Zusatzmaterial zur Analysis I - Übung zu Serie 1

Vollständige Induktion

- Nach dem Induktionsprinzip gilt eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ bereits dann, wenn $A(1)$ gilt und wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ aus der Aussage $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$ folgt.
- Der Beweis von $A(1)$ heißt Induktionsanfang, und der Beweis von $\forall n \in \mathbb{N} : (A(n) \Rightarrow A(n+1))$ Induktionsschluss oder Induktionsschritt. Im Induktionsschritt hat man also für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen, dass aus der als wahr angenommenen Aussage $A(n)$ (die man Induktionsvoraussetzung nennt) die Aussage $A(n+1)$ (die man Induktionsbehauptung nennt) folgt.

Abbildungen

- Unter einer Abbildung $f : X \to Y$ von der (nichtleeren) Menge X in die Menge Y versteht man eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ ein eindeutiges Element $f(x) \in Y$ zuordnet.
- Präziser ist eine Abbildung über ihren Graphen definiert, d.h. eine Abbildung ist eine Teilmenge $G \subset X \times Y$ mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x,y) \in G$ gibt. Man schreibt dann $y = f(x)$ und kann G mit dem Graphen $\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ von f identifizieren.

Körper

- Ein Tupel $(M, *)$ mit einer nichtleeren Menge M, auf der eine Abbildung $* : M \times M \longrightarrow M$, $(m,n) \mapsto m * n$, definiert ist, heißt **Gruppe**, falls die folgenden Axiome erfüllt sind:

  (i) $\forall k,l,m \in M \ : \ k*(l*m) = (k*l)*m$ (Assoziativität)

  (ii) $\exists m_0 \ \forall m \in M \ : \ m * m_0 = m = m_0 * m$ (Existenz eines neutralen Elementes)

  (iii) $\forall m \in M \ \exists n \in M \ : \ m * n = m_0 = n * m$ (Existenz von Inversen)

- Eine Gruppe $(M, *)$ heißt **kommutativ** oder **abelsch**,[1] falls ihre Verknüpfung $*$ zusätzlich

  (iv) $\forall k, l \in M \ : \ k * l = l * k$ (Kommutativität)

  erfüllt. Beispiele:

  - Das Tupel $(\mathbb{N}_0, +)$ ist KEINE Gruppe, denn es fehlen die Inversen.
  - Das Tupel $(\mathbb{Z}, +)$ dagegen ist eine Gruppe, die sogar abelsch ist.
  - Die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind ebenso abelsch.[2]

- Ein **Körper** ist ein Tripel $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge $\mathbb{K}$, auf der zwei assoziative Verknüpfungen $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $(k_1, k_2) \mapsto k_1 + k_2$ und $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $(k_1, k_2) \mapsto k_1 \cdot k_2$ so definiert sind, dass

  (1) $(\mathbb{K}, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element e_+ ist,

  (2) $(\mathbb{K} \setminus e_+, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist

  und zusätzlich

  (3) $\forall a,b,c \in \mathbb{K} : a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (Distributivität)[3]

  erfüllt wird. Beispiele:

  - Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, d.h. die Brüche $\frac{n}{m}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$ (wobei man Brüche identifiziert, die durch Kürzen bzw. Erweitern auseinander hervorgehen), bilden einen Körper, indem man $+$ durch $\frac{n}{m} + \frac{n'}{m'} := \frac{nm' + n'm}{mm'}$ und $\cdot$ durch $\frac{n}{m} \cdot \frac{n'}{m'} := \frac{nn'}{mm'}$ definiert. Das neutrale Element der Addition ist $0 = \frac{0}{1}$, das neutrale Element der Multiplikation ist $1 = \frac{1}{1}$.
  - Auch die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden mit $+$ und $\cdot$ einen Körper.
  - Es gibt auch Körper mit nur endlich vielen Elementen (siehe weiter unten).

Zusatzaufgabe 1.1: Es bezeichne $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die folgende Summenformel gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \ \forall x \neq 1 \ : \ \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \quad (\textit{geometrische Summenformel}).$$

[1] nach dem norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel (1802-1829)
[2] Die Eigenschaften (i)-(iv) entsprechen für $(\mathbb{R}, +)$ genau den im Forster angegebenen Axiomen (I.1)-(I.4).
[3] Dies ist für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ genau das Axiom III im Forster. Da aus diesem $x \cdot 0 = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt (siehe unten), sind (1),(2) und (3) für die reellen Zahlen äquivalent zu den Axiomen I,II und III im Forster.

(b) Beweisen Sie die Summenformel aus (a) direkt.

(c) Wie viel Geld hat man nach 7 Jahren angespart, wenn man jährlich 100 EUR auf ein Konto einzahlt und darauf $2,5\%$ Zinsen bekommt?

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.1: Sei $x \neq 1$.

(a) Induktionsanfang: Es gilt $\sum\limits_{k=0}^{0} x^k = x^0 = 1 = \frac{1-x^1}{1-x}$ $\qquad (A(0))$

Induktionsschluss:

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ $\qquad (A(n))$

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$. $\qquad (A(n+1))$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \overset{A(n)}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}+(1-x)x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-xx^{n+1}}{1-x} = \frac{1-xx^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x} \quad , \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(b) Definieren wir die Summe $s := \sum\limits_{k=0}^{n}$, so gilt

$$\begin{array}{rcccccccccccc} s & = & x^0 & + & x^1 & + & x^2 & + & \dots & + & x^n & & \\ -x \cdot s & = & & - & x^1 & - & x^2 & - & \dots & - & x^n & - & x^{n+1} \\ \hline (1-x)s & = & x^0 & & & & & & & & & - & x^{n+1} \quad | \quad x \neq 1 \end{array}$$

Mit $x \neq 1$ und $x^0 = 1$ folgt nach Division demnach $s = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, was zu zeigen war.

(c) Zahlt man jährlich 100 € auf ein Konto ein, welches mit $2,5\%$ verzinst wird, so befinden sich auf dem Konto

$$\begin{aligned} 100q &= 102.50 \text{ €} \quad \text{nach einem Jahr,} \\ (100+100q)q &= 207.56 \text{ €} \quad \text{nach zwei Jahren,} \\ (100+(100+100q)q)q &= 315.25 \text{ €} \quad \text{nach drei Jahren} \end{aligned}$$

und allgemein

$$100\ (1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})q \ \text{ €}$$

nach n Jahren, wobei $q = 1.025$ ist. Mit der zuvor bewiesenen Summenformel erhalten wir demnach

$$100q\left(\sum_{k=0}^{7-1} q^k\right) = 100q\frac{1-q^7}{1-q} = 100 \cdot 1.025 \cdot \frac{0.18868575}{0.025} = 773,61159.$$

In unserem Fall wurde also ca. $773,61$ € angespart.

Zusatzaufgabe 1.2:

(a) Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für $1 \leq k \leq n$ gilt.

(b) Beweisen Sie den Binomischen Lehrsatz.

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.2:

(a) Für $k = n$ ist offenbar $\binom{n}{n} = 1 = 1+0 = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n}$. Für $1 \leq k \leq n-1$ folgt

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{k(n-1)!+(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \ . \end{aligned}$$

Diese Beziehung können wir mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} &&&&&&& 1 &&&&&&& \\ &&&&&& 1 && 1 &&&&&& \\ &&&&& 1 && 2 && 1 &&&&& \\ &&&& 1 && 3 && 3 && 1 &&&& \\ &&& 1 && 4 && 6 && 4 && 1 &&& \\ && 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 && \\ & 1 && 6 && 15 && 20 && 15 && 6 && 1 & \\ 1 && 7 && 21 && 35 && 35 && 21 && 7 && 1 \\ &&&&&&& \vdots &&&&&&& \end{array}$$

veranschaulichen. Jedes Element entsteht als Summe der beiden darüberstehenden.

(b) Wir beweisen den Binomischen Lehrsatz mittels vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: Es gilt $\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{0-k} y^k = \binom{0}{0} x^{0-0} y^0 = 1 = (x+y)^0 .$ (A(0))

Induktionsschluss:

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k .$ (A(n))

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $(x+y)^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k .$ (A(n+1))

Beweis: Es ist

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \overset{\text{A(n)}}{=} (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} + y^{n+1} \\
&\overset{l=k+1}{=} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l-1}x^{n-(l-1)}y^l + y^{n+1} \\
&\overset{l=k}{=} \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]x^{n+1-k}y^k + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1} \overset{\text{(a)}}{=} \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k \qquad \square
\end{aligned}
$$

Zusatzaufgabe 1.3:

(a) Was ist an folgendem „Induktionsbeweis“ für die Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}_0 : 4n = 0$ falsch?

Induktionsanfang: $4 \cdot 0 = 0$.

Induktionsschluss: Gilt $4k = 0$ für alle $k < n$, so gilt auch $4n = 0$. Denn es gibt $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $n = k_1 + k_2$ und $k_1, k_2 < n$, also gilt $4n = 4k_1 + 4k_2 = 0$.

(b) Ab welcher Zahl $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt $n! \geq 2^n$? Führen Sie einen Induktionsbeweis.

(c) Für welche $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ wieder in $\mathbb{N}_0$? Führen Sie einen Induktionsbeweis.

(d) Was lässt sich aus dem Beweis von (c) für die Summe der n ersten Kubikzahlen ablesen?

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.3:

(a) Für $n = 1$ gibt es keine zwei $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1, k_2 < 1$ und $1 = k_1 + k_2$, denn $k_1, k_2 < 1$ und $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ impliziert $k_1 = 0 = k_2$ und somit $k_1 + k_2 = 0 \neq 1$.

(b) Für $n = 0$ gilt $0! = 1 \geq 1 = 2^0$. Aber für $n = 1$ gilt $1! = 1 < 2 = 2^1$, und ebenso $2! = 2 < 4 = 2^2$ für $n = 2$ bzw. $3! = 6 < 8 = 2^3$ für $n = 3$. Tatsächlich gilt die Formel erst ab $n = 4$ allgemein, wie der folgende Induktionsbeweis zeigt.

Induktionsanfang: Offenbar gilt $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \geq 16 = 2^4.$ $(A(4))$

Induktionsschluss:

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \geq 4$ gelte $n! \geq 2^n$. $(A(n))$

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $(n+1)! \geq 2^{n+1}$. $(A(n+1))$

Beweis: Es gilt

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \overset{\text{IV}}{\geq} (n+1)2^n \overset{n\geq 1}{\geq} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

für $n \geq 1$, was wegen $n \geq 4$ der Fall ist.

Beachten Sie: Beim Induktionsschluss haben wir $n \geq 1$ benötigt. Daher muss der Induktionsanfang mindestens bei $n = 1$ liegen. Wie wir aber gesehen haben, ist die Ungleichung für $n = 1, 2, 3$ falsch. Deswegen konnte die Induktion erst bei $n = 4$ verankert werden, die Ungleichung $n! \geq 2^n$ gilt somit nur für alle $n \geq 4$ (und $n = 0$).

(c) Für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ wieder eine Zahl in $\mathbb{N}_0$ nach folgendem Induktionsbeweis:

Induktionsanfang: Offenbar gilt $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{0^2 \cdot (0+1)^2}{4} = 0 \in \mathbb{N}_0.$ $(A(0))$

Induktionsschluss:

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $\frac{n^2(n+1)^2}{4} \in \mathbb{N}_0$. $(A(n))$

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \in \mathbb{N}_0$. $(A(n+1))$

Beweis: Es ist

$$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{(n+1)^2 \cdot 4(n+1)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

Da nun der erste Summand nach Induktionsvoraussetzung in $\mathbb{N}_0$ liegt und $n+1$ eine natürliche Zahl ist und da das Produkt sowie die Summe von Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ nicht aus $\mathbb{N}_0$ herausführen, ist damit die Induktionsbehauptung gezeigt.

(d) Offenbar haben wir einen expliziten Ausdruck für die n-te Partialsumme der n ersten Kubikzahlen gefunden, d.h., es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 ,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, denn für $n = 1$ ist der Induktionsanfang durch $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{1\cdot 4}{4} = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$ gemacht. Gilt nun $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV), dann auch die Induktionsbehauptung

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Zusatzaufgabe 1.4: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie:

(a) Für gegebene $a, b \in \mathbb{K}$ ist eine Lösung x der Gleichung $b = x + a$ eindeutig.

(b) Neutrale Elemente, Negative und Inverse sind eindeutig.

(c) Es gilt $-(-x) = x$.

(d) Multiplikation mit dem neutralen Element der Addition ergibt stets das neutrale Element der Addition: $0 \cdot x = 0$.

(e) Ein $\mathbb{K}$ ist **nullteilerfrei**: Aus $x \cdot y = 0$ folgt zwingend, dass $x = 0$ oder $y = 0$ ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.4:

(a) Dies ist wahr, denn sind x, x' zwei Lösungen, dann gilt

$$\begin{aligned} x \overset{a+(-a)=0}{=} x + (a + (-a)) &\overset{\text{assoziativ}}{=} (x + a) + (-a) \overset{b=x+a}{=} b + (-a) \overset{b=x'+a}{=} (x' + a) + (-a) \\ &\overset{\text{assoziativ}}{=} x' + (a + (-a)) \overset{a+(-a)=0}{=} x'. \end{aligned}$$

(b) (i) Sind $0, 0'$ zwei neutrale Elemente der Addition, d.h. gilt $x + 0 = x$ und $x + 0' = x$ für alle $x \in \mathbb{K}$, so gilt

$$0 \overset{0' \text{ neutral}}{=} 0 + 0' \overset{\text{kommutativ}}{=} 0' + 0 \overset{0 \text{ neutral}}{=} 0'.$$

(ii) Die Eindeutigkeit des neutralen Elements 1 der Multiplikation $\cdot$ zeigt man analog.
(iii) Sind y, y' zwei Negative zu x, d.h. gilt $x + y = 0$ und $x + y' = 0$, dann gilt auch

$$y \overset{x+y'=0}{=} y + (x + y') \overset{\text{assoziativ}}{=} (y + x) + y' \overset{\text{kommutativ}}{=} (x + y) + y' \overset{x+y=0}{=} y'.$$

(iv) Analog zeigt man die Existenz multiplikativer Inverser für $x \neq 0$.

(c) Da $-x$ das Negative von x bezeichnet, gilt $x + (-x) = 0$. Andererseits bezeichnet $-(-x)$ das Negative von $-x$, daher gilt $(-x) + (-(-x)) = 0$. Somit sind sowohl x als auch $-(-x)$ Negative von $-x$, aufgrund der zuvor bewiesenen Eindeutigkeit Negativer gilt also $x = -(-x)$.

(d) Es gilt $0 + 0 = 0$ (da 0 neutrales Element der Addition). Daher gilt auch

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x \overset{\text{distributiv}}{=} 0 \cdot x + 0 \cdot x.$$

Andererseits gilt auch $0 \cdot x = 0 + 0 \cdot x$. Da wir nach (a) wissen, dass für gegebene a, b eine Lösung x der Gleichung $b = x + a$ eindeutig ist, können wir $0 \cdot x = 0$ folgern.

(e) Sei $xy = 0$ und angenommen $x \neq 0$. Dann hat x ein Inverses x^{-1}, und mit diesem gilt

$$y \overset{1 \text{ neutral}}{=} 1 \cdot y \overset{x^{-1}x=1}{=} (x^{-1}x)y \overset{\text{assoziativ}}{=} x^{-1}(xy) = x^{-1} \cdot 0 \overset{\text{kommutativ}}{=} 0 \cdot x^{-1} \overset{(d)}{=} 0.$$

Also folgt aus $xy = 0$ und $x \neq 0$ automatisch $y = 0$, wodurch die Aussage bewiesen ist.

Zusatzaufgabe 1.5:

Ist $\mathbb{F}_p := \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ mit der Addition $x \oplus y := x + y \mod p$ und der Multiplikation $x \otimes y := x \cdot y \mod p$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ ein Körper?

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.5:

Ja, denn Modulo-Rechnung vertauscht mit $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Z}$, also gelten Assoziativität, Kommutativität und Distributivität. Offensichtlich sind 0 und 1 die neutralen Elemente.

Darüberhinaus ist zu $x \in \mathbb{F}_p$ das additive Inverse durch $p - x$ (bzw. 0 bei $x = 0$) gegeben, denn $x + (p - x) \mod p = p \mod p = 0$. Bezüglich Modulo-Rechnung ist desweiteren $x \in \mathbb{F}_p$ genau dann invertierbar, wenn es ein $y \in \mathbb{Z}$ mit $xy \mod p = 1$ gibt. Dies ist gleichbedeutend damit, dass es ein $n \in \mathbb{Z}$ gibt mit $1 = xy + np$ [4]. Dies bedeutet aber, dass x und p teilerfremd sind. Jedoch ist jedes $x \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ nur genau dann teilerfremd zu p, wenn p eine Primzahl ist.

Alle Zusatzaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

[4] Angenommen, $x \neq 0$ und p hätten einen gemeinsamen Teiler t, dann würde t auch die gewichtete Summe auf der rechten Seite und somit auch 1 teilen; daher kann t nur 1 selbst sein, d.h. x und p sind teilerfremd

Zusatzmaterial zur Analysis I - Übung zu Serie 2

Anordnung – vgl. §3, Analysis I, Otto Forster

- Eine **2-stellige** (oder **binäre**) **Relation** R auf einer nichtleeren Menge M ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts von M mit sich selbst, d.h. $R \subset M \times M$.
- Eine binäre Relation R auf der Menge M heißt
  (a) **reflexiv**, falls $\forall m \in M : (m, m) \in R$.
  (b) **symmetrisch**, falls $\forall m, n \in M : ((m, n) \in R \;\Rightarrow\; (n, m) \in R)$.
  (c) **antisymmetrisch**, falls $\forall m, n \in M : ((m, n) \in R \wedge (n, m) \in R \;\Rightarrow\; m = n)$.
  (d) **transitiv**, falls $\forall k, m, n \in M : ((k, m) \in R \wedge (m, n) \in R \;\Rightarrow\; (k, n) \in R)$.
- Eine **Äquivalenzrelation** R auf einer Menge $M \neq \emptyset$ ist eine 2-stellige Relation auf M, welche reflexiv, symmetrisch und transitiv ist (d.h., die Eigenschaften (a),(b) und (d) erfüllt). Statt $(x, y) \in R$ schreibt man in diesem Fall auch häufig $x \sim y$.
- Eine **Ordnungsrelation** R auf einer Menge $M \neq \emptyset$ ist eine 2-stellige Relation auf M, welche reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist (d.h., die Eigenschaften (a),(c) und (d) erfüllt). Statt $(x, y) \in R$ schreibt man in diesem Fall auch häufig $x \leq y$.
- Ein **angeordneter Körper** ist ein Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ versehen mit einer Ordnungsrelation $\leq$, bzgl. der je zwei Elemente $a, b \in \mathbb{K}$ vergleichbar sind, (d.h. $\forall a, b \in \mathbb{K} \;:\; a \leq b \vee b \leq a$ (totale Ordnung)), und die in folgender Weise mit Addition und Multiplikation verträglich ist:[1]
  - Aus $a \leq b$ folgt $a + c \leq b + c$ für beliebiges $c \in \mathbb{K}$.
  - Aus $a \geq 0$ und $b \geq 0$ folgt $ab \geq 0$.
- In einem angeordneten Körper definiert man $|x| := x$, falls $x \geq 0$ gilt, und $|x| := -x$, falls $x < 0$ gilt. Die so entstandene Abbildung heißt **Absolutbetrag**.
- **Satz 1**(Eigenschaften des Betrages, Forster §3):
  (a) $\forall x \in \mathbb{R} \;:\; |x| \geq 0 \wedge (|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0)$. (Definitheit)
  (b) $\forall x, y \in \mathbb{R} \;:\; |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$. (Multiplikativität)
  (c) $\forall x, y \in \mathbb{R} \;:\; |x + y| \leq |x| + |y|$. (Dreiecksungleichung)
- Wir sprechen von einem **archimedisch angeordneten Körper**, falls in einem angeordneten Körper das Archimedische Axiom[2]
$$\forall x, y \in \mathbb{R} \;:\; \Big((x > 0 \wedge y > 0) \Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 \;:\; nx > y\Big),$$
erfüllt ist. Beispiele dafür sind der angeordnete Körper der reellen Zahlen $\big((\mathbb{R}, +, \cdot), \leq\big)$ oder der angeordnete Körper der rationalen Zahlen $\big((\mathbb{Q}, +, \cdot), \leq\big)$.
- **Folgerung & Definition**:
  (3.15) $\forall x \in \mathbb{R}\; \exists! n \in \mathbb{Z} \;:\; n \leq x < n+1$. Daher definieren wir $\text{floor}(x) := \lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \;:\; n \leq x\}$.
  $\forall x \in \mathbb{R}\; \exists! m \in \mathbb{Z} \;:\; m-1 < x \leq m$. Daher definieren wir $\text{ceil}(x) := \lceil x \rceil := \min\{m \in \mathbb{Z} \;:\; x \leq m\}$.
  (3.16) $\forall \varepsilon > 0\; \exists n \in \mathbb{N} \;:\; \frac{1}{n} < \varepsilon$
- **Satz 2**(Bernoullische Ungleichung, Forster, §3): Für alle $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(1+x)^n \geq 1+nx$.
- **Satz 3**(Wachstum von Potenzen, Forster, §3): Sei b eine positive reelle Zahl. Dann gelten
  (a) $b > 1 \;\Longrightarrow\; \forall K \in \mathbb{R}\; \exists n \in \mathbb{N} \;:\; b^n > K$
  (b) $b < 1 \;\Longrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\; \exists n \in \mathbb{N} \;:\; b^n < \varepsilon$

[1] Dies ist äquivalent zu den Anordnungsaxiomen (O.1)-(O.3) im Forster, bei denen die Menge der positiven x vorgegeben wird, indem man x positiv nennt, wenn $-x \leq 0$ und $x \neq 0$ gilt. Analog definiert man $x < 0$ und $x \geq 0$.
[2] Wegen des Anordnungsaxioms $\forall a, b, c : (a > b \wedge c > 0 \Longrightarrow ac > bc)$ ist dies äquivalent zu $\forall x \in \mathbb{R}\; \exists n \in \mathbb{N}_0 \;:\; x < n$.

Grenzwert einer Folge – vgl. §4, Analysis I, Otto Forster

- Eine reelle Zahlenfolge (a_n) heißt **konvergent** gegen a (in Zeichen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$) genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ (n \geq N \implies |a_n - a| < \varepsilon)\ .$$

  In diesem Fall nennen wir a den **Grenzwert** der Folge (a_n) .

- Eine reelle Zahlenfolge (a_n) heißt **nach oben** (bzw. **nach unten**) **beschränkt** genau dann, wenn

$$\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ a_n < K \qquad \big(\text{bzw. } \exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ a_n > K\ \big).$$

  Eine reelle Zahlenfolge (a_n) heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

- **Satz 1**(Beschränktheit von konvergenten Folgen, Forster, §4): (a_n) konvergent $\implies$ (a_n) beschränkt.
- **Satz 2**(Eindeutigkeit des Limes, Forster, §4): Konvergiert (a_n) sowohl gegen a als auch gegen b , ist $a = b$.

Zusatzaufgabe 2.1: Zeigen Sie:

(a) Für reelle Zahlen a, b, c, d mit $b \neq 0$, $d \neq 0$ ist die Ungleichung $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ äquivalent zu $(ad - bc) \cdot (bd) > 0$.

(b) Satz 2 (§3): Für alle $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

(c) Satz 3 (§3): (a) $b > 1 \implies \forall K \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\ :\ b^n > K$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.1:

(a) Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \iff \frac{a}{b} - \frac{c}{d} > 0 \iff \frac{ad - bc}{bd} > 0 \iff (ad - bc) \cdot (bd) > 0\ .$$

Im letzten Schritt ist dabei auf beiden Seiten mit der positiven Zahl $(bd)^2$ multipliziert worden.

(b) Wer zeigen die Aussage per Induktion:

- Induktionsanfang: Es gilt $(1 + x)^1 = 1 + 1 \cdot x$ ($A(1)$).
- Induktionsvoraussetzung: Es gelte $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ ($A(n)$).
- Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$ ($A(n + 1)$).
- Beweis: Mit $1 + x \geq 0$ und $x^2 \geq 0$ und Anordnungsaxiomen ergibt sich

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \overset{\text{IV}}{\geq} (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x \qquad (\ A(n+1)\ ).$$

(c) Sei $K > 0$ beliebig. Im Fall $K \leq 1$ können wir wegen $b > 1$ sofort $n = 1$ wählen und erhalten $b^1 > K$. Andernfalls ist $K > 1$ und somit $y := K - 1 > 0$. Mit $b > 1$ ist auch $x := b - 1 > 0$, so dass einerseits $b^m = (1 + x)^m \geq 1 + mx$ für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ nach der Bernoulli-Ungleichung gilt und wir außerdem ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $nx > y$ nach dem Archimedischen Axiom finden. Also folgt insgesamt

$$b^n \ = \ (1 + (b - 1))^n \ = \ (1 + x)^n \ \geq \ 1 + nx \ > \ 1 + y \ = \ 1 + (K - 1) \ = \ K$$

und somit $b^n > K$ wie behauptet.

Zusatzaufgabe 2.2:

(a) Sei M eine Menge. Zeigen Sie, dass $\subseteq$ eine Ordnungsrelation in $\mathcal{P}(M)$ darstellt.
Ist $\subseteq$ im Allgemeinen auf $\mathcal{P}(M)$ eine totale Ordnungsrelation?

(b) Sei $X := \mathbb{N}_0 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$ und sei R die Relation auf X , für die $(x, y) \in R$ genau dann gilt, wenn $x \in X$ die Zahl $y \in X$ teilt (d.h., falls $\exists n \in X : nx = y$ gilt).

Beweisen oder widerlegen Sie, dass R eine Ordnungsrelation auf X ist.

(c) Sei $\sim$ die Relation auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert durch $\qquad (x, y) \sim (x', y') \ :\iff\ 2(x - x') = 3(y - y')$.

Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.2:

(a) Es ist zu zeigen, dass $\subseteq$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

- Da jede Menge A Teilmenge von sich selbst ist, haben wir Reflexivität.
  Genauer: $A \subseteq A \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall a : (a \in A \Longrightarrow a \in A)$, wobei die letzte Implikation trivial ist.
- Ist $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, so gelten nach Definition $\forall x : (x \in A \Longrightarrow x \in B)$ und $\forall x : (x \in B \Longrightarrow x \in A)$. Das ist aber zusammengefasst $\forall x : (x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$. Dies wiederum heißt nichts anderes als, dass die Mengen A und B gleich sind. Damit folgt die Antisymmetrie.
- Ist $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, so ist auch $A \subseteq C$, so dass auch Transitivität vorliegt.
  Genauer: Es gilt dann $\forall x : (x \in A \Longrightarrow x \in B)$ und $\forall x : (x \in B \Longrightarrow x \in C)$, was zusammengefasst $\forall x : (x \in A \Longrightarrow x \in B \Longrightarrow x \in C)$ ergibt. Daraus folgt aber direkt, dass $\forall x : (x \in A \Longrightarrow x \in C)$ gilt, was nach Definition mit $A \subseteq C$ übereinstimmt.

Für mindestens zweielementige Mengen M ist $\subseteq$ keine totale Ordnung, denn für $M \ni a \neq b \in M$ gilt einerseits $\{a\} \in \mathcal{P}(M)$ und $\{b\} \in \mathcal{P}(M)$, jedoch andererseits weder $\{a\} \subseteq \{b\}$ noch $\{b\} \subseteq \{a\}$.

(b) Es handelt sich um eine Ordnungsrelation, denn:

- Jede Zahl x teilt sich selbst, also ist R reflexiv.
- Teilt x die Zahl y, d.h., gibt es ein n mit $y = nx$, und teilt y auch x, d.h., gibt es ein n' mit $x = n'y$, dann gilt $x = y$ (wegen $y = nx = nn'y$, also $nn' = 1$ und damit $n = 1 = n'$). Daher ist R anti-symmetrisch.
- Teilt x die Zahl y, d.h. gibt es ein n mit $y = nx$, und teilt y die Zahl z, d.h., gibt es ein n' mit $z = n'y$, dann teilt auch x die Zahl z wegen $z = n'nx$. Also ist R transitiv.

(c) Sei $R \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ die Relation, welche definiert ist durch

$$((x, y), (x', y')) \in R \;:\Longleftrightarrow\; 2(x - x') = 3(y - y') \;.$$

Es ist nun zu überprüfen, ob dies eine Äquivalenzrelation ist.

- Wegen $x - x = 0$ und $y - y = 0$ für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $2(x - x) = 0 = 3(y - y)$ und somit $((x, y), (x, y)) \in R$, wonach R reflexiv ist.
- Ist $((x, y), (x', y')) \in R$, also $2(x - x') = 3(y - y')$, dann gilt mit den Folgerungen aus den Körperaxiomen auch
  $$2(x' - x) \;=\; -2(x - x') \;=\; -3(y - y') \;=\; 3(y' - y),$$
  also $((x', y'), (x, y)) \in R$, wonach R symmetrisch ist.
- Gelten $((x, y), (x', y')) \in R$, also $2(x-x') = 3(y-y')$, und $((x', y'), (x'', y'')) \in R$, also $2(x'-x'') = 3(y' - y'')$, dann gilt mit den Folgerungen aus den Körperaxiomen auch
  $$2(x - x'') \;=\; 2(x - x') + 2(x' - x'') \;=\; 3(y - y') + 3(y' - y'') \;=\; 3(y - y''),$$
  also $((x, y), (x'', y'')) \in R$, wonach R transitiv ist.

Somit haben wir gezeigt, dass R eine reflexive, symmetrische und transitive Relation auf $M := \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist. Dies sind aber genau die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.

Zusatzaufgabe 2.3:

Beweisen Sie für die nachstehend definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen die Konvergenz gegen den vorgegebenen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ angeben, mit dem $\forall n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| \leq \varepsilon$ gilt.

(a) $a_n := \dfrac{n}{n+1}$ konvergiert gegen $a := 1$

(b) $a_n := \dfrac{n-2}{3n+10}$ konvergiert gegen $a := \frac{1}{3}$

(c) $a_n := \dfrac{n^2}{n+1} - n$ konvergiert gegen $a := -1$

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.3:

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Offenbar gilt

$$|a_n - a| \;=\; \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| \;=\; \frac{1}{n+1} \;<\; \varepsilon$$

genau dann, wenn $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$ gilt. Also können wir $N(\varepsilon) := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil + 1$ wählen, wobei $\lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} \;:\; x \leq n\}$ ist. Denn dann gilt für jedes $n \geq N(\varepsilon)$ auch $\frac{1}{\varepsilon} < n+1$ und somit $\forall n \geq N(\varepsilon) : \; |a_n - a| < \varepsilon$.

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Zunächst gilt

$$|a_n - a| \;=\; \left|\frac{n-2}{3n+10} - \frac{1}{3}\right| \;=\; \frac{16}{9n+30}\;.$$

Sei nun $n \geq 1$. Wegen $9n + 30 > 9n \iff \frac{1}{9n} > \frac{1}{9n+30}$ erhalten wir dann weiter

$$|a_n - a| < \frac{16}{9n}\;.$$

Wegen $\frac{16}{9n} \leq \varepsilon \iff \frac{16}{9\varepsilon} \leq n$ können wir nun $\mathbb{N}(\varepsilon) := \left\lceil \frac{16}{9\varepsilon} \right\rceil$ wählen, denn dann folgt aus $n \geq N(\varepsilon)$ auch $\frac{16}{9\varepsilon} \leq n$ und wie oben hergeleitet dann auch $|a_n - a| < \varepsilon$.

