorname{Re}(z)$  beschreibt  $M_3$  diejenige Parallele zur imaginären Achse, welche die reelle Achse bei 3 schneidet.
- (b) Die Wurzel aus negativen Zahlen ist nicht definiert und  $z^2 = -1$  besitzt die Lösungsmenge  $\{i, -i\}$ .
- (c) Einerseits gilt 
$$\frac{(1-i)^3}{(1+i)^4} = \frac{(1-i)^3(1-i)^4}{(1+i)^4(1-i)^4} = \frac{((1-i)^2)^3(1-i)}{2^4} = \frac{(-2i)^3(1-i)}{16} = \frac{8i(1-i)}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$
 und andererseits gilt 
$$\frac{i^3}{(1-i\sqrt{3})^2} = -i \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{(1-i\sqrt{3})^2(1+i\sqrt{3})^2} = -i \frac{-2+2\sqrt{3}i}{4^2} = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8}i$$
- (d) (i) Wegen  $z^2 + 25 = 0 \iff z^2 = (5i)^2$  sind hier die Lösungen  $z_{1,2} = \pm 5i$
- (ii) Es gilt  $z^2 + 4z + 8 = (z+2)^2 + 4 = (z+2)^2 - (2i)^2 = (z+2+2i)(z+2-2i)$  und somit sind die Nullstellen genau  $z_{1,2} = -2 \pm 2i$ .
- (iii) Wegen  $\left(\frac{i-1}{2}\right)^2 = \frac{-1-2i+1}{4} = -\frac{i}{2}$  ist die Gleichung äquivalent zu  $z(z + \frac{i-1}{2})^2 = 0$ , welche die Lösungen  $z_1 = 0$  und  $z_{2,3} = \frac{1-i}{2}$  besitzt.
- (e) Angenommen, es gelte  $z \in \mathbb{R}$ . Dann muss  $z = -1$  wegen 
$$\underbrace{z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 6z + 3}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{2i(z+1)}_{\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$$

gelten, da die linke Seite der Gleichung eine reelle Zahl ist. Somit ist  $z_1 = -1$  einzige reelle Lösung. Angenommen, es gelte  $z \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dann existiert ein  $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit  $z = iy$  und es gilt

$$\underbrace{z^4 + 6z^2 - 2iz + 3}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{4z^3 + 6z - 2i}_{\in i \cdot \mathbb{R}} = 2(z(2z^2 + 3) - i)$$

Da die linke Seite eine reelle Zahl ist, muss die rechte Seite Null sein. Dies gilt für  $z = i$ . Somit ist  $z_2 = i$  eine rein imaginäre Lösung. Mittels Polynomdivision erhält man dann

$$\frac{z^4 + 4z^3 + 6z^2 + (6-2i)z + 3 - 2i}{(z+1)(z-i)} = z^2 + (3+i)z + (2+3i) .$$

**Ergänzung:** Durch Lösen der Gleichung  $z^2 + (3+i)z + (2+3i) = 0$  bzw.

$$\left(z + \frac{3+i}{2}\right)^2 = -\frac{3}{2} \cdot i \stackrel{(*)}{=} \left(-\sqrt{\frac{3}{4}} + i\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{3}{4}} - i\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$$

(wie wir auf die Gleichung  $(*)$  gelangen, werden wir in der nächsten Woche kennenlernen) erhält man  $z_3 = \left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{3}{2}\right) - i\left(\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\right)$  und  $z_4 = -\left(\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}\right) - i\left(-\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\right)$  als zwei weitere Lösungen.

## Zusatzmaterial zur Analysis I – Übung zu Serie 10

### Trigonometrische Funktionen (Fortsetzung)

- Die trigonometrischen Funktionen  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$  sind  $2\pi$ -periodisch. Weiterhin gilt

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x), \quad \sin(x + \pi) = -\sin(x), \quad \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

für beliebiges  $x \in \mathbb{R}$  und (vgl. Corollar 1,2 zu Satz 7, §14) die Mengen ihrer Nullstellen sind

$$\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{und} \quad \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Aus der Eulerschen Formel ergibt sich darüber hinaus  $e^{ix} = 1 \iff x = 2k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}$ .

- Definition:**

(i) Auf  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$  wird durch  $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$  der **Tangens** von  $x$  definiert.

(ii) Auf  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$  wird durch  $\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$  der **Cotangens** von  $x$  definiert.

- Satz [Umkehrfunktionen  $\arccos(x)$ ,  $\arcsin(x)$ ,  $\arctan(x)$ ]:** (vgl. Satz 8, §14 Forster)

(a) Der Cosinus bildet das Intervall  $[0, \pi]$  bijektiv und stetig auf  $[-1, 1]$  ab und besitzt dort eine Umkehrfunktion  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ , die wir den **Arcus Cosinus** nennen.

(b) Der Sinus bildet das Intervall  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  bijektiv und stetig auf  $[-1, 1]$  ab und besitzt dort eine Umkehrfunktion  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , die wir den **Arcus Sinus** nennen.

(c) Ebenso bildet der Tangens das offene Intervall  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  bijektiv und stetig auf  $\mathbb{R}$  ab und besitzt die Umkehrfunktion  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ , die wir den **Arcus Tangens** nennen.

**Bemerkung:** Die hier definierten Umkehrfunktionen nennt man auch die **Hauptzweige**. Ebenso kann man sich die entsprechenden Funktionen für die **Nebenzweige** überlegen.

- Satz [Polarkoordinaten]:** (vgl. Satz 9, §14 Forster)

Jedes  $z \in \mathbb{C}$  besitzt die Gestalt  $z = r \cdot e^{i\varphi}$  mit  $\varphi \in \mathbb{R}$  und  $r := |z| \geq 0$ .

Für  $z \neq 0$  ist  $\varphi$  bis auf Addition ganzzahliger Vielfache von  $2\pi$  eindeutig bestimmt.

**Corollar:** Für  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  und  $z_* \neq 0$  besitzt die Gleichung  $z^n = z_*$  genau  $n$  (verschiedene) komplexe Lösungen. Im Fall  $z_* = 1$  sind dies genau die  $n$ -ten komplexen **Einheitswurzeln**

$$\zeta_k := e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

### Differentiation

- Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D \subset \mathbb{R}$ ) heißt im Punkt  $a \in D$  **differenzierbar**, falls der Limes des Differenzenquotienten existiert, d.h. der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in D \setminus \{a\}}} \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \quad \text{bzw.} \quad f'(a) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Der Grenzwert  $f'(a)$  heißt die **Ableitung** von  $f$  im Punkt  $a$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D \subset \mathbb{R}$ ) heißt in  $D$  **differenzierbar**, falls  $f$  in jedem  $x \in D$  differenzierbar ist. Ist darüber hinaus die Ableitung  $f' : x \mapsto f'(x)$  eine stetige Funktion, so nennt man  $f$  **stetig differenzierbar**.

**Corollar:** Ist die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $a \in D$  differenzierbar, so ist sie auch stetig in  $a$ .

- Ob die auf  $D \subset \mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  Werte in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  hat, macht beim Ableiten keinen Unterschied, denn: Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  und  $f(x) = u(x) + iv(x)$  eine Zerlegung in Realteil  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  und Imaginärteil  $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ , dann ist  $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$ .
- **Satz [Algebraische Differentiationsregeln]:** (vgl. Satz 2, §15 Forster)

Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch die Funktionen  $f + g, \lambda f, fg : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und für alle  $x \in D$  gelten

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)'(x) &= \lambda f'(x) + \mu g'(x) && \text{(Linearität)} \\ (fg)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) && \text{(Produktregel)} \end{aligned}$$

Ist  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in D$ , so ist auch  $\frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und für alle  $x \in D$  gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} \quad \text{(Quotientenregel)}$$

- **Satz [Ableitung der Umkehrfunktion]:** (vgl. Satz 3, §15 Forster)

Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x$  mit  $f'(x) \neq 0$  und besitzt  $f$  in der Umgebung von  $x$  die Umkehrfunktion  $f^{-1}$ , dann gilt

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(f(x)))}, \quad \text{also} \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

- **Satz [Kettenregel]:** (vgl. Satz 4, §15 Forster)

Sind  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit  $f(D) \subset E$  und ist  $f$  differenzierbar in  $x \in D$  und  $g$  differenzierbar in  $y := f(x) \in E$ , dann ist die Komposition  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$  (sprich: „ $g$  nach  $f$ “) ebenfalls differenzierbar in  $x$  mit

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

- Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subset \mathbb{R}$ . In  $a \in D$  liegt ein **globales Maximum**, falls  $f(x) \leq f(a)$  für alle  $x \in D$  und ein **lokales Maximum**, wenn  $f(x) \leq f(a)$  für alle  $x$  aus einer Umgebung  $U$  von  $a$  (d.h.,  $\exists \varepsilon > 0 : ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ \cap D \subset U \subset D$ ) gilt (analog: **globales/lokales Minimum**).

### Zusatzaufgabe 10.1:

- (a) Beweisen Sie für  $z, w \in \mathbb{C}$  die negative Parallelogrammgleichung

$$|z + w|^2 - |z - w|^2 = 4 \operatorname{Re}(z\bar{w}).$$

- (b) Zeigen Sie, dass das Dreieck mit den Ecken  $0, z, w$  genau dann ein gleichseitiges Dreieck ist, wenn  $|z|^2 = |w|^2 = 2 \operatorname{Re}(z\bar{w})$  gilt.
- (c) Stellen Sie die komplexe Zahl  $z = -\frac{3}{2} - \frac{2-i}{(1+i)^2}$  in der Form  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  und in der Form  $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$  mit  $r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi[$ , dar. Berechnen Sie auch  $z^4$ .
- (d) Bestimmen Sie alle Lösungen  $z \in \mathbb{C}$  der Gleichungen

$$(3 + 2i)z = (6 - 5i), \quad z^2 + 4z + 8 = 0, \quad z^3 = -1, \quad z^4 = 16i.$$

- (e) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung  $z^6 + (1 - 2i\sqrt{2})z^3 - 2i\sqrt{2} = 0$ .

### Lösung zu Zusatzaufgabe 10.1:

- (a) Mit  $z = z_1 + iz_2$  und  $w = w_1 + iw_2$  gilt

$$\begin{aligned} |z + w|^2 - |z - w|^2 &= (z_1 + w_1)^2 + (z_2 + w_2)^2 - (z_1 - w_1)^2 - (z_2 - w_2)^2 \\ &= 2z_1w_1 + 2z_2w_2 - (-2z_1w_1) - (-2z_2w_2) = 4(z_1w_1 + z_2w_2) \end{aligned}$$

und  $4 \operatorname{Re}(z\bar{w}) = 4 \operatorname{Re}((z_1 + iz_2)(w_1 - iw_2)) = 4 \operatorname{Re}(z_1w_1 + z_2w_2 + i(z_2w_1 - z_1w_2))$ . Daraus folgt sofort die Behauptung.

(b) Mittels (a) berechnen wir zunächst

$$|z - w|^2 = |z + w|^2 - 4 \operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + 2z_1w_1 + 2z_2w_2 - 4 \operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 - 2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) .$$

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen das Dreieck mit den Ecken  $0, z, w$  ist gleichseitig, d.h. alle Seiten  $|z| = |w| = |z - w|$  sind gleichlang. Dann folgt nach unserer Rechnung sofort  $|z|^2 = |w|^2 = 2 \operatorname{Re}(z\bar{w})$ .

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, es gilt  $|z|^2 = |w|^2 = 2 \operatorname{Re}(z\bar{w})$ . Dann folgt nach unserer Rechnung auch  $|z - w|^2 = 2 \operatorname{Re}(z\bar{w})$ , und somit gilt  $|z| = |w| = |z - w|$ , d.h. das Dreieck ist gleichseitig.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} z &= -\frac{3}{2} - \frac{2-i}{(1+i)^2} = -\frac{3}{2} - \frac{(2-i)(1-i)^2}{((1+i)(1-i))^2} = -\frac{3}{2} - \frac{(2-i)(1-2i-1)}{2^2} \\ &= -\frac{6}{4} - \frac{-2-4i}{4} = -1 + i, \end{aligned}$$

sowie  $z = \sqrt{2}(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i\sin(\frac{3}{4}\pi))$  wegen  $|z_2| = \sqrt{2}$  und da  $\tan(\phi) = \frac{1}{-1} = -1$  im Bereich  $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$  durch  $\phi = \frac{3}{4}\pi$  gelöst wird.

Insbesondere gilt dann nach der Formel von Moivre  $z^4 = (\sqrt{2})^4(\cos(3\pi) + i\sin(3\pi)) = -4$ .

- (d)
- $(3 + 2i)z = (6 - 5i)$  besitzt die Lösung  $z = \frac{6-5i}{3+2i} = \frac{(6-5i)(3-2i)}{3^2+2^2} = \frac{8-27i}{13} = \frac{8}{13} - \frac{27}{13}i$ .
  - $z^2 + 4z + 8 = 0$  besitzt die beiden Lösungen  $z_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-8} = -2 \pm 2i$
  - Natürlich ist  $\cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$  selbst eine Lösung. Alle Lösungen ergeben sich durch die Winkel, deren Dreifaches (modulo  $2\pi$ ) genau  $\pi$  ist, denn:
    - Mit dem Ansatz  $z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$  für eine Lösung von  $z^3 = -1$  folgt mit der Formel von Moivre

$$1 \cdot (\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -1 = z^3 = |z|^3(\cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha)) .$$

Da  $-1$  den Betrag 1 besitzt, folgt somit auch  $|z| = \sqrt[3]{1} = 1$ . Wegen  $3\frac{\pi}{3} = \pi$ ,  $3\pi = \pi + 2\pi$  und  $3\frac{5\pi}{3} = \pi + 4\pi$  sind die Lösungen demnach

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 &= \cos(\pi) + i\sin(\pi) &= -1 \\ z_3 &= \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

Da es sich hierbei um Wurzelziehen im Komplexen gehandelt hat, befinden sich alle Lösungen auf einem Kreis in der komplexen Ebene mit Radius 1.

- Wegen  $16e^{\frac{\pi}{2}i} = 16i$  ergeben sich die Lösungen aus den Winkeln, deren Vierfaches (modulo  $2\pi$ ) genau  $\frac{\pi}{2}$  ist. Aus  $4\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ ,  $4\frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ ,  $4\frac{9\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + 4\pi$  sowie  $4\frac{13\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + 6\pi$  ergeben sich daher die Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right) & z_2 &= 2 \left( \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) \right) \\ z_3 &= 2 \left( \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right) \right) & z_4 &= 2 \left( \cos\left(\frac{13\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{8}\right) \right) . \end{aligned}$$

Wiederum liegen hier alle Lösungen auf dem Kreis in der komplexen Ebene mit Radius 2.

