Aufgabe 13.1: (Gleichmäßige Konvergenz) (2+1+1+1 P)

(a) Zeigen Sie, dass die durch $f_n(x) := x^n(1-x^n)$ definierte Folge von Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ punktweise, jedoch auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.

(b) Angenommen, es konvergieren f_n gegen f und g_n gegen g jeweils gleichmäßig auf D.

(i) Zeigen Sie: Dann konvergiert $f_n + g_n$ gleichmäßig gegen $f + g$ auf D.

(ii) Zeigen Sie: Sind f_n, g_n beschränkt, so konvergiert $f_n \cdot g_n$ gleichmäßig gegen $f \cdot g$ auf D.

(iii) Gilt (ii) auch ohne die Beschränktheitsvoraussetzung ?

Aufgabe 13.2: (Potenzreihen) (1+1+3 P)

(a) Wo konvergieren die Potenzreihen (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}(x+2)^n$ und (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-3)^{2n}$?

(b) Bestimmen Sie auf $]-1,1[$ die Grenzfunktion der durch $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^n$ gegebenen Potenzreihe.

Aufgabe 13.3: (Taylor-Entwicklung) (3+1+1 P)

(a) Geben Sie das Taylorpolynom ersten und zweiten Grades der Funktion $f(x) = \sqrt[4]{x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 := 1$ an. Bestimmen Sie das Lagrangesche Restglied zum Taylorpolynom ersten Grades, und schätzen Sie ab, wie weit dieses Taylorpolynom auf $[\frac{9}{10}, \frac{11}{10}]$ von f maximal abweicht.

(b) Nutzen Sie für den Beweis von $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$ die Taylor-Entwicklung der Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$ um den Punkt $x_0 = 0$.

(c) Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades von $f(x) := \operatorname{arsinh}(x)$ im Punkt $x_0 := 0$.

Aufgabe 13.4: (Fourier-Reihen) (1+2+2 P)

(a) Ermitteln Sie die reelle Fourier-Reihe von $f(x) := 2(\cos(x))^2$.

(b) Zeigen Sie, dass für ungerades N das Skalarprodukt $\langle u, v\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{u}v\,dx$ der Funktionen $u(x) := \sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ und $v(x) := \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ verschwindet.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion mit $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx < \infty$.
Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = 0$ und $\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 0$ gilt.