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Offenbar gilt

$$|a_n - a| \;=\; \left|\frac{n^2}{n+1} - n - (-1)\right| \;=\; \left|\frac{n^2 - n(n+1) - (-1)(n+1)}{n+1}\right| \;=\; \frac{1}{n+1}\;.$$

Demzufolge können wir wie bei (a) etwa $N(\varepsilon) := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil + 1$ wählen, denn dann gilt wiederum für jedes $n \geq N(\varepsilon)$ auch $\frac{1}{\varepsilon} < n + 1$ und somit $\forall n \geq N(\varepsilon) : \; |a_n - a| < \varepsilon$.

Zusatzaufgabe 2.4: Zeigen Sie:

(a) Satz 2 (§4): Der Grenzwert a einer Folge (a_n) ist eindeutig.

(b) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass beschränkte Folgen nicht konvergieren müssen.

(c) Die durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \dfrac{1}{2}a_n + 1$ rekursiv definierte Folge (a_n) konvergiert gegen 2.

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.4:

(a) Wir verwenden die Methode „Beweis durch Widerspruch“. Angenommen, es gäbe $a \neq b$ mit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \;:\; (n \geq N \implies |a_n - a| < \varepsilon)\;.$$

und

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \;:\; (n \geq M \implies |a_n - b| < \varepsilon)\;.$$

Dann wähle $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2}$. Dann gilt nach Voraussetzung für alle $n \geq K := \max\{N(\varepsilon), M(\varepsilon)\}$ die Ungleichungskette

$$|a - b| \;=\; |(a - a_n) + (a_n - b)| \;\leq\; |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b|$$

und somit $|a - b| < |a - b|$, Widerspruch. Somit muss die Annahme falsch sein und es folgt $a = b$.

(b) Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist durch 1 beschränkt, denn es gilt $-1 \leq a_n \leq 1 \implies |a_n| \leq 1$. Sie ist jedoch nicht konvergent, denn für zwei aufeinander folgende Glieder gilt stets $|a_n - a_{n+1}| = 2$. Angenommen, es gäbe einen Grenzwert a, so gäbe es beispielsweise für $\varepsilon = \frac{1}{5}$ eine natürliche Zahl $N(\frac{1}{5})$, so dass für alle $n \geq N(\frac{1}{5})$ die Ungleichung $|a_n - a| < \frac{1}{5}$ erfüllt wäre. Nach Dreiecksungleichung folgte dann für jedes $n \geq N(\frac{1}{5})$ aber auch

$$2 \;=\; |a_n - a_{n+1}| \;=\; \big|(a_n - a) + (a - a_{n+1})\big| \leq\; |a_n - a| + |a - a_{n+1}| \;<\; \frac{1}{5} \;+\; \frac{1}{5} \;=\; \frac{2}{5},$$

also auch $2 < \frac{2}{5}$, Widerspruch. Also kann die Folge a_n keinen Grenzwert besitzen.

(c) Wir zeigen zunächst per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $|a_n - 2| \;=\; \frac{2}{2^n}$ erfüllt wird:

- Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $|a_1 - 2| = |1 - 2| = 1 = \frac{2}{2^1}$. $\quad (A(1))$
- Induktionsvoraussetzung: Es gelte $|a_n - 2| \;=\; \frac{2}{2^n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ $\quad (A(n))$
- Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $|a_{n+1} - 2| \;=\; \frac{2}{2^{n+1}}$ $\quad (A(n+1))$
- Beweis: Es gilt

$$|a_{n+1} - 2| \;=\; \left|\tfrac{1}{2}a_n + 1 - 2\right| \;=\; \left|\tfrac{1}{2}\,(a_n - 2)\right| \;=\; \tfrac{1}{2}|a_n - 2| \;\overset{\text{IV}}{=}\; \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{2^n} \;=\; \tfrac{2}{2^{n+1}}\;.$$

Wir zeigen nun die Konvergenz. Es ist zu zeigen, dass zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N = N(\varepsilon)$ existiert, so dass für alle $n \geq N(\varepsilon)$ die Ungleichung $|a_n - 2| < \varepsilon$ erfüllt ist.

Mit Satz 3(b) finden wir zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $M = M(\varepsilon)$, für welche $\frac{1}{2^M} < \varepsilon$ gilt. Aus den Anordnungsaxiomen ergibt sich für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ auch $\frac{1}{2^m} \leq 1$. Somit gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists M = M(\varepsilon) \;\forall n \in \mathbb{N} \;:\; \left(n \geq M(\varepsilon) \implies |a_{n+1} - 2| = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^M} \cdot \frac{1}{2^{n-M}} \leq \varepsilon \cdot 1 \leq \varepsilon\right)\;,$$

und wählen wir nun $N(\varepsilon) = M(\varepsilon) + 1$, dann ist dies nach Definition genau $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$.

Alle Zusatzaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

Zusatzmaterial zur Analysis I - Übung zu Serie 3

Konvergenz, Divergenz, Bestimmte Divergenz

- Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge, d.h. $a_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Zahlenfolge a_n **konvergent**, falls es ein $a \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft gibt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\ n \in \mathbb{N} : \big(n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon\big).$$

  Andernfalls heißt die Folge **divergent**.

- Eine Folge a_n heißt **bestimmt divergent** gegen $+\infty$, falls

$$\forall\ K \in \mathbb{R}\ \exists\ N = N(K) \in \mathbb{N}\ \forall\ n \in \mathbb{N} : \big(n \geq N(K) \Longrightarrow a_n > K\big).$$

  Analog nennen wir eine Folge a_n **bestimmt divergent** gegen $-\infty$, falls

$$\forall\ K \in \mathbb{R}\ \exists\ N = N(K) \in \mathbb{N}\ \forall\ n \in \mathbb{N} : \big(n \geq N(K) \Longrightarrow a_n < K\big).$$

Rechenregeln für konvergente Folgen (vgl. Forster, §4, Sätze 3,4,5 sowie 8,9)

- Seien a_n, b_n konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gelten

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab\ .$$

  Im Fall $b \neq 0$ gilt außerdem: es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für $n \geq N$, und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$.
- Seien a_n, b_n konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Existiert ein N, so dass $a_n \geq b_n$ für alle $n \geq N$, so gilt $a \geq b$.

  Insbesondere folgt aus $A \leq a_n \leq B$ für alle $n \geq N$ auch $A \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq B$.
- Gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (bzw. $a_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$) und ist a_n eine Nullfolge, so divergiert die Folge $\frac{1}{a_n}$ bestimmt gegen $+\infty$ (bzw. gegen $-\infty$).
- Divergiert a_n bestimmt gegen $+\infty$ (bzw. gegen $-\infty$), dann gibt es ein N, so dass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq N$, und die für $n \geq N$ definierte Folge $\frac{1}{a_n}$ ist dann eine Nullfolge.

Cauchy-Folge, Vollständigkeitsaxiom

- Eine Folge a_n in $\mathbb{R}$ heißt **Cauchy-Folge**, falls

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\, n, m \in \mathbb{N} : (n, m \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon)$$

- Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.[1] Die Umkehrung heißt

- **Vollständigkeitsaxiom** (vgl. Forster, §5, S. 44): In $\mathbb{R}$ konvergiert jede Cauchy-Folge.

  Achtung: Eine Cauchy-Folge $a_n \in \mathbb{Q}$ braucht dagegen keinen Grenzwert in $\mathbb{Q}$ (dem Körper der rationalen Zahlen) zu besitzen.

- Insbesondere kann man reelle Zahlen in b-adische Brüche entwickeln, welche man als Reihen auffassen kann. Dabei ist eine **Reihe** die zu einer Folge a_k zugehörige Folge der Partialsummen $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Im Fall der Existenz nennen wir den Grenzwert abkürzend $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

[1] vgl. Forster, §5, Satz 1

Zusatzaufgabe 3.1: Zeigen Sie direkt mittels der **Definition**:

(a) Die Folge $a_n := \frac{3n}{2n^3-7}$ konvergiert gegen $a := 0$.

(b) Es sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergente Folge reeller Zahlen und $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine gegen $b \in \mathbb{R}$ konvergente Folge reeller Zahlen.

Dann konvergiert die Folge $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $c_n = 3a_n - 5b_n$ gegen den Grenzwert $3a - 5b$.

(c) Zeigen Sie, dass die durch $a_n := n^2 - 3n$ für $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge (a_n) bestimmt divergent gegen ∞ ist, indem Sie zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $N(K)$ bestimmen, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N(K) \Longrightarrow a_n > K) \ .$$

(d) Zeigen Sie: Falls (a_n) den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ besitzt und (b_n) bestimmt divergent gegen ∞ ist, dann ist auch die Folge $(a_n b_n)$ bestimmt divergent gegen ∞.

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.1:

(a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, jedoch fest. Da nun für alle $n \geq 2$ einerseits $n^3 > 7$ sowie $n^2 \geq n$ und somit die Ungleichungskette

$$|a_n - a| \;=\; \left|\frac{3n}{2n^3-7} - 0\right| \;=\; \frac{3n}{n^3 + (n^3-7)} \;<\; \frac{3n}{n^3} \;=\; \frac{3}{n^2} \;<\; \frac{3}{n}$$

erfüllt und andererseits $\frac{3}{n} \leq \varepsilon$ äquivalent zu $\frac{3}{\varepsilon} \leq n$ ist, folgt für alle $n \geq N_\varepsilon := \max\{\lceil \frac{3}{\varepsilon} \rceil, 2\}$ dann $|a_n - a| < \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist damit die Konvergenz von $a_n := \frac{3n}{2n^3-7}$ gegen $a := 0$ gezeigt.

(b) Es ist zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |c_n - (3a - 5b)| < \varepsilon)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, $\eta := \frac{\varepsilon}{6}$ und $\nu := \frac{\varepsilon}{10}$.

Nach Voraussetzung existiert ein M, so dass $\forall n \geq M$ die Bedingung $|a_n - a| < \eta = \frac{\varepsilon}{6}$ gilt.

Weiter existiert nach Vor. ein K, so dass $\forall n \geq K$ die Bedingung $|b_n - b| < \nu = \frac{\varepsilon}{10}$ gilt.

Wir setzen nun $N(\varepsilon) := \max(M, K)$. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(\varepsilon)$.

Da $n \geq M$, folgt $|a_n - a| < \eta = \frac{\varepsilon}{6}$ und ebenso auch $|b_n - b| < \eta = \frac{\varepsilon}{10}$ wegen $n \geq K$.

Insgesamt folgt nun:

$$|(3a_n - 5b_n) - (3a - 5b)| = |3(a_n - a) - 5(b_n - b)| \leq 3|a_n - a| + 5|b_n - b| < 3\frac{\varepsilon}{6} + 5\frac{\varepsilon}{10} = \varepsilon.$$

(c) Es ist zu zeigen, dass für jede Zahl $K \in \mathbb{R}$ ein Index $N = N(K) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n > K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(K)$ gilt.
Sei $K > 0$ beliebig. Wähle ein $N(K) \in \mathbb{N}$ mit $N(K) \geq \max\{K + 1, 4\}$. Es sei $n \geq N(K)$ beliebig. Dann gilt $n - 3 \geq 1$ und $n > K$ und somit $a_n = n(n-3) > K$.
Für $K \leq 0$ verwende, dass die Behauptung für $\tilde{K} = 1$ gilt und der Rest aus $\tilde{K} > 0 \geq K$ folgt.

(d) Nach Voraussetzung ist einerseits a der Grenzwert der Folge (a_n), also

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq M(\varepsilon) \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon) \ ,$$

und andererseits (b_n) bestimmt divergent gegen ∞, also

$$\forall L \in \mathbb{R} \; \exists K = K(L) \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq K(L) \Longrightarrow a_n > L)$$

Es ist nun zu zeigen, dass dann auch $(a_n b_n)$ bestimmt divergent gegen ∞ ist, also

$$\forall L \in \mathbb{R} \; \exists N = N(L) \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N(L) \Longrightarrow a_n b_n > L)$$

Sei $L \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir setzen nun $N(L) = \max\left\{M\left(\frac{a}{2}\right), K\left(\frac{2|L|}{a}\right), 1\right\} \in \mathbb{N}$.

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(L)$. Wegen $n \geq M\left(\frac{a}{2}\right)$ folgt

$$|a_n - a| < \tfrac{a}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\tfrac{a}{2} < a_n - a < \tfrac{a}{2}$$

und somit $0 < \frac{a}{2} < a_n$. Wegen $n \geq K\left(\frac{2|L|}{a}\right)$ ist $b_n > \frac{2|L|}{a} \geq 0$. Es folgt nun insgesamt

$$a_n b_n > \tfrac{a}{2} \cdot \tfrac{2|L|}{a} = |L| \geq L ,$$

was zu zeigen war.

Zusatzaufgabe 3.2: Bestimmen Sie mittels Rechenregeln für konvergente Folgen die Grenzwerte

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+6n+1}{n^2-6n-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$ (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n!}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.2:

(a) Es gilt $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+6n+1}{n^2-6n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1+0+0}{1-0+0} = 1$.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}\right) = \frac{0+1}{0-1} = -1$

(c) Wegen $0 \leq \dfrac{n^2}{(1+1)^n} \leq \dfrac{n^2}{\binom{n}{3}}$ für alle $n \geq 3$ sowie wegen

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{\binom{n}{3}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{6n^2}{n(n-1)(n-2)}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{6}{n}}{1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\right) = \frac{0}{1-0+0} = 0$$

gilt dann auch

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(1+1)^n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\binom{n}{3}} = 0$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{(1+1)^n}\right) = 0.$$

(d) Für alle $n \geq 12$ gilt

$$0 \leq \frac{10^n}{n!} = \frac{10^{10}}{10!} \cdot \underbrace{\frac{10}{11} \cdot \frac{10}{12} \cdot \ldots \cdot \frac{10}{n-1}}_{\leq 1} \cdot \frac{10}{n} \leq \frac{10^{11}}{10!} \cdot \frac{1}{n}.$$

Nach den Rechenregeln für konvergente Folgen gilt dann $0 \leq \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n!} \leq \frac{10^{11}}{10!} \lim_{n\to\infty} \cdot \frac{1}{n} = 0$ und somit auch $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{10^n}{n!}\right) = 0$.

Zusatzaufgabe 3.3: (unbestimmte Ausdrücke der Form $0 \cdot \infty$):

Falls $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ Folgen reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ sind, dann kann über das Konvergenzverhalten von $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ keine allgemeine Aussage getroffen werden. Geben Sie jeweils ein Beispiel an, bei dem

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = c$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \infty$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = -\infty$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n)$ existiert nicht, d.h. unbestimmt divergent

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.3:

(a) $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = cn$, oder $a_n = \frac{1}{n^3}$ und $b_n = cn^3$.

(b) $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = n^2$, oder $a_n = \frac{1}{n^3}$ und $b_n = n^5$.

(c) $a_n = -\frac{1}{n}$ und $b_n = n^2$, oder $a_n = -\frac{1}{n^4}$ und $b_n = n^5$.

(d) $a_n = \frac{1}{n^2}$ und $b_n = n$, oder $a_n = \frac{1}{n^6}$ und $b_n = n^2$.

(e) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ und $b_n = n$, oder $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^3}$ und $b_n = n^4$.

Zusatzaufgabe 3.4: (unbestimmte Ausdrücke der Form $\infty - \infty$):

Falls $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ Folgen reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ sind, dann kann über das Konvergenzverhalten von $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ keine allgemeine Aussage getroffen werden. Geben Sie jeweils ein Beispiel an, bei dem

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = c$, $\quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$ existiert nicht, d.h. unbestimmt divergent

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.4:

(a) $a_n = n^2$ und $b_n = -n^2 + c$, oder $a_n = n$ und $b_n = -n + c$.

(b) $a_n = n^2$ und $b_n = -n$, oder $a_n = n^3$ und $b_n = -n$.

(c) $a_n = n$ und $b_n = -n^2$, oder $a_n = n^3$ und $b_n = -n^5$.

(d) $a_n = n$ und $b_n = -n + (-1)^n$, oder $a_n = n^3$ und $b_n = -n^3 + (-1)^n$.

Zusatzaufgabe 3.5:

(a) Berechnen Sie den Grenzwert der geometrischen Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ bei $|q| < 1$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{7^k}$ für beliebige $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ eine Cauchy-Folge ist, indem Sie zu $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ ermitteln, mit dem $|S_n - S_m| \leq \varepsilon$ bei $n, m \geq N(\varepsilon)$ gilt.

(c) Wieso konvergiert jeder b-adische Bruch?

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.5:

(a) Nach ZA 1.1 (a) und Satz 3(b), §3, ergibt sich $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} q^k \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$.

(b) Für $n \geq m$ gilt die Ungleichung

$$|S_n - S_m| = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{a_k}{7^k} \leq 6 \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{7^k} \leq \frac{6}{7^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{7^k} = \frac{6}{7^{m+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{1}{7^m} .$$

Also können wir zu $\varepsilon > 0$ ein N mit $\varepsilon > \frac{1}{7^N}$ wählen (nach Satz 3(b), §3, wegen $0 < \frac{1}{7} < 1$). Mit diesem N gilt dann $|S_n - S_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. Daher ist S_n eine Cauchy-Folge.

Bemerkung: Würden wir den natürlichen Logarithmus schon kennen, dann könnten wir N durch $N = \max\left(\lceil \frac{-\ln(\varepsilon)}{\ln(7)} \rceil + 1, 1 \right)$ noch genauer angeben.

(c) Wie in (b) kann man für eine beliebige ganzzahlige Basis $b \geq 2$ zeigen, dass ein b-adischer Bruch eine Cauchy-Folge ist, welche nach dem Vollständigkeitsaxiom konvergiert.

Alle Zusatzaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

Zusatzmaterial zur Analysis I - Übung zu Serie 4

Cauchy-Folge, Vollständigkeit, Wurzeln

- Eine Folge a_n in $\mathbb{R}$ heißt **Cauchy-Folge**,[1] falls
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N}\ :\ \big(n, m \geq N(\varepsilon) \implies |a_n - a_m| < \varepsilon\big)$$
Mittels Dreiecksungleichung folgt sofort, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist.[2]
- In $\mathbb{R}$ gilt die Umkehrung auch und wird **Vollständigkeitsaxiom** genannt:

  Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.[3]
- Eine direkte Konsequenz ist der **Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 6, §5 Forster I)**:

  Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge, d.h.:

  Existiert ein $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle n die Ungleichung $|a_n| \leq M$ erfüllt ist, dann gibt es Indizes $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ (genauer eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$), so dass der Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$ existiert.

  Die Grenzwerte von Teilfolgen nennt man **Häufungspunkte** der Folge.
- Aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß ergibt sich das **Corollar (vgl. Satz 7, §5 Forster I)**:

  Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge konvergiert. Ebenso konvergiert jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge.

  Eine direkte Konsequenz daraus ist die Existenz der (k .ten) Wurzeln positiver reeller Zahlen.[4]

Supremum, Infimum, Limes superior, Limes inferior

- Für beschränkte Mengen $A \neq \emptyset$ bezeichnet $\sup(A)$ die kleinste obere Schranke und $\inf(A)$ die größte untere Schranke von A . Ist A unbeschränkt, setzen wir $\sup(A) := +\infty$ und $\inf(A) := -\infty$.
- Der **Limes superior** bzw. der **Limes inferior** einer beschränkten Folge (a_n) ist definiert durch
$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k \qquad \text{und} \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k$$
Somit fällt der Limes superior mit dem größten und der Limes inferior mit dem kleinsten Häufungspunkt zusammen. Für konvergente Folgen gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

  Für nach oben/unten unbeschränkte Folgen setzen wir $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n := +\infty$ bzw. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n := -\infty$.

Reihen

- Für eine Folge $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ bezeichnen wir die Folge $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ der n -ten Partialsummen $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ als eine **Reihe**.
- Eine Reihe heißt **konvergent**, wenn für die Folge $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ der Partialsummen eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ existiert.

  Bezeichnung: $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

  Achtung: Häufig ist mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ auch die Reihe selbst gemeint, unabhängig davon, ob sie konvergent ist oder nicht.
- Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Notwendiges Konvergenzkriterium für Reihen

- (Satz 2, §7, Forster I): Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

  Achtung: Die Umkehrung gilt nicht. Bsp.: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ ... **harmonische Reihe**.

Hinreichendes und notwendiges Konvergenzkriterium für Reihen

- **Cauchysches Konvergenzkriterium:** (vgl. Forster, § 7 Satz 1)

  Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn gilt:

  Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $\left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$ für alle $n \geq m \geq N(\varepsilon)$.

[1] Sowohl Konvergenz als auch Cauchy-Eigenschaft lassen sich analog auch in metrischen Räumen definieren.
[2] Satz 1, §5 Forster I, beweist diese Aussage für reelle Zahlenfolgen. Jedoch gilt sie in jedem metrischen Raum.
[3] Eine Cauchy-Folge $a_n \in \mathbb{Q}$ braucht dagegen keinen Grenzwert in $\mathbb{Q}$ zu besitzen.
[4] vgl. §6 Forster I.

Hinreichende Konvergenzkriterien für Reihen

- **Leibniz-Kriterium:** (vgl. Forster, § 7 Satz 4)

  Sei $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$.

- **Majorantenkriterium:** (vgl. Forster, § 7 Satz 6)

  Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ eine konvergente Reihe mit $c_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge mit $|a_k| \leq c_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

- **Quotientenkriterium:** (Folgerung aus dem Majorantenkriterium) (vgl. Forster, § 7 Satz 7)

  Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$ und gibt es eine reelle Zahl θ mit $0 < \theta < 1$, so dass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \theta$ für alle $k \geq k_0$, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

- **Wurzelkriterium:** (Folgerung aus dem Majorantenkriterium, siehe ZA 4.5(a))

  Sei $0 < q < 1$ eine feste Zahl und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ für alle $k \geq k_0$ mit einem $k_0 \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

  Bemerkungen:

  (a) Beim Quotienten- und Wurzelkriterium genügt es bereits, ein $\tilde{\theta} < 1$ zu finden, für welches $\limsup\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \tilde{\theta}$ bzw. $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \tilde{\theta}$ gilt (siehe ZA 4.5(b)).

  (b) (Satz 5, §7 Forster I): Aus der absoluten Konvergenz folgt die Konvergenz einer Reihe.
  Achtung: Die Umkehrung gilt nicht, denn beispielsweise konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ nach dem Leibniz-Kriterium, jedoch nicht absolut (siehe harmonische Reihe).

Hinreichendes Divergenzkriterium für Reihen

- **Minorantenkriterium:**

  Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ eine bestimmt divergente Reihe mit $c_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge mit $a_k \geq c_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann divergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Zusatzaufgabe 4.1: (Wurzeln)

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie: $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ a^n - b^n \ = \ (a-b) \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$.

(b) Sei $a > 0$ eine reelle und $k \geq 2$ eine natürliche Zahl. Beweisen Sie, dass für jeden Startwert $x_0 > 0$ die rekursiv durch

$$x_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right)$$

definierte Folge gegen die (d.h. eindeutige) positive Lösung der Gleichung $x^k = a$ konvergiert.
Diese bezeichnet man mit $\sqrt[k]{a}$ und nennt sie die (positive) k -te Wurzel von a .

(c) Sei $k \geq 2$ eine beliebige natürliche Zahl und a_n eine konvergente Folge nicht-negativer reeller Zahlen mit Grenzwert $a \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann die durch $b_n := \sqrt[k]{a_n}$ gegebene Folge gegen den Grenzwert $b := \sqrt[k]{a}$ konvergiert.

(d) Zeigen Sie, dass die k -te Wurzel streng monoton wachsend ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.1:

(a) **Induktionsanfang**: Für $n = 1$ gilt $a^1 - b^1 = a - b = (a-b)a^{1-1-0}b^0 = \sum\limits_{k=0}^{1-1} a^{1-1-k}b^k$.

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \geq 1$ gelte $a^n - b^n \ = \ (a-b) \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$.

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $a^{n+1} - b^{n+1} \ = \ (a-b) \sum\limits_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$.

Beweis der IB:
Gilt $a^n - b^n \ = \ (a-b) \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$, dann auch $a^n \ = \ b^n + (a-b) \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$ und weiter

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= a \cdot a^n - b \cdot b^n \ = \ a \cdot \left(b^n + (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k\right) - b \cdot b^n \\ &= a(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k \ + \ (a-b)b^n \ = \ (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k \ + \ a^0 b^n\right) \ = \ (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k \ . \end{aligned}$$

(b) Wie gehen in mehreren Schritten vor:

- Es gilt $\forall n \in \mathbb{N}_0 \ : \ x_n > 0$, denn aus $x_0 > 0$ folgt der Induktionsanfang $(A(0))$ und falls $x_n > 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $(A(n))$, dann ergibt sich sofort auch

$$x_{n+1} \ = \ \frac{1}{k}\Big(\underbrace{(k-1)}_{\geq 1}\underbrace{x_n}_{>0} + \underbrace{\frac{a}{x_n^{k-1}}}_{>0}\Big) \ > \ 0\,. \qquad (A(n+1))$$

- Es gilt $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ x_n^k \geq a$, denn für beliebiges $n+1 \geq 1$ folgt aus Punkt 1 sofort

$$x_{n+1}^k = \left(\frac{k-1}{k}x_n + \frac{a}{kx_n^{k-1}}\right)^k = \left(x_n + \frac{a-x_n^k}{kx_n^{k-1}}\right)^k = x_n^k\left(1 + \frac{a-x_n^k}{kx_n^k}\right)^k \overset{\text{B.U.}}{\geq} x_n^k\left(1 + \frac{a-x_n^k}{x_n^k}\right) \ = \ a$$

wobei wir die Bernoulli-Ungleichung $(1+y)^k \geq 1 + ky$ benutzt haben (was wegen $\frac{a-x_n^k}{kx_n^k} = \frac{1}{k}\left(\frac{a}{x_n^k} - 1\right) \geq -1$ auch erlaubt ist).

- Die Folge x_n ist monoton fallend, denn

$$x_{n+1} - x_n = \ \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right) - x_n \ = \left(1 - \frac{1}{k}\right)x_n - x_n + \frac{a}{kx_n^{k-1}} \ = \ \frac{1}{k}x_n\left(\frac{a}{x_n^k} - 1\right) \leq 0$$

wegen $x_n^k \geq a$ (wie in Punkt 2 gezeigt) und $x_n > 0$ (wie in Punkt 1 gezeigt).

Also ist die Folge x_n nach unten beschränkt (durch 0) und monoton fallend, konvergiert also (Folgerung aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß, vgl. Forster, §5, Satz 7). Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen ergibt sich, dass der Grenzwert x dann

$$x \ = \ \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \ = \ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right) \ = \ \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}}\right)$$

erfüllt und daher auch $kx = (k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}}$, d.h. $x^k = a$. Außerdem ist die positive Lösung dieser Gleichung eindeutig, denn aus

$$0 \ = \ x^k - y^k \ = \ (x-y)\sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j}y^j \ = \ (x-y)\left(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + xy^{k-2} + y^{k-1}\right)$$

(vgl. Aufgabenteil (a)) folgt wegen der Positivität der Klammer sofort $x = y$.

(c) Aus Aufgabenteil (a) folgt $a_n - a \ = \ b_n^k - b^k \ = \ (b_n - b)\left(b_n^{k-1}b^0 + b_n^{k-2}b^1 + \cdots + b_n^1 b^{k-2} + b_n^0 b^{k-1}\right)$. Die zweite Klammer ist in jedem Fall nicht negativ.

- Ist $a = 0$ (und also auch $b = 0$), dann erhält man $|a_n| = |b_n|^k$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, dann gibt es zu ε^k ein N mit $|a_n| \leq \varepsilon^k$ für $n \geq N$, also auch $|b_n| \leq \varepsilon$ für $n \geq N$.
- Ist $a > 0$, also auch $b > 0$, dann gibt es aufgrund der Konvergenz der Folge a_n gegen a ein

$$M := M\left(\frac{a(2^k-1)}{2^k}\right),$$

so dass $a_n > \frac{a}{2^k} > 0$ und somit $b_n > \frac{b}{2} > 0$ für alle $n \geq M$. Also kann man ohne Bedenken durch die zweite Klammer dividieren und anschließend auf beiden Seiten den Betrag nehmen. Damit ergibt sich

$$|b_n - b| \ = \ \frac{|a_n - a|}{\left(b_n^{k-1}b^0 + b_n^{k-2}b + \cdots + b_n b^{k-2} + b^{k-1}\right)} \ \leq \ \frac{|a_n - a|}{b^{k-1}}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, dann gibt es zu diesem $\varepsilon > 0$ ein N mit $|a_n - a| \leq b^{k-1}\varepsilon$ für $n \geq N$, und mit diesem N gilt dann auch $|b_n - b| \leq \varepsilon$ für $n \geq \max\{M, N\}$.

Dies beweist in beiden Fällen die Konvergenz von b_n gegen b.

(d) Eine Funktion $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend $:\Longleftrightarrow \Big(\forall x, y \in A : \big(y > x \Longrightarrow f(y) > f(x)\big)\Big)$.

Wiederum mit Aufgabenteil (a) ergibt sich für die k-te Wurzel aus $y > x \geq 0$ somit auch

$$\sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{x} \ = \ \frac{y - x}{\sum_{j=0}^{k-1}(\sqrt[k]{x})^j(\sqrt[k]{y})^{k-1-j}} \ > \ 0$$

da der Nenner aus nichtnegativen Summanden besteht und mit $(\sqrt[k]{x})^0(\sqrt[k]{y})^{k-1-0} = (\sqrt[k]{y})^{k-1}$ mindestens ein Term echt positiv ist. Aus $y > x$ folgt demnach $\sqrt[k]{y} > \sqrt[k]{x}$, was die strenge Monotonie der Wurzel bedeutet.

Zusatzaufgabe 4.2: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls diese existieren:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2n^4 + n^2} + \sqrt{n}}{n\sqrt[3]{n} + n + 1}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4 + 5n^2} - n^2\right)$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$ bei $a > 0$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.2:

(a) Unter Verwendung von ZA 4.1(c) und den Rechenregeln für Grenzwerte ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^4+n^2}+\sqrt{n}}{n\sqrt[3]{n}+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{\sqrt[6]{n^5}}}{1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}} = \frac{\sqrt[3]{2+0}+0}{1+0+0} = \sqrt[3]{2}\,.$$

(b) Wegen $\sqrt{n^4+5n^2}-n^2 = \frac{(\sqrt{n^4+5n^2})^2-(n^2)^2}{\sqrt{n^4+5n^2}+n^2} = \frac{5n^2}{\sqrt{n^4+5n^2}+n^2} = \frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}+1}$ und ZA 4.1(c) ergibt sich hier als Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+5n^2}-n^2\right) = \frac{5}{2}$.