(e) Durch Umstellen erhält man  $z^3(z^3 + (1 - 2i\sqrt{2})) = 2i\sqrt{2}$ .

Man sieht, dass  $z^3 = -1$  eine Lösung der Gleichung ist

$$\Rightarrow z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1) = 0 \Rightarrow z_1 = -1, z_2 = \frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}}, z_3 = \frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{3}{4}}$$

(wie wir bereits in (d.3) durch komplexes Wurzelziehen gesehen hatten).

Weitere drei Lösungen erhält man dann durch Lösen der Gleichung

$$\frac{z^6 + (1 - 2i\sqrt{2})z^3 - 2i\sqrt{2}}{z^3 + 1} = z^3 - 2i\sqrt{2} = 0 .$$

Hierbei gilt  $(z^3 - i2\sqrt{2}) = (z + i\sqrt{2}) \cdot (z^2 - i\sqrt{2}z - 2)$  (erhalten wir beispielsweise mittels Polynomdivision durch  $(z + i\sqrt{2})$ ). Weiter folgt daraus  $z_4 = -i\sqrt{2}$ ,  $z_5 = \sqrt{\frac{3}{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$  und  $z_6 = -\sqrt{\frac{3}{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### Zusatzaufgabe 10.2:

- (a) Zeigen Sie die Verdopplungsformel des Cotangens:  $2 \cot(2z) = \cot(z) - \tan(z)$ .  
 (b) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und den zugehörigen Wertebereich von

$$f(x) := \arcsin\left(\frac{x+1}{2x}\right).$$

### Lösung zu Zusatzaufgabe 10.2:

- (a) Wegen  $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$  und  $\cot z = \frac{1}{\tan z} = i \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$  folgt insgesamt

$$\begin{aligned} \cot z - \tan z &= i \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} - \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = i \left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} + \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \right) \\ &= i \cdot \frac{(e^{iz} + e^{-iz})^2 + (e^{iz} - e^{-iz})^2}{(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iz} + e^{-iz})} \\ &= i \cdot \frac{(e^{i2z} + 2 + e^{-i2z}) + (e^{i2z} - 2 + e^{-i2z})}{e^{i2z} - e^{-i2z}} = 2i \cdot \frac{e^{i2z} + e^{-i2z}}{e^{i2z} - e^{-i2z}} = 2 \cot 2z. \end{aligned}$$

- (b) Da der Arcussinus nur auf  $[-1, 1]$  definiert ist, muss

$$-1 \leq \frac{x+1}{2x} \leq 1 \implies -2 \leq 1 + \frac{1}{x} \leq 2 \implies -3 \leq \frac{1}{x} \leq 1$$

erfüllt sein. Nun ist eine Fallunterscheidung notwendig:

- Im Fall  $x > 0$  folgt nach Multiplikation einerseits  $1 \leq x$  und andererseits

$$-3x \leq 1 \iff x \geq -\frac{1}{3},$$

was uns insgesamt einen ersten Definitionsbereich  $D_1 = [1, \infty[$  liefert. Aufgrund der Stetigkeit von  $f$  auf  $D_1$  ist der zugehörige Wertebereich demnach

$$W_1 = f(D_1) = \left] \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), f(1) \right] = \left] \arcsin\left(\frac{1}{2}\right), \frac{\pi}{2} \right].$$

- Im Fall  $x < 0$  folgt nach Multiplikation einerseits  $1 \geq x$  und andererseits

$$-3x \geq 1 \iff x \leq -\frac{1}{3},$$

was uns insgesamt einen zweiten Definitionsbereich  $D_2 = \left] -\infty, -\frac{1}{3} \right]$  liefert. Aufgrund der Stetigkeit von  $f$  auf  $D_2$  ist der zugehörige Wertebereich demnach

$$W_2 = f(D_2) = \left[ f\left(-\frac{1}{3}\right), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[ = \left[ -\frac{\pi}{2}, \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \right[.$$

Da außerdem die Funktion  $\frac{x+1}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x}$  für keine reelle Zahl den Wert  $\frac{1}{2}$  annehmen kann, ergibt sich als Definitions- und Wertebereich wegen  $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$  demnach

$$D = D_1 \cup D_2 = \left] -\infty, -\frac{1}{3} \right] \cup [1, \infty[, \quad W = W_1 \cup W_2 = \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} \right\}.$$

**Zusatzaufgabe 10.3:**

- (a) Bestimmen Sie mittels der Definition die Ableitung der Funktionen  $f(x) := x^k$  (bei beliebigem  $k \in \mathbb{N}$ ) und  $g(x) := \frac{e^x}{x}$ .
- (b) Zeigen Sie, dass die Regel zur Ableitung der Umkehrfunktion schon aus der Kettenregel folgt, indem Sie  $x = f^{-1}(f(x))$  betrachten. Bestimmen Sie anschließend die Ableitung von  $h(x) = \ln(x)$ .
- (c) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion  $f(x) := \ln(1-x^2)$  und der Funktion  $g(x) := x \cos(\ln(x))$ . Ermitteln Sie dann jeweils die Ableitung.

**Lösung zu Zusatzaufgabe 10.3:**

- (a) Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^k - x^k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left( \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^{k-j} h^j \right) - x^k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=1}^k \binom{k}{j} x^{k-j} h^j}{h} \\ &= \binom{k}{1} x^{k-1} + \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} x^{k-j} h^{j-1} = \binom{k}{1} x^{k-1} + 0 = kx^{k-1} \end{aligned}$$

und daher ist  $f(x)$  differenzierbar in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  mit Ableitung  $f'(x) = kx^{k-1}$ .  
Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{e^{x+h}}{x+h} - \frac{e^x}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{xe^{x+h} - (x+h)e^x}{x(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x}{h} \left( \frac{x(e^h - 1) - h}{x(x+h)} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{xe^x}{x(x+h)} \frac{e^h - 1}{h} - \frac{e^x}{x(x+h)} \right) = \frac{xe^x}{x^2} \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \right) - \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} \end{aligned}$$

wegen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - e^0}{h} = (e^x)' \Big|_{x=0} = e^0 = 1.$$

Daher ist  $g(x)$  in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  differenzierbar mit Ableitung  $g'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}$ .

- (b) Zu  $f$  sei  $f^{-1}$  die Umkehrfunktion und beide seien auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Differenzieren der Gleichung  $x = f^{-1}(f(x))$  ergibt nun mit  $y = f^{-1}(f(x))$  nach Kettenregel

$$1 = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) \implies (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \xrightarrow[x=f^{-1}(y)]{y=f(x)} (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Für den natürlichen Logarithmus ergibt sich damit

$$(\ln(e^y))' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} \xrightarrow[y=\ln(x)]{x=e^y} (\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

- (c) Der Definitionsbereich von  $f(x)$  ist  $] -1, 1[$  und nach Kettenregel erhalten wir

$$(\ln(1-x^2))' = \frac{1}{1-x^2} \cdot (-2x) = -2 \frac{x}{1-x^2}.$$

Der Definitionsbereich von  $g(x)$  ist  $]0, \infty[$  und nach Produkt- und Kettenregel ergibt sich

$$(x \cos(\ln(x)))' = \cos(\ln(x)) + x \left( -\sin(\ln(x)) \frac{1}{x} \right) = \cos(\ln(x)) - \sin(\ln(x)).$$

**Zusatzaufgabe 10.4:** Berechnen Sie die 1. Ableitung von

- (a)  $y = \sqrt{x} \sqrt{x}$       (b)  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$       (c)  $f(u) = e^u \ln(\sin u)$   
 (d)  $y = \cos^2(\sin^3(e^{4x}))$       (e)  $y = \cos(\sin x \cdot e^{x^2})$       (f)  $y = x^{\sin x}$   
 (g)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} \cdot e^{\sin x}}{\sqrt[3]{1+x} \cdot (x^2+3)^2}$       (h)  $f(x) = x^{(x^x)}$       (k)  $f(x) = \arctan(x^2)$

### Lösung zu Zusatzaufgabe 10.4:

(a) Wegen  $y(x) = \sqrt{x\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{x^2} \cdot x} = \left((x^3)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}}$  und  $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$  ergibt sich  
 $y'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$ .

(b) Nach Quotientenregel  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$  und mit  $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$  ergibt sich

$$f'(x) = \frac{\cos(x)(1 + \cos x) - \sin(x)(-\sin(x))}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1 + \cos x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos(x)}.$$

(c) Nach Produktregel  $(vw)' = v'w + vw'$  und Kettenregel  $(h(g(x)))' = h'(g(x)) \cdot g'(x)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(u) &= e^u \cdot \ln(\sin(u)) + e^u \cdot (\ln(\sin(u)))' = e^u \cdot \ln(\sin(u)) + e^u \cdot \left(\frac{1}{\sin(u)} \cdot \cos(u)\right) \\ &= e^u \cdot (\ln(\sin(u)) + \cot(u)). \end{aligned}$$

(d) Nach fünffacher Anwendung der Kettenregel

$$(f(g(h(k(l(m(x)))))))'$$

$$= f'(g(h(k(l(m(x)))))) \cdot g'(h(k(l(m(x)))) \cdot h'(k(l(m(x)))) \cdot k'(l(m(x))) \cdot l'(m(x)) \cdot m'(x)$$

$$\text{ergibt sich} \quad y' = 2 \cos(\sin^3(e^{4x})) \cdot (-\sin(\sin^3(e^{4x}))) \cdot 3 \sin^2(e^{4x}) \cdot \cos(e^{4x}) \cdot e^{4x} \cdot 4.$$

(e) Nach Kettenregel  $(h(g(x)))' = h'(g(x)) \cdot g'(x)$  und Produktregel  $(vw)' = v'w + vw'$  ergibt sich

$$y'(x) = -\sin(\sin(x) \cdot e^{x^2}) \cdot (\cos(x) \cdot e^{x^2} + \sin(x) \cdot e^{x^2} \cdot 2x)$$

(f) Eine Funktion der Form  $u(x)^{v(x)}$  lässt sich auch als

$$u(x)^{v(x)} = e^{\ln(u(x)^{v(x)})} = e^{v(x) \cdot \ln(u(x))}$$

auffassen. Mit Ketten- und Produktregel ergibt sich somit

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(x^{\sin(x)}\right)' = \left(e^{\ln(x^{\sin(x)})}\right)' = \left(e^{\sin(x) \cdot \ln(x)}\right)' \\ &= e^{\sin(x) \cdot \ln(x)} \cdot \left(\cos(x) \ln(x) + \sin(x) \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{\sin(x)} \cdot \left(\cos(x) \ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}\right). \end{aligned}$$

(g) Hier bietet sich das logarithmische Ableiten  $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$  an, denn es gilt

$$\ln(f(x)) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \sin(x) - \frac{1}{3} \ln(1 + x) - 2 \ln(x^2 + 3)$$

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln(f(x)))' = \frac{\sqrt{x^2 + 1} \cdot e^{\sin x}}{\sqrt[3]{1 + x} \cdot (x^2 + 3)^2} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \cos(x) - \frac{1}{3(1 + x)} - \frac{4x}{x^2 + 3}\right).$$

(h) Die Funktion ist auf  $]0, \infty[$  definiert und differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \left(x^{(x^x)}\right)' &= (\exp(x^x \ln(x)))' = (x^x \ln(x))' x^{(x^x)} = \left((x^x)' \ln(x) + x^x \frac{1}{x}\right) x^{(x^x)} \\ &= ((x \ln(x))' x^x \ln(x) + x^{x-1}) x^{(x^x)} = ((\ln(x) + 1)x^x \ln(x) + x^{x-1}) x^{(x^x)} \\ &= x^{(x^x)} x^{x-1} (1 + x \ln(x) + x \ln(x)^2) \end{aligned}$$

(k) Die Funktion ist auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert und differenzierbar mit  $(\arctan(x^2))' = \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}$ , denn nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion folgt  $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$  wegen

$$\arctan'(\tan(y)) = \frac{1}{\tan'(y)} = \frac{1}{\left(\frac{\sin(y)}{\cos(y)}\right)'} = \frac{1}{\frac{(\cos(y))^2 + (\sin(y))^2}{(\cos(y))^2}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin(y)}{\cos(y)}\right)^2} = \frac{1}{1 + (\tan(y))^2}$$

## Zusatzmaterial zur Analysis I – Übung zu Serie 11

In der Serie 10 haben wir (im Falle der Existenz) die Ableitung einer Funktion  $f$  an einer Stelle  $a$  über den Differentialquotienten eingeführt. Desweiteren haben wir gesehen, dass Ableiten linear ist und algebraische Differentiationsregeln (Produkt- und Quotientenregel) sowie die Kettenregel kennengelernt. In Zusatzaufgabe 10.3 (b) wurde darüber hinaus gezeigt, wie wir aus der Kettenregel die Ableitung der Umkehrfunktion gewinnen.

### Aussagen über differenzierbare Funktionen (vgl. Weihnachtsvorlesung)

- **[Notwendiges Kriterium für lokale Extrema]:** Besitzt die Funktion  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x \in ]a, b[$  ein lokales Extremum und ist  $f$  in  $x$  differenzierbar, so gilt  $f'(x) = 0$ .

**Hinweis:** Dabei sagen wir, in  $x$  liegt ein **lokales Maximum** vor, wenn  $f(y) \leq f(x)$  für alle  $y$  aus einer Umgebung  $U$  von  $x$  (hier ist  $U$  ein offenes Intervall, welches  $x$  enthält) gilt (analog: lokales Minimum) und entsprechend ein strenges lokales Maximum, falls anstelle von  $\leq$  sogar  $<$  gilt.