(c) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, denn:

- Ist $a \geq 1$, gilt für $x_n := \sqrt[n]{a}-1 \geq 0$ mit der Bernoulli-Ungleichung $a = (1+x_n)^n \geq 1+nx_n$ und demzufolge $x_n \leq \frac{a-1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach den Rechenregeln für konvergente Folgen ergibt sich daraus nun $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a-1}{n} = 0$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ und daraus wiederum mittels der Rechenregeln für konvergente Folgen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
- Ist $0 < a < 1$. Dann gilt nach den Folgerungen aus den Körperaxiomen $a^{-1} > 1$ und wie eben bewiesen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^{-1}} = 1$. Nach den Rechenregeln für Folgen folgt nun wiederum $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^{-1}}} = 1$ und somit auch in diesem Fall $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(d) Wir verwenden für $x_n := \sqrt[n]{n}-1 \geq 0$ und $n \geq 2$ die aus dem Binomischen Lehrsatz folgende Ungleichungskette $n = (\sqrt[n]{n})^n = (1+x_n)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{x_n^k 1^{n-k}}_{\geq 0} \geq 1+\binom{n}{2}x_n^2$, was zu $n-1 \geq \frac{n(n-1)}{2}x_n^2$ äquivalent ist, um auf $x_n^2 \leq \frac{2}{n}$ zu schließen. Also gilt $0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$ für alle $n \geq 2$ und demzufolge mittels der Rechenregeln für konvergente Folgen auch $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n}} \stackrel{\text{ZA 4.1(c)}}{=} 0$, also $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Wiederum nach den Rechenregeln für konvergente Folgen folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Zusatzaufgabe 4.3:

(a) Geben Sie für die folgenden Mengen $\mathbb{M}_k$ jeweils das Supremum $\sup \mathbb{M}_k$ und das Infimum $\inf \mathbb{M}_k$, das Maximum $\max \mathbb{M}_k$ und das Minimum $\min \mathbb{M}_k$ an, falls diese existieren:

$$\begin{array}{lll} \mathbb{M}_1 := \mathbb{N}\,, & \mathbb{M}_2 := \{(-1)^n \;:\; n\in\mathbb{N}\}\,, & \mathbb{M}_3 := \left\{1+\frac{1}{n} \;:\; n\in\mathbb{N}\right\}\,, \\ \mathbb{M}_4 := \mathbb{Z}\,, & \mathbb{M}_5 := \{(-2)^n \;:\; n\in\mathbb{N}\}\,, & \mathbb{M}_6 := \left\{n+\frac{1}{n} \;:\; n\in\mathbb{N}\right\}\,, \\ \mathbb{M}_7 := \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}\,, & \mathbb{M}_8 := \left\{1+\frac{1}{x} \;:\; x\in[1,2)\right\}\,, & \mathbb{M}_9 := \{x\in\mathbb{Q} \;:\; |x|<|x-2|\}\,. \end{array}$$

(b) Bestimmen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ für die Folge $a_n := \begin{cases} 3+\frac{1}{5n}, & \text{für } n=3k, \\ 3-\frac{n+4}{n}, & \text{für } n=3k+1, \\ 3+\sqrt[n]{n}, & \text{für } n=3k+2. \end{cases}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.3:

(a) Wir erhalten

$\mathbb{M}_k$	$\mathbb{M}_1$	$\mathbb{M}_2$	$\mathbb{M}_3$	$\mathbb{M}_4$	$\mathbb{M}_5$	$\mathbb{M}_6$	$\mathbb{M}_7$	$\mathbb{M}_8$	$\mathbb{M}_9$
$\sup \mathbb{M}_k$	$+\infty$	1	2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	2	1
$\inf \mathbb{M}_k$	1	-1	1	$-\infty$	$-\infty$	2	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$-\infty$
$\max \mathbb{M}_k$	–	1	2	–	–	–	0	2	–
$\min \mathbb{M}_k$	1	-1	–	–	–	2	–	–	–

(b) Die Folge a_n besitzt beispielsweise die konvergenten Teilfolgen $a_{3k}, a_{3k+1}, a_{3k+2}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{3k} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(3+\frac{1}{15k}\right) = 3$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{3k+1} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(3-\frac{(3k+1)+4}{3k+1}\right) = 2$ sowie mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{3k+1} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(3+\sqrt[3k+2]{3k+2}\right) = 4$. Also ist $\{2,3,4\}$ die Menge aller Häufungspunkte der Folge a_n , denn:

> Aufgrund der Konvergenz der drei betrachteten Teilfolgen existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ Zahlen $K_\varepsilon, L_\varepsilon, M_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq \max\{n_{K_\varepsilon}, n_{L_\varepsilon}, n_{M_\varepsilon}\}$ jedes Folgenglied a_n in (mindestens) einer der drei ε -Umgebungen um $2, 3$ oder 4 liegt. Angenommen, es gäbe noch einen weiteren Häufungspunkt $a \notin \{2,3,4\}$, also eine Teilfolge a_{n_k} mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Dann gibt es zu $\varepsilon := \frac{1}{3}\min\{|a-2|, |a-3|, |a-4|, 1\}$ ein N_ε , so dass $\forall k \geq N_\varepsilon \;:\; |a_{n_k}-a| < \varepsilon$. Jedoch liegt für jedes $k \geq \max\{K_\varepsilon, L_\varepsilon, M_\varepsilon, N_\varepsilon\}$ das jeweilige Folgenglied a_{n_k} wegen $\varepsilon \leq \frac{1}{3}$ in genau einer der drei ε -Umgebungen um $p \in \{2,3,4\}$, da diese dann paarweise disjunkt sind. Mit diesem eindeutigen p gelangen wir nun wie beim Beweis der Eindeutigkeit des Grenzwertes zum Widerspruch $|p-a| < \frac{2}{3}|p-a|$ wegen
>
> $$|p-a| \leq |p-a_{n_k}| + |a_{n_k}-a| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}\min\{|a-2|, |a-3|, |a-4|, 1\} \leq \frac{2}{3}|p-a|\,.$$

Damit ergeben sich $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 4$.

Zusatzaufgabe 4.4: Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konvergent, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

(b) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut, dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konvergent.

(c) Gegeben sei eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$. Dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht konvergent.

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.4:

(a) Die Aussage ist im Allgemeinen falsch, denn wegen $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ für $n \geq 2$ gilt beispielsweise

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 = 1+\sum_{k=2}^{\infty} \tfrac{1}{n^2} \leq 1+\sum_{k=2}^{\infty} \tfrac{1}{n(n-1)} = 1+\lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \tfrac{1}{n(n-1)} = 1+\lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \left(\tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n}\right) = 1+\lim_{N\to\infty} \left(1 - \tfrac{1}{N}\right) = 2,$$

also nach dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz und somit die Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Jedoch wissen wir aus der Vorlesung, dass die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, also nicht konvergent und schon gar nicht absolut konvergent ist.

(b) Die Aussage ist richtig, denn konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Insbesondere muss als notwendiges Kriterium die Folge $|a_k|$ eine Nullfolge sein, also existiert zu $\varepsilon := 1$ ein Index $N(1)$, so dass für alle $k \geq N(1)$ die Folgenglieder $|a_k| < 1$ erfüllen. Insbesondere folgt dann $\forall k \geq N(1) : a_k^2 = |a_k|^2 < 1 \cdot |a_k|$ mit den Anordnungsaxiomen und aus der Nichtnegativität von Quadraten somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^{N(1)-1} a_k^2}_{\substack{=:C<+\infty \text{ da} \\ \text{endlich viele Summanden}}} + \sum_{k=N(1)}^{\infty} a_k^2 \leq C + \sum_{k=N(1)}^{\infty} |a_k| \leq C + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty$$

und schließlich mit dem Majorantenkriterium die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$.

(c) Die Aussage ist im Allgemeinen falsch, denn beispielsweise die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{mit} \qquad a_k := \begin{cases} 2^{-k}, & k \text{ ungerade,} \\ 4^{-k}, & k \text{ gerade} \end{cases}$$

erfüllt sowohl $a_k \geq 0$ als auch $\forall m \in \mathbb{N} : \frac{a_{2m+1}}{a_{2m}} = \frac{2^{-(2m+1)}}{4^{-2m}} = \frac{4^{2m}}{2^{2m+1}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{2m} \geq 2$ und damit $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$. Jedoch erhalten wir aus dem Wurzelkriterium mit $q := \frac{1}{2} < 1$ wegen

$$\forall k \in \mathbb{N} : \sqrt[k]{|a_k|} \leq \max\left\{\sqrt[k]{2^{-k}}, \sqrt[k]{4^{-k}}\right\} = \tfrac{1}{2}$$

die absolute Konvergenz und somit auch im üblichen Sinne die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Zusatzaufgabe 4.5:

(a) Beweisen Sie das Wurzelkriterium.

(b) Wieso genügt es beim Wurzelkriterium, lediglich die Bedingung $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ zu überprüfen?

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.5:

(a) Angenommen, es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$ und ein $0 < q < 1$, so dass $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ für alle $k \geq k_0$ erfüllt ist. Dann gilt auch $|a_k| \leq q^k$ und wegen $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} q^k = q^{k_0} \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^{k_0}}{1-q}$ konvergiert dann der Reihenrest $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} a_k$ nach dem Majorantenkriterium absolut, d.h., $\exists S \in \mathbb{R} : S = \sum\limits_{k=k_0}^{\infty} |a_k|$. Da die Summe endlich vieler endlicher Zahlen wiederum endlich ist, folgt die Existenz eines $T \in \mathbb{R}$ mit $T = S + \sum\limits_{k=0}^{k_0-1} |a_k|$. Also konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

(b) Der Limes Superior einer beschränkten Folge b_n ist die kleinste Zahl b, so dass mit jedem $\varepsilon > 0$ für alle bis auf endlich viele Folgenglieder (d.h., für alle b_n mit $n \geq n_\varepsilon$ für ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$) die Ungleichung $b_n < b + \varepsilon$ erfüllt bleibt. Da wir $0 \leq q < 1$ fordern, finden wir zu $\varepsilon := \frac{1-q}{2} > 0$ ein n_ε, so dass $\forall n \geq n_\varepsilon : \sqrt[n]{|a_n|} < q + \varepsilon = \frac{q+1}{2} < 1$. Daher können wir $\tilde{q} := \frac{q+1}{2}$ im Beweis von (a) verwenden, um auf die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ zu schließen.

Zusatzaufgabe 4.6: Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^n)^2}{n^{(n^2)}}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-2n^2+1}{2^n-1}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.6:

(a) Die Reihe divergiert nach dem Minorantenkriterium bestimmt gegen $+\infty$, denn für $n \geq 2$ gilt $\frac{n!}{n^2} \geq \frac{n(n-1)}{n^2}$, und die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n^2}$ divergiert, da das notwendige Kriterium verletzt ist wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{1} = 1 \neq 0 .$$

(b) Die Reihe konvergiert nach dem Majorantenkriterium sogar absolut, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\left|\frac{n}{n^3+1}\right| < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert wie in ZA 4.4 (a) argumentiert.

(c) Wegen $a_{2n-1} = \frac{1+(-1)^{2n-1}}{2n-1} = \frac{1-1}{2n-1} = 0$ und $a_{2n} = \frac{1+(-1)^{2n}}{2n} = \frac{1+1}{2n} = \frac{1}{n}$ handelt es sich um die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, welche bekanntlich divergiert.

(d) Die Reihe konvergiert (sogar absolut) nach dem Wurzelkriterium, denn es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n^n)^2}{n^{(n^2)}}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3} = 0 =: q < 1 .$$

(e) Die Reihe konvergiert nach dem Wurzelkriterium, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^3 \ge 2n^2 - 1 \ge 0$ und aufgrund der Monotonie der Wurzel folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^3-2n^2+1}{2^n-1}\right|} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^3}{2^n-1}\right|} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^3}{2^n-\frac{1}{2}2^n}\right|} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^3 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \overset{\text{ZA 4.2(c,d)}}{=} \frac{1}{2} =: q < 1 .$$

(f) Die Reihe konvergiert (sogar absolut) nach dem Wurzelkriterium, denn es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^4}{3^n}} = \frac{1}{3} \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^4 \overset{\text{ZA 4.2(d)}}{=} \frac{1}{3} =: q < 1 .$$

Das Quotientenkriterium liefert ebenso die (absolute) Konvergenz mit

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^4}{3^{n+1}}}{\frac{n^4}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^4} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 = \frac{1}{3} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\right)^4 = \frac{1}{3} =: q < 1 .$$

Zusatzaufgabe 4.7: Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2+n+1}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3}{n^2-3n}$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.7:

(a) Die Reihe divergiert nach dem Minorantenkriterium, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{n+4}{n^2+n+1} \ge \frac{n}{n^2+n+1} \ge \frac{n}{n^2+n^2+n^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{n}$ und jedes Vielfache der harmonischen Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert ebenfalls.

(b) Zunächst halten wir fest, dass sich aus der Bernoulli-Ungleichung die Abschätzung $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$ ergibt. Demnach ist das Quotientenkriterium mit $q := \frac{1}{2} < 1$ anwendbar, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \le \frac{1}{2} .$$

Also konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (sogar absolut).

(c) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ konvergiert (sogar absolut) nach dem Wurzelkriterium, denn wie in (b) folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ wiederum sofort

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n\cdot n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \le \frac{1}{2} < 1.$$

(d) Die Reihe divergiert, denn wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2-3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{3}{n}} = 2 \ne 0$ kann $(-1)^n \frac{2n^2+3}{n^2-3n}$ keine mehr Nullfolge sein, womit das notwendige Konvergenzkriterium verletzt ist.

(e) Die Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, denn bei $a_n = \frac{k}{k^2+1}$ handelt es sich wegen

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \frac{0}{1+0} = 0$$

und

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} \iff (n^2+1)(n+1) < n(n+1)^2+n &\iff n^3+n^2+n+1 < n^3+2n^2+2n \\ &\iff 1 < n^2+n \end{aligned}$$

um eine **monotone** (hier monoton fallende) **Nullfolge**. Nach dem Leibnizkriterium ist demnach die **alternierende** Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ konvergent.

Alle Zusatzaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

Zusatzmaterial zur Analysis I - Übung zu Serie 5

Umordnung von Reihen

- Für konvergente Reihen gilt das **(unendliche) Assoziativgesetz**, d.h. man darf beliebig Klammern. Genauer: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $k \mapsto n_k$ eine streng monotone Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n_1 = 1$, dann gilt
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j \right) . \tag{1.1}$$
- Dagegen gilt das **(unendliche) Kommutativgesetz** nur für absolut konvergente Reihen, d.h. jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe hat denselben Grenzwert (vgl. Satz 8, §7 Forster I). Genauer: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion, so gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$.
- Das Produkt zweier absolut konvergenter Reihen ist gleich dem Grenzwert der durch (beliebiges) Ausmultiplizieren der Partialsummen entstandenen Reihe. Insbesondere gilt
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right)$$
für absolut konvergente Reihen, wobei man die Reihe auf der rechten Seite das **Cauchy-Produkt** der beiden Reihen nennt, welches auch absolut konvergent ist (vgl. Satz 3, §8 Forster I).

Exponentialreihe

- Wegen $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ 0^n = 0$ und, da mit $\limsup\limits_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ das Quotientenkriterium anwendbar ist, konvergiert die **Exponentialreihe**
$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut.[1] Die so definierte Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **Exponentialfunktion**.
- Insbesondere gilt $\exp(0) = 1$ und mittels des Cauchy-Produktes folgt
$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ : \ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \ , \qquad \textbf{(Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)}$$
mit welcher sich $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ und weiter $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt.[2]

Abzählbarkeit

- Eine nichtleere Menge $\mathbb{D}$ ist **abzählbar**, wenn es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{D}$ gibt, d.h. wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathbb{D} = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ existiert. Beispiele:
  - Endliche und unendliche Teilmengen von $\mathbb{N}$ sowie $\mathbb{Q}$ sind abzählbar (Corollar zu Satz 1, §9 Forster I).
  - Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar (Diagonalargument, Satz 1, §9 Forster I).
- Eine nichtleere Menge $\mathbb{D}$ heißt **überabzählbar**, wenn sie nicht abzählbar ist. Beispiele:
  - Sowohl $\mathbb{R}$ und das Intervall $]0,1[$ als auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind überabzählbar (Satz 2 und Corollar, §9 Forster I).
  - $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{A | A \subset \mathbb{R}\}$ ist überabzählbar aufgrund der Bijektion $\tau : \mathbb{R} \to \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid \exists r \in \mathbb{R} \ : \ A = \{r\}\}$.
- Wir nennen eine nichtleere Menge $\mathbb{D}$ **abzählbar unendlich**, falls es eine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{D}$ gibt (in diesem Fall ist $\mathbb{D}$ also gleichmächtig zu $\mathbb{N}$).

Zusatzaufgabe 5.1: Gegeben sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$.

(a) Ist die Reihe nach dem Quotientenkriterium konvergent?
(b) Ist die Reihe nach dem Wurzelkriterium konvergent?

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.1:

(a) Das Quotientenkriterium ist nicht auf die Reihe anwendbar wegen
$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{2^{(-1)^{n+1}-(n+1)}}{2^{(-1)^n - n}} \right| \leq \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{(-1)^{2(n+1)}-2(n+1)}}{2^{(-1)^{2n+1}-(2n+1)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{1-2(n+1)}}{2^{-1-(2n+1)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| 2^{1-2(n+1)+1+(2n+1)} \right| = 2 > 1 .$$

(b) Die Reihe konvergiert nach dem Wurzelkriterium wegen
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{(-1)^n - n}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{1-n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} \overset{\text{ZA } 4.2(c),(d)}{=} 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} =: q < 1 .$$

---
[1] vgl. Satz 1, §8 Forster I
[2] vgl. Satz 4 und Corollar, §8 Forster I

Zusatzaufgabe 5.2: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Genau dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

(b) Die Aussage (a) wird falsch, wenn man eine der Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ oder $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ weglässt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.2:

(a) „$\Longrightarrow$“: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen a. Dann konvergiert – wie in der Lösung von Aufgabe 4.1(b) gezeigt – auch jede Teilfolge gegen a, also auch $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$.

„$\Longleftarrow$“: Seien $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent. Dann existieren $a,b,c\in\mathbb{R}$, so dass $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k}=a$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1}=b$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{3k}=c$. Da $(a_{6k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist, gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_{6k}=a$. Ebenso ist $(a_{6k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $\lim\limits_{k\to\infty} a_{6k}=c$. Aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwertes einer konvergenten Folge muss demnach $a=c$ sein. Da $(a_{6k+3})_{k\in\mathbb{N}}$ eine gemeinsame Teilfolge von $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist, folgt hier auch analog $b=c$. Somit ist insgesamt $a=b=c$. Es gilt somit

$$\begin{aligned}
&\forall\,\varepsilon>0\ \exists\ N_1(\varepsilon)\ \forall\,k\in\mathbb{N}\ :\ (k\geq N_1(\varepsilon) &&\Longrightarrow\quad |a_{2k}-a|<\varepsilon)\\
&\forall\,\varepsilon>0\ \exists\ N_2(\varepsilon)\ \forall\,k\in\mathbb{N}\ :\ (k\geq N_2(\varepsilon) &&\Longrightarrow\quad |a_{2k+1}-a|=|a_{2k+1}-b|<\varepsilon)
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon>0$ beliebig. Dann folgt mit $N(\varepsilon):=\max\{2N_1(\varepsilon),2N_2(\varepsilon)+1\}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq N(\varepsilon)$ und

- n gerade, d.h. $n=2k$, dass $|a_n-a|=|a_{2k}-a|<\varepsilon$ (wegen $n\geq 2N_1(\varepsilon)\implies k\geq N_1(\varepsilon)$),
- n ungerade, d.h. $n=2k+1$, dass $|a_n-a|=|a_{2k+1}-a|<\varepsilon$ (wegen $n\geq 2N_2(\varepsilon)+1\implies k\geq N_2(\varepsilon)$).

Demnach ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

(b) Keine der Teilfolgen auf der rechten Seite kann weggelassen werden, denn:

(i) Ein Gegenbeispiel, dass (a_{2k}) nicht weggelassen werden kann, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n=\begin{cases}1, & n=2\bmod 6\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$

(ii) Ein Gegenbeispiel, dass (a_{3k}) nicht weggelassen werden kann, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n=(-1)^n$.

(iii) Ein Gegenbeispiel, dass (a_{2k+1}) nicht weggelassen werden kann, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n=\begin{cases}1, & n=1\bmod 6\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$

Zusatzaufgabe 5.3:

Sei $\alpha\in\mathbb{R}$. Für $n\in\mathbb{N}$ bezeichne $\binom{\alpha}{n}:=\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{\alpha-k+1}{k}$ den verallgemeinerten Binomialkoeffizienten. (Dabei lassen wir auch $\binom{\alpha}{0}:=1$ zu.) Beweisen Sie für $n\in\mathbb{N}$ und beliebige $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ die Formel

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}=\binom{\alpha+\beta}{n}\quad. \tag{3.2}$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.3:

- Gleichung (3.2) gilt für $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$, denn nach Satz von Binomi, Potenzgesetzen und Ausmultiplizieren ergibt sich
$$\sum_{n=0}^{\alpha+\beta}\binom{\alpha+\beta}{n}x^n=(1+x)^{\alpha+\beta}=(1+x)^{\alpha}\cdot(1+x)^{\beta}=\left(\sum_{k=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{k}x^k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\beta}\binom{\beta}{k}x^k\right)=\sum_{n=0}^{\alpha+\beta}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}\right)x^n$$
und nach Koeffizientenvergleich sofort die Behauptung.
- Gleichung (3.2) gilt für $\alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{N}$, denn auf beiden Seiten von Gleichung (3.2) stehen in diesem Fall jeweils ein Polynom in α vom Grad n und beide stimmen für alle $\alpha\in\mathbb{N}$ nach Punkt 1 überein. Somit hat das Differenzpolynom unendlich viele Nullstellen und muss demnach mit dem Nullpolynom übereinstimmen. Dies bedeutet jedoch genau, dass die beiden Polynome gleich sind, also in allen $\alpha\in\mathbb{R}$ übereinstimmen.
- Gleichung (3.2) gilt für $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, denn: Betrachten wir ein festes $\alpha\in\mathbb{R}$, dann sind beide Seiten der Gleichung (3.2) Polynome in β vom Grad n, welche nach Punkt 2 für alle $\beta\in\mathbb{N}$ übereinstimmen. Somit besitzt das Differenzpolynom unendlich viele Nullstellen, muss also wieder mit dem Nullpolynom zusammenfallen, wonach die beiden Polynome gleich sind und daher in allen $\beta\in\mathbb{R}$ übereinstimmen.

Zusatzaufgabe 5.4:

(a) Zeigen Sie: Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k}=\frac{1}{k!}$ und $\forall k\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\ :\ \left(n\geq k\implies\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k}\leq\frac{1}{k!}\right)$.

(b) Zeigen Sie das unendliche Assoziativgesetz (1.1) für konvergente Reihen.

(c) Berechnen Sie für $|x|<1$ das Cauchy-Produkt von $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^k\right)$ und $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^k\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^k\right)$.

(d) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k}}$ konvergiert, jedoch nicht absolut konvergiert. Beweisen Sie weiter, dass das Cauchy-Produkt der Reihe mit sich selbst divergiert.

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.4:

(a) Die zweite Behauptung folgt mit $n \geq k$ sofort aus

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j} \right) \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{n} = \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k} \underbrace{\left(1 - \frac{j-1}{n}\right)}_{\leq 1} \leq \frac{1}{k!} .$$

Nach Grenzwertgesetzen ergibt sich weiterhin

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \right) = \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \lim_{n\to\infty} \frac{j-1}{n}\right) = \frac{1}{k!} \cdot 1^k = \frac{1}{k!} .$$

(b) Bezeichnet $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen $S_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$, so entspricht die rechte Seite von (1.1) genau dem Grenzwert der Teilfolge S_{N_K} mit $N_K := n_{K+1} - 1$. Konvergiert die linke Seite von (1.1) gegen ein $S \in \mathbb{R}$, so bedeutet dies die Konvergenz der Folge S_N gegen S . Wie im Beweis von Aufgabe 4.1(b) gezeigt, muss dann auch jede Teilfolge von S_N gegen S konvergieren, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N = S = \lim_{K\to\infty} S_{N_K} = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j \right) .$$

(c) Das Cauchy-Produkt ist (vgl. Satz 3, §8 Forster) die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_n$ mit

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} x^k (-1)^{n-k} x^{n-k} = x^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} = \begin{cases} x^n \cdot 1 & \text{für } n = 2k, \text{ d.h. } n \equiv 0 \mod 2 , \\ x^n \cdot 0 & \text{für } n = 2k+1, \text{ d.h. } n \equiv 1 \mod 2 . \end{cases}$$

für das erste Produkt und $c_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k (-1)^{n-k} x^{n-k} = (-1)^n x^n \sum_{k=0}^{n} 1 = (-1)^n (n+1) x^n$ für das zweite Produkt. Demnach erhalten wir für $|x| < 1$ die Cauchy-Produkte

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \quad \text{und} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n .$$

(d) Die Reihe konvergiert nach Leibniz-Kriterium, denn nach ZA 4.1 (c),(d) ist $\frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{\frac{1}{k}}$ eine monoton fallende Nullfolge, jedoch nicht absolut, da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ mit $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ als divergente Minorante besitzt. Mit der Indexverschiebung $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{1}{\sqrt{j+1}}$ ist das Cauchy-Produkt der Reihe mit sich

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{1}{\sqrt{j+1}} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} (-1)^{(n-k)+1} \frac{1}{\sqrt{(n-k)+1}} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{\sqrt{(n-k)+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{\sqrt{(n-2-k)+1}} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{\sqrt{n-(k+1)}} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{n-k}}
\end{aligned}$$

und wegen $\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{n-k}} \geq \frac{1}{n}$ (denn $n^2 \geq k(n-k)$ wegen $n^2 - kn + k^2 \geq n^2 - 2kn + k^2 = (n-k)^2 \geq 0$) gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{n-k}} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{n} = 1 \neq 0 ,$$

also ist das notwendige Kriterium für Konvergenz verletzt, und daher divergiert das Cauchy-Produkt.

Zusatzaufgabe 5.5:

(a) Sei $k \geq 2$ eine natürliche Zahl. Ist die Menge $k\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n\}$ abzählbar unendlich?

(b) Ist das kartesische Produkt $A \times B$ abzählbarer Mengen A, B selbst wieder abzählbar?

(c) Ist die Menge $\{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ eine abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$?

(d) Sind je zwei offene (nicht entartete) Intervalle gleichmächtig ?

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.5:

(a) Ja, denn die Abbildung $\mathbb{N} \to k\mathbb{N}$, $n \mapsto kn$, ist sowohl surjektiv (denn ist $a \in k\mathbb{N}$, dann ist a durch k teilbar, so dass eine natürliche Zahl b mit $a = bk$ existiert) als auch injektiv (denn sind $a, b \in k\mathbb{N}$ mit $a = b$, dann existieren $c, d \in \mathbb{N}$ mit $a = kc, b = kd$, woraus sofort $0 = a - b = k(c - d)$, also $c = d$ folgt).

(b) Ja, seien $a, b : \mathbb{N} \to A, B$ Abzählungen von A, B, dann ist eine Abzählung von $A \times B$ die Diagonalfolge

$$(a_1, b_1)|(a_1, b_2), (a_2, b_1)|(a_3, b_1), (a_2, b_2), (a_1, b_3)|(a_1, b_4), \ldots$$

(c) Ja, sei $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ abgezählt durch $a = (a_1, a_2) : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, dann ist $b_n := a_{n,1} + a_{n,2}\sqrt{2}$ eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf die gegebene Menge.

(d) Ja, denn sind $]a, b[$ und $]c, d[$ Intervalle, dann ist $f : x \mapsto c + \frac{d-c}{b-a}(x - a)$ eine Bijektion von $]a, b[$ auf $]c, d[$ wegen $f(x) = y \iff x = a + \frac{b-a}{d-c}(y - c)$ und daher gibt es zu jedem $x \in]a, b[$ genau ein $y \in]c, d[$ mit $f(x) = y$.

Zusatzaufgabe 5.6: Für $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, seien $(S_N)_{N\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ und $(T_N)_{N\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{n=1}^{N} a_{\tau(n)}\right)_{N\in\mathbb{N}}$.

Es sei weiter eine Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $\tau(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2n+1) & \text{wenn } n = 1 \mod 3, \\ \frac{2}{3}(2n-1) & \text{wenn } n = 2 \mod 3, \\ \frac{4}{3}n & \text{wenn } n = 0 \mod 3. \end{cases}$

(a) Berechnen Sie den Vektor

$$\Big(\tau(1), \tau(2), \tau(3), \tau(4), \tau(5), \tau(6), \tau(7), \tau(8), \tau(9), \tau(10), \tau(11), \tau(12), \tau(13), \tau(14), \tau(15), \tau(16), \tau(17), \tau(18)\Big)$$

sowie S_{12} und T_{18} und $T_{18} - \frac{1}{2}S_{12}$ auf 8 Stellen nach dem Komma.

(b) Zeigen Sie:

(i) τ ist eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Folglich ist (T_N) eine Umordnung von (S_N).

(ii) Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt $T_{3N} = \frac{1}{2}S_{2N}$

(iii) $\lim_{n\to\infty} T_N = \frac{1}{2}S \neq S$, wobei $S > 0$ den nach dem LEIBNIZ-Kriterium existierende Grenzwert von S_N bezeichne.

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.6:

(a) Es sind $S_{12} = 0.65321068$, $T_{18} = 0.32660534$ und $S_{12} - \frac{1}{2}T_{18} = 0$ sowie

$$\begin{aligned}(\tau(1), \tau(2), &\tau(3), \tau(4), \tau(5), \tau(6), \tau(7), \tau(8), \tau(9), \tau(10), \tau(11), \tau(12), \tau(13), \tau(14), \tau(15), \tau(16), \tau(17), \tau(18)) \\ &= (1, 2, 4, 3, 6, 8, 5, 10, 12, 7, 14, 16, 9, 18, 20, 11, 22, 24),\end{aligned}$$

(b) (i) Jede natürliche Zahl m hat auch genau eine der Darstellungen $3k - 2$, $3k - 1$ und $3k$ mit $k \in \mathbb{N}$ und in jeder solchen Darstellung ist k durch m eindeutig bestimmt. Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\tau(3k - 2) = 2k - 1,\ \tau(3k - 1) = 4k - 2,\ \tau(3k) = 4k\ .$$

Eine natürliche n Zahl hat genau eine der Darstellungen $n = 2k - 1$ (d.h. n ungerade), $4k - 2$ (d.h. n gerade aber nicht durch 4 teilbar) und $4k$ (durch 4 teilbar) mit $k \in \mathbb{N}$ und in jeder solchen Darstellung ist k durch n eindeutig bestimmt. Es folgt, dass τ eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist.