- **[Monotonie]:** Für  $a < b$  sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $]a, b[$  und stetig am Rand.
  - Dann gilt:  $f$  ist in  $[a, b]$  monoton fallend  $\iff \forall x \in ]a, b[ : f'(x) \leq 0$
  - Dann gilt:  $f$  ist in  $[a, b]$  monoton wachsend  $\iff \forall x \in ]a, b[ : f'(x) \geq 0$
  - Weiter gilt  $\forall x \in ]a, b[ : f'(x) > 0 \implies f$  streng monoton wachsend.
  - Ebenso gilt  $\forall x \in ]a, b[ : f'(x) < 0 \implies f$  streng monoton fallend.
- **[Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema für mind. einmal differenzierbares  $f$ ]:** Sei  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion und es gebe ein  $x \in ]a, b[$  mit  $f'(x) = 0$ . Gilt dann:

$$\left( \exists \varepsilon > 0 \forall \xi, \eta \in ]a, b[ : (x - \varepsilon < \xi < x < \eta < x + \varepsilon \implies f'(\xi) \leq 0 \leq f'(\eta)) \right)$$

bzw.

$$\left( \exists \varepsilon > 0 \forall \xi, \eta \in ]a, b[ : (x - \varepsilon < \xi < x < \eta < x + \varepsilon \implies f'(\xi) \geq 0 \geq f'(\eta)) \right)$$

so besitzt  $f$  in  $x$  ein lokales Minimum bzw. Maximum.

- **[Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema für mind. zweimal differenzierbares  $f$ ]:** Sei  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion und  $x \in ]a, b[$  derart, dass  $f'(x) = 0$  und  $f$  in  $x$  zweimal differenzierbar mit  $f''(x) > 0$  (bzw.  $f''(x) < 0$ ). Dann besitzt  $f$  in  $x$  ein strenges lokales Minimum (bzw. Maximum).
- **[Hinreichendes und notwendiges Kriterium für Konvexität]:** Sei  $D \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$f \text{ konvex} \iff \forall x \in D : f''(x) \geq 0.$$

**Hinweis:** Dabei heißt eine auf einem Intervall  $D$  definierte Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  **konvex**, wenn die Ungleichung  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$  für alle  $x, y \in I$  und  $\lambda \in [0, 1]$  gilt (und **konkav**, wenn die umgekehrte Ungleichung gilt).

- **[Notwendiges Kriterium für Wendepunkte]:** Besitzt die Funktion  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x \in ]a, b[$  einen Wendepunkt und ist  $f$  in  $x$  zweimal differenzierbar, so gilt  $f''(x) = 0$ .  
**Hinweis:** Dabei sagen wir,  $f$  besitzt in  $x$  einen **Wendepunkt**, wenn die Funktion  $f$  links von  $x$  konkav und rechts von  $x$  konvex ist (oder umgekehrt).
- **[Satz von Rolle]:** Für  $a < b$  sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $]a, b[$  differenzierbare Funktion mit  $f(a) = f(b)$ , welche stetig in den Randpunkten ist. Dann existiert ein  $\xi \in ]a, b[$  mit  $f'(\xi) = 0$ .
- **[Mittelwertsatz der Differentialrechnung]:** Für  $a < b$  sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $]a, b[$  und stetig in den Randpunkten. Dann existiert ein  $\xi \in ]a, b[$  mit  $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

- **[Bernoulli-L'Hospital'sche Regeln]:** Sei  $a < b$  und  $I = ]a, b[$ . Für differenzierbare Funktionen  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$  gilt bei

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \searrow a} g(x) \quad \text{oder} \quad \lim_{x \searrow a} f(x) = \infty = \lim_{x \searrow a} g(x)$$

die Gleichung (falls der Grenzwert auf der rechten Seite – möglicherweise nur uneigentlich – existiert)

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Bemerkung:** (1) Im Fall  $\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$  existiert ein  $\xi \in ]a, b[$ , so dass  $f'(x) \neq 0$  für alle  $x \in ]a, \xi[$ , und es gilt  $\lim_{x \searrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$ , also nach L'Hospital auch  $\lim_{x \searrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ . Aufgrund der (sogar gleichen) Monotonie von  $f$  und  $g$  auf  $]a, \xi[$  ist auch  $\frac{g(x)}{f(x)} > 0$  in der Nähe von  $a$  und daher  $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ .  
 (2) Eine entsprechend gültige Aussage kann auch für die Grenzwerte  $x \nearrow b$  formuliert werden.

**Zusatzaufgabe 11.1:** Bestimmen Sie mittels Rechenregeln die Ableitung der Funktionen

- (a)  $f(x) := |x|$  für  $x \neq 0$     (b)  $\sinh(x)$  und  $\cosh(x)$     (c)  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$     (d)  $\arcsin(y)$

**Lösung zu Zusatzaufgabe 11.1:**

- (a) Für ein beliebiges  $x > 0$  ist  $f(x) = x$ . Daher (weil insbesondere auch  $f(y) = y$  für alle  $y$  aus einer  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$  ist) gilt  $f'(x) = 1$ . Für  $x < 0$  gilt entsprechend  $f(x) = -x$ , womit (wieder mit dem Umgebungsargument)  $f'(x) = -1$  folgt. Also ist die Ableitung von  $f$  auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  durch  $f'(x) = \text{sign}(x)$  gegeben.

**Hinweis:** Beachten Sie, dass  $f(x) = |x|$  in  $a := 0$  nicht differenzierbar ist, denn wegen

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x}{x} = -1 \neq 1 = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{|x| - 0}{x} \quad \text{existiert} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{|x| - 0}{x} \quad \text{nicht.}$$

- (b) Es gilt  $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$  und daher  $\sinh'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$ . Ebenso folgt aus  $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  auch  $\cosh'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$ .  
 (c) Es gilt  $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$  und daher  $\sin'(x) = \frac{1}{2i}(ie^{ix} + ie^{-ix}) = \cos(x)$ .  
 Ebenso gilt  $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$  und daher  $\cos'(x) = \frac{1}{2}(ie^{ix} - ie^{-ix}) = -\sin(x)$ .  
 (d) Wegen  $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$  bzw. mit dem Satz von Pythagoras ergibt sich

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin(y)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

für  $y \in ]-1, 1[$ . **Achtung:** In den Randpunkten  $\pm 1$  ist  $\arcsin$  stetig, aber nicht differenzierbar.

**Zusatzaufgabe 11.2:**

- (a) Bestimmen Sie die Ableitung von  $w(x) = \sqrt{x}$  mit Hilfe der Umkehrfunktion.  
 (b) Bestimmen Sie mittels der Bernoulli-L'Hospital'schen Regeln die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$  und  $\lim_{x \searrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x}}$ .

**Lösung zu Zusatzaufgabe 11.2:**

- (a) Mit  $f^{-1}(x) := w(x) = \sqrt{x} = y$  und  $f(y) := y^2 = x$  erhalten wir wegen  $f'(y) = 2y$  wie zuvor mittels Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion dann  $w'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

- (b) Da sowohl  $\ln(x)$  als auch  $x$  für  $x \rightarrow \infty$  bestimmt gegen  $+\infty$  divergieren und die Ableitung von  $x$  nirgends verschwindet, erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Mit  $x^2 e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}}$  und da sowohl  $e^{\frac{1}{x}}$  als auch  $\frac{1}{x^2}$  für  $x \searrow 0$  bestimmt gegen  $+\infty$  divergieren und die Ableitung  $-\frac{2}{x^3}$  von  $\frac{1}{x^2}$  auf  $]0, \infty[$  nie verschwindet, ergibt sich nach zweimaliger Anwendung

$$\lim_{x \searrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \searrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{2}{x^3}} = \frac{1}{2} \lim_{x \searrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \searrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2} \lim_{x \searrow 0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

### Zusatzaufgabe 11.3:

Es seien  $a, b$  reelle Zahlen. Ermitteln Sie mittels der Bernoulli-L'Hospital'schen Regeln die Grenzwerte

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan(x)}{x^3} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin(x)} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} (x \cot(2x)) \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{1/x^2}$$

### Lösung zu Zusatzaufgabe 11.3:

(a) Da sowohl Zähler als auch Nenner gegen Null streben, erhalten wir mit der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan(x)}{x^3} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}.$$

(b) Da sowohl Zähler als auch Nenner gegen Null streben, erhalten wir mit der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin(x)} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{ax} - be^{bx}}{\cos(x)} = a - b.$$

(c) Wegen  $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$  ergibt sich diesmal mit der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot(2x) = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \cos(2x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(2x)} \right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos(2x)} = \frac{1}{2}.$$

(d) Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln((\cos(x))^{1/x^2})} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln((\cos(x))^{1/x^2})} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}},$$

denn wegen  $\ln(1) = 0$  und unter Zuhilfenahme der Regel von L'Hospital gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} &\stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{2x} = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\cos(x)} \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x} \right) \\ &\stackrel{\text{L'Hospital}}{=} (-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

### Zusatzaufgabe 11.4:

(a) Beweisen Sie, dass eine differenzierbare Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$  für alle  $x, y \in D$  konstant ist.

(b) Zeigen Sie, dass  $f(t) := t^p$  für ganzzahlige  $p \geq 1$  auf  $]0, \infty[$  konvex ist, indem Sie

- (i) einerseits die Definition und (ii) andererseits die zweite Ableitung verwenden.

### Lösung zu Zusatzaufgabe 11.4:

(a) Für beliebiges  $x \in D$  ergibt die Definition der Ableitung  $|f'(x)| = \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \lim_{x \rightarrow y} |x - y| = 0$ .

Also ist  $f'(x) = 0$  für beliebiges  $x \in D$  und somit  $f$  konstant.

(b) (i) Für beliebige  $a, b \in ]0, \infty[$  gilt wegen  $p \geq 1$  offenbar  $p(a^{p-1} - b^{p-1})(a - b) \geq 0$ . Nach dem Mittelwertsatz existiert nun ein  $\theta \in ]0, 1[$ , so dass dann

$$a^p - b^p = p(a + \theta(b - a))^{p-1}(a - b) = \underbrace{p((a + \theta(b - a))^{p-1} - b^{p-1})}_{\geq 0}(a - b) + pb^{p-1}(a - b) \geq pb^{p-1}(a - b)$$

Mit den entsprechenden Ersetzungen  $s, t \in ]0, \infty[$  und  $\lambda \in ]0, 1[$  erhalten wir nun die beiden Ungleichungen

$$s^p - (\lambda s + (1 - \lambda)t)^p \geq p(\lambda s + (1 - \lambda)t)^{p-1}(s - (\lambda s + (1 - \lambda)t)) \quad (11.1b)$$

$$t^p - (\lambda s + (1 - \lambda)t)^p \geq p(\lambda s + (1 - \lambda)t)^{p-1}(t - (\lambda s + (1 - \lambda)t)) \quad (11.2b)$$

Addition des  $\lambda$ -fachen von Ungleichung (11.1b) und  $(1 - \lambda)$ -fachen von Ungleichung (11.2b) ergibt dann  $\lambda s^p + (1 - \lambda)t^p - (\lambda s + (1 - \lambda)t)^p \geq 0$  und somit die Behauptung.

- (ii) Für  $p \geq 1$  gilt  $f'(t) = pt^{p-1}$  und  $f''(t) = p(p-1)t^{p-2}$ . Also ist wegen  $p \geq 1$  auch  $f''(t) \geq 0$  (bei  $p \geq 2$  sogar  $f''(t) > 0$ ) für  $t > 0$  und die Funktion  $f$  ist somit konvex auf  $]0, \infty[$  (streng konvex bei  $p \geq 2$ ).

### Zusatzaufgabe 11.5:

- (a) Bestimmen Sie die globalen und lokalen Extrema von  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$  im Intervall  $[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$ .  
 (b) Untersuchen Sie  $g = x^2e^{-x}$  auf Monotonie, Konvexität/Konkavität sowie Wendepunkte.

### Lösung zu Zusatzaufgabe 11.5:

- (a) Die erste Ableitung  $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1)$  besitzt die Nullstellen  $x = 2$  und  $x = -1$ , wobei  $-1 \notin [-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$ . Da die Funktion in den Randpunkten die Funktionswerte

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 6 + 1 = 6 \quad \text{und} \quad f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{4} - \frac{75}{4} - 30 + 1 = -\frac{33}{2} = -16.5$$

annimmt sowie  $f(2) = -19$  ist, besitzt  $f$  in  $x = -\frac{1}{2}$  mit 6 sein globales Maximum und in  $x = 2$  mit  $-19$  sein globales Minimum. Darüberhinaus besitzt  $f$  wegen

$$f'\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{75}{2} - 15 - 12 = \frac{21}{2} > 0$$

im rechten Randpunkt ein lokales Maximum, da in einer kleinen Umgebung alle Funktionswerte links kleiner sind.

- (b) **Monotonieintervalle:**

Da die Funktion genau dort monoton wachsend ist, wo die erste Ableitung größer oder gleich Null ist, und dementsprechend monoton fallend, wo sie kleiner oder gleich Null ist, bestimmen wir zunächst die erste Ableitung

$$g'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2-x)xe^{-x}.$$

Da die Exponentialfunktion stets positiv ist, folgt

$$g'(x) \geq 0 \quad \iff \quad (2-x)x \geq 0 \quad \iff \quad x \in [0, 2],$$

also ist die Funktion auf  $]0, 2[$  (sogar streng) monoton wachsend, während sie auf den Intervallen  $] -\infty, 0[$  und  $]2, \infty[$  (sogar streng) monoton fallend ist.

### Konvex- und Konkavintervalle:

Da die Funktion genau dort konvex ist, wo die zweite Ableitung größer oder gleich Null ist, und dementsprechend konkav, wo sie kleiner oder gleich Null ist, bestimmen wir nun die zweite Ableitung

$$g''(x) = (2-2x)e^{-x} - (2-x)xe^{-x} = (2-4x+x^2)e^{-x} = (x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})e^{-x}$$

Da die Exponentialfunktion stets positiv ist, folgt

$$g''(x) \leq 0 \quad \iff \quad (x - (2 - \sqrt{2})) (x - (2 + \sqrt{2})) \leq 0 \quad \iff \quad x \in [2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}],$$

also ist die Funktion auf  $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$  konkav und auf den Intervallen  $] -\infty, 2 - \sqrt{2}[$  und  $[2 + \sqrt{2}, \infty[$  konvex.

### Wendepunkte:

Die Nullstellen der zweiten Ableitungen sind bei dieser Funktion genau die Wendepunkte, wobei  $f$  bei  $2 - \sqrt{2}$  einen Rechtswendepunkt besitzt, da sich links von ihm ein konvexes und rechts von ihm ein konkaves Intervall befindet. Analog besitzt  $f$  bei  $2 + \sqrt{2}$  einen Linkswendepunkt, da sich links von ihm ein konkaves und rechts von ihm ein konvexes Intervall befindet.

## Zusatzmaterial zur Analysis I – Übung zu Serie 12

### Treppenfunktionen, Riemann-Integral, Mittelwertsatz der Integralrechnung (vgl. §18)

- **Definition [Treppenfunktion]:** Zum Intervall  $[a, b]$  heißt  $P := \{x_0, \dots, x_n\}$  eine **Unterteilung**, falls  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  gilt. Die **Menge aller Treppenfunktionen zur Unterteilung  $P$**  ist dann

$$T_P := \left\{ \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall k = 1, \dots, n \exists c_k \in \mathbb{R} : \varphi|_{]x_{k-1}, x_k[} = c_k \right\} \quad (12.1)$$

**Bemerkungen:** (1)  $T_P$  ist ein Unterraum aller reellen Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , denn es gelten

$$(i) \ 0 \in T_P \quad (ii) \ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in T_P : \varphi_1 + \varphi_2 \in T_P \quad (iii) \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \forall \varphi \in T_P : \lambda \varphi \in T_P$$

(2) Sind  $P_1, P_2$  zwei Unterteilungen von  $[a, b]$  mit  $P_1 \subset P_2$ , so gilt auch  $T_{P_1} \subset T_{P_2}$ .

- Für ein  $\varphi \in T_P$  definieren wir die Zahl 
$$I_P(\varphi) := \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}). \quad (12.2)$$

Es gelten  $I_P(0) = 0$  und  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall \varphi, \psi \in T_P : I_P(\varphi_1 + \varphi_2) = I_P(\varphi_1) + I_P(\varphi_2) \wedge I_P(\lambda \varphi) = \lambda I_P(\varphi)$ .

- **Lemma:** Sind  $P_1, P_2$  zwei Unterteilungen mit  $P_1 \subset P_2$  und  $\varphi \in T_{P_1}$ , so gilt  $I_{P_1}(\varphi) = I_{P_2}(\varphi)$ .

**Corollar:** Sind  $P_1, P_2$  zwei Unterteilungen und  $\varphi \in T_{P_1} \cap T_{P_2}$ , so gilt  $I_{P_1}(\varphi) = I_{P_2}(\varphi)$ .

- **Definition [Integral einer Treppenfunktion]:** Sei  $\varphi$  eine **Treppenfunktion über  $[a, b]$** , also

$$\varphi \in T[a, b] := \{ \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists P \text{ von } [a, b] \text{ mit } \psi \in T_P \}. \quad (12.3)$$

Dann gibt es eine Unterteilung  $P$  von  $[a, b]$  mit  $\varphi \in T_P$ . Wir definieren das **Integral von  $\varphi$**  durch

$$\int_a^b \varphi(x) dx := I_P(\varphi). \quad (12.4)$$

**Bemerkung:** Nach obigem Lemma ist das Integral wohldefiniert, d.h., nicht von der konkreten Wahl der Unterteilung  $P$  abhängig.

- **Satz 1 [Linearität, Monotonie des Integrals für Treppenfunktionen]:** Das Integral ist ein lineares, monotonen Funktional auf dem Vektorraum  $T[a, b]$ , d.h., es gelten

$$(i) \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall \varphi, \psi \in T[a, b] : \int_a^b (\lambda \varphi + \mu \psi)(x) dx = \lambda \int_a^b \varphi(x) dx + \mu \int_a^b \psi(x) dx,$$

$$(ii) \ \forall \varphi, \psi \in T[a, b] : \left( \varphi \leq \psi \implies \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx \right),$$

wobei  $\varphi \leq \psi :\iff (\forall x \in [a, b] : \varphi(x) \leq \psi(x))$ .

- **Definition [Oberintegral, Unterintegral]:** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann definieren wir

$$\int_a^{b*} f(x) dx := \inf_{\substack{\varphi \in T[a, b] \\ \varphi \geq f}} \int_a^b \varphi(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{a*}^b f(x) dx := \sup_{\substack{\varphi \in T[a, b] \\ \varphi \leq f}} \int_a^b \varphi(x) dx \quad (12.5)$$

- **Definition [Riemann-integrierbar]:** Eine beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Riemann-integrierbar**, falls

$$\int_a^{b*} f(x) dx = \int_{a*}^b f(x) dx$$

gilt. In diesem Fall definieren wir das **Riemann-Integral** durch  $\int_a^b f(x) dx := \int_a^{b*} f(x) dx$ .

- **Satz 2 [Einschließung zwischen Treppenfunktionen]:** Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann Riemann-integrierbar, falls  $\varphi, \psi \in T[a, b]$  mit  $\varphi \leq f \leq \psi$  existieren, so dass

$$\int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx < \varepsilon \quad (12.6)$$

- **Satz 3/Satz 4:** Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig oder monoton, so ist  $f$  auch Riemann-integrierbar.
- **Satz 5 [Linearität und Monotonie]:** Die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen  $R[a, b]$  bilden einen linearen Unterraum aller Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Insbesondere ist das Riemann-Integral ein lineares, monotones Funktional auf dem Vektorraum  $R[a, b]$ .
- **Definition [Positiv-/Negativteil]:** Für  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D \subset \mathbb{R}$ ) definieren wir  $f_+, f_- : D \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad f_-(x) := \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) \leq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (12.7)$$

Aus der Definition folgen sofort  $f = f_+ - f_-$  und  $|f| = f_+ + f_-$ .

- **Satz 6:** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar. Dann gelten:
  - (a) Die Funktionen  $f_+, f_-, |f|$  sind Riemann-integrierbar mit  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f|(x) dx$
  - (b) Für jedes  $p \in [1, \infty[$  ist  $|f|^p : D \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar.
  - (c) Die Funktion  $fg : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist Riemann-integrierbar.
- **Satz 7 [Mittelwertsatz der Integralrechnung]:** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $g \geq 0$ . Dann existiert ein  $\xi \in ]a, b[$ , so dass  $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$ . Falls  $g \equiv 1$ , gilt  $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi)$ .

- **Definition [Riemannsche Summen]:** Ist  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  eine Unterteilung von  $[a, b]$  und sind  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, \dots, n$ , beliebige sog. Stützstellen, so nennen wir das Tupel  $Z := (P, (\xi_k)_{1 \leq k \leq n})$  eine **Zerlegung von**  $[a, b]$  und

$$RS(Z, f) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad (12.8)$$

eine **Riemannsche Zwischensumme** (welche nur das Integral einer bestimmten Treppenfunktion ist). Desweiteren bezeichne  $\mu(Z) := \max\{x_k - x_{k-1} \mid k = 1, \dots, n\}$  die **Feinheit** der Zerlegung  $Z$ .

- **Satz 8:** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar. Dann gilt  $\lim_{\mu(Z) \rightarrow 0} RS(Z, f) = \int_a^b f(x) dx$ .
- **Satz 9:** Seien  $a < b < c$ . Dann ist  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann Riemann-integrierbar, wenn  $f|_{[a, b]}$  und  $f|_{[b, c]}$  Riemann-integrierbar sind. Insbesondere gilt dann
 
$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx. \quad (12.9)$$
- **Definition:** Wir setzen  $\int_a^a f(x) dx := 0$  und  $\int_a^b f(x) dx := -\int_b^a f(x) dx$ , falls  $b < a$ .

## Stammfunktionen, Substitutionsregel, Partielle Integration, Partialbruchzerlegung (vgl. §19)

- **Definition [Stammfunktion]:** Zu  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I \subset \mathbb{R}$  Intervall) heißt  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine **Stammfunktion/primitive Funktion** von  $f$  (auf  $I$ ), falls  $F$  differenzierbar ist und  $F' = f$  auf  $I$  gilt.
- Zwei Stammfunktionen  $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  unterscheiden sich höchstens um eine Konstante.
- **Hauptsatz [Differential- und Integralrechnung – vgl. Satz 1 u. 3, §19]:** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall.
  - (1) Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so besitzt  $f$  eine Stammfunktion, z.B.,  $F_a(x) := \int_a^x f(x) dx$  zu bel.  $a \in I$ .
  - (2) Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig (Riemann-integrierbar) und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  auf  $I$ , so gilt

$$\forall a, b \in I : \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a). \quad (12.10)$$

**Bemerkung:** Häufig schreibt man auch einfach nur  $\int f(x)dx$  für eine Stammfunktion  $F$  von  $f$ .

- **Satz [Substitutionsregel]:** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar mit  $\varphi([a, b]) \subset I$ , so gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \quad (12.11)$$

- **Satz [Partielle Integration]:** Sind  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \quad (12.12)$$

- **Partialbruchzerlegung:** Sind  $P(x), Q(x)$  normierte, teilerfremde Polynome mit  $\deg(P) < \deg(Q)$ , so ist  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  eindeutig in eine Summe von Partialbrüchen zerlegbar. Die Summanden besitzen die Gestalt

$$\begin{aligned} & \frac{A_1}{(x-\alpha)^1}, \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}, \dots, \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}, & \text{falls } \alpha \text{ eine } k\text{-fache Nullstelle von } Q(x) \text{ ist,} \\ & \frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^1}, \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}, \dots, \frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}, & \text{falls } p^2-4q < 0 \text{ und falls } (x^2+px+q) \\ & & \text{ein } m\text{-facher Teiler von } Q(x) \text{ ist,} \end{aligned}$$

wobei die  $A_j, j = 1, \dots, k$ , bzw.  $B_s, C_s, s = 1, \dots, m$ , jeweils reelle Konstanten sind.

**Bemerkung:** Die oben angeführten Konstanten erhalten wir, indem wir in Abhängigkeit der Nullstellen von  $Q(x)$  den passenden Ansatz auswählen und einen Koeffizientenvergleich ausführen.

**Zusatzaufgabe 12.1:** Zeigen Sie:

$$(a) \quad \forall \varphi \in T[a, b] : \int_a^{b^*} \varphi(x)dx = \int_{a_*}^b \varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx$$

$$(b) \quad \forall f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ beschränkt} : \int_{a_*}^b f(x)dx \leq \int_a^{b^*} f(x)dx$$

**Lösung zu Zusatzaufgabe 12.1:**

- (a) Sei  $\varphi \in T[a, b]$  beliebig. Dann gibt es eine Unterteilung  $P$  von  $[a, b]$  mit  $\varphi \in T_P$ . Weiterhin gilt sowohl  $\varphi \in \{\psi \in T[a, b] \mid \psi \geq \varphi\}$  als auch  $\varphi \in \{\psi \in T[a, b] \mid \psi \leq \varphi\}$ . Aus der Monotonie und der Linearität des Integrals für Treppenfunktionen (vgl. Satz 1, §18) und mit obigem Lemma sowie den Eigenschaften des Infimums bzw. Supremums ergeben sich dann sowohl

$$\left( \inf_{\substack{\psi \in T[a, b] \\ \psi \geq \varphi}} \int_a^b \psi(x)dx \right) - \int_a^b \varphi(x)dx = \inf_{\substack{\psi \in T[a, b] \\ \psi \geq \varphi}} \left( \int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \right) = \inf_{\substack{\psi \in T[a, b] \\ \psi \geq \varphi}} \int_a^b \underbrace{(\psi(x) - \varphi(x))}_{\geq 0 \in T[a, b]} dx = 0$$

als auch

$$\left( \sup_{\substack{\psi \in T[a, b] \\ \psi \leq \varphi}} \int_a^b \psi(x)dx \right) - \int_a^b \varphi(x)dx = \sup_{\substack{\psi \in T[a, b] \\ \psi \leq \varphi}} \left( \int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \right) = \sup_{\substack{\psi \in T[a, b] \\ \psi \leq \varphi}} \int_a^b \underbrace{(\psi(x) - \varphi(x))}_{\leq 0 \in T[a, b]} dx = 0$$

und somit wie behauptet

$$\int_a^{b^*} \varphi(x)dx = \inf_{\substack{\psi \in T[a, b] \\ \psi \geq \varphi}} \int_a^b \psi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx = \sup_{\substack{\psi \in T[a, b] \\ \psi \leq \varphi}} \int_a^b \psi(x)dx = \int_{a_*}^b \varphi(x)dx.$$

- (b) Wiederum aufgrund der Monotonie des Integrals für Treppenfunktionen (vgl. Satz 1, §18) gilt für ein beliebiges, aber festes  $\psi \in T[a, b]$  mit  $\psi \leq f$  dann auch

$$\forall \varphi \in T[a, b] : \left( f \leq \varphi \implies \int_a^b \psi(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx \right), \text{ also auch } \int_a^b \psi(x)dx \leq \inf_{\substack{\varphi \in T[a, b] \\ f \leq \varphi}} \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Somit ist  $\int_a^{b^*} f(x)dx$  eine (nicht von der Wahl von  $\psi$  abhängige) obere Schranke für  $\int_a^b \psi(x)dx$ . Aufgrund der Beliebigkeit von  $\psi \in T[a, b]$  mit  $\psi \leq f$  erhalten wir somit

$$\forall \psi \in T[a, b] : \left( \psi \leq f \implies \int_a^b \psi(x)dx \leq \int_a^{b^*} f(x)dx \right), \text{ also auch } \sup_{\substack{\psi \in T[a, b] \\ \psi \leq f}} \int_a^b \psi(x)dx \leq \int_a^{b^*} f(x)dx$$

und somit wie behauptet  $\int_{a_*}^b f(x)dx \leq \int_a^{b^*} f(x)dx$ .