(ii) Es gelten für $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ die Darstellungen

$$\begin{aligned} a_{\tau(3n-2)} &= a_{\frac{2(3n-2)+1}{3}} &&= a_{2n-1} &&= \tfrac{1}{2n-1}, \\ a_{\tau(3n-1)} &= a_{\frac{2(2(3n-1)-1)}{3}} &&= a_{4n-2} &&= -\tfrac{1}{4n-2}, \\ a_{\tau(3n)} &= a_{\frac{4\cdot 3n}{3}} &&= a_{4n} &&= -\tfrac{1}{4n} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a_{\tau(3n-2)} + a_{\tau(3n-1)} + a_{\tau(3n)} &= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} &&= \frac{(4n-2)(4n) + (-8n+2)(2n-1)}{(2n-1)(4n-2)(4n)} = \frac{1}{(2n-1)(4n)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) &&= \frac{1}{2}(a_{2n-1} + a_{2n})\ . \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$T_{3N} = \sum_{k=1}^{3N} a_{\tau(k)} = \sum_{n=1}^{N} (a_{\tau(3n-2)} + a_{\tau(3n-1)} + a_{\tau(3n)}) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}(a_{2n-1} + a_{2n}) = \sum_{k=1}^{2N} a_k = S_{2N}\ .$$

(iii) Aus der Definition sehen wir, dass für alle n die Ungleichung $\tau(n) \geq \frac{2n}{3}$ und somit $|a_{\tau(n)}| = \left|\frac{(-1)^{\tau(n)-1}}{\tau(n)}\right| \leq \frac{3}{2n}$ gilt. Wegen $S_N \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} S$ (nach Leibnizkriterium) konvergiert auch die Teilfolge $S_{2N} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} S$. Somit gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $K := K\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, so dass für alle $N \geq K$ gilt

$$\left|T_{3N} - \frac{S}{2}\right| = \left|\frac{S_{2N}}{2} - \frac{S}{2}\right| = \frac{1}{2}|S_{2N} - S| < \frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Setzen wir nun $L = \{3K, \lceil\frac{9}{2\varepsilon}\rceil + 1, 1\}$ und betrachten $\nu \geq L$, dann gilt wegen $\nu > \frac{9}{2\varepsilon} \iff \frac{\varepsilon}{3} > \frac{3}{2\nu}$ und folglich $|a_{\tau(\nu)}| \leq \frac{3}{2\nu}$ in jedem der 3 Fälle $\nu \equiv 1 \mod 3, \nu \equiv 2 \mod 3, \nu \equiv 0 \mod 3$ die Ungleichung $|T_\nu - T_{3\lceil\frac{\nu}{3}\rceil}| \leq 2 \cdot \frac{3}{2\nu} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3}$ und mit der Dreiecksungleichung schließlich

$$\left|T_\nu - \frac{S}{2}\right| \leq \left|T_{3\lceil\frac{\nu}{3}\rceil} - \frac{S}{2}\right| + |T_\nu - T_{3\lceil\frac{\nu}{3}\rceil}| \leq \left|T_{3\lceil\frac{\nu}{3}\rceil} - \frac{S}{2}\right| + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon\ .$$

Alle Zusatzaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

Zusatzmaterial zur Analysis I - Übung zu Serie 6

Grenzwerte einer Funktion, Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit

- Sei $D \subset \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ und $a, c \in \bar{\mathbb{R}}$. Weiter gäbe es eine **numerische** Funktion $f : D \to \bar{\mathbb{R}}$.
  (a) Als den **Grenzwert einer Funktion an der Stelle** a definieren[1] wir $c = \lim\limits_{x\to a} f(x) \; :\Longleftrightarrow$

$$\Big(\exists (\xi_n)_n \text{ aus } D : \lim_{n\to\infty} \xi_n = a\Big) \wedge \Big(\forall \text{ Folge } (x_n)_n \text{ aus } D : \big(\big(\lim_{n\to\infty} x_n = a\big) \Longrightarrow \big(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c\big)\big)\Big)$$

  (b) Bezeichne nun $P(x)$ eine Eigenschaft von x und $E = \{x \in D \mid P(x)\}$ sowie $f_{|_E} : E \to \bar{\mathbb{R}}$ die Einschränkung der Funktion f auf die Menge E. Dann definieren[2] wir

$$\lim_{\substack{x\to a\\ P(x)}} f(x) = c \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to a} f_{|_E}(x) = c$$

  Somit lassen sich die **einseitigen Grenzwerte** definieren durch

$$\lim_{x\searrow a} f(x) := \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\nearrow a} f(x) := \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$$

- **Def.:** (Stetigkeit) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in D$. Dann heißt f **stetig im Punkt** a, falls $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Die Funktion f heißt **stetig in** D, falls f in jedem $a \in D$ stetig ist.

  ε - δ -Definition der Stetigkeit (vgl. Satz 3, §11 Forster)

  Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in D$ sowie $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt:

$$f \text{ stetig in } a \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta_{\varepsilon,a} > 0 \, \forall x \in D : \Big(|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon\Big).$$

  Corollar: (vgl. Corollar zu Satz 3, §11 Forster)

  Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$ mit $f(a) \neq 0$. Dann existiert für ein $\delta > 0$ eine δ-Umgebung $U_\delta := D \cap \,]a-\delta, a+\delta[$ von a, so dass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in U_\delta$ gilt.

  Beispiele für stetige Funktionen:

  - Konstanten, Identität, Absolutbetrag, Wurzeln, Exponentialfunktion
  - Summen, Produkte, Quotienten (solange definiert), skalare Vielfache und Kompositionen (falls definiert) stetiger Funktionen sind wiederum stetig (vgl. Sätze 1 und 2, §10 Forster).
  - Polynome/rationale Funktionen auf ihrem Definitionsbereich (vgl. Corollar zu Satz 1, §10)

- **Def.:** (gleichmäßige Stetigkeit) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig auf** D

$$:\Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta_\varepsilon \; \forall x, y \in D : \Big(|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon\Big).$$

- **Def.:** (Lipschitz-Stetigkeit) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, heißt **Lipschitz-stetig auf** D,

$$:\Longleftrightarrow \qquad \exists \, L > 0 \; \forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x-y| .$$

[1] Dies ist der Grenzwertbegriff für eine Funktion nach Dieudonné bzw. Bourbaki. Insbesondere im Fall isolierter Punkte des Definitionsbereiches D wird hier die Existenz eines Grenzwertes der Funktion sichergestellt.
[2] Der klassische Grenzwertbegriff für eine Funktion nach Weierstraß ist "$c = \lim\limits_{x\to a} f(x)$" $:\Longleftrightarrow$ $c = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$.

Sätze über stetige Funktionen

- **Zwischenwertsatz**: (vgl. Satz 1, §11 Forster)

  Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig mit $f(a)\cdot f(b)<0$. Dann existiert ein $\xi\in]a,b[$ mit $f(\xi)=0$.

  Corollar 1: (vgl. Corollar 1 zu Satz 1, §11 Forster)

  Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig mit $f(a)\le f(b)$ bzw. $f(b)\le f(a)$ und sei $c\in\ ]f(a),f(b)[$ bzw. $c\in\ ]f(b),f(a)[$. Dann existiert ein $\xi\in]a,b[$ mit $f(\xi)=c$.

  Corollar 2: (vgl. Corollar 2 zu Satz 1, §11 Forster)

  Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein (eigentliches oder uneigentliches) Intervall und $f:I\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch das Bild $f(I)\subset\mathbb{R}$ ein Intervall.

- **Satz vom Minimum/Maximum**: (vgl. Satz 2, §11 Forster)

  Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist das Bild $f([a,b])$ beschränkt und f nimmt sein Minimum und sein Maximum an, d.h., es gibt $\xi,\eta\in[a,b]$ mit $f(\xi)\le f(x)\le f(\eta)$ für alle $x\in[a,b]$.

  Bem.: Wir werden später sehen, dass der Satz bereits gilt, wenn der Definitionsbereich von f beschränkt und abgeschlossen ist (also beispielsweise auch aus einer Vereinigung endlich vieler ggf. auch entarteter abgeschlossener Intervalle bestehen darf).

- **Satz**: (vgl. Satz 4, §11 Forster)

  Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, so ist f auf $[a,b]$ sogar gleichmäßig stetig.

  Bem.: Abgeschlossenheit und Beschränktheit des Intervalls sind wesentliche Voraussetzungen!

Zusatzaufgabe 6.1: Zeigen Sie:

(a) Die konstanten Funktionen $f_c:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R},\ x\mapsto c\ \ (c\in\mathbb{R})$ sind in $\mathbb{R}$ stetig.

(b) Aus der Definition des Grenzwertes einer Funktion folgt $\lim\limits_{x\to 7}|x-7|=0$.

(c) Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen vererben sich sinngemäß für Grenzwerte von Funktionen.

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.1:

(a) Für $c\in\mathbb{R}$ sei $f_c(x)=c$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Sei $a\in\mathbb{R}$ beliebig und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. Dann ist die Folge $(f_c(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ identisch mit der konstanten Folge $(c)_{n\in\mathbb{N}}$, welche – wegen $|f_c(a_n)-c|=|c-c|=0<\varepsilon$ für alle ε und für alle $n\in\mathbb{N}$ – gegen c konvergiert. Da ebenfalls $f_c(a)=c$ gilt, ist f_c in a stetig. Da $a\in\mathbb{R}$ beliebig war, ist f_c in ganz $\mathbb{R}$ stetig.

(b) Sei (x_n) eine Folge mit $x_n\to 7$ für $n\to\infty$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $N\in\mathbb{N}$ mit $|x_n-7|\le\varepsilon$ für alle $n\ge N$. Dies bedeutet aber zugleich auch $\big|\,|x_n-7|-0\,\big|=|x_n-7|<\varepsilon$ für alle $n\ge N$. Somit konvergiert die Folge $(|x_n-7|)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n\to\infty$ gegen Null. Also folgt aus $x_n\to 7$ sogleich auch $|x_n-7|\to 0$, wie behauptet.

(c) Sind f und g in x stetig, dann folgt nach Definition für jede Folge (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ auch $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$ und $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=g(x)$ und nach Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(f\pm g)(x_n) &= \lim_{n\to\infty}(f(x_n)\pm g(x_n)) &&= \lim_{n\to\infty}f(x_n)\pm\lim_{n\to\infty}g(x_n) &&= f(x)\pm g(x)\\
\lim_{n\to\infty}(f\cdot g)(x_n) &= \lim_{n\to\infty}(f(x_n)\cdot g(x_n)) &&= \lim_{n\to\infty}f(x_n)\cdot\lim_{n\to\infty}g(x_n) &&= f(x)\cdot g(x)\ .
\end{aligned}$$

Entsprechend sind also Summen, Differenzen und Produkte von stetigen Funktionen wiederum stetig. (Analog auch Quotienten, falls der Divisor $g(x_n)$ nicht gegen Null konvergiert.)

Zusatzaufgabe 6.2: Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ (b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \dfrac{3x^2-2x-1}{4x^2+2x-6}$ (c) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}} \sqrt{\dfrac{x^2+2x-8}{3x^2-3x-6}}$ (d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\left\lfloor \dfrac{3}{x}\right\rfloor$

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.2:

(a) Es gilt $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = x+1-x = 1$, also $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \to 0$ und daher $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x} = 0$.

(b) Offenbar gilt $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \dfrac{3x^2-2x-1}{4x^2+2x-6} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \dfrac{(x-1)(3x+1)}{(x-1)(4x+6)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x+1}{4x+6} = \dfrac{3+1}{4+6} = \dfrac{2}{5}$.

(c) Es gilt $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}} \sqrt{\dfrac{x^2+2x-8}{3x^2-3x-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, denn Wurzeln sind stetige Funktionen und es ist

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}} \frac{x^2+2x-8}{3x^2-3x-6} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(3x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+4}{3x+3} = \frac{2}{3}.$$

(d) Wegen der Einschließung $\frac{3}{x}-1 < \lfloor\frac{3}{x}\rfloor \leq \frac{3}{x}$ gilt für $x>0$ demzufolge auch die Einschließung $3-|x| = 3-x < x\lfloor\frac{3}{x}\rfloor \leq 3$ und für $x<0$ die Einschließung $3+|x| = 3-x > x\lfloor\frac{3}{x}\rfloor \geq 3$. Somit folgt aus $|x|<\varepsilon$ schon $|x\lfloor\frac{3}{x}\rfloor - 3| < \varepsilon$. Also gilt für jede Folge $x_n \neq 0$ mit $x_n \to 0$, dass $x_n\lfloor\frac{3}{x_n}\rfloor$ gegen 3 konvergiert, was zu beweisen war.

Zusatzaufgabe 6.3:

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Ist die Funktion $g : [-\varepsilon,\varepsilon] \to \mathbb{R}$ beschränkt, so ist $x \mapsto x \cdot g(x)$ in 0 stetig.

(b) Zeigen Sie: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist in allen $x \in]0,1]$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig auf $]0,1]$.

(c) Sei $a < b < c \leq \infty$. Ist eine auf $[a,c[$ stetige und auf $[a,b]$ und $[b,c[$ gleichmäßig stetige Funktion auch auf $[a,c[$ gleichmäßig stetig?

(d) Die Funktionen $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, seien definiert durch $g_n(x) := \frac{nx}{1+|nx|}$. Beweisen Sie, daß alle Funktionen g_n stetig sind, und überprüfen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ definiert bzw. stetig ist.

(e) Zeigen Sie, dass Lipschitz-Stetigkeit gleichmäßige Stetigkeit (und somit Stetigkeit) impliziert.

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.3:

(a) Da g eine beschränkte Funktion auf $[-\varepsilon,\varepsilon]$ ist, existiert eine Konstante $S<\infty$ mit $|g(x)| \leq S$ für alle $|x| \leq \varepsilon$. Da $-Sx \leq x\cdot g(x) \leq Sx$ gilt, folgt dann aus $\lim\limits_{x\to 0}(-Sx) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} Sx$ auch $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot g(x) = 0$ (vgl. Satz 5, §4 Forster I).

(b) Da f eine durch rationale Operationen stetiger Funktionen und in allen Punkten $x \in]0,1]$ definierte Funktion ist, ist sie (nach Satz 1, §10 Forster I) ebenfalls stetig in jedem $x \in]0,1]$. Jedoch ist f auf $]0,1]$ nicht gleichmäßig stetig, denn es gibt beispielsweise zu $\varepsilon := 1$ kein $\delta > 0$, so dass $\forall\, x,y \in]0,1] \,:\, \big(|x-y|<\delta \implies |f(x)-f(y)|<1\big)$ gilt. Zu solch einem $\delta > 0$ gäbe es nämlich nach dem Archimedischen Axiom ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \max\left\{\sqrt{\frac{3}{4\delta}}, 1\right\}$, so dass wir für $x := \frac{1}{n^2}$, $y := \frac{1}{4n^2}$ trotz $|x-y| = \frac{3}{4n^2} < \delta$ nur $|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right| = |n-2n| = n > 1$ erhalten, Widerspruch.

(c) Ja, denn zu beliebigem $\varepsilon > 0$ finden wir auf $[a,b]$ ein $\delta_1(\varepsilon) > 0$ und analog auf $[b,c[$ ein $\delta_2(\varepsilon) > 0$ und aufgrund der Stetigkeit ein $\delta_3(\varepsilon/2, b)$, so dass $\delta := \min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ das Gewünschte leistet.

(d) Die g_n sind Kompositionen bzw. durch rationale Operationen von stetigen Funktionen erzeugte Funktionen mit natürlichem Definitionsbereich $\mathbb{R}$, also stetig. Für $x > 0$ ist $g_n(x) = 1 - \frac{1}{1+nx}$, also $g_n(x) \to 1$. Für $x < 0$ ist $g_n(x) = -1 + \frac{1}{1-nx}$, also $g_n(x) \to -1$. Für $x = 0$ ergibt sich $g_n(x) = 0$ für alle n. Also ist $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0, \\ 1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases}$ stetig in jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(e) Es ist zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta_\varepsilon\ \forall x, y \in D\ :\ \big(|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big)$.
Da $f : D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, existiert ein $L > 0$, so dass für alle $x, y \in D$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| \le L|x-y|$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$. Setzen wir nun $\delta := \frac{\varepsilon}{1+L} > 0$, dann folgt für beliebige $x, y \in D$ mit $|x-y| < \delta$ nach Voraussetzung dann auch $|f(y) - f(x)| \le L|x-y| < L\delta = L \cdot \frac{\varepsilon}{1+L} < \varepsilon$.

Zusatzaufgabe 6.4:

(a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([a,b]) \subset [a,b]$. Beweisen Sie, dass f mindestens einen Fixpunkt hat, d.h. dass es ein $\xi \in [a,b]$ gibt mit $F(\xi) = \xi$.

(b) Gegeben sei die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := cx + d$ mit $c, d \in \mathbb{R}$. Besitzt diese Funktion ein Minimum oder ein Maximum?

(c) Ist die Funktion $f(x) := x^2$ auf $[0,b]$, $b > 0$, gleichmäßig stetig ? Auch auf $[0,\infty[$?

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.4:

(a) Wir halten zunächst fest, dass wegen $f([a,b]) \subset [a,b]$ offenbar die Ungleichungskette $a \le f(x) \le b$ für jedes $x \in [a,b]$ erfüllt ist. Betrachten wir nun die stetige Funktion $g(x) = f(x) - x$, dann gilt $g(a) \ge 0$, $g(b) \le 0$. Ist $g(a) = 0$ bzw. $g(b) = 0$, haben wir wegen $f(a) - a = 0$ bzw. $f(b) - b = 0$ unseren Fixpunkt bei a bzw. b gefunden. Anderenfalls gilt $g(b) < 0 < g(a)$ und aus dem Zwischenwertsatz (Satz 1, §11 Forster I) folgt dann, dass es ein $\xi \in]a,b[$ mit $g(\xi) = 0$ gibt. Für dieses gilt dann $f(\xi) = \xi$.

(b) Ja, denn als Polynom ersten Grades ist es eine stetige Funktion und das Intervall $[a,b]$ ist abgeschlossen und beschränkt. Aufgrund der Monotonie können wir die Extrema hier sogar angeben:

$$\min_{x \in [a,b]} f(x) = \begin{cases} f(a) = ca + d, & \text{falls } c \ge 0, \\ f(b) = cb + d, & \text{falls } c < 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad \max_{x \in [a,b]} f(x) = \begin{cases} f(a) = ca + d, & \text{falls } c \le 0, \\ f(b) = cb + d, & \text{falls } c > 0. \end{cases}$$

(c) Die Funktion $f(x) = x^2$ ist stetig auf $[0,\infty[$, da nach den Rechenregeln für Folgen $x_n \to a$ die Konvergenz $x_n^2 \to a^2$ impliziert. Also ist f als stetige Funktion auf dem beschränktem und abgeschlossenem Intervall $[0,b]$ (nach Satz 4, §11 Forster I) auch gleichmäßig stetig.

Die Funktion $f(x) = x^2$ ist aber auf $[0,\infty[$ nicht gleichmäßig stetig, denn:

Angenommen, f wäre gleichmäßig stetig, dann gäbe es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \ge 0$ mit $|x-y| < \delta$ dann auch $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ folgt.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\delta < 2\sqrt{2\varepsilon}$ (sonst nehme $\delta_0 := \min\{\delta, \sqrt{2\varepsilon}\}$). Wählen wir nun $x = \frac{2\varepsilon}{\delta} + \frac{\delta}{4}$ und $y = \frac{2\varepsilon}{\delta} - \frac{\delta}{4}$ (es ist $y > 0 \iff \frac{2\varepsilon}{\delta} > \frac{\delta}{4} \iff 8\varepsilon > \delta^2$ wegen $0 < \delta < 2\sqrt{2\varepsilon}$), dann gilt

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x+y| \cdot |x-y| = \frac{4\varepsilon}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2} = 2\varepsilon > \varepsilon \quad ,$$

obwohl $|x-y| = \frac{\delta}{2} < \delta$, Widerspruch.

Alle Zusatzaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

Zusatzmaterial zur Analysis I - Übung zu Serie 7

Monotonie, Umkehrfunktion monotoner Funktionen, natürlicher Logarithmus

- **Definition**: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Dann heißt f

$$\begin{array}{lll} \textbf{monoton wachsend}, & \text{falls } \forall x,y \in D : & \Big(x < y \implies f(x) \le f(y)\Big); \\ \textbf{streng monoton wachsend}, & \text{falls } \forall x,y \in D : & \Big(x < y \implies f(x) < f(y)\Big); \\ \textbf{monoton fallend}, & \text{falls } \forall x,y \in D : & \Big(x < y \implies f(x) \ge f(y)\Big); \\ \textbf{streng monoton fallend}, & \text{falls } \forall x,y \in D : & \Big(x < y \implies f(x) > f(y)\Big). \end{array}$$

  Wir nennen f **monoton**, falls f eine der vier obigen Eigenschaften besitzt und **streng monoton**, falls sie streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

- **Satz**: (vgl. Satz 1, §12 Forster)

  Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Dann existiert genau eine Funktion $g : f(D) \to \mathbb{R}$ mit $g \circ f = \mathrm{Id}_D$ und $f \circ g = \mathrm{Id}_{f(D)}$. Insbesondere ist g stetig und besitzt dasselbe Monotonieverhalten wie f.

  Bemerkungen:

  (a) Gelegentlich nennt man $g : f(D) \to \mathbb{R}$ auch die Umkehrfunktion von f und schreibt f^{-1}. Die Bijektion besteht jedoch nur zwischen D und $f(D)$.

  (b) Als eine Anwendung erhalten wir für die stetigen und streng monotonen Monomfunktionen $f_k : [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^k$ wegen $f([0,\infty[) = [0,\infty[$ die Stetigkeit (und strenge Monotonie) der k**-ten Wurzeln** $g_k : [0,\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[k]{x}$ (Satz 2, §12).

  (c) Für ungerades k, also $k = 2n-1$ für ein $n \in \mathbb{N}$, ist auch die Fortsetzung der f_{2n-1} auf $\mathbb{R} =]-\infty,\infty[$ stetig und streng monoton wachsend mit $f_{2n-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, d.h., es existiert sogar eine Umkehrabbildung $g_{2n-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g \circ f = f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Diese erweiterte Umkehrfunktion bezeichnen wir jedoch nicht als $(2n-1)$-te Wurzel.

- Funktionalgleichung der Exponentialfunktion: $\boxed{\forall x,y \in \mathbb{R} : \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).}$

- **Satz/Definition des natürlichen Logarithmus**:(vgl. Satz 3, §12 Forster)

  Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $]0,\infty[$. Die Umkehrfunktion $\ln :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ heißt **natürlicher Logarithmus** und ist stetig, streng monoton wachsend.

- Funktionalgleichung des natürlichen Logarithmus: $\boxed{\forall x,y \in]0,\infty[: \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).}$

Allgemeine Potenz

- **Definition**: Für $a > 0$ sei die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\boxed{\exp_a(x) := \exp(x \cdot \ln(a)).}$

- **Satz**: (vgl. Satz 4, §12 Forster) Die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und es gilt:

  (i) $\forall x,y \in \mathbb{R} : \exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$

  (ii) $\forall n \in \mathbb{Z} : \exp_a(n) = a^n$ (iii) $\forall p \in \mathbb{Z}\ \forall q \in \mathbb{N},\ q \ge 2 : \exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p}$

- **Satz [Rechenregeln für Potenzen]**: (Satz 5, §12) Für alle $a,b,x,y \in \mathbb{R}$ mit $a > 0, b > 0$ gilt

  (i) $a^x a^y = a^{x+y}$ (ii) $(a^x)^y = a^{xy}$ (iii) $a^x b^x = (ab)^x$ (iv) $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

- **Satz [Funktionalgleichung]**: (Satz 6, §12 Forster) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\forall x, y \ : \ F(x+y) \ = \ F(x)F(y) \ .$$

Dann ist entweder $F \equiv 0$ oder $a := F(1) > 0$ und $\forall x \in \mathbb{R} \ : \ F(x) = a^x \ := \ \exp(x \cdot \ln(a))$.

Zusatzaufgabe 7.1:

(a) Untersuchen Sie die Folge $a_n := \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ auf Konvergenz.

(b) Zeigen Sie (iii) und (iv) der Rechenregeln für Potenzen.

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.1:

(a) Variante (1): Nach ZA 5.4(a) wissen wir einerseits, dass für alle $m \geq k$ die Ungleichung $\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} \leq \frac{1}{k!}$ gilt, und andererseits können wir per Induktion für alle $k \geq 2$ die Ungleichung $k! \geq 2^{k-1}$ zeigen.[1] Also gilt für jede natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ nach dem Binomischen Lehrsatz

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} = 1+1+\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} \leq 2+\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k!} \leq 2+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{2^k} \leq 2+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3\,.$$

Verwenden wir nun, dass die Wurzeln nach ZA 4.1(d) streng monoton sind und $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3} = 1$ nach ZA 4.2(c) gilt, dann ergibt sich zusammen mit Satz 5, §4 Forster I die Konvergenz über

$$1 \ = \ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3} \ \geq \ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \ = \ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \ = \ \lim_{n\to\infty} a_n \ \geq \ \lim_{n\to\infty} 1^n \ = \ 1\ .$$

Variante (2): Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ und Aufgabe 5.2 gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ = \ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{n}}{n}\right)^n \ = \ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{0^k}{k!} \ = \ 1\ .$$

(b) Mit Hilfe der Funktionalgleichung des Logarithmus (s.o.) ergibt sich aus der Definition der allgemeinen Potenz und mittels Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$(ab)^x = \exp(x\ln(ab)) = \exp(x(\ln(a)+\ln(b))) = \exp(x\ln(a)+x\ln(b)) = \exp(x\ln(a))\exp(x\ln(b)) = a^x b^x\,.$$

Aus der Funktionalgleichung für den Logarithmus folgt weiter $\ln(x) = \ln(1\cdot x) = \ln(1)+\ln(x)$ und somit $\ln(1) = 0$. Daher ist $0 = \ln(1) = \ln\left(a\cdot\frac{1}{a}\right) = \ln(a)+\ln\left(\frac{1}{a}\right)$, also $-\ln(a) = \ln\left(\frac{1}{a}\right)$ und so auch

$$a^{-x} = \exp(-x\ln(a)) = \exp(x(-\ln(a))) = \exp\left(x\ln\left(\frac{1}{a}\right)\right) = \left(\frac{1}{a}\right)^x\ .$$

Zusatzaufgabe 7.2:

(a) Ist die Funktion $F(x) := (\ln(x))^{\sqrt{3}}$ definiert auf $]1,\infty[$ stetig?

(b) Warum ist die Funktion $F(x) := x^x$ auf $]0,\infty[$ stetig? Ist sie auch stetig in 0 fortsetzbar?

(c) Finden Sie alle stetigen Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die Gleichung $g(x+y) = g(x)\cdot g(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllen (Beweis von Satz 6, §12 Forster).

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.2:

(a) Für beliebiges $x \in]1,\infty[$ gilt $F(x) = (\ln(x))^{\sqrt{3}} = \exp(\sqrt{3}\ln(\ln(x)))$ nach Definition der allgemeinen Potenz, so dass $F = \exp\circ f\circ\ln\circ\ln$ mit $f : t \mapsto \sqrt{3}t$ als Komposition stetiger Funktionen wiederum stetig ist.

Achtung: Der Definitionsbereich von $\ln$ darf zwar $]0,\infty[$ sein, der für $\ln\circ\ln$ jedoch nicht mehr!

[1] Es gilt $2! = 2 \geq 2 = 2^{2-1}$ (I.A.) und falls $k! \geq 2^{k-1}$ für ein $k \geq 2$ erfüllt ist (I.V.), dann ergibt sich auch $(k+1)! = k!\cdot(k+1) \geq 2^{k-1}\cdot(k+1) \geq 2^{k-1}\cdot 2 = 2^k$ (I.B.).

(b) Da $x^x = \exp(x\ln(x))$ gilt, ist $F(x)$ als Komposition $F = \exp\circ P\circ(I,\ln)\circ I_2$ der stetigen Funktionen zweifache Identität $I_2 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, definiert durch $I_2 : t\mapsto(t,t)$, einfache Identität $I:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und Logarithmus $\ln :]0,\infty[\to\mathbb{R}$, Produkt $P:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definiert durch $P:(s,t)\mapsto st$, und Exponentialfunktion $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ selbst wieder stetig auf $]0,\infty[$.

Ja, sie ist auch stetig in 0 fortsetzbar, denn es gilt $\lim\limits_{x\searrow 0} x^x = 1$ wegen folgender Argumentation: Sei x_n eine beliebige Nullfolge mit $x_n > 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann ist $\frac{1}{x_n}$ eine bestimmt gegen $+\infty$ divergente Folge. Aufgrund der Stetigkeit des Logarithmus ist dann auch $y_n := \ln\left(\frac{1}{x_n}\right)$ bestimmt divergent gegen $+\infty$. Mit $\lim\limits_{a\to\infty}\frac{a}{\exp(a)} = 0$ (vgl. Beispiel (12.2), Forster I) ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} x_n\ln(x_n) \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{-\ln\left(\frac{1}{x_n}\right)}{\frac{1}{x_n}} \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{-y_n}{\exp(y_n)} \;=\; -\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{\exp(y_n)} \;=\; -0$$

und aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion auch

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{x_n} \;=\; \lim_{n\to\infty}\exp(x_n\ln(x_n)) \;=\; \exp(\lim_{n\to\infty} x_n\ln(x_n)) \;=\; \exp(-0) \;=\; \exp(0) \;=\; 1\,.$$

Da x_n eine beliebige Nullfolge positiver reeller Zahlen war, bedeutet dies genau, dass $\lim\limits_{x\searrow 0} x^x = 1$.

(c) Wir unterscheiden die beiden Fälle:

- Ist $g(0)=0$, so gilt $g(x) = g(0+x) = g(0)g(x) = 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, also $g\equiv 0$.
- Ist $g(0)\neq 0$, so ist $g(1)>0$ und $g(x) = g(1)^x$ für alle $x\in\mathbb{R}$, denn:
  - Zunächst ist $g(1)\neq 0$, denn wäre $g(1)=0$, so folgte $g(0) = g(-1)g(1) = g(-1)\cdot 0 = 0$. Wir hatten jedoch vorausgesetzt, dass $g(0)\neq 0$ gelte.
  - Für alle $n\in\mathbb{N}$ und $x\in\mathbb{R}$ gilt $g(nx) = g\underbrace{(x+\ldots+x)}_{n-\mathrm{mal}} = g(x)^n$.

    Insbesondere haben wir damit $g(n) = g(1)^n$ für alle natürlichen Zahlen $n\in\mathbb{N}$.
  - Weiter gilt für alle $m,n\in\mathbb{N}$ auch $g(\frac{m}{n})^n = g(m) = g(1)^m$ und somit $g(\frac{m}{n}) = g(1)^{\frac{m}{n}}$ für alle positiven rationalen Zahlen.
  - Wegen $g(1) = g(2\cdot\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2})^2 \geq 0$ erhalten wir zusammen mit dem ersten Punkt $g(1)>0$.
  - Wegen $0\neq g(0) = g(0+0) = g(0)^2$ folgt $g(0)=1$.
  - Wegen $1 = g(0) = g(x-x) = g(x)g(-x)$ folgt auch $g(-x) = g(x)^{-1}$.
    Mit den vorangegangenen Punkten gilt daher $g(q) = g(1)^q$ für alle rationalen $q\in\mathbb{Q}$.
  - Die Stetigkeit von g und die Stetigkeit der allgemeinen Potenz liefern schließlich die Gültigkeit von $g(x) = g(1)^x$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Zusatzaufgabe 7.3:

(a) Beweisen Sie mittels Definition der Stetigkeit, dass die Umkehrfunktion jeder stetigen bijektiven Funktion $f:\mathbb{R}\to I$ auf dem Intervall $I := f(\mathbb{R})$ stetig ist.

(b) Zeigen Sie: Eine streng monotone Funktion ist injektiv.

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.3:

(a) Eine stetige Bijektion $f:\mathbb{R}\to I$ ist automatisch streng monoton [2]. Ohne Einschränkung sei angenommen, dass f streng monoton wachsend ist. Sei $g: I\to\mathbb{R}$ die Umkehrfunktion, $y\in I$ ein beliebiger, fest gewählter Punkt und $\varepsilon>0$ beliebig. Es ist nun die Existenz eines $\delta_{\varepsilon,y}>0$ zu zeigen, so dass

$$\forall\tilde{y}\in I \;:\; \Big(\,|y-\tilde{y}| \;<\; \delta_{\varepsilon,y} \;\Longrightarrow\; |g(y)-g(\tilde{y})| \;<\; \varepsilon\,\Big) \tag{1}$$

[2] Denn es kann keine Punkte $x<y<z$ mit $f(x)\leq f(z)\leq f(y)$ oder $f(x)\geq f(z)\geq f(y)$ geben, da es dann nach dem Zwischenwertsatz einen Punkt $\xi\in[x,y]$ mit $f(\xi)=f(z)$ geben müsste, was der Bijektivität von f widerspricht.

erfüllt wird. Bezeichnen wir nun mit $x \in \mathbb{R}$ den eindeutig bestimmten Punkt mit $f(x) = y$ und betrachten wir das Intervall $J_\varepsilon :=]f(x-\varepsilon), f(x+\varepsilon)[$, dann gilt wegen $g(f(x)) = x$, der strengen Monotonie und dem Zwischenwertsatz für alle Punkte $\tilde{y}$ aus dem Intervall J_ε die Ungleichung $x - \varepsilon < g(\tilde{y}) < x + \varepsilon$, und wegen $x = g(y)$ somit $|g(\tilde{y}) - g(y)| < \varepsilon$ für alle $\tilde{y} \in J$. Wählen wir nun

$$\delta_{\varepsilon,y} := \min\{y - f(x-\varepsilon), f(x+\varepsilon) - y\} > 0,$$

so folgt $]y - \delta, y + \delta[\subset J_\varepsilon$ und daher wie behauptet (1). Dies beweist die Stetigkeit von g in y.

(b) Angenommen, es gäbe $x \neq y$ mit $f(x) = f(y)$. Dann gilt entweder $x < y$ oder $x > y$. Der erste Fall kann nicht eintreten, denn aus der strengen Monotonie von f folgt $f(x) < f(y)$ falls f monoton wachsend bzw. $f(x) > f(y)$ falls f monoton fallend ist, also insbesondere $f(x) \neq f(y)$. Der zweite Fall kann jedoch ebenfalls nicht eintreten, denn wiederum aus der strengen Monotonie von f folgt $f(x) > f(y)$ falls f monoton wachsend bzw. $f(x) < f(y)$ falls f monoton fallend ist, also insbesondere wieder $f(x) \neq f(y)$. Damit muss die Annahme falsch und f injektiv sein.

Zusatzaufgabe 7.4:

Seien $f(x) = 2x + 3$ und $g(x) = x^2 - 2x - 24$ Funktionen auf $\mathbb{R}$. Ermitteln Sie die Funktionen $(f \circ g)(x)$ sowie $(g \circ f)(x)$ und bestimmen Sie den Wertebereich von $f, g, f \circ g$ und $g \circ f$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.4:

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+3)$ sowie mittels der Stetigkeit und dem Zwischenwertsatz ergibt sich $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Analog ergibt sich wegen $g(x) = x^2 - 2x - 24 = (x-1)^2 - 25 \geq -25$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $g(1) = -25$ sowie $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big((x-1)^2 - 25\big) = +\infty$ wiederum aufgrund der Stetigkeit von Polynomen und dem Zwischenwertsatz $g(\mathbb{R}) = [-25, \infty[$. Desweiteren ist $(f \circ g)(x) = 2g(x) + 3 = 2x^2 - 4x - 45 = 2(x-1)^2 - 47$ und daher folgt analog zuvor $(f \circ g)(\mathbb{R}) = [-47, \infty[$ für den Wertebereich. Schließlich ergibt sich $(g \circ f)(\mathbb{R}) = [-25, \infty[$ wegen

$$(g \circ f)(x) = (f(x))^2 - 2f(x) - 24 = (2x+3)^2 - 4x - 30 = 4x^2 + 8x - 21 = 4(x+1)^2 - 25 \geq -25.$$

Zusatzaufgabe 7.5:

Beweisen Sie, dass die durch $\sinh(x) := \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$ definierte Funktion $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Umkehrabbildung $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.5:

- Einerseits kann man explizit die Umkehrabbildung durch Auflösen von $y = \sinh(x)$ ermitteln: Zu $y \in \mathbb{R}$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $y = \sinh(x)$ genau dann, wenn es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{e}^x - 2y - \mathrm{e}^{-x} = 0$ gibt. Diese Gleichung läßt sich aber wie folgt nach x auflösen: Multiplizieren wir mit e^x, dann geht die Gleichung in $\mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^x - 1 = 0$ über. Substituieren wir nun $z = \mathrm{e}^x$, dann lautet die Gleichung $z^2 - 2yz - 1 = 0$, welche $z = y + \sqrt{y^2+1}$ als einzige positive Lösung besitzt. Also ist $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$ die einzige Lösung von $y = \sinh(x)$.
  Dies beweist einerseits die Bijektivität von $\sinh$ und andererseits, dass $g(y) := \ln(y + \sqrt{y^2+1})$ identisch mit der Umkehrfunktion arsinh von $\sinh$ ist. Da aber g als Komposition stetiger Funktionen selbst wieder stetig ist, ist somit arsinh stetig.
- Alternativ können wir argumentieren, dass $\sinh$ auf jedem Intervall $[a, b]$ stetig und streng monoton wachsend ist, da einerseits $\sinh = \frac{1}{2} \cdot (\exp(x) - \exp \circ (-\operatorname{Id}))$ als Linearkombination und Komposition stetiger Funktionen (nach Satz 1 und 2, §10 Forster I) selbst stetig ist und andererseits aus $x < y$ auch $\sinh(x) < \sinh(y)$ wegen $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y$ und $-\mathrm{e}^{-x} < -\mathrm{e}^{-y}$ folgt, denn

  - Zunächst gilt wegen $1 = \exp(0) = \exp(x)\exp(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ auch $\exp(x) > 0$. Ist $y > x$, so ist $\xi := y - x > 0$ und daher $\exp(y - x) = \exp(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} > 1 + \xi > 1$, also auch $\exp(y) = \exp(x)\exp(y-x) > \exp(x)$.

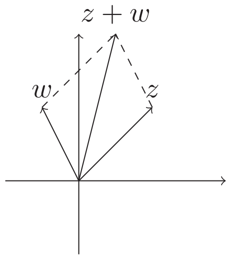
  Somit ist $\sinh$ nach dem Satz über Umkehrfunktionen streng monotoner stetiger Funktionen (Satz 1, §12 Forster I) eine Bijektion von $[a, b]$ auf $[\sinh(a), \sinh(b)]$ mit stetiger und streng monotoner Umkehrfunktion arsinh. Da $\lim\limits_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$ und ebenso $\lim\limits_{x\to\infty} \sinh(x) = +\infty$ (warum ?) gilt, ist dann aber $\sinh$ auch auf ganz $\mathbb{R}$ bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung.

Alle Zusatzaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

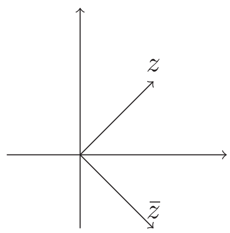
Zusatzmaterial zur Analysis I - Übung zu Serie 8

Körper der komplexen Zahlen, Betrag sowie Konvergenz und Cauchy-Folgen in $\mathbb{C}$

- Mit $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ und $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ bildet die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2$ einen Körper, den man mit $\mathbb{C}$ bezeichnet und den **Körper der komplexen Zahlen** nennt. Identifizieren wir $x \in \mathbb{R}$ mit $(x, 0) \in \mathbb{C}$, so wird $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.



Addition



Konjugation

- Mit der **imaginären Einheit** $i := (0, 1)$ lässt sich jede komplexe Zahl wegen $(x, y) = x\cdot(1, 0)+(0, 1)\cdot y$ als $x+i\cdot y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ darstellen. Mit $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$ gilt weiter $\mathrm{i}^2 = -1$. Der Körper $\mathbb{C}$ ist nicht angeordent!
- Für $z = x+iy$ bezeichnet $\bar{z} = x-iy$ die **konjugiert komplexe Zahl** von z. Mit deren Hilfe erhalten wir für z den **Realteil** als $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} = x$, den **Imaginärteil** als $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} = y$. Desweiteren heißt $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ der **Betrag** von z.
- **Satz [Eigenschaften des Betrages]**: (vgl. Satz 1, §13 Forster)
  (a) $\forall z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \geq 0$ und $\forall z \in \mathbb{C} \ : \ \big(\, |z| = 0 \iff z = 0 \, \big)$ (Definitheit)
  (b) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \ : \ |z_1z_2| \ = \ |z_1| \cdot |z_2|$ (Multiplikativität)
  (c) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \ : \ |z_1 + z_2| \ \leq \ |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung)
- **Definition [Konvergenz in $\mathbb{C}$]:** Analog zu $\mathbb{R}$ nennt man eine Folge z_n in $\mathbb{C}$ **konvergent** gegen $z \in \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ gibt mit $|z_n - z| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
- **Satz**: (vgl. Satz 2, §13 Forster) Sei z_n eine Folge komplexer Zahlen. Dann gilt
$$\lim_{n\to\infty} z_n \ = \ z \qquad \iff \qquad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) \ = \ \mathrm{Re}(z) \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) \ = \ \mathrm{Im}(z)\ .$$
  Weiterhin konvergiert die Folge $\overline{z_n}$ wegen $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$ genau dann, falls die Folge z_n konvergent ist (vgl. Corollar zu Satz 2, §13 Forster). Offenbar gilt dann $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{z_n} \ = \ \overline{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}$.
- **Definition [Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$]**: Eine Folge z_n heißt **Cauchy-Folge** in $\mathbb{C}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ gibt, so dass für alle $m \geq n \geq N$ die Ungleichung $|z_n - z_m| < \varepsilon$ gilt.
- **Satz:** (vgl. Satz 3, §13 Forster) z_n ist Cauchy-Folge $\iff$ $\mathrm{Re}(z_n)$ und $\mathrm{Im}(z_n)$ sind Cauchy-Folgen.
- **Satz**: (vgl. Satz 4, §13 Forster) Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ ist konvergent, d.h. $\mathbb{C}$ ist mit $|.|$ vollständig.
- **Satz**: (vgl. Satz 5, §13) Summen, Produkte und Quotienten (falls die Divisor-Folge keine Nullfolge ist) in $\mathbb{C}$ konvergenter Folgen sind wiederum konvergent, es gelten die aus $\mathbb{R}$ bekannten Rechenregeln.

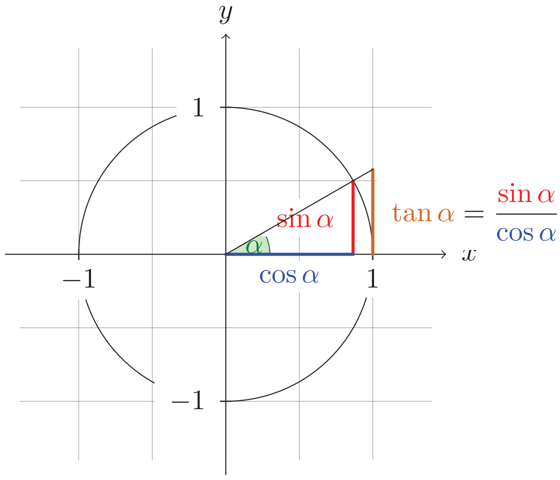
Reihen komplexer Zahlenfolgen, Exponentialreihe in $\mathbb{C}$

- Analog zu $\mathbb{R}$ definieren wir die **Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ zu einer komplexen Zahlenfolge z_n als Folge der zugehörigen Partialsummen $S_n := \sum_{k=1}^{n} z_k$, so dass die Konvergenz der Reihe wieder genau die Konvergenz der Folge (S_n) bedeutet. Die Reihe heißt **absolut konvergent**, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ konvergiert.
- **Majorantenkriterium in $\mathbb{C}$:**
  Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für eine Folge $a_n \geq 0$ reeller Zahlen und gilt $\forall n \in \mathbb{N} : |c_n| \leq a_n$ für eine Folge c_n komplexer Zahlen, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut.
- **Quotientenkriterium in $\mathbb{C}$:**
  Sei c_n eine komplexe Zahlenfolge und es gebe ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $c_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Existiert dann ein $\theta \in]0, 1[$ mit $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \leq \theta$ für alle $n \geq n_0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ absolut.

- **Satz** (vgl. Satz 6,7 und Corollar, §13 Forster) Die Exponentialreihe $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergiert für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ absolut und erfüllt die Funktionalgleichung $\boxed{\forall z, w \in \mathbb{C} \ : \ \exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)}$. Insbesondere folgt wiederum mit der Nullteilerfreiheit eines Körpers $\forall z \in \mathbb{C} \ : \ \exp(z) \neq 0$.
- Wiederum analog zu $\mathbb{R}$ können wir den Grenzwert einer Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ für ein $a \in D$ und entsprechend die Stetigkeit von f definieren. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig.

Trigonometrische Funktionen

- Wir definieren für jede beliebige reelle Zahl $\cos(x) := \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$ und $\sin(x) := \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$. Demnach erhalten wir die $\boxed{\textbf{Eulersche Formel: } \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)}$. Mit Hilfe der Stetigkeit der Exponentialfunktion im Komplexen zeigt man die Stetigkeit von $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (vgl. Satz 2, §14 Forster).
- Mittels Funktionalgleichung und Eulerscher Formel ergeben sich aus $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ die bekannten Additionstheoreme (vgl. Satz 3, §14 Forster)



$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ : \ \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ : \ \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

- **Satz** (vgl. Satz 4, §14 Forster) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots$$
$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots$$

Die Konvergenz der Reihen ist dabei sogar absolut.

- **Satz [Konstruktion von π mittels Nullstelle von $\cos(x)$ auf $[0,2]$]:** (vgl. Satz 6,7, §14 Forster) Auf dem Intervall $[0,2]$ ist $\cos(x)$ streng monoton fallend und besitzt dort eine Nullstelle, welche wir mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnen. Somit erhalten wir die speziellen Werte $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -\mathrm{i}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 1$.
- **Definition [Tangens, Cotangens]:** Auf $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ wird durch $\boxed{\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$ der **Tangens** von x und auf $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ durch $\boxed{\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}}$ der **Cotangens** von x definiert.
- **Satz [Umkehrfunktionen $\arccos(x)$, $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$]:** (vgl. Satz 8, §14 Forster)
  (a) Der Cosinus bildet das Intervall $[0,\pi]$ bijektiv und stetig auf $[-1,1]$ ab und besitzt dort eine Umkehrfunktion $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, die wir den **Arcus Cosinus** nennen.
  (b) Der Sinus bildet das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ bijektiv und stetig auf $[-1,1]$ ab und besitzt dort eine Umkehrfunktion $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, die wir den **Arcus Sinus** nennen.
  (c) Ebenso bildet der Tangens das offene Intervall $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ bijektiv und stetig auf $\mathbb{R}$ ab und besitzt die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, die wir den **Arcus Tangens** nennen.

  Bemerkung: Die hier definierten Umkehrfunktionen nennt man auch die **Hauptzweige**. Ebenso kann man sich die entsprechenden Funktionen für die **Nebenzweige** überlegen.

- **Satz [Polarkoordinaten]**: (vgl. Satz 9, §14 Forster) $\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \ \exists! r \geq 0 \ \exists \varphi \in \mathbb{R} \ : \ z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}$. Für $z \neq 0$ ist das **Argument** φ bis auf Addition ganzzahliger Vielfache von 2π eindeutig bestimmt.

  Corollar: Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ und $z_\star \neq 0$ besitzt die Gleichung $z^n = z_\star$ genau n (verschiedene) komplexe Lösungen. Im Fall $z_\star = 1$ sind dies genau die n-ten komplexen **Einheitswurzeln**

$$\zeta_k := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \ .$$

Zusatzaufgabe 8.1: Zeigen Sie:

Die Menge $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit den Verknüpfungen $\oplus,\otimes : (\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, welche durch

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}ac-bd\\ad+bc\end{pmatrix}$$

definiert seien, ist in der Tat ein Körper.[1] Berechnen Sie $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.1: Das Tripel $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$ ist ein Körper, denn:

$(\mathbb{R}^2,\oplus)$ ist eine abelsche Gruppe, denn für alle $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}w\\x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ folgt (da $(\mathbb{R},+)$ abelsch):

- Es gilt die Kommutativität wegen $\begin{pmatrix}w\\x\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}w+y\\x+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y+w\\z+x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}w\\x\end{pmatrix}$.
- Es existiert ein neutrales Element $e_\oplus := \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, wegen $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u+0\\v+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$.
- Es existieren additive Inverse $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-u\\-v\end{pmatrix}$, wegen $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}-u\\-v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u-u\\v-v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
- Desweiteren ist die Assoziativität erfüllt, denn es gilt

$$\left[\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}w\\x\end{pmatrix}\right]\oplus\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u+w\\v+x\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(u+w)+y\\(v+x)+z\end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}w+y\\x+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\oplus\left[\begin{pmatrix}w\\x\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}\right]$$

$\left(\mathbb{R}^2\setminus\binom{0}{0},\otimes\right)$ ist eine abelsche Gruppe, denn für alle $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}w\\x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ folgt analog:

- Es gilt die Kommutativität wegen $\begin{pmatrix}w\\x\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}wy-xz\\wz+xy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}yw-zx\\zw+yx\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}w\\x\end{pmatrix}$.
- Es existiert ein neutrales Element $e_\otimes := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ wegen $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\cdot1-v\cdot0\\u\cdot0+v\cdot1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$.
- Es existieren Inverse $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{u}{u^2+v^2}\\\frac{-v}{u^2+v^2}\end{pmatrix}$ wegen $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\frac{u}{u^2+v^2}\\\frac{-v}{u^2+v^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\frac{u}{u^2+v^2}-v\frac{-v}{u^2+v^2}\\u\frac{-v}{u^2+v^2}+v\frac{u}{u^2+v^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.
- Desweiteren ist die Assoziativität erfüllt, denn es gelten

$$\left[\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}w\\x\end{pmatrix}\right]\otimes\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}uw-vx\\ux+vw\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(uw-vx)y-(ux+vw)z\\(uw-vx)z+(ux+vw)y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}uwy-uxz-vwz-vxy\\uwz+uxy+vwy-vxz\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\otimes\left[\begin{pmatrix}w\\x\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}wy-xz\\wz+xy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u(wy-xz)-v(wz+xy)\\u(wz+xy)+v(wy-xz)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}uwy-uxz-vwz-vxy\\uwz+uxy+vwy-vxz\end{pmatrix}.$$

Es gilt das Distributivgesetz wegen

$$\left[\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}w\\x\end{pmatrix}\right]\otimes\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u+w\\v+x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(u+w)y-(v+x)z\\(u+w)z+(v+x)y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(uy-vz)+(wy-xz)\\(uz+vy)+(wz+xy)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}(uy-vz)\\(uz+vy)\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}(wy-xz)\\(wz+xy)\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}\right]\oplus\left[\begin{pmatrix}w\\x\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}\right]$$

Desweiteren gilt $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot0-1\cdot1\\0\cdot1+1\cdot0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, d.h., mit $\mathrm{i} := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ gilt $\mathrm{i}^2 = -1$.

---

[1] Die Verknüpfung $\otimes$ kann als eine spezielle Matrix-Vektor-Multiplikation aufgefasst werden, denn es ist $\begin{pmatrix}ac-bd\\ad+bc\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c&-d\\d&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, wobei wegen $\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2+b^2&0\\0&a^2+b^2\end{pmatrix}$ die auftretenden Matrizen bis auf einen positiven Faktor orthogonal sind und daher die Multiplikation mit einer komplexen Zahl als eine Drehstreckung bzw. Drehstauchung interpretiert werden kann (siehe auch Polarkoordinatendarstellung).

Zusatzaufgabe 8.2: Zeigen Sie:

(a) Es gelten (i) $\forall z \in \mathbb{C} \;:\; \overline{\overline{z}} = z\,,$ (ii) $\forall z, w \in \mathbb{C} \;:\; \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}\,,$ (iii) $\forall z, w \in \mathbb{C} \;:\; \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(b) Es gelten (i) $\forall z \in \mathbb{C} \;:\; \exp(z) \neq 0\,,$ (ii) $\forall z \in \mathbb{C} \;:\; \exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}\,,$ (iii) $\forall x \in \mathbb{R} \;:\; |\exp(\mathrm{i}x)| = 1\,.$

(c) Ist $p(z)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, dann gilt: $\quad \forall z \in \mathbb{C} : \Big(p(z) = 0 \iff p(\overline{z}) = 0 \Big)\,.$

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.2:

(a) Für $z = x + \mathrm{i}y$ und $w = u + \mathrm{i}v$ gilt offenbar

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} && \overline{\overline{z}} \;=\; \overline{\overline{x+\mathrm{i}y}} \;=\; \overline{x-\mathrm{i}y} \;=\; \overline{x+\mathrm{i}(-y)} \;=\; x-\mathrm{i}(-y) \;=\; x+\mathrm{i}y \\
&\text{(ii)} && \overline{z+w} = \overline{(x+\mathrm{i}y)+(u+\mathrm{i}v)} = \overline{(x+u)+\mathrm{i}(y+v)} = (x+u)-\mathrm{i}(y+v) = (x-\mathrm{i}y)+(u-\mathrm{i}v) = \overline{z}+\overline{w} \\
&\text{(iii)} && \overline{z\cdot w} = \overline{(x+\mathrm{i}y)(u+\mathrm{i}v)} = \overline{(xu-yv)+\mathrm{i}(uy+xv)} = (xu-yv)-\mathrm{i}(uy+xv) = (x-\mathrm{i}y)\cdot(u-\mathrm{i}v) = \overline{z}\cdot\overline{w}
\end{aligned}
$$

(b) (i) Angenommen, es gäbe ein $z \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = 0\,.$
Dann wäre $1 = \exp(0) = \exp(z)\exp(-z) = 0 \cdot \exp(z) = 0$ und somit $1 = 0$ ein Widerspruch.

(ii) Mittels Corollar zu Satz 2, §13 und wiederholter Anwendung von Aufgabenteil (a) ergibt sich

$$
\forall z \in \mathbb{C} \;:\; \exp(\overline{z}) \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!} \;\overset{\text{(a.iii)}}{=}\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z^k}}{k!} \;\overset{\text{(a.ii)}}{=}\; \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} \;\overset{\substack{\text{Corollar}\\ \text{Satz 2}}}{=}\; \overline{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} \;=\; \overline{\exp(z)}
$$

(iii) Nach Definition des Betrages einer komplexen Zahl, mit (ii) und der Funktionalgleichung folgt

$$
\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} \;:\; |\exp(\mathrm{i}x)| \;&=\; \sqrt{\exp(\mathrm{i}x)\cdot\overline{\exp(\mathrm{i}x)}} \;\overset{\text{(ii)}}{=}\; \sqrt{\exp(\mathrm{i}x)\cdot\exp(\overline{\mathrm{i}x})} \\
&=\; \sqrt{\exp(\mathrm{i}x)\cdot\exp(-\mathrm{i}x)} \;=\; \sqrt{\exp(\mathrm{i}x-\mathrm{i}x)} \;=\; \sqrt{\exp(0)} \;=\; \sqrt{1} \;=\; 1
\end{aligned}
$$

(c) Sei $p(z)$ ein Polynom, etwa $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}\,.$ Insbesondere gilt dann $\overline{a_k} = a_k$ wegen $\mathrm{Im}(a_k) = 0\,.$ Für beliebige $z \in \mathbb{C}$ gilt nach Aufgabenteil (a) nun die Äquivalenz

$$
p(z) = 0 \iff p(\overline{z}) \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \overline{z}^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \cdot \overline{z}^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} \;=\; \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} \;=\; \overline{p(z)} \;=\; \overline{0} \;=\; 0
$$

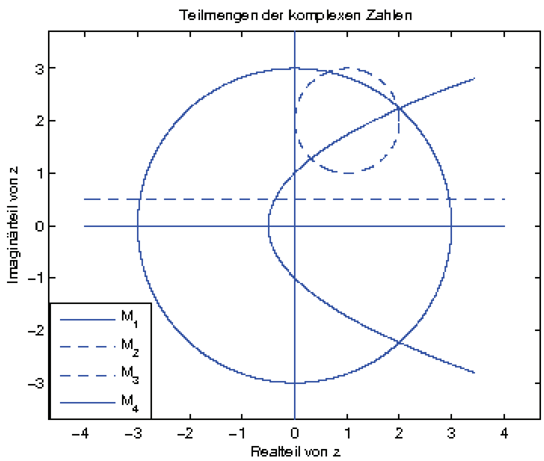
Zusatzaufgabe 8.3:

(a) Wie sehen die folgenden Teilmengen $M \subset \mathbb{C}$ der komplexen Ebene aus? Fertigen Sie eine Skizze an und begründen Sie diese.

$$
\begin{aligned}
M_1 &:= \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 3\} & M_2 &:= \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1-2\mathrm{i}| < 1\} \\
M_3 &:= \{z \in \mathbb{C} \,|\, z - \overline{z} = \mathrm{i}\} & M_4 &:= \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = \mathrm{Re}(z) + 1\}
\end{aligned}
$$

(b) Stellen Sie $\sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi)$ mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion dar. Berechnen Sie mit Hilfe dieser Darstellung die folgenden Additionstheoreme:

$$
(\sin(\varphi))^2 + (\cos(\varphi))^2 \;=\; 1\,, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \;=\; \cos(\varphi)\,.
$$



Lösung zu Zusatzaufgabe 8.3:

(a) • M_1 ist der Kreis (inklusive Rand) um den Ursprung mit Radius $3\,,$ denn $d(z,z') := |z-z'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$ ist der Euklidische Abstand der Punkte $z = x+\mathrm{i}y\,,$ $z' = x'+\mathrm{i}y'$ im $\mathbb{R}^2\,.$

- M_2 ist das Innere des Kreises (ohne Rand) um den Punkt $1+2\mathrm{i}$ mit Radius 1.
- M_3 ist wegen $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$ die Gerade der Punkte mit Imaginärteil $\frac{1}{2}$.
- Die Punkte von M_4 erfüllen $z\bar{z} = \left(\frac{1}{2}(z+\bar{z})+1\right)^2 = \frac{1}{4}\left(z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2+4(z+\bar{z})+4\right)$, also $(z-\bar{z})^2+4(z+\bar{z})+4=0$ und somit, die Beziehung $-4y^2+8x+4=0 \Longleftrightarrow x=\frac{1}{2}(y^2-1)$, wobei $z=x+\mathrm{i}y$ mit $x,y\in\mathbb{R}$. Die Teilmenge M_4 ist somit eine Parabel über der imaginären Achse (mit den Punkten $z_1=-\frac{1}{2}+0\cdot\mathrm{i}$ und $z_{2,3}=0\pm\mathrm{i}$).

(b) Aus der Eulerschen Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi)$ und $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}=\cos(-\varphi)+\mathrm{i}\sin(-\varphi)=\cos(\varphi)-\mathrm{i}\sin(\varphi)$ ergeben sich sofort nach Addition bzw. Multiplikation

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right), \qquad \sin(\varphi) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right).$$

Die Additionstheoreme ergeben sich unter Verwendung von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=\mathrm{i}$ und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1$ wie folgt:

$$\begin{aligned}(\sin(\varphi))^2+(\cos(\varphi))^2 &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right)^2\\ &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\varphi}+2+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\varphi}-\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\varphi}-2+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\varphi}\right)\right) = \frac{4}{4} = 1\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) = \cos(\varphi)\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 8.4:

(a) Was ist an $\quad \mathrm{i}^2=-1 \implies \mathrm{i}=\sqrt{-1} \implies \frac{1}{\mathrm{i}}=\frac{1}{\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{1}{-1}}=\sqrt{-1}=\mathrm{i} \implies 1=\mathrm{i}^2=-1 \quad$ falsch?

(b) Stellen Sie $\dfrac{(1-\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i})^4}$ und $\dfrac{\mathrm{i}^3}{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^2}$ in der Gestalt $z=x+\mathrm{i}y$ mit $x,y\in\mathbb{R}$ dar.

(c) Lösen Sie die Gleichungen $z^2+25=0$ sowie $z^2+4z+8=0$ und $z^3+(\mathrm{i}-1)z^2-\frac{\mathrm{i}}{2}z=0$ in $\mathbb{C}$.

(d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $z^3=-27$ und $z^4=16\mathrm{i}$ und skizzieren Sie sie.

(e) Zeigen Sie, dass das Argument von z_1+z_2 bei $|z_1|=1=|z_2|$ genau der Mittelwert der Argumente von z_1 und z_2 ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.4:

(a) Die Wurzel aus negativen Zahlen ist nicht wohldefiniert und $z^2=-1$ besitzt die Lösungsmenge $\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$.

(b) Einerseits gilt $\dfrac{(1-\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i})^4}=\dfrac{(1-\mathrm{i})^3(1-\mathrm{i})^4}{(1+\mathrm{i})^4(1-\mathrm{i})^4}=\dfrac{((1-\mathrm{i})^2)^3(1-\mathrm{i})}{2^4}=\dfrac{(-2\mathrm{i})^3(1-\mathrm{i})}{16}=\dfrac{8\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{16}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

und andererseits gilt $\dfrac{\mathrm{i}^3}{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^2}=-\mathrm{i}\dfrac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^2}{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^2(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^2}=-\mathrm{i}\dfrac{-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}}{4^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}+\dfrac{1}{8}\mathrm{i}$

(c) (i) Wegen $z^2+25=0 \iff z^2=(5\mathrm{i})^2$ sind hier die Lösungen $z_{1,2}=\pm5\mathrm{i}$

(ii) Es gilt $z^2+4z+8=(z+2)^2+4=(z+2)^2-(2\mathrm{i})^2=(z+2+2\mathrm{i})(z+2-2\mathrm{i})$ und somit sind die Nullstellen genau $z_{1,2}=-2\pm2\mathrm{i}$.

(iii) Wegen $\left(\frac{\mathrm{i}-1}{2}\right)^2=\frac{-1-2\mathrm{i}+1}{4}=-\frac{\mathrm{i}}{2}$ ist die Gleichung äquivalent zu $z(z+\frac{\mathrm{i}-1}{2})^2=0$, welche die Lösungen $z_1=0$ und $z_{2,3}=\frac{1-\mathrm{i}}{2}$ besitzt.

(d) (i) Mit dem Ansatz $z_k=r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_k}$ erhalten wir wegen $-27=27\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ aus $z^3=-27$ für die drei Lösungen z_k, $k=0,1,2$ die Bedingung $r_k^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi_k}=z_k^3=-27=3^3\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ $(k=0,1,2)$ und daher $r_0=r_1=r_2=3$ sowie $3\varphi_k=\pi \mod 2\pi$ (d.h. $3\varphi_k=\pi+k\cdot2\pi$), also

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \tfrac{1}{3}(\pi+0\cdot2\pi) = \tfrac{\pi}{3},\\ \varphi_1 &= \tfrac{1}{3}(\pi+1\cdot2\pi) = \pi,\\ \varphi_2 &= \tfrac{1}{3}(\pi+2\cdot2\pi) = \tfrac{5\pi}{3}.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Lösungen

$$
\begin{array}{rcl}
z_0 &=& 3e^{i\frac{\pi}{3}} &=& 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &=& \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{3}i\right) \ , \\
z_1 &=& 3e^{i\pi} &=& 3\cos(\pi) + i3\sin(\pi) &=& -3 \ , \\
z_2 &=& 3e^{i\frac{5\pi}{3}} &=& 3\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i3\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) &=& \frac{3}{2}\left(1-\sqrt{3}i\right) \ .
\end{array}
$$

Alle Lösungen liegen auf dem Kreis mit Radius 3 um den Nullpunkt mit äquidistanten Winkeln.

(ii) Wegen $16e^{\frac{i\pi}{2}} = 16i$ besitzen die Lösungen Betrag 2 und Winkel, deren Vierfaches (modulo 2π) genau $\frac{\pi}{2}$ ist. Aus $4\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$, $4\frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$, $4\frac{9\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + 4\pi$ sowie $4\frac{13\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + 6\pi$ ergeben sich daher die Lösungen

$$
\begin{array}{rcl}
z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{8}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) & \quad & z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{8}} = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right) \\
z_2 = 2e^{i\frac{9\pi}{8}} = 2\left(\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right) & \quad & z_3 = 2e^{i\frac{13\pi}{8}} = 2\left(\cos\left(\frac{13\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{8}\right)\right) \ .
\end{array}
$$

Wiederum liegen hier alle Lösungen auf dem Kreis in der komplexen Ebene mit Radius 2.

(e) Bei $z_1 = e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = e^{i\varphi_1}$ gilt $z_1 + z_2 = e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} = (e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}})\left(e^{i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}} + e^{i\frac{-\varphi_1+\varphi_2}{2}}\right)$. Wegen $\left(e^{i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}} + e^{i\frac{-\varphi_1+\varphi_2}{2}}\right) = \left(e^{i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}} + e^{-i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right) \in \mathbb{R}$ besitzt $z_1 + z_2$ als Argument $\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$.