### Zusatzaufgabe 12.2:

Sei  $P$  eine Unterteilung von  $[a, b]$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann heißen

$$OS(P, f) := \int_a^b \Phi_P(x)dx \quad \text{mit} \quad \Phi_P(x) := \begin{cases} \sup_{x \in ]x_{k-1}, x_k[} f(x) & \text{für } x \in ]x_{k-1}, x_k[, \quad k = 1, \dots, n, \\ f(x) & \text{für } x \in P, \end{cases}$$

$$US(P, f) := \int_a^b \Psi_P(x)dx \quad \text{mit} \quad \Psi_P(x) := \begin{cases} \inf_{x \in ]x_{k-1}, x_k[} f(x) & \text{für } x \in ]x_{k-1}, x_k[, \quad k = 1, \dots, n, \\ f(x) & \text{für } x \in P, \end{cases}$$

**Riemannsche Ober- bzw. Untersumme** von  $f$  bezüglich der Unterteilung  $P$ . Zeigen Sie:

- (a)  $\forall \varphi, \psi \in T_P : (\psi \leq f \leq \varphi \implies \psi \leq \Psi_P \leq f \leq \Phi_P \leq \varphi)$   
 (b)  $\int_a^{b^*} f(x)dx = \inf \{ OS(P, f) \mid P \text{ Unterteilung von } [a, b] \}$   
 (c)  $\int_{a_*}^b f(x)dx = \sup \{ US(P, f) \mid P \text{ Unterteilung von } [a, b] \}$

### Lösung zu Zusatzaufgabe 12.2:

- (a) Sei  $P$  eine beliebige Unterteilung von  $[a, b]$  und  $\varphi, \psi \in T_P$  mit  $\psi \leq f \leq \varphi$ . Auf jedem Teilintervall  $I_k := ]x_{k-1}, x_k[$  gilt dann insbesondere  $\psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x)$  für alle  $x \in I_k$ . Wegen  $\varphi, \psi \in T_P$  gibt es auf jedem Teilintervall  $I_k := ]x_{k-1}, x_k[$  Konstanten  $c_k, d_k$ , so dass  $\psi(x) = c_k \leq f(x) \leq d_k = \varphi(x)$  für alle  $x \in I_k$ , also insbesondere somit

$$\forall k = 1, \dots, n \quad \forall x \in I_k : \psi(x) = c_k \leq \inf_{x \in I_k} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{x \in I_k} f(x) \leq d_k = \varphi(x),$$

was nach Definition von  $\Phi_P(x)$  und  $\Psi(x)$  gleichbedeutend mit

$$\forall k = 1, \dots, n \quad \forall x \in I_k : \psi(x) = c_k \leq \Psi(x) \leq f(x) \leq \Phi(x) \leq d_k = \varphi(x)$$

ist. Da die Funktionen  $\Phi_P(x)$  und  $\Psi(x)$  nach Definition zusätzlich in den Randpunkten der Intervalle  $I_k$  mit  $f(x)$  übereinstimmen, ergibt sich wie behauptet  $\psi \leq \Psi_P \leq f \leq \Phi_P \leq \varphi$ .

- (b) Nach Definition ist  $OS(P, f)$  das Integral einer Treppenfunktionen, welche  $\geq f$  ist. Da Aufgabenteil (a) für eine beliebige Unterteilung  $P$  des Intervalls  $[a, b]$  besagt, dass  $\Phi_P = \inf_{\substack{\varphi \in T_P \\ \varphi \geq f}} \varphi$  ist, folgt nach den Monotonieeigenschaften des Integrals für Treppenfunktionen sowie der Eigenschaft des Infimums

$$\int_a^{b^*} f(x)dx = \inf_{\substack{\varphi \in T[a, b] \\ f \leq \varphi}} \int_a^b \varphi(x)dx = \inf_P \left( \inf_{\substack{\varphi \in T_P \\ f \leq \varphi}} \int_a^b \varphi(x)dx \right) = \inf_P \left( \int_a^b \inf_{\substack{\varphi \in T_P \\ f \leq \varphi}} \varphi(x)dx \right) = \inf_P OS(P, f)$$

- (c) Nach Definition ist  $US(P, f)$  das Integral einer Treppenfunktionen, welche  $\leq f$ . Da Aufgabenteil (a) für eine beliebige Unterteilung  $P$  des Intervalls  $[a, b]$  besagt, dass  $\Psi_P = \sup_{\substack{\psi \in T_P \\ \psi \leq f}} \psi$  ist, folgt nach den Monotonieeigenschaften des Integrals für Treppenfunktionen sowie der Eigenschaft des Supremums

$$\int_{a_*}^b f(x)dx = \sup_{\substack{\varphi \in T[a, b] \\ f \geq \varphi}} \int_a^b \varphi(x)dx = \sup_P \left( \sup_{\substack{\varphi \in T_P \\ f \geq \varphi}} \int_a^b \varphi(x)dx \right) = \sup_P \left( \int_a^b \sup_{\substack{\varphi \in T_P \\ f \geq \varphi}} \varphi(x)dx \right) = \sup_P US(P, f)$$

### Zusatzaufgabe 12.3: Zeigen Sie:

- (a) Teil (2) des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung gilt bereits für  $f$  Riemann-integrierbar.  
 (b) Potenzen  $|f|^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , Riemann-integrierbarer Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sind R-integrierbar.  
 (c) Produkte Riemann-integrierbarer Funktionen sind wieder Riemann-integrierbar.

(d) Es gibt eine RIEMANN-integrierbare Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , die keine Stammfunktion besitzt.

(e) Es gibt eine nicht Riemann-integrierbare Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , welche eine Stammfunktion besitzt.

### Lösung zu Zusatzaufgabe 12.3:

(a) Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar mit Stammfunktion  $F$ . Zunächst ist  $f$  dann auch Riemann-integrierbar für jedes Intervall  $[a, b] \subseteq I$ . Für eine beliebige Unterteilung  $P$  des Intervalls  $[a, b]$  (Def. s.o.) liefert der Mittelwertsatz der Differentialrechnung Stützstellen  $\xi_k \in ]x_{k-1}, x_k[$ ,  $k = 1, \dots, n$ , mit  $\frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f(\xi_k)$ , also je eine Zerlegung  $Z = (P, (\xi_k)_{1 \leq k \leq n})$ . Nach Satz 8, §18 erhalten wir nun

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) \stackrel{\text{MWS der Diff.rechnung}}{=} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \xrightarrow{\mu(Z) \rightarrow 0} \int_a^b f(x) dx .$$

(b) Aufgrund der Linearität (d.h. insbesondere, dass mit  $f$  auch  $\lambda f$  RIEMANN-integrierbar ist) und da mit  $f$  auch  $f_+$  und  $f_-$  RIEMANN-integrierbar sind (und somit auch  $|f| = f_+ + f_-$ ), genügt es, die RIEMANN-Integrierbarkeit von  $|f|^p$  für den Fall  $0 \leq f \leq 1$  zu beweisen.

Aufgrund der Riemann-Integrierbarkeit von  $f$  finden wir nach Satz 2, §18 zu jedem  $\varepsilon > 0$  Treppenfunktionen  $\varphi, \psi$  mit  $0 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq 1$  und

$$0 \leq \int_a^b (\psi - \varphi)(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{p} .$$

Es sind weiterhin auch  $\varphi^p$  und  $\psi^p$  Treppenfunktionen, für die aufgrund der strengen Monotonie der Potenz ebenso  $0 \leq \varphi^p \leq f^p \leq \psi^p \leq 1$  gelten. Wegen  $(x^p)' = px^{p-1}$  und  $\max\{|px^{p-1}| \mid x \in [0, 1]\} = p$  folgt nun mit Hilfe des Mittelwertsatzes (angewendet auf  $x^p$  eingeschränkt auf das Intervall  $[0, 1]$ )

$$0 \leq \psi^p - \varphi^p \leq p(\psi - \varphi) \implies 0 \leq \int_a^b (\psi^p - \varphi^p)(x) dx \leq p \int_a^b (\psi - \varphi)(x) dx \leq p \cdot \frac{\varepsilon}{p} \leq \varepsilon ,$$

also die RIEMANN-Integrierbarkeit von  $f$ .

(c) Wegen  $|f|^2 = f^2$  und mit Hilfe der Linearität des RIEMANN-Integrals folgt für RIEMANN-integrierbare Funktionen  $f, g$ , dass  $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$  RIEMANN-integrierbar ist.

(d) Beispielsweise sei  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f := \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$  definiert. Für eine beliebige Unterteilung  $P$  (Definition s.o.) gilt dann  $US(P, f) = 0$  und  $0 \leq OS(P, f) \leq \max_{k=1, \dots, n} |x_k - x_{k-1}|$ , also

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx = 0 .$$

Angenommen, es existiert eine Stammfunktion  $F$ , d.h.  $\forall x \in [-1, 1] : F'(x) = f(x)$ . Dann gilt auch  $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt + C = C$  (vgl. Hauptsatz), aber in diesem Fall  $F'(x) \equiv 0 \neq f(x)$  bei  $x = 0$ . Wid.

(e) Die Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ 2t \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) - \frac{2}{t} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right), & t \in ]0, 1], \end{cases}$  besitzt offenbar  $F(t) = t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$  als Stammfunktion (wegen  $\lim_{t \searrow 0} \frac{t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{t} = \lim_{t \searrow 0} t \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) = 0$  (vgl. ZA 8.3 (a)) gilt  $F'(0) = 0$ ), jedoch ist  $f$  aufgrund der Unbeschränktheit nicht RIEMANN-integrierbar.

### Zusatzaufgabe 12.4: Berechnen Sie die folgenden Integrale und führen Sie ggf. die Probe durch:

(a)  $\int x \sin(x) dx$ , (b)  $\int x \sin(x^2) dx$ , (c)  $\int (\sin(x))^2 dx$ , (d)  $\int e^x \sin(x) dx$ , (e)  $\int \tan(x) dx$

### Lösung zu Zusatzaufgabe 12.4:

(a) Partielle Integration liefert  $\int x \sin(x) dx = -x \cos(x) + \int \cos(x) dx = \sin(x) - x \cos(x) + C$ .

Probe:  $(\sin(x) - x \cos(x))' = \cos(x) - \cos(x) + x \sin(x) = x \sin(x)$ .

(b) Mit der Substitution  $z = \varphi(x) = x^2$ , d.h.  $\frac{dz}{dx} = \varphi'(x) = 2x$ , ergibt sich

$$\int x \sin(x^2) dx = \int \frac{\sin(z)}{2} dz = -\frac{\cos(z)}{2} + C = -\frac{\cos(x^2)}{2} + C \quad \text{Probe:} \quad \left(-\frac{\cos(x^2)}{2}\right)' = \frac{\sin(x^2)2x}{2}.$$

(c) Partielle Integration mit  $u'(x) = \sin(x)$ ,  $u(x) = -\cos(x)$  und  $v(x) = \sin(x)$ ,  $v'(x) = \cos(x)$  führt zu

$$\int (\sin(x))^2 dx = \int \sin(x) \sin(x) dx = -\sin(x) \cos(x) + \int (\cos(x))^2 dx = -\sin(x) \cos(x) + \int (1 - (\sin(x))^2) dx$$

Umstellen führt zu

$$\int (\sin(x))^2 dx = \frac{x - \sin(x) \cos(x)}{2} + C$$

$$\text{Probe:} \quad \left(\frac{x - \sin(x) \cos(x)}{2}\right)' = \frac{1 - (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{2} = \frac{(\sin(x))^2 + (\sin(x))^2}{2} = (\sin(x))^2.$$

(d) Zweimalige Anwendung von partieller Integration mit jeweils  $u' = u = e^x$  und  $v = \sin(x)$ ,  $v' = \cos(x)$  bzw.  $v = \cos(x)$ ,  $v' = -\sin(x)$  ergibt

$$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx = e^x \sin(x) - \left[ e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx \right]$$

$$\text{und nach Umstellen daher} \quad \int e^x \sin(x) dx = \frac{e^x (\sin(x) - \cos(x))}{2}.$$

$$\text{Probe:} \quad \left(\frac{e^x (\sin(x) - \cos(x))}{2}\right)' = \frac{e^x [(\sin(x) - \cos(x)) + (\cos(x) + \sin(x))]}{2} = e^x \sin(x).$$

(e) Wegen  $(\ln \circ f)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$  erhalten wir  $\int \tan(x) dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx = -\ln(\cos(x))$ .

**Zusatzaufgabe 12.5:** Berechnen Sie mittels partieller Integration oder Substitution:

$$(a) \int (4x^3 - 1) \ln(x) dx \quad (b) \int e^{2x} \cos(4x - 3) dx \quad (c) \int x\sqrt{1-x} dx \quad (d) \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad (e) \int \frac{\ln(x)}{x} dx$$

**Lösung zu Zusatzaufgabe 12.5:**

(a) Partielle Integration mit  $u' = 4x^3 - 1$ ,  $u = x^4 - x$  und  $v = \ln(x)$ ,  $v' = \frac{1}{x}$  liefert

$$\int (4x^3 - 1) \ln(x) dx = (x^4 - x) \ln(x) - \int \frac{x^4 - x}{x} dx = (x^4 - x) \ln(x) - \frac{x^4}{4} + x + C.$$

(b) Zweimalige Anwendung von partieller Integration mit jeweils  $u' = e^{2x}$ ,  $u = \frac{e^{2x}}{2}$  und  $v = \cos(4x - 3)$ ,  $v' = -4 \sin(4x - 3)$  bzw.  $v = \sin(4x - 3)$ ,  $v' = 4 \cos(4x - 3)$  ergibt

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \cos(4x - 3) dx &= \frac{e^{2x} \cos(4x - 3)}{2} + 2 \int e^{2x} \sin(4x - 3) dx \\ &= \frac{e^{2x} \cos(4x - 3)}{2} + e^{2x} \sin(4x - 3) - 4 \int e^{2x} \cos(4x - 3) dx \end{aligned}$$

$$\text{und nach Umstellen daher} \quad \int e^{2x} \cos(4x - 3) dx = \frac{e^{2x} (\cos(4x - 3) + 2 \sin(4x - 3))}{10}.$$

(c) Die Substitution  $z = \sqrt{1-x}$ , d.h.  $x = \varphi(z) = 1 - z^2$  und somit  $\frac{dx}{dz} = \varphi'(z) = -2z$  liefert

$$\int x\sqrt{1-x} dx = -2 \int (1 - z^2) z^2 dz = \frac{2}{5} z^5 - \frac{2}{3} z^3 = \frac{2}{5} (\sqrt{1-x})^5 - \frac{2}{3} (\sqrt{1-x})^3.$$

(d) Substituieren wir  $x(t) = \sinh(t)$  mit  $x'(t) = \cosh(t) \geq 1$  und beachten wir  $1 + (\sinh(t))^2 = (\cosh(t))^2$  sowie  $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  (vgl. ZA 8.6), so ergibt sich

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{\cosh(t)}{\sqrt{1+(\sinh(t))^2}} dt = \int 1 dt = t = \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

(e) Substituiert man  $y(x) = \ln(x)$ , so erhält man wegen  $\frac{dy}{dx} = y'(x) = \frac{1}{x}$  genau

$$\int \frac{\ln x}{x} dx \stackrel{y=\ln(x)}{=} \int y dy = \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} (\ln(x))^2.$$

**Zusatzaufgabe 12.6:**

- (a) Integrieren Sie  $\int \frac{Ex + F}{x^2 + px + q} dx$ , falls  $x^2 + px + q$  keine reelle Nullstelle besitzt.
- (b) Warum genügt es, für  $\int \frac{Ex + F}{(x^2 + px + q)^l} dx$  mit  $p^2 - 4q < 0$  die Integrale  $\int \frac{1}{(t^2 + 1)^l} dt$  zu kennen?