Zusatzaufgabe 8.5:

(a) Prüfen Sie, ob die Folgen $a_n := \left(\frac{i}{3-i}\right)^n$, $\quad b_n := \left(\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}\right)^n$ bzw. $c_n := |b_n|$ in $\mathbb{C}$ konvergieren.

(b) Überprüfen Sie die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.5:

(a) (i) Die Folge a_n konvergiert in $\mathbb{C}$ gegen 0, denn wegen $0 < \frac{1}{\sqrt{10}} < 1$ gilt für $n \to \infty$ somit

$$|a_n - 0| = |a_n| = \left|\frac{i}{3-i}\right|^n = \left|\frac{-1+3i}{(3-i)(3+i)}\right|^n = \left|\frac{-1+3i}{10}\right|^n = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^n \to 0 \ .$$

(ii) Die Folge b_n liegt auf dem Rand des Einheitskreises wegen $|b_n| = \left|\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}\right|^n = \left(\sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}}\right)^n = 1$ und konvergiert daher nicht, weil sie aufgrund der Abschätzung

$$|b_{n+1} - b_n| = \left|\left(\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}\right)^{n+1} - \left(\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}\right)^n\right| = \left|\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}\right|^n \left|\frac{3}{5} - i\frac{4}{5} - 1\right| = 1 \cdot \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25}} > \frac{4}{5}$$

noch nicht einmal eine Cauchy-Folge ist (da für eine Cauchy-Folge b_n bei genügend großem n der Abstand $|b_{n+1} - b_n|$ beliebig klein wird, hier jedoch der Abstand immer größer als die von n unabhängige Zahl $\frac{4}{5}$ ist).

(iii) Offenbar konvergiert die Folge $c_n := |b_n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aufgrund ihrer Konstanz gegen 1.

(b) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$ ist wegen $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = \left(\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^n = \left(\frac{1-2i-1}{1-i^2}\right)^n = (-1)^n i^n = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \mod 4, \\ -i, & n \equiv 1 \mod 4, \\ -1, & n \equiv 2 \mod 4, \\ i, & n \equiv 3 \mod 4, \end{cases}$

identisch mit der Partialsummenfolge $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} (-1)^n i^n$, welche jedoch (nach Satz 2, §13 Forster I) nicht konvergent sein kann, da $\mathrm{Re}(S_N) := \mathrm{Re}\left(\sum\limits_{n=0}^{N} (-1)^n i^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor} (-1)^n$ divergiert. Somit kann die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^n$ auch nicht absolut konvergent sein. (Wegen $|(-1)^n i^n| = \ldots = 1$ ist hierbei die Reihe der Absolutglieder identisch mit der bekanntlich bestimmt divergenten arithmetischen Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$.)

Alle Zusatzaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

Zusatzmaterial zur Analysis I - Übung zu Serie 9

Differentiation

- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) heißt im Punkt $a \in D$ **differenzierbar**, falls der Limes des Differenzenquotienten existiert, d.h. der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D \setminus \{a\}}} \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \qquad \text{bzw.} \qquad f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} .$$

  Der Grenzwert $f'(a)$ heißt die **Ableitung** von f im Punkt a. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) heißt in D **differenzierbar**, falls f in jedem $x \in D$ differenzierbar ist. Ist darüber hinaus die Ableitung $f' : x \mapsto f'(x)$ eine stetige Funktion, so nennt man f **stetig differenzierbar**.

  Corollar: Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ differenzierbar, so ist sie auch stetig in a.

- Ob die auf $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion f Werte in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ hat, macht beim Ableiten keinen Unterschied, denn: Ist $f : D \to \mathbb{C}$ und $f(x) = u(x) + iv(x)$ eine Zerlegung in Realteil $u : D \to \mathbb{R}$ und Imaginärteil $v : D \to \mathbb{R}$, dann ist $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$.

- **Satz [Algebraische Differentiationsregeln]**: (vgl. Satz 2, §15 Forster)

  Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g, \lambda f, fg : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für alle $x \in D$ gelten

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)'(x) &= \lambda f'(x) + \mu g'(x) && (\textbf{Linearität}) \\ (fg)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) && (\textbf{Produktregel}) \end{aligned}$$

  Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für alle $x \in D$ gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{\big(g(x)\big)^2} \qquad (\textbf{Quotientenregel})$$

- **Satz [Ableitung der Umkehrfunktion]**: (vgl. Satz 3, §15 Forster)

  Ist $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x mit $f'(x) \neq 0$ und besitzt f in der Umgebung von x die Umkehrfunktion f^{-1}, dann gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right)}, \qquad \text{also} \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(y\right)\right)} .$$

- **Satz [Kettenregel]**: (vgl. Satz 4, §15 Forster)

  Sind $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$ und ist f differenzierbar in $x \in D$ und g differenzierbar in $y := f(x) \in E$, dann ist die Komposition $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ (sprich: „ g nach f “) ebenfalls differenzierbar in x mit

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

- Ist $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und ist die Ableitung $g := f'$ selbst eine stetige Funktion $g : D \to \mathbb{R}$, so heißt f **stetig differenzierbar**. Ist g wiederum in allen Punkten $a \in D$ differenzierbar, so heißt f **zweimal differenzierbar**. Induktiv definieren auf diese Weise im Falle der Existenz analog k**-mal differenzierbare** und k**-mal stetig differenzierbare** Funktionen und bezeichnen mit $f^{(k)} := \left(f^{(k-1)}\right)'$ die k**-te Ableitung** von f, wobei $f^{(0)} := f$ vereinbart wird.

- Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$. In $a \in D$ liegt ein **globales Maximum**, falls $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in D$ und ein **lokales Maximum**, wenn $f(x) \leq f(a)$ für alle x aus einer Umgebung U von a (d.h., $\exists \varepsilon > 0 \ : \ ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap D \subset U \subset D$) gilt (analog: **globales/lokales Minimum**).

Zusatzaufgabe 9.1:

(a) Berechnen Sie die exakten Werte von $\cos(x), \sin(x), \tan(x)$ an den Stellen $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}$. Verwenden Sie dabei Additionstheoreme.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = 1 + \mathrm{i}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.1:

(a) (i) Offensichtlich erfüllt $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ die Gleichung $z^3 = -1$. Da dies zu $0 = z^3+1 = (z+1)(z^2-z+1)$ äquivalent ist (vgl. ZA 4.1 (a)), folgt wegen $z \neq -1$ dann $z^2 - z + 1 = 0$, also

$$1 = z + \frac{1}{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

und schließlich $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Aus $1 = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}|^2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2$ ergibt sich nun, da der Sinus auf $]0, \pi[$ positiv ist, weiter $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sowie $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

(ii) Mit dem in ZA 8.3 (b) gezeigten Additionstheorem $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ ergibt sich zunächst $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Demnach ist

$$1 = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}|^2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2$$

und folglich $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sowie $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

(iii) Wiederum mit dem in ZA 8.3 (b) gezeigten Additionstheorem $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ ergibt sich zusammen mit (i) zunächst $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und wegen $1 = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}|$ analog zuvor $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ sowie $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(iv) Aus dem Additionstheorem $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$ (vgl. Satz 1, §14) sowie

$$\sin(x) - \sin(y) \quad = \quad 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

(vgl. Corollar zu Satz 3, §14) erhalten wir $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{12}{2}\right)$. Wegen der Positivität von Sinus und Cosinus auf $]0, \frac{\pi}{2}[$ suchen wir positive Lösungen von $\frac{1}{2} = 2\sqrt{1-u^2}u$ und erhalten wegen $0 < \sin(x) < \cos(x)$ auf $]0, \frac{\pi}{4}[$ (strenge Monotonie der Funktionen sowie (b))

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad = \quad \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\,, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad = \quad \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\,, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad = \quad \sqrt{7-4\sqrt{3}}\,.$$

(b) Wegen $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ lauten die Lösungen von $z^3 = 1 + \mathrm{i}$ genau $z_1 = \sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ (da $3\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$) $z_2 = \sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ (da $3\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi$) und $z_3 = \sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{17\pi}{12}}$ (da $3\frac{17\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + 4\pi$).

Zusatzaufgabe 9.2:

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und den zugehörigen Wertebereich von

$$f(x) := \arccos\left(\frac{x^2 - x}{x^2}\right).$$

(b) Überprüfen Sie direkt mittels der Definition der Ableitung, dass die Funktionen $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$ und $g(x) := \dfrac{1}{x^n}$ für ein $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar sind.

(c) Zeigen Sie, dass die Regel zur Ableitung der Umkehrfunktion schon aus der Kettenregel folgt, indem Sie $x = f^{-1}(f(x))$ betrachten. Bestimmen Sie anschließend die Ableitung von $h(x) = \ln(x)$.

(d) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion $f(x) := \ln(1-x^2)$ und der Funktion $g(x) := x\cos(\ln(x))$. Ermitteln Sie dann jeweils die Ableitung.

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.2:

(a) Da der Arcus Cosinus nur auf $[-1,1]$ definiert ist, muss

$$-1 \leq \frac{x^2-x}{x^2} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad -1 \leq 1-\frac{1}{x} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad -2 \leq -\frac{1}{x} \leq 0$$

erfüllt sein. Also ist $f(x)$ nur für $x \geq \frac{1}{2}$ definiert, der Definitionsbereich ist demnach das Intervall $D := [\frac{1}{2}, \infty[$. Auf D nimmt $1-\frac{1}{x}$ alle Werte aus $[-1,1[$ an, also nimmt f alle Werte aus $W :=]0,\pi]$ an, was somit der Wertebereich ist.

(b) (i) Unter Verwendung der aus der Definition der Ableitung folgenden Beziehungen

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{\cos(0+h)-\cos(0)}{h} \;=\; \cos'(0) \;=\; \sin(0) \;=\; 0$$

sowie

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h} \;=\; \sin'(0) \;=\; \cos(0) \;=\; 1$$

ergibt sich mit dem Additionstheorem für den Sinus nun insgesamt

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \;&=\; \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(x)\cos(h) - \sin(h)\cos(x)}{h\sin(x)\left(\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)\right)} \\
&= -\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)} \left(\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \right) \\
&= -\frac{1}{\sin(x)\cdot 1 + \cos(x)\cdot 0} \left(0 + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot 1 \right) \;=\; -\frac{\cos(x)}{(\sin(x))^2} \;.
\end{aligned}$$

Also ist f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = -\dfrac{\cos(x)}{(\sin(x))^2}$.

(ii) Mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes $(a+b)^n \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \;&=\; \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n} \right) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{x^n - (x+h)^n}{hx^n(x+h)^n} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{x^n - \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k}}{hx^n(x+h)^n} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k}}{hx^n(x+h)^n} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{-\binom{n}{1} x^{n-1} - \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k}}{x^n(x+h)^n} \;=\; -\binom{n}{1} \frac{x^{n-1}}{x^{2n}} \;=\; -n\frac{1}{x^{n+1}}
\end{aligned}$$

und daher ist $g(x)$ in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar mit Ableitung $g'(x) = -n\dfrac{1}{x^{n+1}}$.

(c) Zu f sei f^{-1} die Umkehrfunktion und beide seien auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Differenzieren der Gleichung $x = f^{-1}(f(x))$ ergibt nun mit $y = f(f^{-1}(y))$ nach Kettenregel

$$1 \;=\; \left(f^{-1}\right)'(f(x)) \cdot f'(x) \quad \Longrightarrow \quad \left(f^{-1}\right)'(f(x)) \;=\; \frac{1}{f'(x)} \quad \overset{\substack{y=f(x)\\ x=f^{-1}(y)}}{\Longrightarrow} \quad \left(f^{-1}\right)'(y) \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Für den natürlichen Logarithmus ergibt sich damit

$$(\ln(\mathrm{e}^y))' \;=\; \frac{1}{(\mathrm{e}^y)'} \;=\; \frac{1}{\mathrm{e}^y} \quad \overset{\substack{x=\mathrm{e}^y\\ y=\ln(x)}}{\Longrightarrow} \quad (\ln(x))' \;=\; \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(x)}} \;=\; \frac{1}{x}$$

(d) Der Definitionsbereich von $f(x)$ ist $]-1,1[$ und nach Kettenregel erhalten wir

$$\left(\ln(1-x^2)\right)' \;=\; \frac{1}{1-x^2} \cdot (-2x) \;=\; -2\frac{x}{1-x^2} \;.$$

Der Definitionsbereich von $g(x)$ ist $]0,\infty[$ und nach Produkt- und Kettenregel ergibt sich

$$(x\cos(\ln(x)))' \;=\; \cos(\ln(x)) + x\left(-\sin(\ln(x))\frac{1}{x} \right) \;=\; \cos(\ln(x)) - \sin(\ln(x)) \;.$$

Zusatzaufgabe 9.3: Bestimmen Sie die Ableitung und den Definitionsbereich der folgenden Funktionen:

(a) a^x bei gegebenem $a > 0$ (b) $x^2 \sinh(x)$ (c) $\tan(x)$ (d) $\exp(\tan(x))\,(\cos(x))^2$

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.3:

(a) $a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$ und daher $(a^x)' = \mathrm{e}^{x\ln(a)}\ln(a) = \ln(a)a^x$. Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.

(b) Zunächst gilt $\sinh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ und daher $\sinh'(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = \cosh(x)$. Aus der Produktregel folgt damit

$$\left(x^2\sinh(x)\right)' = 2x\sinh(x) + x^2\cosh(x) \quad .$$

Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.

(c) Der Definitionsbereich von $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ist $\mathbb{R}\setminus\left\{n\pi + \frac{\pi}{2} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}\right\}$. Mit der Quotientenregel folgt

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$$

(d) Mit Hilfe von (c), der Produktregel und der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned}\left(\exp(\tan(x))\,(\cos(x))^2\right)' &= \left(\exp(\tan(x))\frac{1}{(\cos(x))^2}\right)(\cos(x))^2 + \exp(\tan(x))\cdot 2\cos(x)(-\sin(x)) \\ &= \exp(\tan(x))\big(1 - 2\cos(x)\sin(x)\big)\end{aligned}$$

und der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}\setminus\left\{n\pi + \frac{\pi}{2} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Zusatzaufgabe 9.4: Berechnen Sie die 1. Ableitung von

(a) $y = \cos^2\left(\sin^3\left(\mathrm{e}^{4x}\right)\right)$ (b) $y = x^{\sin(x)}$ (c) $f(u) = \mathrm{e}^u\ln(\sin(u))$

(d) $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$ (e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}\cdot\mathrm{e}^{\sin(x)}}{\sqrt[3]{1+x}\cdot(x^2+3)^2}$ (f) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.4:

(a) Nach fünffacher Anwendung der Kettenregel ergibt sich

$$y' = 2\cos\left(\sin^3\left(\mathrm{e}^{4x}\right)\right)\cdot\left(-\sin\left(\sin^3\left(\mathrm{e}^{4x}\right)\right)\right)\cdot 3\sin^2\left(\mathrm{e}^{4x}\right)\cdot\cos\left(\mathrm{e}^{4x}\right)\cdot\mathrm{e}^{4x}\cdot 4\,.$$

(b) Nach Definition ist $u(x)^{v(x)} = \mathrm{e}^{v(x)\cdot\ln(u(x))}$. Demnach ergibt sich mit Kettenregel

$$\left(x^{\sin(x)}\right)' = \left(\mathrm{e}^{\sin(x)\cdot\ln(x)}\right)' = \mathrm{e}^{\sin(x)\cdot\ln(x)}\cdot\left(\cos(x)\ln(x) + \sin(x)\cdot\frac{1}{x}\right) = x^{\sin(x)}\cdot\left(\cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}\right)\,.$$

(c) Nach Produktregel $(vw)' = v'w + vw'$ und Kettenregel $(h(g(x)))' = h'(g(x))\cdot g'(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}f'(u) = \mathrm{e}^u\cdot\ln(\sin(u)) + \mathrm{e}^u\cdot(\ln(\sin(u)))' &= \mathrm{e}^u\cdot\ln(\sin(u)) + \mathrm{e}^u\cdot\left(\frac{1}{\sin(u)}\cdot\cos(u)\right) \\ &= \mathrm{e}^u\cdot(\ln(\sin(u)) + \cot(u))\,.\end{aligned}$$

(d) Mit $y(x) = \sqrt{x\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{x^2\cdot x}} = \left(\left(x^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}}$ und $(x^k)' = k\cdot x^{k-1}$ folgt $y'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

(e) Hier bietet sich das logarithmische Ableiten $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ an, denn es gilt

$$\ln(f(x)) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \sin(x) - \frac{1}{3}\ln(1+x) - 2\ln(x^2+3)$$

$$f'(x) = f(x)\cdot(\ln(f(x)))' = \frac{\sqrt{x^2+1}\cdot\mathrm{e}^{\sin(x)}}{\sqrt[3]{1+x}\cdot(x^2+3)^2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \cos(x) - \frac{1}{3(1+x)} - \frac{4x}{x^2+3}\right)\,.$$

(f) Nach Quotientenregel $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ und mit $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$ ergibt sich

$$f'(x) = \frac{\cos(x)(1+\cos(x)) - \sin(x)(-\sin(x))}{(1+\cos(x))^2} = \frac{1+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2} = \frac{1}{1+\cos(x)}\,.$$

Alle Zusatzaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

Zusatzmaterial zur Analysis I - Übung zu Serie 10

Lokale Extrema, Mittelwertsatz, Konvexität, L'Hospitalsche Regeln (vgl. Forster I, §16)

- **Def.:** Die Funktion $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ besitzt in $x \in]a,b[$ ein **lokales Maximum**, wenn $f(y) \leq f(x)$ für alle y aus einer Umgebung U von x (U offenes Intervall, welches x enthält) gilt (analog: lokales Minimum) und entsprechend ein strenges lokales Maximum, falls anstelle von $\leq$ sogar $<$ gilt.
- **Satz 1 [Notwendiges Kriterium für lokale Extrema]:** Besitzt die Funktion $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ in $x \in]a,b[$ ein lokales Extremum und ist f in x differenzierbar, so gilt $f'(x) = 0$.
- **Satz 2** [**Satz von Rolle**]: Für $a < b$ sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine in $]a,b[$ differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b)$, welche stetig in den Randpunkten ist. Dann existiert ein $\xi \in]a,b[$ mit $f'(\xi) = 0$.
- **Corollar** [**Mittelwertsatz der Differentialrechnung**]: Für $a < b$ sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $]a,b[$ und stetig in den Randpunkten. Dann existiert ein $\xi \in]a,b[$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- **Satz 4 [Monotonie]:** Für $a < b$ sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $]a,b[$ und stetig am Rand.
  - Dann gilt: f ist in $[a,b]$ monoton fallend $\iff$ $\forall x \in]a,b[\, : \, f'(x) \leq 0$
  - Dann gilt: f ist in $[a,b]$ monoton wachsend $\iff$ $\forall x \in]a,b[\, : \, f'(x) \geq 0$
  - Weiter gilt $\forall x \in]a,b[\, : \, f'(x) > 0 \implies f$ streng monoton wachsend.
  - Ebenso gilt $\forall x \in]a,b[\, : \, f'(x) < 0 \implies f$ streng monoton fallend.
- **[Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema für mind. einmal differenzierbares f]:** Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es gebe ein $x \in]a,b[$ mit $f'(x) = 0$. Gilt
$$\Big(\exists \varepsilon > 0 \ \forall \xi, \eta \in]a,b[\ : \ \big(x - \varepsilon < \xi < x < \eta < x + \varepsilon \implies f'(\xi) \leq 0 \leq f'(\eta)\big)\Big)$$
bzw.
$$\Big(\exists \varepsilon > 0 \ \forall \xi, \eta \in]a,b[\ : \ \big(x - \varepsilon < \xi < x < \eta < x + \varepsilon \implies f'(\xi) \geq 0 \geq f'(\eta)\big)\Big)$$
so besitzt f in x ein lokales Minimum bzw. Maximum.
- **[Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema für mind. zweimal differenzierbares f]:** Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x \in]a,b[$ derart, dass $f'(x) = 0$ und f in x zweimal differenzierbar mit $f''(x) > 0$ (bzw. $f''(x) < 0$). Dann besitzt f in x ein strenges lokales Minimum (bzw. Maximum).
- **Definition:** Eine auf einem Intervall D definierte Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn die Ungleichung $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ für alle $x, y \in I$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt (und **konkav**, wenn die umgekehrte Ungleichung gilt).
- **Satz 6 [Hinreichendes und notwendiges Kriterium für Konvexität]:** Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f: D \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Dann gilt
$$f \text{ konvex} \iff \forall x \in D \ : \ f''(x) \geq 0 \, .$$
- **[Notwendiges Kriterium für Wendepunkte]:** Besitzt die Funktion $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ in $x \in]a,b[$ einen Wendepunkt und ist f in x zweimal differenzierbar, so gilt $f''(x) = 0$.

  Hinweis: Dabei sagen wir, f besitzt in x einen **Wendepunkt**, wenn die Funktion f links von x konkav und rechts von x konvex ist (oder umgekehrt).
- **Satz** [**Regel von L'Hospital**]: Für differenzierbare $f, g:]a,b[\to \mathbb{R}$ mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a,b[$ gilt bei $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \searrow a} g(x)$ oder $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \infty = \lim\limits_{x \searrow a} g(x)$ die Gleichung $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, falls der Grenzwert auf der rechten Seite (möglicherweise nur uneigentlich) existiert.

Zusatzaufgabe 10.1:

(a) Beweisen Sie, dass das logarithmische Ableiten $L : f \mapsto \frac{f'}{f}$ von Funktionen $f > 0$ die Rechenregeln $L(fg) = L(f) + L(g)$ und $L(f^a) = aL(f)$ erfüllt.

(b) Berechnen Sie die lokalen Extrema von $f(x) := \dfrac{\mathrm{e}^{x^2-2x-1}}{x^4}$ einerseits direkt und andererseits durch logarithmisches Ableiten.

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.1:

(a) Es gilt $L(f) = \frac{f'}{f} = (\ln \circ f)'$ und aus $\ln(f(x)g(x)) = \ln(f(x)) + \ln(g(x))$ und $\ln(f(x)^a) = a\ln(f(x))$ folgen daher die behaupteten Rechenregeln $L(fg) = (\ln \circ fg)' = (\ln \circ f)' + (\ln \circ g)' = L(f) + L(g)$ sowie $L(f^a) = (\ln \circ f^a)' = a(\ln \circ f)' = aL(f)$.

(b) Direkt ergibt sich $f'(x) = \mathrm{e}^{x^2-2x-1}\frac{x^4(2x-2)-4x^3}{x^8}$, und daher verschwindet f' in den Punkten mit $2x^2 - 2x - 4 = 0$, d.h. in $x = -1$ und $x = 2$. Die zweite Ableitung zu berechnen ist noch langwieriger, sie ergibt aber, dass beide Punkte lokale Minima sind. Logarithmisches Ableiten ist da wesentlich einfacher: Die Funktion ist offensichtlich in allen Punkten $x \neq 0$ definiert und positiv. Wegen $g(x) := \ln(f(x)) = -4\ln(x) + x^2 - 2x - 1$ und $g'(x) = -\frac{4}{x} + 2x - 2 = 0$, d.h. $x^2 - x - 2 = 0$, liefert logarithmisches Ableiten die Punkte $x = -1$ und $x = 2$ als Kandidaten für Extrema. Wegen $g''(x) = \frac{4}{x^2} + 2 > 0$ sind beides lokale Minima.

Zusatzaufgabe 10.2:

(a) Zeigen Sie, dass $f(t) := t^p$ für ganzzahlige $p \geq 1$ auf $]0, \infty[$ konvex ist, indem Sie einerseits die Definition und andererseits die zweite Ableitung verwenden.

(b) Zeigen Sie mittels MWS: Eine Funktion $f :]a, b[\ \to \ \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$ für alle x ist konstant.

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.2:

(a) Einerseits: Nach dem Mittelwertsatz existiert für beliebige $a, b \in]0, \infty[$ ein $\theta \in]0, 1[$, so dass dann

$$a^p - b^p = p(a+\theta(b-a))^{p-1}(a-b) = \underbrace{p\left((a+\theta(b-a))^{p-1} - b^{p-1}\right)(a-b)}_{\geq 0} + pb^{p-1}(a-b) \geq pb^{p-1}(a-b)$$

Für $s, t \in]0, \infty[$ und $\lambda \in]0, 1[$ erhalten wir mit den Ersetzungen $(a, b) = (s, (\lambda s + (1-\lambda)t))$ und $(a, b) = (t, (\lambda s + (1-\lambda)t))$ die beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} s^p - (\lambda s + (1-\lambda)t)^p &\geq p\,(\lambda s + (1-\lambda)t)^{p-1}\,(s - (\lambda s + (1-\lambda)t)) \\ &\geq p\,(\lambda s + (1-\lambda)t)^{p-1} \cdot (1-\lambda)(s-t) \qquad (3.1\text{a}) \\ t^p - (\lambda s + (1-\lambda)t)^p &\geq p\,(\lambda s + (1-\lambda)t)^{p-1}\,(t - (\lambda s + (1-\lambda)t)) \\ &\geq p\,(\lambda s + (1-\lambda)t)^{p-1} \cdot \lambda(t-s) \qquad (3.2\text{a}) \end{aligned}$$

Addition des λ-fachen von Ungleichung (3.1a) und $(1-\lambda)$-fachen von Ungleichung (3.2a) ergibt dann $\lambda s^p + (1-\lambda)t^p - (\lambda s + (1-\lambda)t)^p \geq 0$ und somit die Behauptung.

Andererseits: Für $p \geq 1$ gilt $f'(t) = pt^{p-1}$ und $f''(t) = p(p-1)t^{p-2}$. Also ist wegen $p \geq 1$ auch $f''(t) \geq 0$ (bei $p \geq 2$ sogar $f''(t) > 0$) für $t > 0$ und die Funktion f ist somit konvex auf $]0, \infty[$ (streng konvex bei $p \geq 2$).

(b) Sind $x, y \in]a, b[$ zwei beliebige Punkte (ohne Einschränkung sei $x < y$), dann erfüllt f auf $[x, y]$ die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes, so dass ein $\xi \in (x, y)$ mit $\frac{f(y)-f(x)}{x-y} = f'(\xi)$ existiert. Nun ist aber $f'(\xi) = 0$ und somit $f(y) = f(x)$. Also ist f konstant.

Zusatzaufgabe 10.3:

(a) Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$, indem Sie den Definitonsbereich, Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Bereiche von Monotonie und Bereiche von Konvexität/Konkavität ermitteln.
Welche Grenzwerte ergeben sich am Rand des Definitionsbereiches ?
Skizzieren Sie die Funktion f aufgrund der gewonnen Informationen.

(b) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{2x}(x^2 - 2x - 55), \quad x \in \mathbb{R}$.

(i) Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Funktion monoton fällt (bzw. wächst).

(ii) Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Funktion konkav (bzw. konvex) ist.

(iii) Bestimmen Sie gegebenenfalls die lokalen und globalen Maximal-/Minimalstellen und Maxima/Minima der Funktion sowie ihre Wendepunkte.

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.3:

(a) Der Definitionsbereich der Funktion f ist offensichtlich $]-\infty, 0[\, \cup\,]0, \infty[$. Da für x aus dem Definitionsbereich $x \neq 0$ gilt und $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} > 0$ ist, besitzt f keine Nullstelle. Für $x < 0$ ist $f(x) < 0$ und für $x > 0$ ist $f(x) > 0$, also ist f negativ auf $]0, -\infty[$ und positiv auf $]0, \infty[$.
Die Ableitung von f ist $f'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Ihre einzige Nullstelle ist $x = -1$ wegen $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} > 0$. Da $1 + \frac{1}{x} < 0$ zu $-1 < x < 0$ äquivalent ist, ist f auf $]-1, 0[$ streng monoton fallend und auf $]-\infty, -1[$ und $]0, \infty[$ streng monoton wachsend. Aufgrund dieses Monotonieverhaltens ergibt sich auch, dass in $x = -1$ ein lokales Maximum vorliegt.
Die zweite Ableitung von f ist $f''(x) = \frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$. Im Definitionsbereich hat sie keine Nullstelle, es gibt also keinen Wendepunkt. Jedoch ist $f''(x) < 0$ für $x < 0$ und $f''(x) > 0$ für $x > 0$, also ist f konkav auf $]-\infty, 0[$ und konvex auf $]0, \infty[$. Außerdem bestätigt $f''(-1) = -\mathrm{e}^{-1} < 0$ noch einmal, dass bei -1 ein lokales Maximum vorliegt. Als Grenzwerte berechnet man

$$\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = -\lim_{y\searrow 0} \frac{\mathrm{e}^y}{y} \overset{\mathrm{L'Hospital}}{=} -\lim_{y\searrow 0} \frac{\mathrm{e}^y}{1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\searrow 0} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y} = \infty$$

$$\lim_{x\nearrow 0} x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = -\lim_{y\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^y}{y} \overset{\mathrm{L'Hospital}}{=} -\lim_{y\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^y}{1} = -\infty, \qquad \lim_{x\searrow 0} x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y\mathrm{e}^y} = 0.$$

Insbesondere springt die Funktion f an der Definitionslücke $x = 0$ von $-\infty$ auf 0, und f hat kein globales Maximum oder Minimum.

(b) Zunächst ergeben sich für die erste und zweite Ableitung der Funktion

$$f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}(x-8)(x+7), \qquad f''(x) = 2\mathrm{e}^{2x}(2x^2 - 113).$$

(i) Es ist $2\mathrm{e}^{2x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und als nach oben geöffnete Parabel ist

$$(x-8)(x+7) \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x \in [-7, 8] \\ > 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus [-7, 8] \end{cases}.$$

Demnach ist f monoton fallend in $[-7, 8]$ (denn dort ist die Ableitung nichtpositiv) und monoton wachsend in $]-\infty, -7]$ bzw. in $[8, \infty[$ (denn dort ist die Ableitung nichtnegativ).

(ii) Wiederum ist $4\mathrm{e}^{2x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und als nach oben geöffnete Parabel ist

$$x^2 - \frac{113}{2} \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x \in \left[-\sqrt{\frac{113}{2}}, \sqrt{\frac{113}{2}}\,\right] \\ > 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\sqrt{\frac{113}{2}}, \sqrt{\frac{113}{2}}\,\right] \end{cases}.$$

Also ist f konkav in $\left[-\sqrt{\frac{113}{2}}, \sqrt{\frac{113}{2}}\,\right]$ (denn dort ist die zweite Ableitung nichtpositiv) und konvex in $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{113}{2}}\,\right]$ bzw. in $\left]\sqrt{\frac{113}{2}}, \infty\right[$ (denn dort ist die zweite Ableitung nichtnegativ).

(iii) Aus dem Monotonieverhalten der Funktion folgt:

- Bei $x = -7$ besitzt f ein lokales Maximum mit Wert $f(-7) = 8\mathrm{e}^{-14}$.
- Bei $x = 8$ besitzt f ein lokales Minimum mit Wert $f(8) = -7\mathrm{e}^{16}$.
- Weitere lokale Extremstellen besitzt die Funktion nicht, da alle Punkte des Definitionsintervalls innere Punkte sind und $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in \{-7, 8\}$.

Da $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 > -7\mathrm{e}^{16} = f(8)$, folgt:

- Die Funktion f besitzt in 8 ein globales Minimum mit Wert $f(8) = -7\mathrm{e}^{16}$.

- Die Funktion f besitzt keine weiteren globalen Extremstellen.

Aus dem „Wölbungsverhalten“ der Funktion folgt:

- Bei $-\sqrt{\frac{113}{2}}$ und $\sqrt{\frac{113}{2}}$ besitzt f Wendepunkte.
- Die Funktion besitzt keine weiteren Wendepunkte, da alle Punkte des Definitionsintervalls innere Punkte sind und $f''(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in \left\{-\sqrt{\frac{113}{2}}, \sqrt{\frac{113}{2}}\right\}$.

Zusatzaufgabe 10.4:

(a) Beweisen Sie die folgende **Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes**: Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar im offenen Intervall $]a,b[$ und stetig in den Randpunkten a, b, und gilt $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a,b[$, dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es gibt ein $\xi \in]a,b[$ mit $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

(b) Beweisen Sie mittels des verallgemeinerten Mittelwertsatzes die Regel von L'Hospital für den Fall $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \searrow a} g(x)$.

(c) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{x}$, $\lim\limits_{x \searrow 0} x^x$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.4:

(a) Wäre $g(b) = g(a)$, dann gäbe es ein $\xi \in (a,b)$ mit $g'(\xi) = 0$, Widerspruch.
Also ist die Funktion $F(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$ auf $[a,b]$ wohldefiniert, differenzierbar auf $]a,b[$ und stetig in den Randpunkten a, b mit $F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b)-g(a)) = f(a)$ und $F(a) = f(a)$. Wegen $F(a) = F(b)$ lässt sich der Satz von Rolle anwenden und liefert ein $\xi \in (a,b)$ mit $F'(\xi) = 0$, d.h. mit

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) = 0 \qquad \text{oder äquivalenterweise} \qquad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} .$$

(b) Wegen $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \searrow a} g(x)$ kann man f, g durch $f(a) := 0$, $g(a) := 0$, zu stetigen Funktionen auf $[a,b[$ fortsetzen. Wendet man bei $x \in]a,b[$ den verallgemeinerten Mittelwertsatz auf ein Intervall $[a,x]$ an, so ergibt sich die Existenz eines $\xi \in (a,x)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} .$$

Konvergiert in dieser Gleichung x von oben gegen a, dann konvergiert wegen $\xi \in (a,x)$ auch xi von oben gegen a, und man erhält

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \searrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

unter der Voraussetzung, dass der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

(c) (i) Nach der Regel von L'Hospital gilt
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^2) \cdot 2x}{1} = \frac{1 \cdot 0}{1} = 0 .$$

(ii) Wegen $x^x = \exp(x \ln(x))$ folgt aus
$$\lim_{x \searrow 0} x \ln(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \searrow 0}(-x) = 0$$
(wobei die Regel von L'Hospital angewendet wurde) aufgrund der Stetigkeit von $\exp$ auch
$$\lim_{x \searrow 0} x^x = \lim_{x \searrow 0} \exp(x \ln(x)) = \exp(\lim_{x \searrow 0} x \ln(x)) = \exp(0) = 1 .$$

(iii) Aus der Stetigkeit von $\cos(x)$, $\ln(x)$, $\tan(x)$ sowie mit $\cos(0) = 1$, $\ln(1) = 0$, $\tan(0) = 0$ und nach der Regel von L'Hospital ergibt sich
$$\lim_{n \to \infty} \left(n \ln\left(\cos\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} = -\lim_{m \to \infty} \tan\left(\tfrac{1}{n}\right) = 0 .$$

Da auch $\exp(x)$ stetig ist, folgt $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \exp\left(\lim\limits_{n \to \infty}\left(n \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\right) = \exp(0) = 1$.

Alle Zusatzaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

Zusatzmaterial zur Analysis I - Übung zu Serie 11

Treppenfunktionen, Riemann-Integral, Mittelwertsatz der Integralrechnung (vgl. §18)

- **Definition [Treppenfunktion]:** Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Gilt $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ für eine Menge $P := \{x_k \mid k = 0, \ldots, n\}$, so nennen wir P **Unterteilung** des Intervalls $[a, b]$. Eine Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, falls eine Unterteilung P existiert, so dass
$$\forall k = \{1, \ldots, n\} \; \exists c_k \in \mathbb{R} \; : \; \varphi\big|_{]x_{k-1}, x_k[} \equiv c_k \; . \tag{11.1}$$
Die Menge $\mathcal{T}[a, b] := \{\varphi : [a, b] \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ Treppenfunktion}\}$ ist ein linearer Unterraum des Vektorraumes aller Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, denn es gelten (i) $0 \in \mathcal{T}[a, b]$ sowie
(ii) $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{T}[a, b] \; : \; \varphi_1 + \varphi_2 \in \mathcal{T}[a, b]$ (iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \; \forall \varphi \in \mathcal{T}[a, b] \; : \; \lambda\varphi \in \mathcal{T}[a, b]$.

- **Definition [Integral einer Treppenfunktion]:** Besitzt $\varphi \in \mathcal{T}[a, b]$ eine Unterteilung P und gilt (11.1), so definieren wir
$$\int_a^b \varphi(x)dx \; := \; \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}) \; . \tag{11.2}$$
Bem.: Das Integral einer Treppenfunktion ist wohldefiniert, da unabhängig von der Wahl von P.

- **Satz 1 [Linearität, Monotonie des Integrals für Treppenfunktionen]:** Das Integral ist ein lineares, monotones Funktional auf dem Vektorraum $\mathcal{T}[a, b]$, d.h., es gelten
$$\text{(i)} \;\; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \; \forall \varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b] \; : \; \int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi)(x)dx \; = \; \lambda \int_a^b \varphi(x)dx + \mu \int_a^b \psi(x)dx \, ,$$
$$\text{(ii)} \;\; \forall \varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b] \; : \; \left(\varphi \le \psi \implies \int_a^b \varphi(x)dx \; \le \; \int_a^b \psi(x)dx \right) ,$$
wobei $\varphi \le \psi \; :\Longleftrightarrow \; (\forall x \in [a, b] \; : \; \varphi(x) \le \psi(x))$.

- **Definition [Oberintegral, Unterintegral]:** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann definieren wir
$$\int_a^{b^*} f(x)dx \; := \inf_{\substack{\varphi \in \mathcal{T}[a,b] \\ \varphi \ge f}} \int_a^b \varphi(x)dx \qquad \text{und} \qquad \int_{a_*}^b f(x)dx \; := \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{T}[a,b] \\ \varphi \le f}} \int_a^b \varphi(x)dx \tag{11.3}$$

- **Definition [Riemann-integrierbar]:** Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Riemann-integrierbar**, falls
$$\int_a^{b^*} f(x)dx \; = \; \int_{a_*}^b f(x)dx$$
gilt. In diesem Fall definieren wir das **Riemann-Integral** durch $\int_a^b f(x)dx \; := \; \int_a^{b^*} f(x)dx$.

- **Satz 2 [Einschließung zwischen Treppenfunktionen]:** Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$ mit $\varphi \le f \le \psi$ existieren, so dass
$$\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \; < \; \varepsilon \tag{11.4}$$

- **Satz 3/Satz 4:** Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig oder monoton, so ist f auch Riemann-integrierbar.

- **Satz 5 [Linearität und Monotonie]:** Die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen $\mathcal{R}[a,b]$ bilden einen linearen Unterraum aller Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Insbesondere ist das Riemann-Integral ein lineares, monotones Funktional auf dem Vektorraum $\mathcal{R}[a,b]$.

- **Def. [Positiv-/Negativteil]:** Für $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$ definieren wir $f_+, f_- : D \to \mathbb{R}$ durch

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f_-(x) := \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) \leq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{11.5}$$

  Aus der Definition folgen sofort $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.

- **Satz 6**: Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gelten:
  (a) Die Funktionen $f_+, f_-, |f|$ sind Riemann-integrierbar mit $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f|(x)dx$
  (b) Für jedes $p \in [1, \infty[$ ist $|f|^p : D \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.
  (c) Die Funktion $fg : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

- **Definition [Riemann-Summe]:** Eine Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ des Intervalls $[a,b]$ zusammen mit Stützstellen $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, \ldots, n$ nennen wir eine **Zerlegung**

$$\mathcal{Z} := \{(x_k)_{0 \leq k \leq n}, (\xi_k)_{1 \leq k \leq n}\} \tag{11.6}$$

  der **Feinheit** $\mu(\mathcal{Z}) := \max\limits_{k=1,\ldots,n} (x_k - x_{k-1})$. Die **Riemann-Summe** von f bzgl. $\mathcal{Z}$ ist dann

$$\mathcal{S}(\mathcal{Z}, f) \ := \ \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \ . \tag{11.7}$$

- **Satz 7 [Mittelwertsatz der Integralrechnung]:** Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $g \geq 0$. Dann existiert ein $\xi \in]a,b[$ mit $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$. Falls $g \equiv 1$, gilt $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

- **Satz 8:** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt $\lim\limits_{\mu(\mathcal{Z}) \to 0} \mathcal{S}(\mathcal{Z}, f) = \int_a^b f(x)dx$.

- **Satz 9:** Seien $a < b < c$. Dann ist $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ genau dann Riemann-integrierbar, wenn $f\big|_{[a,b]}$ und $f\big|_{[b,c]}$ Riemann-integrierbar sind. Dann gilt

$$\int_a^c f(x)dx \ = \int_a^b f(x)dx \ + \int_b^c f(x)dx \ . \tag{11.8}$$

- **Definition:** Wir setzen $\int_a^a f(x)dx \ := \ 0$ und $\int_a^b f(x)dx \ := \ -\int_b^a f(x)dx$, falls $b < a$.

Stammfunktion, Hauptsatz, Substitution, Partielle Integration, Partialbruchzerlegung (§19)

- **Definition [Stammfunktion]:** Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ Intervall) heißt **Stammfunktion/primitive Funktion** zu $f : I \to \mathbb{R}$ (auf I), falls $F' = f$ auf I gilt.

- **Satz 2:** Die Differenz $F - G$ zweier Stammfunktionen $F, G : I \to \mathbb{R}$ von $f : I \to \mathbb{R}$ ist konstant.

- **Hauptsatz [Differential- & Integralrechnung – Satz 1 u. 3]:** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $c \in I$.
  (1) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so besitzt f eine Stammfunktion, z.B., $F_c(x) := \int_c^x f(x)dx$.
  (2) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und F eine Stammfunktion von f auf I, so gilt

$$\forall a, b \in I \ : \ \int_a^b f(x)dx \ = \ F(x)\Big|_a^b \ := \ F(b) - F(a) \ . \tag{11.9}$$

  Bemerkung: Häufig schreibt man auch einfach nur $\int f(x)dx$ für eine Stammfunktion F von f.

- **Satz 4 [Substitutionsregel]:** Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\varphi([a,b]) \subset I$, so gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \ = \ \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \tag{11.10}$$

- **Satz 5 [Partielle Integration]:** Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt
$$\int_a^b f(x)g'(x)dx \;=\; f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{11.11}$$

- **Partialbruchzerlegung:** Sind $P(x), Q(x)$ normierte, teilerfremde Polynome mit $\deg(P) < \deg(Q)$, so ist $\frac{P(x)}{Q(x)}$ eindeutig in eine Summe von Partialbrüchen zerlegbar. Diese besitzen die Gestalt
$$\frac{A_1}{(x-\alpha)^1},\ \frac{A_2}{(x-\alpha)^2},\ \ldots,\ \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}, \quad \text{falls } \alpha \text{ eine } k\text{-fache Nullstelle von } Q(x) \text{ ist,}$$
$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^1},\ \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2},\ \ldots,\ \frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^m}, \quad \begin{array}{l}\text{falls } p^2-4q<0 \text{ und falls } (x^2+px+q)\\ \text{ein } m\text{-facher Teiler von } Q(x) \text{ ist,}\end{array}$$
wobei die $A_j, j = 1,\ldots,k$, bzw. $B_s, C_s, s = 1,\ldots,m$, jeweils reelle Konstanten sind.
Bemerkung: Die oben angeführten Konstanten erhalten wir, indem wir in Abhängigkeit der Nullstellen von $Q(x)$ den passenden Ansatz auswählen und einen Koeffizientenvergleich ausführen.

Zusatzaufgabe 11.1: Zeigen Sie:

(a) $\forall \varphi \in T[a,b] \;:\; \int_a^{b*} \varphi(x)dx \;=\; \int_{a*}^b \varphi(x)dx \;=\; \int_a^b \varphi(x)dx$

(b) $\forall f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt $:\; \int_{a*}^b f(x)dx \;\leq\; \int_a^{b*} f(x)dx$

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.1:

(a) Sei $\varphi \in T[a,b]$. Da sowohl $\varphi \in \{\psi \in T[a,b] \mid \psi \geq \varphi\}$ als auch $\varphi \in \{\psi \in T[a,b] \mid \psi \leq \varphi\}$ gelten, folgt aus der Monotonie und Linearität des Integrals für Treppenfunktionen (Satz 1, §18) und mit den Eigenschaften des Infimums bzw. Supremums
$$\left(\inf_{\substack{\psi\in T[a,b]\\ \psi\geq\varphi}} \int_a^b \psi(x)dx\right) - \int_a^b \varphi(x)dx = \inf_{\substack{\psi\in T[a,b]\\ \psi\geq\varphi}} \left(\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx\right) = \inf_{\substack{\psi\in T[a,b]\\ \psi\geq\varphi}} \int_a^b \underbrace{(\psi(x)-\varphi(x))}_{\geq 0 \in T[a,b]} dx = 0$$
als auch
$$\left(\sup_{\substack{\psi\in T[a,b]\\ \psi\leq\varphi}} \int_a^b \psi(x)dx\right) - \int_a^b \varphi(x)dx = \sup_{\substack{\psi\in T[a,b]\\ \psi\leq\varphi}} \left(\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx\right) = \sup_{\substack{\psi\in T[a,b]\\ \psi\leq\varphi}} \int_a^b \underbrace{(\psi(x)-\varphi(x))}_{\leq 0 \in T[a,b]} dx = 0$$
und somit $\int_a^{b*} \varphi(x)dx \;=\; \inf\limits_{\substack{\psi\in T[a,b]\\ \psi\geq\varphi}} \int_a^b \psi(x)dx \;=\; \int_a^b \varphi(x)dx \;=\; \sup\limits_{\substack{\psi\in T[a,b]\\ \psi\leq\varphi}} \int_a^b \psi(x)dx \;=\; \int_{a*}^b \varphi(x)dx$.

(b) Wiederum aufgrund der Monotonie des Integrals für Treppenfunktionen (Satz 1, §18) gilt für ein beliebiges, aber festes $\psi \in T[a,b]$ mit $\psi \leq f$ dann
$$\forall \varphi \in T[a,b] \;:\; \left(f \leq \varphi \;\Longrightarrow\; \int_a^b \psi(x)dx \;\leq\; \int_a^b \varphi(x)dx\right), \text{ also } \int_a^b \psi(x)dx \;\leq\; \inf_{\substack{\varphi\in T[a,b]\\ f\leq\varphi}} \int_a^b \varphi(x)dx\,.$$
Somit ist $\int_a^{b*} f(x)dx$ eine (nicht von der Wahl von ψ abhängige) obere Schranke für $\int_a^b \psi(x)dx$. Aufgrund der Beliebigkeit von $\psi \in T[a,b]$ mit $\psi \leq f$ erhalten wir somit
$$\forall \psi \in T[a,b] \;:\; \left(\psi \leq f \;\Longrightarrow\; \int_a^b \psi(x)dx \;\leq\; \int_a^{b*} f(x)dx\right), \text{ also } \sup_{\substack{\psi\in T[a,b]\\ \psi\leq f}} \int_a^b \psi(x)dx \;\leq\; \int_a^{b*} f(x)dx$$
und somit wie behauptet $\int_{a*}^b f(x)dx \;\leq \int_a^{b*} f(x)dx$.

Zusatzaufgabe 11.2:

(a) Sei $x > 1$ gegeben. Ermitteln Sie auf dem Intervall $[1, x]$ die Riemann-Summe von $f(t) := \frac{1}{t}$ zu der durch $x_k = x^{\frac{k}{n}}$, $k = 0, \ldots, n$, gegebenen Unterteilung und den Stützstellen $\xi_k = x_k$. Führen Sie anschließend den Grenzübergang $n \to \infty$ durch. Welchen Wert besitzt das Integral $\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$?

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und Satz 8 dann auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln(2)$.

(c) Berechnen Sie die Riemann-Summe für $f(x) = x^2$ bezüglich der äquidistanten Unterteilung $x_k := \frac{k}{n}$, $k = 0, \ldots, n$, von $[0, 1]$ und den durch das geometrische Mittel gegebenen Stützstellen $\xi_k := \sqrt{x_{k-1}x_k}$, $k = 0, \ldots, n$. Ermitteln Sie weiter durch Grenzübergang für $n \to \infty$ den Wert des entsprechenden Integrals.

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.2:

(a) Die Riemann-Summe von $\frac{1}{t}$ bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Z}_n = \left\{(x^{\frac{k}{n}})_{0\le k\le n}, (x^{\frac{k}{n}})_{1\le k\le n}\right\}$ ist

$$\mathcal{S}\left(\mathcal{Z}_n, \frac{1}{t}\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^{\frac{k}{n}}}\left(x^{\frac{k}{n}} - x^{\frac{(k-1)}{n}}\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n}(1 - x^{-\frac{1}{n}}) \;=\; n\left(1 - x^{-\frac{1}{n}}\right)$$

Mit den Regeln von L'Hôspital folgt nun nach Grenzübergang

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{S}\left(\mathcal{Z}_n, \frac{1}{t}\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{-\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} \;=\; \lim_{u\searrow 0} \frac{1 - x^{-u}}{u} \;=\; \lim_{u\searrow 0}(x^{-u}\ln(x)) \;=\; \ln(x),$$

so dass sich nach Satz 8 nun $\int_1^x \frac{1}{t}\, dt \;=\; \ln(x)$ ergibt.

(b) Mit der Zerlegungsfolge $\mathcal{Z}_n = \left((1 + \frac{k}{n})_{0\le k\le n}, (1 + \frac{k}{n})_{1\le k\le n}\right)$ des Intervalls $[1, 2]$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\ln(2) &\overset{(a)}{=} \int_1^2 \frac{1}{t}\, dt \overset{\text{Satz 8}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}\left(\mathcal{Z}_n, \frac{1}{t}\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}\left(\left(1 + \frac{k}{n}\right) - \left(1 + \frac{k-1}{n}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \;=\; \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n}\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}
\end{aligned}$$

(c) Die Funktion x^2 ist als stetige Funktion auf $[0, 1]$ Riemann-integrierbar. Die zu oben angegebener Zerlegung $\mathcal{Z}_n = ((x_k)_{0\le k\le n}, (\xi_k)_{1\le k\le n})$ gehörige Riemannsche Zwischensumme ist

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)k}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} - \frac{n(n+1)}{2n^3} = \frac{n^2-1}{3n^2} \quad ,$$

und für $n \to \infty$ ergibt sich als Grenzwert $\frac{1}{3}$, was nach Satz 8 der Wert des Integrals $\int_0^1 x^2\, dx$ ist.

Zusatzaufgabe 11.3: Zeigen Sie:

(a) Teil (2) des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

(b) Potenzen $|f|^p$, $1 \le p < \infty$, Riemann-integrierbarer Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind R-integrierbar.

(c) Produkte Riemann-integrierbarer Funktionen sind wieder Riemann-integrierbar.

(d) Es gibt eine Riemann-integrierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die keine Stammfunktion besitzt.

(e) Es gibt eine nicht Riemann-integrierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, welche eine Stammfunktion besitzt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.3:

(a) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit Stammfunktion F, dann ist f für jedes Intervall $[a, b] \subseteq I$ Riemann-integrierbar. Für eine beliebige Unterteilung P des Intervalls $[a, b]$ (Def. s.o.) liefert der Mittelwertsatz der Differentialrechnung Stützstellen $\xi_k \in]x_{k-1}, x_k[$, $k = 1, \ldots, n$, mit $\frac{F(x_k)-F(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}} = f(\xi_k)$, also je eine Zerlegung $\mathcal{Z}_n = (P, (\xi_k)_{1\le k\le n})$. Nach Satz 8, §18 folgt

$$F(b) - F(a) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\Big(F(x_k) - F(x_{k-1})\Big) \overset{\substack{\text{MWS der} \\ \text{Diff.rechnung}}}{=} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \overset{\mu(Z)\to 0}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\, dx\ .$$

(b) Aufgrund der Linearität (d.h. insbesondere, dass mit f auch λf Riemann-integrierbar ist) und da mit f auch f_+ und f_- Riemann-integrierbar sind (und somit auch $|f| = f_+ + f_-$), genügt es, die Riemann-Integrierbarkeit von $|f|^p$ für den Fall $0 \leq f \leq 1$ zu beweisen.

Aufgrund der Riemann-Intergrierbarkeit von f finden wir nach Satz 2, §18 zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen φ, ψ mit $0 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq 1$ und
$$0 \leq \int_a^b (\psi - \varphi)(x)dx \leq \frac{\varepsilon}{p} \quad .$$

Es sind weiterhin auch φ^p und ψ^p Treppenfunktionen, für die aufgrund der strengen Monotonie der Potenz ebenso $0 \leq \varphi^p \leq f^p \leq \psi^p \leq 1$ gelten. Wegen $\max\left\{|px^{p-1}| \;\middle|\; x \in [0,1]\right\} = p$ und $(x^p)' = px^{p-1}$ folgt mit Hilfe des Mittelwertsatzes (angewendet auf x^p eingeschränkt auf $[0,1]$)
$$0 \leq \psi^p - \varphi^p \leq p(\psi - \varphi) \implies 0 \leq \int_a^b (\psi^p - \varphi^p)(x)dx \leq p\int_a^b (\psi - \varphi)(x)dx \leq p \cdot \frac{\varepsilon}{p} \leq \varepsilon \ ,$$
also die Riemann-Integrierbarkeit von f.

(c) Wegen $|f|^2 = f^2$ und (b) sowie mit Hilfe der Linearität des Riemann-Integrals folgt für Riemann-integrierbare Funktionen f, g, dass $fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$ Riemann-integrierbar ist.

(d) Beispielsweise wird durch $f := \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$ eine Treppenfunktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert, welche nach ZA 11.1 Riemann-integrierbar ist mit $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = 0$, denn es gilt $f_{|]-1,0[} \equiv 0$ und $f_{|]-1,0[} \equiv 0$. Angenommen, es existiert eine Stammfunktion F, d.h. $\forall x \in [-1,1] : F'(x) = f(x)$. Dann gilt $F(x) = \int\limits_{-1}^{x} f(t)dt + C = C$ (Hauptsatz), aber $F'(x) \equiv 0 \neq f(x)$ bei $x = 0$. Widerspruch.

(e) Wegen $\lim\limits_{t \searrow 0} \frac{t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{t} = \lim\limits_{t \searrow 0} t \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) = 0$ (vgl. ZA 6.3 (a)) ist $F(t) = \begin{cases} t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$ eine Stammfunktion von $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ 2t\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) - \frac{2}{t}\cos\left(\frac{1}{t^2}\right), & t \in]0,1], \end{cases}$ (es gilt $F'(0) = 0$), jedoch ist f nicht Riemann-integrierbar, da f bei 0 unbeschränkt ist.

Zusatzaufgabe 11.4: Berechnen Sie die folgenen Integrale und führen Sie ggf. die Probe durch:

(a) $\int x\sin(x^2)\,dx$, (b) $\int \tan(x)\,dx$ (c) $\int x\sin(x)\,dx$, (d) $\int e^x \sin(x)\,dx$, (e) $\int (\sin(x))^2\,dx$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.4:

(a) Mit der Substitution $z = \varphi(x) = x^2$, d.h. $\frac{dz}{dx} = \varphi'(x) = 2x$, ergibt sich
$$\int x\sin(x^2)\,dx = \int \frac{\sin(z)}{2}dz = -\frac{\cos(z)}{2} + C = -\frac{\cos(x^2)}{2} + C. \quad \text{Probe}: \left(-\frac{\cos(x^2)}{2}\right)' = \frac{\sin(x^2)2x}{2} \quad .$$

(b) Wegen $(\ln \circ f)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ erhalten wir $\int \tan(x)\,dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\ln(\cos(x))$.

(c) Partielle Integration liefert $\int x\sin(x)\,dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = \sin(x) - x\cos(x) + C$.
Probe: $(\sin(x) - x\cos(x))' = \cos(x) - \cos(x) + x\sin(x) = x\sin(x)$.

(d) Zweimalige Anwendung von partieller Integration mit jeweils $u' = u = e^x$ und $v = \sin(x)$, $v' = \cos(x)$ bzw. $v = \cos(x)$, $v' = -\sin(x)$ ergibt
$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)\,dx = e^x\sin(x) - \left[e^x\cos(x) + \int e^x\sin(x)\,dx\right]$$
und nach Umstellen daher $\int e^x\sin(x)\,dx = \dfrac{e^x\,(\sin(x) - \cos(x))}{2}$.

Probe: $\left(\frac{e^x(\sin(x) - \cos(x))}{2}\right)' = \frac{e^x\left[(\sin(x)-\cos(x)) + (\cos(x)+\sin(x))\right]}{2} = e^x\sin(x)$.

(e) Partielle Integration mit $u'(x) = \sin(x), u(x) = -\cos(x)$ und $v(x) = \sin(x), v'(x) = \cos(x)$ liefert

$$\int (\sin(x))^2\,dx \;=\; -\sin(x)\cos(x) + \int (\cos(x))^2\,dx \;=\; -\sin(x)\cos(x) + \int (1-(\sin(x))^2)\,dx$$

Umstellen führt zu

$$\int (\sin(x))^2\,dx \;=\; \frac{x-\sin(x)\cos(x)}{2} + C$$

Probe: $\left(\frac{x-\sin(x)\cos(x)}{2}\right)' \;=\; \frac{1-(\cos(x))^2+(\sin(x))^2}{2} \;=\; \frac{(\sin(x))^2+(\sin(x))^2}{2} \;=\; (\sin(x))^2\,.$

Zusatzaufgabe 11.5:

(a) Integrieren Sie $\displaystyle\int \frac{Ex+F}{x^2+px+q}\,dx$, falls x^2+px+q keine reelle Nullstelle besitzt.

(b) Finden Sie eine Stammfunktion zu $\displaystyle\frac{1}{x^4-1}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.5:

(a) Da x^2+px+q keine reelle Nullstelle besitzt, ist $x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2+D$ mit $D := q-\frac{p^2}{4} > 0$. (Achtung: D ist hier genau das Negative der Diskriminanten $\frac{p^2}{4}-q$, welche im Falle von zwei echt komplexen Wurzeln ihrerseits negativ sein muss.) Insbesondere gilt dann $x^2+px+q > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen $Ex+F \;=\; Ex+\frac{pE}{2}-\frac{pE}{2}+F \;=\; \frac{E}{2}(2x+p)+\left(F-\frac{pE}{2}\right)$ können wir das Integral folgendermaßen aufspalten und berechnen

$$\begin{aligned}\int \frac{Ex+F}{x^2+px+q}\,dx \;&=\; \frac{E}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(F-\frac{pE}{2}\right)\int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+D}\,dx\\ &=\; \frac{E}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(F-\frac{pE}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{D}}\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}\right)+C,\end{aligned}$$

wobei wir für das erste Integral die Substitutionsmethode mit $t = \varphi(x) = x^2+px+q$ und folglich $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x) = 2x+p$ angewendet haben. Für das zweite Integral haben wir verwendet, dass

$$\frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+D} \;=\; \frac{1}{D}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}\right)^2+1} \qquad \text{und} \qquad \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \;=\; \arctan(x)$$

gilt, sowie die Substitutionsmethode mit $t = \varphi(x) = \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}$ und folglich $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{D}}$.

(b) Mit dem Ansatz $\quad r(x) \;=\; \displaystyle\frac{1}{x^4-1} \;=\; \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$ liefert Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4-1} \;&=\; \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1} \;=\; \frac{((A+B)x+(A-B))(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}\\ &=\; \frac{(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D)}{x^4-1},\end{aligned}$$

so dass sich aus dem Koeffizientenvergleich

$$(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D) \;=\; 1 \;=\; 0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x^1+1\cdot x^0$$

demnach das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\\ C\\ D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

ergibt, welches die Lösung $(A,B,C,D)^T = (\frac{1}{4},-\frac{1}{4},0,-\frac{1}{2})^T$ besitzt. Eine Stammfunktion ist dann

$$R(x) \;=\; \int\frac{dx}{x^4-1} \;=\; \frac{1}{4}\left(\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+1}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} \;=\; \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x + C.$$

Alle Zusatzaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

Zusatzmaterial zur Analysis I - Übung zu Serie 12

Integration rationaler Funktionen

- Sind $P(x), Q(x)$ normierte, teilerfremde Polynome mit $\deg(P) < \deg(Q)$, so ist die rationale Funktion $\frac{P(x)}{Q(x)}$ eindeutig in eine Summe von Partialbrüchen zerlegbar. Diese besitzen die Gestalt
$$\frac{A_1}{(x-\alpha)^1},\ \frac{A_2}{(x-\alpha)^2},\ \dots,\ \frac{A_k}{(x-\alpha)^k},\quad \text{falls } \alpha \text{ eine } k\text{-fache Nullstelle von } Q(x) \text{ ist,}$$
$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^1},\ \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2},\ \dots,\ \frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^m},\quad \text{falls } p^2-4q<0 \text{ und falls } (x^2+px+q) \text{ ein } m\text{-facher Teiler von } Q(x) \text{ ist,}$$
wobei die $A_j, j = 1,\dots,k,$ bzw. $B_s, C_s, s = 1,\dots,m,$ jeweils reelle Konstanten sind.
Bemerkung: Die oben angeführten Konstanten erhalten wir, indem wir in Abhängigkeit der Nullstellen von $Q(x)$ den passenden Ansatz auswählen und einen Koeffizientenvergleich ausführen.
- Die in der Partialbruchzerlegung auftretenden Summanden $\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$ und
$$\frac{Ex+F}{(x^2+px+q)^l},\quad x^2+px+q \text{ besitzt keine reelle Nullstelle,} \tag{12.1}$$
lassen sich relativ einfach integrieren (siehe Aufgabe 11.3 für den schwierigsten Fall (12.1) mit $l \geq 2$).
- Ist $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion, so heißt $x \mapsto R(\mathrm{e}^{ax})$ eine rationale Funktion in Exponentialtermen. Die Integration solcher Funktionen lässt sich durch die Substitution $t := \mathrm{e}^{ax}$ auf die Integration rationaler Funktionen zurückführen.
- Ist $R(x,y)$ eine rationale Funktion in zwei Variablen, so heißt $x \mapsto R(\sin(x), \cos(x))$ eine rationale Funktion in Sinus und Cosinus. Die Integration solcher Funktionen lässt sich durch die Substitution $t := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ auf die Integration rationaler Funktionen zurückführen.
- Ist $R(x,y)$ eine rationale Funktion in zwei Variablen, so heißt $x \mapsto R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})$ eine rationale Funktion in x und einer Wurzel aus dem Quadrat von x. Durch quadratische Ergänzung können wir die Integration solcher Funktionen auf die Integration von $x \mapsto R(x, \sqrt{x^2+1})$, $x \mapsto R(x, \sqrt{x^2-1})$ bzw. von $x \mapsto R(x, \sqrt{1-x^2})$ zurückführen, deren Integration wiederum durch Substitution von $x = \sinh(t)$, $x = \pm\cosh(t)$ bzw. $x = \pm\cos(x)$ auf die Integration rationaler Funktionen in Exponentialtermen bzw. in Sinus und Cosinus zurückgeführt werden kann.