**Lösung zu Zusatzaufgabe 12.6:**

- (a) Da  $x^2 + px + q$  keine reelle Nullstelle besitzt, ist  $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + D$  mit  $D := q - \frac{p^2}{4} > 0$ . (Achtung:  $D$  ist hier genau das Negative der Diskriminanten  $\frac{p^2}{4} - q$ , welche im Falle von zwei echt komplexen Wurzeln ihrerseits negativ sein muss.) Insbesondere gilt dann  $x^2 + px + q > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Wegen  $Ex + F = Ex + \frac{pE}{2} - \frac{pE}{2} + F = \frac{E}{2}(2x + p) + (F - \frac{pE}{2})$  können wir das Integral folgendermaßen aufspalten und berechnen

$$\begin{aligned} \int \frac{Ex + F}{x^2 + px + q} dx &= \frac{E}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \left(F - \frac{pE}{2}\right) \int \frac{1}{(x + \frac{p}{2})^2 + D} dx \\ &= \frac{E}{2} \ln(x^2 + px + q) + \left(F - \frac{pE}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{D}} \arctan\left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{D}}\right) + C, \end{aligned}$$

wobei wir für das erste Integral die Substitutionsmethode mit  $t = \varphi(x) = x^2 + px + q$  und folglich  $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x) = 2x + p$  angewendet haben. Für das zweite Integral haben wir verwendet, dass

$$\frac{1}{(x + \frac{p}{2})^2 + D} = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{D}}\right)^2 + 1}, \quad \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan(x)$$

und die Substitutionsmethode mit  $t = \varphi(x) = \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{D}}$  und folglich  $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{D}}$ .

- (b) Offenbar gilt für  $l > 1$  analog stets

$$\begin{aligned} \int \frac{Ex + F}{(x^2 + px + q)^l} dx &= \frac{E}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^l} dx + \left(F - \frac{pE}{2}\right) \int \frac{1}{((x + \frac{p}{2})^2 + D)^l} dx \\ &= -\frac{E}{2(l-1)} \cdot \frac{1}{(x^2 + px + q)^{l-1}} + \left(F - \frac{pE}{2}\right) \frac{1}{D^l} \int \left(\left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{D}}\right)^2 + 1\right)^{-l} dx, \end{aligned}$$

so dass nach Substitution mit  $t = \varphi(x) = \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{D}}$  und somit  $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{D}}$  nur Integrale der Form

$$\int \frac{1}{(t^2 + 1)^l} dt \tag{12.13b}$$

zu berechnen sind, für die es Rekursionsformeln in  $l > 1$  gibt (siehe Hausaufgabe).

**Zusatzaufgabe 12.7:** Finden Sie je eine Stammfunktion zu (a)  $\frac{1}{x^4 - 1}$  und (b)  $\frac{1}{x^2(x + 1)}$ .**Lösung zu Zusatzaufgabe 12.7:**

- (a) Mit dem Ansatz  $r(x) = \frac{1}{x^4 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$  liefert Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4 - 1} &= \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} = \frac{(A + B)x + (A - B)}{x^2 - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \\ &= \frac{((A + B)x + (A - B))(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 - 1)}{x^4 - 1} \\ &= \frac{(A + B + C)x^3 + (A - B + D)x^2 + (A + B - C)x + (A - B - D)}{x^4 - 1}, \end{aligned}$$

so dass sich aus dem Koeffizientenvergleich

$$(A + B + C)x^3 + (A - B + D)x^2 + (A + B - C)x + (A - B - D) = 1$$

demnach das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt, welches die Lösung  $(A, B, C, D)^T = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{2})^T$  besitzt. Eine Stammfunktion ist dann

$$R(x) = \int \frac{dx}{x^4 - 1} = \frac{1}{4} \left( \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} \right) - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

(b) Mit dem Ansatz

$$r(x) = \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} \quad (*)$$

erhalten wir zunächst  $C$ , indem wir Gleichung  $(*)$  mit  $(x+1)$  multiplizieren und  $x = -1$  einsetzen (dabei fallen die Terme mit  $A$  und  $B$  weg, so dass auf der rechten Seite nur  $C$  stehen bleibt):

$$C = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)r_6 = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2} = 1.$$

Genauso erhalten wir  $B$ , indem wir die Gleichung  $(*)$  mit  $x^2$  multiplizieren und anschließend  $x = 0$  einsetzen (dabei fallen auf der rechten Seite die Terme mit  $A$  und  $C$  weg, so dass nur  $B$  stehen bleibt):

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 r_6 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1.$$

Da Gleichung  $(*)$  zu  $r(x) - \frac{B}{x^2} = -\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{C}{x+1}$  äquivalent ist, erhalten wir  $A$ , wenn wir dies mit  $x$  multiplizieren und wiederum  $x = 0$  einsetzen (da dann der Term mit  $C$  wegfällt und auf der rechten Seite tatsächlich nur noch  $A$  stehen bleibt):

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} x \left( r_6 - \frac{B}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x+1} = -1.$$

Somit ergibt sich die Stammfunktion

$$R(x) = \int \frac{dx}{x^2(x+1)} = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x+1} = -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| = \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{1}{x}.$$

$$\text{Probe: } R(x)' = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{x - (x+1)}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x}{(x+1)x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x + (x+1)}{(x+1)x^2} = \frac{1}{(x+1)x^2} = r(x).$$

### Zusatzaufgabe 12.8:

(a) Sei  $R(t)$  eine rationale Funktion. Führen Sie durch eine geeignete Substitution das Integral  $\int R(e^{ax}) dx$  auf das Integral einer rationalen Funktion von  $t$  zurück.

Wenden Sie dies auf das Integral  $\int \frac{1+e^x+e^{2x}}{1+e^{5x}} dx$  an.

(b) Sei  $R(t, s)$  eine rationale Funktion zweier Variablen. Führen Sie durch die Substitution  $t = \tan \frac{x}{2}$  für  $-\pi < x < \pi$  das Integral  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  auf das Integral einer rationalen Funktion von  $t$  zurück.

### Lösung zu Zusatzaufgabe 12.8:

(a) Die einfache Substitution  $t = e^{ax}$  liefert wegen  $\frac{dt}{dx} = at$  sofort  $\int R(e^{ax}) dx = \int R(t) \frac{1}{at} dt$ . Die rechte Seite ist ein Integral einer rationalen Funktion, die wir bereits integrieren können.

Für unser Beispielintegral folgt

$$\int \frac{1+e^x+e^{2x}}{1+e^{5x}} dx = \int \frac{1+t+t^2}{1+t^5} \cdot \frac{1}{t} dt.$$

(b) Die Substitution liefert zunächst  $x = 2 \arctan(t)$  sowie  $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$  (siehe Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion). Mit  $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$  und wegen  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  sowie

$$(\cos \alpha)^2 = \frac{(\cos \alpha)^2}{(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2} = \frac{1}{1 + \frac{(\sin \alpha)^2}{(\cos \alpha)^2}} = \frac{1}{1 + (\tan \alpha)^2}$$

folgt weiter

$$\cos x = 2 \left( \cos \frac{x}{2} \right)^2 - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \left( \cos \frac{x}{2} \right)^2 = \frac{2t}{1+t^2}$$

und somit

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R \left( \frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Die rechte Seite ist ein Integral einer rationalen Funktion, die wir bereits integrieren können.

## Zusatzmaterial zur Analysis I – Übung zu Serie 13

### Uneigentliche Integrale, Punktweise/Gleichmäßige Konvergenz, Potenzreihen, Taylor-Formel

• **Definition [Uneigentliches Integral]:**

- (a) Ist die Funktion  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  für jedes  $u > a$  über das Intervall  $[a, u]$  RIEMANN-integrierbar und existiert der Grenzwert

$$c := \lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u f(x) dx \quad (c \in \mathbb{R}),$$

so heißt der Grenzwert das **uneigentliche Riemann-Integral** und wir bezeichnen es mit

$$\int_a^\infty f(x) dx .$$

- (b) Ist die Funktion  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  über jedes Intervall  $[u, b]$  mit  $a < u < b$  Riemann-integrierbar und existiert der Grenzwert

$$c := \lim_{u \searrow a} \int_u^b f(t) dt \quad (c \in \mathbb{R}),$$

sprechen wir auch hier vom **uneigentlichen RIEMANN-Integral** und schreiben auch  $\int_a^b f(x) dx$ .

- (c) Analog kann man auch uneigentliche Integrale für auf  $] - \infty, b]$  und  $[a, b[$  definierte Funktionen betrachten. Den Fall einer auf  $]a, b[$  definierten Funktion führt man durch Wahl eines  $c \in ]a, b[$  auf die Fälle  $]a, c]$  und  $[c, b[$  zurück.

• **Definition [punktweise/gleichmäßige Konvergenz]:** Durch  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Funktionen gegeben.

- Die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **punktweise konvergent gegen  $f$** , wenn für jedes  $x \in D$  stets gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) .$$

Äquivalent:  $\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$

- Die Folge  $f_n$  heißt **gleichmäßig konvergent gegen  $f$** , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0 .$$

Äquivalent:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall x \in D \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$

Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  bezüglich einer Folge von Funktionen  $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **punktweise** bzw. **gleichmäßig konvergent**, wenn die Folge  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Partialsummenfunktionen  $S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x)$  punktweise bzw. gleichmäßig auf  $D$  konvergiert.

• **Satz [§21, Satz 1 u. 4]:** Ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge stetiger Funktionen  $f_n$  auf  $D$ , die gleichmäßig gegen ein  $f$  konvergiert, dann ist die Grenzfunktion  $f$  auch stetig. Bei  $D = [a, b]$  gilt darüber hinaus

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx .$$

• **Satz [§21, Satz 5]:** Ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen  $f_n$  auf  $D$ , die punktweise gegen  $f$  konvergiert und deren Ableitungen gleichmäßig konvergieren, dann ist die Grenzfunktion  $f$  auch stetig differenzierbar, und für jedes  $x \in D$  gilt dann  $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ .

- **Satz [Konvergenzkriterium von Weierstraß]:** Für  $K \neq \emptyset, n \in \mathbb{N}$  seien  $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$  Funktionen mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, K} < \infty \quad \left( \text{Dabei ist } \|g\|_{\infty, K} := \sup_{x \in K} |g(x)| \text{ für ein } g : K \rightarrow \mathbb{C} \right).$$

Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  absolut und gleichmäßig auf  $K$  gegen eine Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ .

- **Definition [Potenzreihe]:** Der punktweise Grenzwert der Polynomfunktionen  $S_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $S_n(x) := \sum_{k=0}^n c_k(z-a)^k$  wird **Potenzreihe**  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$  mit **Koeffizienten**  $c_k \in \mathbb{C}$  und **Entwicklungspunkt**  $a \in \mathbb{C}$  genannt.

- **Satz [§21, Satz 3]:** Konvergiert eine Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$  für ein  $z_1 \neq a$ , dann konvergiert für jedes  $r \in \mathbb{R}$  mit  $0 < r < |z_1 - a|$  sowohl die Potenzreihe selbst als auch die gliedweise differenzierte Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} k c_k(z-a)^{k-1}$  absolut und gleichmäßig auf der abgeschlossenen Kugel

$$K(r, a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}.$$

- **Definition [Konvergenzradius]:** Zu einer Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$  heißt die durch

$$R := \sup_{z \in \mathbb{C}} \left\{ |z - a| : \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k \text{ konvergiert} \right\}$$

definierte Zahl  $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  der **Konvergenzradius** der Potenzreihe.

**Bemerkungen:**

- (a) Satz 3 besagt, dass die Potenzreihe für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - a| < R$  konvergiert und für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - a| > R$  divergiert. Über die Konvergenz auf dem Kreisrand  $|z - a| = R$  existiert keine allgemeingültige Konvergenzaussage. Die Potenzreihe ist jedoch im Inneren von  $K(R, a)$  stetig.
- (b) Bestimmen können wir  $R$  durch  $R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$  bzw.  $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$  (falls existiert).
- (c) Ableitungen bzw. Integrale reellwertiger Potenzreihen können auf dem jeweiligen Konvergenzintervall  $]x_0 - R, x_0 + R[$  durch Ableiten bzw. Integrieren der einzelnen Monome ermittelt werden:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1}, \quad \int \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1}$$

- **Satz [Taylor'sche Formel – vgl. Satz 1, §22 Forster]:** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle  $x, x_0 \in I$  die TAYLORSche Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_{n+1}(x) \quad \text{mit dem Restglied} \quad R_{n+1}(x) := \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

oder

$$R_{n+1}(x) := \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0)) d\theta.$$

**Definition:** Es heißt  $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$  das  $n$ -te **Taylorpolynom** von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

- **Satz [Lagrange'sche Form des Restgliedes – vgl. Satz 2, §22]:** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Für  $n \geq 0$  existiere die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , welche stetig sei. Weiterhin existiere die  $(n+1)$ -te Ableitung  $f^{(n+1)} : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  im Inneren. Dann existiert für beliebige  $x, x_0 \in [a, b]$  mit  $x \neq x_0$  ein  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$  (oder alternativ ein  $\theta \in ]0, 1[$ ), so dass die TAYLORSche Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_{n+1}(x) \quad \text{mit dem Restglied} \quad R_{n+1}(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

oder  $R_{n+1}(x) := \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$  gilt. Dabei heißt  $R_{n+1}$  **Lagrange'sches Restglied** der TAYLORSchen Formel.

- **Definition [Taylor-Reihe]:** Ist eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig oft stetig differenzierbar und  $x_0 \in [a, b]$ , dann heißt die Potenzreihe

$$T_{f,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

die **Taylor-Reihe** oder **Taylor-Entwicklung** von  $f$  um den **Entwicklungspunkt**  $x_0$ . Der Konvergenzradius muss nicht  $> 0$  sein und auf dem Konvergenzintervall muss  $T_{f,x_0}$  auch nicht unbedingt gegen  $f$  konvergieren, sondern tut dies nur dann, wenn das Restglied für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert.

**Zusatzaufgabe 13.1:** Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

$$(a) \int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad (b) \int_0^1 \ln(x) dx \quad (c) \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad (d) \int_0^{\pi} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx \quad (e) \int_0^{\infty} \exp(ax) dx \text{ für } a < 0.$$

**Lösung zu Zusatzaufgabe 13.1:**

$$(a) \text{ Nach Definition folgt } \int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{s \searrow 0} \int_s^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{s \searrow 0} \left( 2\sqrt{x} \Big|_{x=s}^{x=9} \right) = \lim_{s \searrow 0} 2(3 - \sqrt{s}) = 6.$$

(b) Die Funktion  $\ln(x)$  hat die Stammfunktion  $x \ln(x) - x$ , und somit gilt nach L'Hospital

$$\int_0^1 \ln(x) dx = \lim_{s \searrow 0} \int_s^1 \ln(x) dx = 0 - 1 - \lim_{s \searrow 0} (s \ln(s) - s) = -1 - \lim_{s \searrow 0} \frac{\ln(s)}{\frac{1}{s}} = -1 + \lim_{s \searrow 0} \frac{1}{s^2} = -1.$$

$$(c) \text{ Wegen } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_1^s \frac{1}{x^2} dx = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{x} \Big|_{x=1}^{x=s} \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{s} \right) = 1 \text{ existiert das uneigentliche RIEMANN-Integral } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ und besitzt den Wert } 1.$$

(d) Wir wählen als unkritischen Zwischenwert  $\frac{\pi}{2}$  und betrachten die Aufspaltung

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx = \lim_{s \searrow 0} \int_s^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx + \lim_{u \nearrow \pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^u \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx$$

Es genügt hier lediglich die Existenz und Endlichkeit eines dieser beiden uneigentlichen Integrale zu überprüfen, denn im Falle der Existenz besäßen sie aufgrund der Symmetrien

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = \left(\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)^2$$

bis auf das Vorzeichen denselben Grenzwert. Die Endlichkeit folgt jedoch aus

$$\lim_{s \searrow 0} \int_s^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx = \lim_{s \searrow 0} \left( 2\sqrt{\sin(x)} \Big|_s^{\frac{\pi}{2}} \right) = 2\sqrt{1} - \lim_{s \searrow 0} 2\sqrt{\sin(s)} = 2$$

und somit haben wir als Grenzwert 0.

$$(e) \text{ Für alle } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ gilt } \int_0^R \exp(ax) dx = \frac{1}{a} \exp(ax) \Big|_0^R = \frac{1}{a} (\exp(aR) - 1), \text{ die rechte Seite konvergiert aber für } R \rightarrow \infty \text{ nur bei } a < 0 \text{ und gegen den Wert } -\frac{1}{a}. \text{ Für } a > 0 \text{ ist der Grenzwert } +\infty.$$

**Zusatzaufgabe 13.2:**

(a) Geben Sie für eine monoton fallende Funktion  $f : [0, m] \rightarrow \mathbb{R}$  die Untersumme zur äquidistanten Unterteilung  $P = \{0, 1, 2, 3, \dots, m-1, m\}$  des Intervalls  $[0, m]$  an.

- (b) Beweisen Sie das **Integralvergleichskriterium**: Sei  $f : [1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  monoton fallend und nichtnegativ. Dann existiert das uneigentliche Integral  $\int_1^\infty f(x) dx$  genau dann, wenn die Reihe  $\sum_{k=1}^\infty f(k)$  konvergiert.

**Lösung zu Zusatzaufgabe 13.2:**

- (a) Wegen  $x_k = k, k = 0, \dots, m$  ist und da  $f$  monoton fällt, gilt

$$\inf_{x \in ]x_{k-1}, x_k[} f(x) = \inf_{x \in ]k-1, k[} f(x) = f(k), \quad k = 1, \dots, m.$$

Mit  $k - (k - 1) = 1$  lautet somit die Untersumme  $US(\{0, \dots, m - 1, m\}, P) = \sum_{k=1}^m f(k)$ .

- (b) Da  $f$  nichtnegativ ist, konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^\infty f(k)$  genau dann, wenn Sie beschränkt ist.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $\sum_{k=1}^\infty f(k)$  beschränkt, etwa durch die reelle Konstante  $K < \infty$ . Für  $m \geq 2$  betrachten wir nun das Intervall  $[1, m]$ . Als monotone Funktion ist  $f$  über  $[1, m]$  Riemann-integrierbar und jede Obersumme eine obere Schranke des entsprechenden Riemann-Integrals, insbesondere gilt dann (aufgrund der Nichtnegativität von  $f$  und der Monotonie des Integrals) auch

$$0 \leq \int_1^m f(x) dx \leq OS(\{1, 2, \dots, m - 1, m\}, f) = \sum_{k=1}^{m-1} f(k) \leq \sum_{k=1}^\infty f(k) \leq K < \infty$$

Da die für jedes  $m \geq 2$  existierenden Riemann-Integrale  $\int_1^m f(x) dx$  wiederum aufgrund der Nichtnegativität von  $f(x)$  eine monotone und – wie eben gesehen durch  $K$  – nach oben beschränkte reelle Zahlenfolge darstellen, existiert somit auch der (endliche!) Grenzwert

$$\int_0^\infty f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_1^m f(x) dx \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m-1} f(k) \leq K < \infty.$$

„ $\Rightarrow$ “: Es existiere das uneigentliche Integral  $\int_1^\infty f(x) dx$ , also (wieder aufgrund der Monotonie von  $f$ ) insbesondere ein  $K < \infty$  mit

$$\int_1^m f(x) dx \leq K \quad \text{für alle } m \geq 2.$$

Da das Riemann-Integral eine obere Schranke für jede Untersumme  $US(P, f)$  ist, folgt mit (a) nun

$$\sum_{k=1}^\infty f(k) = f(1) + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^m f(k) \leq f(1) + \lim_{m \rightarrow \infty} \int_1^m f(x) dx \leq f(1) + K < \infty$$

und somit wie gewünscht die Beschränktheit von  $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ .

**Zusatzaufgabe 13.3:**

- (a) Konvergiert die Folge  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  der durch  $f_n(x) := \begin{cases} 0, & x < 1 - \frac{2}{n} \\ n(x - 1) + 2, & 1 - \frac{2}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ 1, & 1 - \frac{1}{n} < x \end{cases}$  definierten Funktionen punktweise auf  $[0, 1]$ ? Konvergiert die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch gleichmäßig auf  $[0, 1]$ ?
- (b) Konvergiert die durch  $g_n(x) := e^{-\frac{n}{x}}$  definierte Folge  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise auf  $]0, \infty[$ ?
- (c) Sei  $b > 0$ . Konvergiert die in (b) definierte Folge  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig auf  $]0, b]$ ? Und auf  $]0, \infty[$ ?

### Lösung zu Zusatzaufgabe 13.3:

- (a) Da es einerseits zu jedem  $x < 1$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $x < 1 - \frac{2}{N}$  gibt und da  $f_n(x) = 0$  für alle  $n \geq N$  mit diesem  $N$  gilt sowie andererseits wegen  $f_n(1) = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 1$  gilt, konvergiert die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $[0, 1]$  punktweise gegen die Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 0$  für alle  $x < 1$  und  $f(1) = 1$ , also erhalten wir den punktweisen Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [0, 1[ \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Falls eine Funktionenfolge gleichmäßig gegen eine Funktion konvergiert, muss diese auch mit dem punktweisen Grenzwert übereinstimmen. Da die Funktion  $f$  unstetig ist, die  $f_n$  aber stetig sind, kann die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $[0, 1]$  nicht gleichmäßig gegen  $f$  konvergieren, denn dann müsste  $f$  auf  $[0, 1]$  stetig sein (vgl. Satz 1, §21).

- (b) Die Funktionenfolge  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt als punktweisen Grenzwert die Nullfunktion, d.h.  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \equiv 0$ , denn für jedes  $x \in ]0, \infty[$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{n}{x}} = 0.$$

- (c) Die Funktionenfolge  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert auch gleichmäßig auf dem Intervall  $]0, b]$ ,  $b > 0$ , gegen die Nullfunktion, denn es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in ]0, b]} |g_n(x) - 0| = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{n}{b}} = 0.$$

Da jedoch für ein festes  $n$  stets  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{n}{x}} = 1$  und somit auch  $\sup_{x \in ]0, \infty[} |g_n(x) - 0| = 1$  gilt, liegt auf  $]0, \infty[$  keine gleichmäßige Konvergenz vor.

### Zusatzaufgabe 13.4:

- (a) Wo konvergieren die Potenzreihen (i)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} (x-1)^n$  und (ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x+1)^{2n}$  ?

- (b) Berechnen Sie den Wert der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ . Betrachten Sie dazu  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ .

- (c) Zeigen Sie: Eine auf dem Intervall  $I := ]a-R, a+R[$  konvergente Potenzreihe mit Koeffizienten  $c_n$  um den Entwicklungspunkt  $a$  mit Grenzfunktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist auf dem Intervall  $I$  beliebig oft differenzierbar und für die Koeffizienten gilt

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

### Lösung zu Zusatzaufgabe 13.4:

- (a) (i) Die Potenzreihe konvergiert auf dem Intervall  $]0, 2[$  und divergiert für  $x \in ]-\infty, 0[$  und  $x \in ]2, \infty[$ , denn für den Konvergenzradius ergibt sich

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2n+1}}{\frac{n+2}{2n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5n + 3}{2n^2 + 5n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}}{2 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}} = 1.$$

In den Randpunkten  $x = 0$  und  $x = 2$  divergiert sie auch, denn  $\frac{n+1}{2n+1}$  und  $\frac{n+1}{2n+1} (-1)^n$  sind keine Nullfolgen, womit das notwendige Kriterium für die Konvergenz einer Reihe verletzt ist.

- (ii) Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$  besitzt  $\sqrt[n]{|a_n|}$  für die durch  $a_0 := 0$ ,  $a_{2n+1} := 0$  und  $a_{2n} := \frac{1}{n}$  für  $n \in \mathbb{N}$  gegebene Folge die Häufungspunkte 0 und 1. Somit ergibt sich  $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$  für den

Konvergenzradius. Also konvergiert die Potenzreihe auf  $] -2, 0[$ . In den Randpunkten divergiert die Reihe, da die harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergiert, und außerhalb von  $[-2, 0]$  divergiert sie aufgrund der Eigenschaften des Konvergenzradius.

(b) Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist  $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = 1$ , für  $|x| < 1$  gilt somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = x \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Für  $x = \frac{1}{5}$  bedeutet dies genau  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} = \frac{5}{16}$ .

(c) Wiederholte Anwendung von Satz 3 (bzw. gliedweises Differenzieren) liefert

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \left( \prod_{r=0}^{k-1} (n-r) \right) c_n (x-a)^{n-k} \quad \text{und somit} \quad f^{(k)}(a) = \left( \prod_{r=0}^{k-1} (k-r) \right) c_k = k! c_k$$

### Zusatzaufgabe 13.5:

- (a) Geben Sie das Taylorpolynom ersten und zweiten Grades der Funktion  $f(x) = \sqrt[4]{x}$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 := 1$  an. Bestimmen Sie das Lagrangesche Restglied zum Taylorpolynom ersten Grades, und schätzen Sie ab, wie weit dieses Taylorpolynom auf dem Intervall  $\left[\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right]$  von  $f$  maximal abweicht.
- (b) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der Funktion  $f: ]-2, 2[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := \frac{4x-9}{x^2-5x+6}$ , um den Entwicklungspunkt  $x_0 := 0$  und überprüfen Sie, ob die Taylorreihe auf  $] -2, 2[$  gegen  $f$  konvergiert.

### Lösung zu Zusatzaufgabe 13.5:

- (a) Die Funktion  $f(x) = \sqrt[4]{x}$  besitzt die Ableitungen  $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$  und  $f''(x) = -\frac{3}{16\sqrt[4]{x^7}}$ , so dass wir für  $x_0 = 1$  die Werte  $f(1) = 1$ ,  $f'(1) = \frac{1}{4}$  und  $f''(1) = -\frac{3}{16}$  erhalten. Damit sind

$$T_1(x) = 1 + \frac{1}{4}(x-1), \quad T_2(x) = 1 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{32}(x-1)^2$$

die Taylorpolynome ersten und zweiten Grades. Das Restglied zu  $T_1$  lautet in der Lagrangeschen Form  $-\frac{3}{32\sqrt[4]{\xi^7}}(x-1)^2$  mit einem  $\xi$  zwischen 1 und  $x$ . Also ist die Abweichung von  $T_1$  zu  $f$  in  $x$  maximal

$$\begin{cases} \max_{\xi \in [1, x]} \frac{3}{32\sqrt[4]{\xi^7}}(x-1)^2 = \frac{3}{32}(x-1)^2 & \text{bei } x > 1, \\ \max_{\xi \in [x, 1]} \frac{3}{32\sqrt[4]{\xi^7}}(x-1)^2 = \frac{3}{32\sqrt[4]{x^7}}(x-1)^2 & \text{bei } x < 1. \end{cases}$$

Der maximale Fehler auf  $[1, \frac{11}{10}]$  ist somit  $\frac{3}{32} \cdot \frac{1}{100}$ , und derjenige auf  $[\frac{9}{10}, 1]$  ist  $\frac{3}{32} \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^{7/4} \cdot \frac{1}{100} \approx 0,001127$ . Der zweite Wert ist größer, also eine Abschätzung für den maximalen Fehler auf dem Intervall  $[\frac{9}{10}, \frac{11}{10}]$ .

- (b) Zunächst bietet sich eine Partialbruchzerlegung an:

$$\begin{aligned} \frac{4x-9}{x^2-5x+6} &= \frac{4x-9}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \iff 4x-9 = A(x-3) + B(x-2) \\ &\iff 4 = A + B \wedge 9 = 3A + 2B \iff A = 1 \wedge B = 3. \end{aligned}$$

Demzufolge lässt sich  $f$  schreiben als  $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x-3}$  und weiter als

$$f(x) = -\left( \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{1}{1-\frac{x}{3}} \right) = -\left( \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} x^n \right) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left( 2^{-(n+1)} + 3^{-n} \right) x^n$$

und dies ist genau die Taylor-Entwicklung von  $f$  um den Punkt 0. Insbesondere konvergiert die Taylorreihe auf  $] -2, 2[$ , da dort die verwendeten geometrischen Reihen konvergieren.

## Zusatzmaterial zur Analysis I – Übung zu Serie 14

### Zusatzaufgabe 14.1:

- (a) Zeigen Sie mittels Definition des Grenzwertes, dass die durch  $a_n := \frac{3}{n^3 - 5n}$  definierte Folge konvergiert.  
 (b) Zeigen Sie, dass die durch  $a_n := \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$  definierte Folge konvergiert.  
 (c) Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) \qquad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \ln(n) \qquad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)\cos(n)}{n^n}$$

### Lösung zu Zusatzaufgabe 14.1:

- (a) Es ist zu zeigen, dass zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N_\varepsilon$  die Ungleichung  $|a_n - 0| < \varepsilon$  erfüllt ist. Für alle  $n \geq 3$  gilt zunächst  $n^2 - 5 \geq 4 > 1$  und somit auch  $n^3 - 5n = n(n^2 - 5) > n$ , was äquivalent ist zu

$$\frac{3}{n^3 - 5n} < \frac{3}{n}.$$

Nach dem Archimedischen Axiom können wir nun eine natürliche Zahl  $N_\varepsilon > \max\left\{\frac{3}{\varepsilon}, 3\right\}$  finden. Für alle  $n \geq N_\varepsilon$  folgt nun tatsächlich wie gewünscht

$$|a_n - 0| = \left| \frac{3}{n^3 - 5n} - 0 \right| = \frac{3}{n(n^2 - 5)} < \frac{3}{n} \leq \frac{3}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

- (b) Die Folge ist nach unten beschränkte Folge, da offenbar  $a_n \geq \frac{n+1}{2n} > \frac{1}{2}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt ist. Sie ist auch streng monoton fallend, denn für alle  $n \in \mathbb{N}$  ergibt sich

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{(2n+1)(2n+2) - n(2n+2) - n(2n+1)}{n(2n+1)(2n+2)} = \frac{3n+2}{n(2n+1)(2n+2)}$$

und daher  $a_n - a_{n+1} > 0$ . Somit ist  $a_n$  als nach unten beschränkte, monoton fallende Folge konvergent.

- (c) (i) Da  $\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n$  keine Nullfolge ist, kann die Reihe aufgrund der Verletzung des notwendigen Kriteriums nicht konvergieren.  
 (ii) Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium, denn mit Hilfe von L'Hospital folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4^{-n-1} \ln(n+1)}{4^{-n} \ln(n)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{4 \ln(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4(n+1)} = \frac{1}{4} < 1.$$

- (iii) Für  $n \geq 2$  gilt offenbar  $\left| \frac{(n+2)\cos(n)}{n^n} \right| \leq \frac{n+2}{n^n} \leq \frac{2n}{n^n}$ , und da nach dem Wurzelkriterium wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2} \sqrt[n]{n}}{n} = \frac{1 \cdot 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n} = 0 < 1$$

die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^n}$  konvergiert, konvergiert nach Majorantenkriterium auch die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)\cos(n)}{n^n}$ .

### Zusatzaufgabe 14.2:

- (a) In welchen Punkten  $x \in \mathbb{R}$  sind die Funktionen  $f_1(x) := \sqrt{x}$ ,  $f_2(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$  differenzierbar? Bestimmen Sie dies und in diesen Punkten die Ableitung mit Hilfe der Definition des Differentialquotienten!  
 (b) Ist die Funktion  $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  für  $x \neq 0$ ,  $f(0) := 0$ , differenzierbar? Ist sie stetig?

- (c) Ist die folgende Funktion stetig bzw. differenzierbar: 
$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} ?$$

### Lösung zu Zusatzaufgabe 14.2:

- (a) Für  $x = 0$  ist der Differentialquotient wegen  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(0+h) - f_1(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$  unbeschränkt und daher existiert in diesem Punkt die Ableitung von  $f_1(x) := \sqrt{x}$  nicht. Für alle  $x > 0$  gilt wegen der Stetigkeit der Funktion  $\sqrt{\cdot}$  nun  $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{x+h} = \sqrt{x+0} = \sqrt{x}$  und damit

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{(x+h) - x}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Für alle  $x > 0$  gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{(\sqrt{x+h} \cdot \sqrt{x})h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{x+h} \cdot \sqrt{x}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}. \end{aligned}$$

- (b) Für alle  $x \neq 0$  ist die Funktion  $f$  differenzierbar (Komposition, Kettenregel, Produktregel anwendbar) und somit auch stetig. Jedoch in Null ist die Funktion  $g$  nicht differenzierbar, denn der Grenzwert

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{(0+h) \sin\left(\frac{1}{0+h}\right) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

existiert aufgrund der Periodizität des Sinus nicht. Sie ist jedoch noch stetig in Null, denn es gilt  $|x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0| \leq |x| \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 0$ .

- (c) Es gilt  $|\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0| \leq |\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)| \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 0$ , also ist  $g$  stetig in 0.

Desweiteren gilt  $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{h^2}\right) \cos\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = 0$ , da  $\cos\left(\frac{1}{h}\right)$  beschränkt ist und nach L'Hospital sowohl

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{\exp\left(-\frac{1}{h^2}\right)}{h} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x^2)x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\exp(x^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x \exp(x^2)} = 0$$

als auch

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{\exp\left(-\frac{1}{h^2}\right)}{h} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(-x^2)x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\exp(x^2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x \exp(x^2)} = 0$$

gilt. Also ist  $g$  auch differenzierbar in 0. In allen anderen Punkten ist die Funktion ebenfalls differenzierbar (Komposition, Kettenregel, Produktregel anwendbar), also auch stetig.

**Zusatzaufgabe 14.3:** Gegeben sei die Funktion  $f(x) = \frac{x}{(x+a)^2}$ , mit  $a > 0$  beliebig.

- (a) Welche Nullstelle besitzt  $f$ ? In welchen Intervallen ist  $f$  monoton wachsend/fallend, konvex/konkav?  
 (b) Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow -a} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  sowie die lokalen Extrema von  $f$ . Gibt es globale Extrema?

### Lösung zu Zusatzaufgabe 14.3:

- (a) Die Nullstelle liegt bei  $x = 0$ . Es gilt  $f'(x) = \frac{(x+a)^2 - 2(x+a)x}{(x+a)^4} = \frac{a-x}{(x+a)^3}$ . Somit ist  $f'(x) \geq 0$  für  $x \in ]-a, a]$  (d.h. monoton wachsend) und  $f'(x) \leq 0$  für  $x \geq a, x < -a$  (d.h. monoton fallend).

Weiterhin gilt  $f''(x) = \frac{-(x+a)^3 - 3(x+a)^2(a-x)}{(x+a)^6} = \frac{2(x-2a)}{(x+a)^4}$ , womit die Funktion für  $x \geq 2a$  konvex ist und auf den Intervallen  $] -\infty, -a[$  und  $] -a, 2a]$  konkav ist.

(b) Es ist  $\lim_{x \rightarrow -a} f(x) = -\infty$  und mit L'Hospital folgt  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2(x+a)} = 0$ .

Somit liegt das einzige lokale Extremum in der Nullstelle  $x = a$  von  $f'$ . Da  $f$  in  $a$  stetig und links von  $a$  monoton wachsend und rechts von  $a$  monoton fallend ist, liegt hier ein lokales Maximum vor, welches aufgrund des Verhaltens am Rand und an der Polstelle sowie der Monotonie auch das globale Maximum ist. Ein globales Minimum kann es aufgrund des Verhaltens bei der Polstelle nicht geben.

**Zusatzaufgabe 14.4:** Berechnen Sie:

(a)  $\left(\ln\left(\sin\left(\frac{3x^2+1}{x}\right)\right)\right)'$     (b)  $(\operatorname{arsinh}(\exp(\sqrt{x})))'$     (c)  $\int 4^x \sin(2^x) dx$     (d)  $\int \frac{-5x+10}{x^3+2x^2+5x} dx$

**Lösung zu Zusatzaufgabe 14.4:**

(a) Die Kettenregel liefert

$$\left(\ln\left(\sin\left(\frac{3x^2+1}{x}\right)\right)\right)' = \frac{1}{\sin\left(\frac{3x^2+1}{x}\right)} \cos\left(\frac{3x^2+1}{x}\right) \frac{6x^2-3x^2-1}{x^2} = \cot\left(\frac{3x^2+1}{x}\right) \frac{3x^2-1}{x^2}$$

(b) Wegen  $(\cosh(x))^2 = 1 + (\sinh(x))^2$  erhalten wir durch Ableiten von  $t = \operatorname{arsinh}(\sinh(t))$  nach Kettenregel  $1 = \sinh'(\operatorname{arsinh}(t)) \cdot \operatorname{arsinh}'(t)$  und daher

$$\operatorname{arsinh}'(t) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arsinh}(t))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(t))} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\sinh(\operatorname{arsinh}(t)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Demzufolge ergibt sich nun wiederum nach Kettenregel

$$(\operatorname{arsinh}(\exp(\sqrt{x})))' = \frac{1}{\sqrt{1 + (\exp(\sqrt{x}))^2}} \cdot \exp(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\exp(\sqrt{x})}{2\sqrt{x + x(\exp(\sqrt{x}))^2}}$$

(c) Mit der Substitution  $z = 2^x$ , d.h.  $z' = \frac{dz}{dx} = \ln(2)2^x$ , und  $4^x = 2^x \cdot 2^x$  folgt

$$\int 4^x \sin(2^x) dx = \int \frac{z \sin(z)}{\ln(2)} dz = -\frac{z \cos(z)}{\ln(2)} + \int \frac{\cos(z)}{\ln(2)} dz = \frac{-z \cos(z) + \sin(z)}{\ln(2)} = \frac{\sin(2^x) - 2^x \cos(2^x)}{\ln(2)}$$

(d) Es gilt  $\frac{-5x+10}{x^3+2x^2+5x} = \frac{-5x+10}{x(x^2+2x+5)}$ , wobei  $x^2+2x+5$  die nicht-reellen Nullstellen  $-1 \pm 2i$  besitzt.

Somit verwenden wir für die Partialbruchzerlegung den Ansatz  $\frac{-5x+10}{x(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$ ,

aus dem wir z.B. durch Koeffizientenvergleich in  $(A+B)x^2 + (2A+C)x + 5A = -5x+10$  die Konstanten  $A = 2$ ,  $B = -2$ ,  $C = -9$  erhalten. Wegen  $(x^2+2x+5)' = 2x+2$ , d.h.  $\ln(x^2+2x+5)' = \frac{2x+2}{x^2+2x+5}$  gilt

$$\int \frac{-5x+10}{x^3+2x^2+5x} dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2x+9}{x^2+2x+5}\right) dx = 2 \ln(x) - \ln(x^2+2x+5) - 7 \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx,$$

und aufgrund von  $x^2+2x+5 = (x+1)^2+4 = 4\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right)$  gilt mit der Substitution  $t(x) = \frac{x+1}{2}$  und  $t'(x) = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}$ , die Gleichung

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \arctan(t) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Also erhalten wir insgesamt  $\int \frac{-5x+10}{x^3+2x^2+5x} dx = 2 \ln(x) - \ln(x^2+2x+5) - \frac{7}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)$ .

**Zusatzaufgabe 14.5:**

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung die **Trapezregel**:

Für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  existiert ein  $\xi \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) - f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{12}$$

(b) Existieren die uneigentlichen Integrale (i)  $\int_e^\infty \frac{1}{x} dx$  (ii)  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$  (iii)  $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$  ?

(c) Es sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig auf  $[0, 1]$  gegen  $f$  konvergiere. Beweisen Sie die gleichmäßige Konvergenz der Folge  $f_n^2 - f^2$ .

**Lösung zu Zusatzaufgabe 14.5:**

(a) Sei  $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x-a)(b-x)$ . Mit  $\varphi(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a, b]$  sowie  $\varphi'(x) = \frac{a+b}{2} - x$  und  $\varphi''(x) = -1$  ist

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_a^b \varphi''(x) f(x) dx = -\varphi'(x) f(x) \Big|_a^b + \int_a^b \varphi'(x) f'(x) dx = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) - \int_a^b \varphi(x) f''(x) dx.$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert nun ein  $\xi \in [a, b]$  mit  $\int_a^b \varphi(x) f''(x) dx = f''(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx = f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{12}$ .

(b) (i) Existiert nicht, da  $\int_e^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) - \ln(e) = \infty$ . (ii)  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 1 = 1$ .

(iii) Aufgrund der Symmetrie des Integranden folgt

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} (\arctan(n) - \arctan(0)) = \pi.$$

(c) Mit den Rechenregeln für Grenzwerte folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x))^2 = (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = f(x)^2$  für beliebiges, jedoch festes  $x \in [0, 1]$ . Damit konvergiert  $f_n^2 - f^2$  punktweise gegen 0. Wegen

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,1]} |(f_n(x))^2 - (f(x))^2| &= \sup_{x \in [0,1]} (|f_n(x) - f(x)| \cdot |f_n(x) + f(x)|) \\ &\leq \left( \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \right) \left( \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) + f(x)| \right), \end{aligned}$$

der gleichmäßigen Konvergenz von  $f_n$  gegen  $f$  (also  $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ) sowie der für alle  $n \geq N(1)$  gültigen Abschätzung

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) + f(x)| &= \sup_{x \in [0,1]} |(f_n(x) - f(x)) + f(x) + f(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| + 2 \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \\ &\leq 1 + 2 \max_{x \in [0,1]} |f(x)| =: C < \infty \end{aligned}$$

( $f$  ist stetig, also nimmt sie ihr Maximum auf dem beschränkten und abgeschlossenen Intervall  $[0, 1]$  an!) folgt somit insgesamt  $\sup_{x \in [0,1]} |(f_n(x))^2 - (f(x))^2| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , also die gleichmäßige Konvergenz.

**Zusatzaufgabe 14.6:**

Zeigen Sie: Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dreimal stetig differenzierbar, so gilt für jedes  $x_0 \in ]a, b[$  die Beziehung

$$f''(x_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}.$$

**Lösung zu Zusatzaufgabe 14.6:**

Verwenden wir die Lagrange-Darstellung der Taylor-Formel für  $n = 2$  am Entwicklungspunkt  $x_0$  mit  $x = x_0 + h$  und  $x = x_0 - h$  und Zwischenstellen  $\xi_+ \in ]x_0, x_0 + h[$  und  $\xi_- \in ]x_0 - h, x_0[$ , so ergibt sich

$$f(x_0 \pm h) = f(x_0) \pm \frac{f'(x_0)}{1!} h^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 \pm \frac{1}{3!} f'''(\xi_{\pm}) h^3$$

Unter Verwendung, dass  $f'''$  nach Voraussetzung auf  $[a, b]$  stetig ist und somit seine globalen Extrema annimmt, erhalten wir nach Addition der beiden Gleichungen und anschließendem Umstellen somit

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} - f''(x_0) \right| = \frac{h}{6} |f'''(\xi_+) - f'''(\xi_-)| \leq \frac{h}{3} \max_{x \in [a,b]} |f'''(x)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

---

Alle Zusatzaufgaben sind verfügbar unter: <https://studip.uni-rostock.de/studip/>