Uneigentliche Integrale

- **Definition [Uneigentliches Integral]:**
  (a) Ist die Funktion $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ für jedes $u > a$ über das Intervall $[a, u]$ Riemann-integrierbar und existiert der Grenzwert
  $$c := \lim_{u\to\infty} \int_a^u f(x)\,dx \qquad (c \in \mathbb{R}),$$
  so heißt der Grenzwert das **uneigentliche Riemann-Integral** und wir bezeichnen es mit $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$.
  (b) Ist die Funktion $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ über jedes Intervall $[u,b]$ mit $a < u < b$ Riemann-integrierbar und existiert der Grenzwert
  $$c := \lim_{u \searrow a} \int_u^b f(t)dt \qquad (c \in \mathbb{R}),$$
  sprechen wir auch hier vom **uneigentlichen** Riemann**-Integral** und schreiben auch $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.
  (c) Analog sind uneigentliche Integrale für auf $]-\infty, b]$ und $[a, b[$ gegebene Funktionen definiert. Den Fall einer auf $]a, b[$ definierten Funktion führt man durch Wahl eines $c \in]a, b[$ auf die Fälle $]a, c]$ und $[c, b[$ zurück.
- **Satz 1 [Integralvergleichskriterium für Reihen]**: Sei $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$ eine monoton fallende Funktion. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ konvergiert.
- Eine mittels eines uneigentlichen Integrals definierte spezielle Funktion ist die **Gamma-Funktion** $\Gamma :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$, sie erfüllt $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
- **Satz 2 [Funktionalgleichung von $\Gamma(x)$]:**
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\Gamma(n+1) = n!$ und für alle $x > 0$ gilt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Zusatzaufgabe 12.1: Bestimmen Sie Stammfunktionen von (a) $\dfrac{x-4}{x^2-5x+6}$ und (b) $\dfrac{1}{x^3-x}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.1:

(a) Für die Funktion $\dfrac{x-4}{x^2-5x+6}$ liefert der Ansatz der Partialbruchzerlegung $\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3}$ den Koeffizientenvergleich $A(x-3) + B(x-2) = x-4$ mit dem linearen Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A+B &=& 1, \\ -3A-2B &=& -4 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad A = 2,\ B = -1.$$

Eine Stammfunktion ist $\displaystyle\int \frac{x-4}{x^2-5x+6} = 2\int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x-3} = 2\ln|x-2| - \ln|x-3| = \ln\left|\frac{(x-2)^2}{x-3}\right|.$

(b) Da $x^3 - x = x(x+1)(x-1)$ die einfachen Nullstellen $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$ besitzt, ergibt sich für die rationale Funktion

$$r_1 := \frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x+1)(x-1)}$$

der Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0,1,-1\}$ und für die Partialbruchzerlegung der Ansatz $r_1 = \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x-1} + \dfrac{a_3}{x+1}$.
Die Koeffizienten können entweder mittels Koeffizientenvergleich oder einfacher mit der Grenzwertmethode $a_i = \lim\limits_{x\to x_i}(x-x_i)r_1$, $i = 1,2,3$ berechnet werden:

$$a_1 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(x+1)(x-1)} = -1\,, \quad a_2 = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{2}\,, \quad a_3 = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{2}\,.$$

Somit ergibt sich die Partialbruchzerlegung

$$r_1 = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)$$

mit einer Stammfunktion $R_1 = -\ln(x) + \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) + \ln(x-1)\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$.

Probe: $$\left(\ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)\right)' = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}x - \sqrt{x^2-1}}{x^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\frac{x^2-(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2} = \frac{1}{x^3-x}.$$

Zusatzaufgabe 12.2:

(a) Sei $R(t,s)$ eine rationale Funktion zweier Variablen. Führen Sie durch die Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$ für $-\pi < x < \pi$ das Integral $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ auf das Integral einer rationalen Funktion von t zurück.

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktionen von $f(x) := \frac{1}{4+\cos(x)}$.

(c) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$ mit Hilfe der **ersten Eulerschen Substitution**

$$\sqrt{ax^2+bx+c} =: t - \sqrt{a}x, \quad (a > 0)\,.$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.2:

(a) Die Substitution liefert zunächst $x = 2\arctan t$ sowie $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$ (siehe Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion). Mit $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ und wegen $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ sowie

$$(\cos\alpha)^2 = \frac{(\cos\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2} = \frac{1}{1+\frac{(\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2}} = \frac{1}{1+(\tan\alpha)^2}$$

folgt weiter

$$\cos x = 2\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{2t}{1+t^2}$$

und somit

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Die rechte Seite ist ein Integral einer rationalen Funktion, welches wir bereits berechnen können.

(b) Nach Aufgabenteil (b) erhalten wir mit der Substitution $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $dx = \frac{2}{t^2+1}$ und $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ somit

$$\int \frac{1}{4+\cos(x)}dx \overset{t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \int \frac{2}{3t^2+5}dt = \frac{2}{5}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{3}{5}}t\right)^2+1}dt = \frac{2}{\sqrt{15}}\arctan\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}t\right) = \frac{2}{\sqrt{15}}\arctan\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right).$$

Probe: $$\left(\frac{2}{\sqrt{15}}\arctan\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\right)' = \frac{2}{\sqrt{15}}\frac{1}{\frac{3}{5}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2+1}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\frac{1}{2\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} = \frac{1}{3\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2+5\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} = \frac{1}{3+(1+\cos(x))}.$$

(c) Die erste EULERsche Substitution mit $a = 1$ und $b = -1$ führt nach Quadrieren und Umstellen zu

$$-x + 1 = t^2 - 2tx, \; x = \frac{t^2 - 1}{2t - 1}, \; \frac{dx}{dt} = 2\frac{t^2 - t + 1}{(2t - 1)^2}.$$

Demzufolge ist das Integral $\quad I = \displaystyle\int \frac{2t^2 - 2t + 2}{t(2t - 1)^2}\, dt \quad$ zu berechnen.

1. Polynomdivision entfällt, weil der Grad des Zählerpolynoms bereits kleiner als der Grad des Nennerpolynoms ist. Wir erweitern den Bruch derart, dass der höchste Koeffizient im Nennerpolynom 1 wird:
$$I = \int \frac{\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}}{t(t - \frac{1}{2})^2}\, dt.$$
Desweiteren stelle man sicher, dass Zähler und Nenner im Integranden teilerfremd sind, indem die Nullstellen des Nenners in den Zähler eingesetzt werden:
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \neq 0, \quad \lim_{x \to \frac{1}{2}} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8} \neq 0. \tag{12.2}$$
Offenbar ergibt sich jeweils eine Zahl $\neq 0$, demnach sind Zählerpolynom und Nennerpolynom teilerfremd.
2. Die Zerlegung des Nennerpolynoms ist bereits gegeben und lautet $t(t - \frac{1}{2})^2$.
3. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet für diesen Fall
$$\frac{\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}}{t(t - \frac{1}{2})^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t - \frac{1}{2}} + \frac{C}{(t - \frac{1}{2})^2}$$
Für die Bestimmung der Koeffizienten haben wir hier zwei Möglichkeiten:
(A) Koeffizientenvergleich (analog wie bei Zusatzaufgabe 11.1(a)).
(B) Aufgrund der Teilerfremdheit (12.2) können wir die Grenzwertmethode anwenden. Wegen
$$A = \lim_{t \to 0} t \frac{\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}}{t(t - \frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = 2, \qquad C = \lim_{t \to \frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}}{t(t - \frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$
existiert eine eindeutige Partialbruchzerlegung der Form
$$\frac{\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}}{t(t - \frac{1}{2})^2} = \frac{2}{t} + \frac{B}{t - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{4}}{(t - \frac{1}{2})^2}.$$
Da diese Gleichung für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$ gelten soll, wählen wir ein t, für das beide Seiten einfach zu berechnen ist, z.B. $t = 1$, für das wir die Bedingung $2 = 2 + 2B + 3$, also $B = -\frac{3}{2}$ erhalten.
Eingesetzt liefert dies nun als Ergebnis der Partialbruchzerlegung $\displaystyle\frac{\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}}{t(t - \frac{1}{2})^2} = \frac{2}{t} - \frac{\frac{3}{2}}{t - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{4}}{(t - \frac{1}{2})^2}$.
4. Integration liefert nun
$$I = \int \frac{\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}}{t(t - \frac{1}{2})^2}\, dt = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{\frac{3}{2}}{t - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{4}}{(t - \frac{1}{2})^2} \right) dt = 2 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln \left| t - \frac{1}{2} \right| - \frac{3}{4} \frac{1}{t - \frac{1}{2}} + C$$

Nach Rücksubstitution erhalten wir schließlich als Endergebnis

$$I = 2 \ln |x + \sqrt{x^2 - x + 1}| - \frac{3}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - x + 1} - \frac{1}{2} \right| - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2x + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1} + C.$$

Zusatzaufgabe 12.3:

(a) Bestimmen Sie den Wert der uneigentlichen Integrale $\int\limits_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ und $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$.

(b) Beweisen Sie das folgende Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale: Sind die Funktionen $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ für jedes $a < u < b$ über das Intervall $[a, u]$ RIEMANN-integrierbar, gilt $|f| \leq g$ und existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b g(x)\, dx$, so existiert auch das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\, dx$.

(c) Warum konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ für $k > 1$? (d) Wieso ist die Gamma-Funktion wohldefiniert?

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.3:

(a) Nach Definition folgt einerseits $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{s \searrow 0} \int_s^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{s \searrow 0} \left(2\sqrt{x} \Big|_{x=s}^{x=9} \right) = \lim_{s \searrow 0} 2(3 - \sqrt{s}) = 6$

und andererseits $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{s \to \infty} \int_1^s \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{s \to \infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_{x=1}^{x=s} \right) = \lim_{s \to \infty} \left(1 - \frac{1}{s} \right) = 1$.

(b) Zunächst gilt mit der Monotonie des Riemann-Integrals für beliebige $a < \alpha < \beta < b$ wegen $|f| \le g$ auch

$$0 \;\le\; \left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \;\le\; \int_\alpha^\beta |f(x)|dx \;\le\; \int_\alpha^\beta g(x)dx \;=\; \left|\int_\alpha^\beta g(x)dx\right| .$$

Für beliebige $u, v \in [a, b[$ mit $F(u) := \int_a^u f(x)\,dx$ und $G(u) := \int_a^u g(x)\,dx$ folgt dann

$$|F(u) - F(v)| \;\le\; |G(u) - G(v)| \;. \tag{12.3}$$

Da das uneigentliche Integral $\int_a^b g(x)\,dx$ genau dann existiert mit Grenzwert G, wenn für jede Folge u_n aus $[a, b[$ mit $u_n \to b$ auch $\lim\limits_{n\to\infty} G(u_n) = G$ gilt, und da für jede Cauchy-Folge u_n aus $[a, b[$ mit $u_n \to b$ wegen (12.3) dann auch $F(u_n)$ eine Cauchy-Folge ist, existiert aufgrund des Vollständigkeitsaxioms dann auch der Grenzwert $F := \lim\limits_{n\to\infty} F(u_n)$.

(c) Da $f(x) = \frac{1}{x^k}$ auf $[1, \infty[$ positiv und dort wegen $f'(x) = -k\frac{1}{x^{k+1}} < 0$ auch monoton fallend ist, konvergiert sie nach dem Integral-Vergleichskriterium genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^k}dx$ existiert. Dies ist aber der Fall wegen

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^k}dx \;=\; \frac{1}{k-1}\lim_{R\to\infty}\left(1 - \frac{1}{R^{k-1}}\right) \;=\; \frac{1}{k-1} \;.$$

(d) Sei $x > 0$ beliebig, aber fest. Da für alle $t \in]0, 1]$ die Ungleichung $0 < t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \le t^{x-1}$ erfüllt ist und da das Integral $\int_0^1 t^{x-1}dt$ für $x > 0$ existiert, existiert nach dem Majorantenkriterium auch das uneigentliche Integral $\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$. Desweiteren gibt es genau ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \ge x - 1 > n - 1$ und somit existiert wegen

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}} \;\le\; \lim_{t\to\infty}\frac{t^n}{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{nt^{n-1}}{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \;\ldots\; \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{n!}{\frac{1}{2^n}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}} \;=\; 0$$

eine (von x abhängige Konstante) $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $t \in [1, \infty[$ die Ungleichung $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \;\le\; c\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ erfüllt wird. Wegen $\int_1^\infty c\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}dt = \frac{2c}{\sqrt{e}}$ existiert dann nach dem Majorantenkriterium auch $\int_1^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$.

Zusatzaufgabe 12.4: Zeigen Sie

(a) Das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ konvergiert, jedoch divergiert $\int\limits_0^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,dx$.

(b) Aus der Existenz des uneigentlichen Integrals $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ folgt nicht $\lim\limits_{x\nearrow\infty} f(x) = 0$. Hinweis: $f(x) := \cos(x^2)$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.4:

(a) Setzt man $f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ für $x > 0$ und $f(0) := 1$, so ist f eine stetige Funktion auf $[0, \infty)$, also existiert $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ und nur die obere Grenze ∞ des Integrals ist kritisch. Es gilt

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \lim_{R\nearrow\infty}\left(\left.\frac{-\cos(x)}{x}\right|_1^R - \int_1^R \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\right) ,$$

und da $\lim\limits_{R\nearrow\infty}\frac{-\cos(R)}{R} = 0$ gilt sowie das Integral auf der rechten Seite wegen $\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ die konvergente Majorante $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$ besitzt, konvergiert auch $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$. Jedoch gilt

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,dx \;\ge\; \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin(x)|\,dx \;=\; \frac{2}{(k+1)\pi}$$

und somit $\int_0^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,dx \ge \sum_{n=0}^k \frac{2}{(n+1)\pi}$. Da die harmonische Reihe auf der rechten Seite für $k \nearrow \infty$ divergiert, ist also auch das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,dx = \infty$ divergent.

(b) Mittels der Substitution $y = x^2$, d.h. $dy = 2x\,dx$ oder $dx = \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy$, ergibt sich

$$\int_1^\infty \cos(x^2)\,dx = \int_1^\infty \frac{\cos(y)}{2\sqrt{y}}\,dy = \lim_{R\nearrow\infty}\left(\left.\frac{\sin(y)}{2\sqrt{y}}\right|_1^R + \frac{1}{4}\int_1^R \frac{\sin(y)}{y^{3/2}}\,dy\right) .$$

Da $\lim\limits_{R\nearrow\infty}\dfrac{\sin(R)}{2\sqrt{R}} = 0$ gilt und das Integral auf der rechten Seite wegen $\left|\frac{\sin(y)}{y^{3/2}}\right| \le \frac{1}{y^{3/2}}$ durch das konvergente uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{y^{3/2}}\,dy = \frac{2}{3}$$

majorisiert wird, existiert somit auch das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \cos(x^2)\,dx$.
Aber es gilt nicht $\lim\limits_{x\nearrow\infty}\cos(x^2) = 0$, da cos zwischen -1 und 1 hin- und herschwankt.

Alle Zusatzaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

Zusatzmaterial zur Analysis I - Übung zu Serie 13

Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen, Potenzreihen

- **Definition:** Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ heißt
  - **punktweise konvergent gegen** f, wenn für jedes $x \in D$ stets $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ gilt.

    Äquivalent: $\forall x \in D \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \; : \; \Big(n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\Big)$
  - **gleichmäßig konvergent gegen** f, falls $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

    Äquivalent: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall x \in D \; \forall n \in \mathbb{N} \; : \; \Big(n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\Big)$

  Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ bezüglich einer Folge von Funktionen $f_k : D \to \mathbb{R}$ heißt **punktweise** bzw. **gleichmäßig konvergent**, wenn die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummenfunktionen $S_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$ punktweise bzw. gleichmäßig auf D konvergiert.

- **Satz [§21, Satz 1 u. 4]:** Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen f_n auf D, die gleichmäßig gegen ein f konvergiert, dann ist die Grenzfunktion f auch stetig. Bei $D = [a, b]$ gilt darüber hinaus
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,.$$

- **Satz [§21, Satz 5]:** Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen f_n auf D, die punktweise gegen f konvergiert und deren Ableitungen gleichmäßig auf D konvergieren, dann ist die Grenzfunktion f auch stetig differenzierbar, und für jedes $x \in D$ gilt dann $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$.

- **Satz [§21, Satz 2, Konvergenzkriterium von Weierstraß]:** Sind $f_n : K \to \mathbb{C}$ Funktionen mit
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,K} < \infty \qquad \Big(\text{Dabei ist } \|g\|_{\infty,K} := \sup_{x\in K} |g(x)| \text{ für ein } g : K \to \mathbb{C}\Big).$$
  Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ absolut und gleichmäßig auf K gegen eine Funktion $f : K \to \mathbb{C}$.

- **Definition [Potenzreihe]:** Der punktweise Grenzwert der Polynomfunktionen $S_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $S_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} c_k(z-a)^k$ wird **Potenzreihe** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ **mit Koeffizienten** $c_k \in \mathbb{C}$ **und Entwicklungspunkt** $a \in \mathbb{C}$ genannt.

- **Satz [§21, Satz 3]:** Konvergiert eine Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ für ein $z_1 \neq a$, dann konvergiert für jedes $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < |z_1 - a|$ sowohl die Potenzreihe selbst als auch die gliedweise differenzierte Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kc_k(z-a)^{k-1}$ absolut und gleichmäßig auf der abgeschlossenen Kugel
$$\overline{B_r(a)} := \{z \in \mathbb{C} \; : \; |z - a| \leq r\}\,.$$

- **Definition [Konvergenzradius]:** Zu einer Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ heißt die durch
$$R := \sup_{z\in\mathbb{C}} \left\{ |z - a| \; : \; \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k \text{ konvergiert} \right\}$$
  definierte Zahl $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ der **Konvergenzradius** der Potenzreihe.

  Bemerkungen:

  (a) Satz 3 besagt, dass die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| < R$ konvergiert und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - a| > R$ divergiert. Über die Konvergenz auf dem Kreisrand $|z - a| = R$ existiert keine allgemeingültige Konvergenzaussage. Die Potenzreihe ist jedoch im Inneren von $\overline{B_r(a)}$ stetig.

  (b) Bestimmen können wir R durch $\quad R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$ \quad (**Formel von Hadamard**) bzw. $\quad R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ (falls existiert).

(c) Ableitungen bzw. Integrale reellwertiger Potenzreihen können auf dem jeweiligen Konvergenzintervall $]x_0 - R, x_0 + R[$ durch Ableiten bzw. Integrieren der einzelnen Monome ermittelt werden:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}\,, \qquad \int \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$$

Taylor-Formel, Taylor-Reihen, Taylor-Polynome

- **Satz [Taylor-Formel – vgl. Satz 1, §22 Forster]:** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $x, x_0 \in I$ die TAYLORsche Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x) \quad \text{mit dem Restglied} \quad R_{n+1}(x) := \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

oder
$$R_{n+1}(x) := \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))\, d\theta.$$

Definition: Es heißt $\boxed{T_{f,x_0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$ das n-te **Taylorpolynom** von f bei x_0.

- **Satz [Lagrange'sche Form des Restgliedes – vgl. Satz 2, §22]:** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Für $n \geq 0$ existiere die n-te Ableitung $f^{(n)} : [a,b] \to \mathbb{R}$, welche stetig sei. Weiterhin existiere die $(n+1)$-te Ableitung $f^{(n+1)} :]a,b[\to \mathbb{R}$ im Inneren. Dann existiert für beliebige $x, x_0 \in [a,b]$ mit $x \neq x_0$ ein ξ zwischen x und x_0 (oder alternativ ein $\theta \in]0,1[$), so dass die TAYLORsche Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x) \quad \text{mit dem Restglied} \quad R_{n+1}(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

oder $R_{n+1}(x) := \dfrac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ gilt. R_{n+1} heißt **Lagrange'sches Restglied**.

- **Definition [Taylor-Reihe]:** Ist eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar und $x_0 \in [a,b]$, dann heißt die Potenzreihe

$$T_{f,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

die **Taylor-Reihe** oder **Taylor-Entwicklung** von f um den **Entwicklungspunkt** x_0. Der Konvergenzradius muss nicht > 0 sein und auf dem Konvergenzintervall muss T_{f,x_0} auch nicht unbedingt gegen f konvergieren, sondern tut dies nur dann, wenn das Restglied für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

- **Satz [Abelscher Grenzwertsatz - §22, Satz 5]:** Ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine reelle Zahlenfolge und konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, dann konvergiert die Potenzreihe $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ gleichmäßig auf $[0,1]$.

- **Satz [§22, Sätze 4,6,7]:**
  - Für alle $|x| < 1$ (und sogar $x = 1$) gilt $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$. (**Logarithmus-Reihe**)
  - Für alle $|x| \leq 1$ gilt $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. (**Arcus-Tangens-Reihe**)
  - Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Für alle $|x| < 1$ gilt dann $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$. (**Binomische Reihe**)

Fourier-Reihen

- Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) heißt P**-periodisch** für eine Periode $P > 0$, wenn $f(x+P) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

- Eine 2π-periodische Funktion der Form $\boxed{\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))}$ heißt **(reelles) trigonometrisches Polynom n-ten Grades**. Mit den Darstellungen $\cos(x) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$ und $\sin(x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$ können solche trigonometrischen Polynome wegen

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)) \;=\; \frac{a_0}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}0x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-\mathrm{i}b_k}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k+\mathrm{i}b_k}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$$

auch in komplexer Form geschrieben werden als

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \qquad \text{mit} \qquad c_k=\frac{1}{2}(a_k-\mathrm{i}b_k)\ ,\ \ c_{-k}=\frac{1}{2}(a_k+\mathrm{i}b_k) \qquad \text{für} \qquad k=0,1,2,\ldots,n\ .$$

- Seien $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ reelle Funktionen. Dann heißt die komplexwertige Funktion $\varphi:u+\mathrm{i}v:[a,b]\to\mathbb{C}$ **Riemann-integrierbar**, falls u und v Riemann-integrierbar sind. Man setzt dann

$$\int_a^b \varphi(x)dx \;:=\; \int_a^b u(x)dx+\mathrm{i}\int_a^b v(x)dx\ .$$

- Für 2π-periodische Funktionen f,g, die über $[0,2\pi]$ (oder ein anderes Intervall der Länge 2π) Riemann-integrierbar sind, kann man durch

$$\langle f,g\rangle \;:=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(x)}g(x)\,dx \tag{13.1}$$

ein Skalarprodukt definieren. Dieses induziert eine (Halb-)Norm $\|f\|_2:=\sqrt{\langle f,f\rangle}$.

- Zwei Funktionen f,g heißen **orthogonal** zueinander bezüglich (13.1), falls $\langle f,g\rangle=0$ gilt.
- Eine Familie f_k von Funktionen heißt **Orthonormalsystem** bzgl. (13.1), falls für alle $k,l\in\mathbb{N}$ gilt

$$\langle f_k,f_l\rangle \;=\; \begin{cases}0, & k\neq l\\ 1, & k=l\end{cases} \tag{13.2}$$

- Das trigonometrische Polynom n-ten Grades, welches unter allen trigonometrischen Polynomen n-ten Grades den geringsten Abstand zu f bezüglich der (Halb-)Norm $\|\cdot\|_2$ besitzt, ist durch

$$S_nf(x):=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)) \qquad \text{mit} \qquad \begin{cases} a_k & := \ \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\ dx\ ,\\ b_k & := \ \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\ dx\end{cases}$$

gegeben und heißt das **(reelle) Fourier-Polynom n-ten Grades zu** f. Man nennt a_k und b_k die **(reellen) Fourier-Koeffizienten von** f und die Folge der Partialsummen $(S_nf(x))_{n=0}^{\infty}$ **(reelle) Fourier-Reihe von** f.

- In der komplexen Form ist das **(komplexe) Fourier-Polynom n-ten Grades zu** f durch

$$S_nf(x) \;:=\; \sum_{k=-n}^{n}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \qquad \text{mit} \qquad c_k \;:=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\ dx \;=\; \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},f(x)\rangle$$

gegeben, wobei c_k die **(komplexen) Fourier-Koeffizienten von** f und die Folge der Partialsummen $(S_nf(x))_{n=0}^{\infty}$ **(komplexe) Fourier-Reihe von** f genannt wird.

Konvergenz(begriffe) für Fourier-Reihen

- **Satz [Hilfssatz 1, §23]:** Sei $n\in\mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt für das n-te (komplexe) Fourier-Polynom einer über $[0,2\pi]$ Riemann-integrierbaren 2π-periodischen Funktion f die Gleichung

$$\|f-S_nf\|_2^2 \;=\; \|f\|_2^2-\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2 \tag{13.3}$$

- **Satz [Besselsche Ungleichung - Satz 1, §23]:** Für beliebige über $[0,2\pi]$ Riemann-integrierbare 2π-periodische Funktionen f und $n\in\mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_{k=-n}^{n}|c_k|^2\le\langle f,f\rangle$.
- **Satz [Parsevalsche Gleichung - Satz 2, §23]:** Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine über $[0,2\pi]$ Riemann-integrierbare 2π-periodische Funktion, dann gilt $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 \;=\; \langle f,f\rangle$.

Diese Identität nennt man (komplexe) Parsevalsche Gleichung oder **Vollständigkeitsrelation**. Die reelle Variante der Vollständigkeitsrelation lautet

$$\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \tag{13.4}$$

- Für über $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbare 2π-periodische Funktionen f konvergiert die FOURIER-Reihe

$$Sf(x) \;:=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

bezüglich der von (13.1) induzierten (Halb-)Norm $\|.\|_2$ gegen f, d.h. es gilt $\|f - S_n f\|_2 \to 0$ für $n \to \infty$. Man sagt, Sf **konvergiert im quadratischen Mittel gegen** f.

- **Satz [Dirichlet]:** Ist f stückweise stetig differenzierbar, dann konvergiert Sf punktweise in allen Stetigkeitsstellen x von f gegen $f(x)$, und in allen Sprungstellen x gegen den Mittelwert $\frac{f(x-)+f(x+)}{2}$ aus links- und rechtsseitigem Grenzwert bei x.

- **Satz [Satz 3, §23]:** Ist f stetig und stückweise stetig differenzierbar, dann konvergiert Sf sogar gleichmäßig gegen f.

Zusatzaufgabe 13.1:

(a) Konvergiert die Folge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ der durch $f_n(x) \;:=\; \begin{cases} 0\,, & x \;<\; 1-\frac{2}{n} \\ n(x-1)+2\,, & 1-\frac{2}{n} \;\le\; x \;\le\; 1-\frac{1}{n} \\ 1\,, & 1-\frac{1}{n} \;<\; x \end{cases}$ definierten Funktionen punktweise auf $[0,1]$? Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[0,1]$?

(b) Konvergiert die durch $g_n(x) \;:=\; \mathrm{e}^{-\frac{n}{x}}$ definierte Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf $]0,\infty[$?

(c) Sei $b > 0$. Konvergiert die in (b) definierte Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $]0,b]$? Und auf $]0,\infty[$?

(d) Zeigen Sie, dass die Folge der Funktionen $f_n(x) := \frac{x}{n^2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}$ auf $[0,\infty[$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, aber für das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f_n(x)\,dx = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist.

(e) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass bei gleichmäßiger Konvergenz von $y_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ gegen $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ auch die Integrale $\int_a^b f(y_n(x))\,dx$ für $n \to \infty$ gegen $\int_a^b f(y(x))\,dx$ konvergieren, falls alle Integrale existieren und endlich sind.

Lösung zu Zusatzaufgabe 13.1:

(a) Da es einerseits zu jedem $x < 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x \;<\; 1-\frac{2}{N}$ gibt und da $f_n(x) = 0$ für alle $n \ge N$ mit diesem N gilt sowie andererseits wegen $f_n(1) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 1$ gilt, konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ punktweise gegen die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für alle $x < 1$ und $f(1) = 1$, also erhalten wir den punktweisen Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \;=\; f(x) \;:=\; \begin{cases} 0\,, & x \in [0,1[\\ 1\,, & x = 1 \end{cases}$$

Falls eine Funktionenfolge gleichmäßig gegen eine Funktion konvergiert, muss diese auch mit dem punktweisen Grenzwert übereinstimmen. Da die Funktion f unstetig ist, die f_n aber stetig sind, kann die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig gegen f konvergieren, denn dann müsste f auf $[0,1]$ stetig sein (vgl. Satz 1, §21).

(b) Die Funktionenfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt als punktweisen Grenzwert die Nullfunktion, d.h. $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f \equiv 0$, denn für jedes $x \in]0,\infty[$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\frac{n}{x}} \;=\; 0\,.$$

(c) Die Funktionenfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auch gleichmäßig auf dem Intervall $]0,b]$, $b > 0$, gegen die Nullfunktion, denn es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in]0,b]} |g_n(x) - 0| \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\frac{n}{b}} \;=\; 0\,.$$

Da jedoch für ein festes n stets $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-\frac{n}{x}} \;=\; 1$ und somit auch $\sup\limits_{x\in]0,\infty[} |g_n(x) - 0| = 1$ gilt, liegt auf $]0,\infty[$ keine gleichmäßige Konvergenz vor.

(d) Wegen $f_n(0) = 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{n^2 \mathrm{e}^{\frac{x}{n}}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{n\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}} = 0$ sowie wegen

$$f_n'(x) = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{x}{n^3}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = n$$

liegt das Maximum von $f_n \geq 0$ im Punkt $x = n$. Der Maximalwert von $f_n(x)$ ist also $\frac{1}{n\mathrm{e}}$, welcher für $n \to \infty$ gegen 0 strebt. Somit erhalten wir

$$\sup_{x\in[0,\infty[} |f_n(x) - 0| = \frac{1}{n\mathrm{e}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

also konvergiert die Funktionenfolge f_n gleichmäßig gegen die Nullfunktion.
Andererseits gilt mit der Substitution $y := \frac{x}{n}$ für die Integrale

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f_n(x)\,dx &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{x}{n^2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{R}{n}} y\mathrm{e}^{-y}\,dy = \lim_{R\to\infty}\left(-y\mathrm{e}^{-y}\Big|_0^{\frac{R}{n}} + \int_0^{\frac{R}{n}} \mathrm{e}^{-y}\,dy\right)\\ &= \lim_{R\to\infty}\left(-(1+y)\mathrm{e}^{-y}\Big|_0^{\frac{R}{n}}\right) = 1 - \lim_{R\to\infty}\frac{1+\frac{R}{n}}{\mathrm{e}^{\frac{R}{n}}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} 1 - \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{R}{n}}} = 1\end{aligned}$$

so dass die Integrale $\int_0^\infty f_n(x)\,dx$ nicht gegen $\int_0^\infty 0\,dx = 0$ konvergieren.

(e) Da f auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist, gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $y, \tilde{y}$ mit $|y - \tilde{y}| \leq \delta$ die Abschätzung $|f(y) - f(\tilde{y})| \leq \varepsilon$ gilt.
Da $y_n(x)$ gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen $y(x)$ konvergiert, gibt es ein N mit $\sup\limits_{x\in[a,b]} |y_n(x) - y(x)| \leq \delta$ für alle $n \geq N$.
Insgesamt gibt es also zu $\varepsilon > 0$ ein N mit $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(y_n(x)) - f(y(x))| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Somit konvergiert auch die Funktionenfolge $g_n := f\circ y_n$ gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen die Funktion $g := f \circ y$.
Da nach Voraussetzung alle Integrale existieren, folgt nun aus der Abschätzung

$$\left|\int_a^b g_n(x)dx - \int_a^b g(x)dx\right| \leq \int_a^b |g_n(x) - g(x)|\,dx \leq \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} |g_n(x) - g(x)|\,dx \leq \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a)$$

für $\varepsilon \to 0$ wie gewünscht die Konvergenz $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f(y_n(x))\,dx = \int_a^b f(y(x))\,dx$.

Zusatzaufgabe 13.2:

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

$$\text{(i)}\ \sum_{n=0}^\infty (n^3+2n-1)x^n\,, \qquad \text{(ii)}\ \sum_{n=0}^\infty 2^{-n}(x+7)^n\,, \qquad \text{(iii)}\ \sum_{n=0}^\infty \frac{(x-3)^n}{n!}\,, \qquad \text{(iv)}\ \sum_{n=1}^\infty \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$$

und geben Sie an, für welche x die jeweilige Potenzreihe konvergiert und für welche sie divergiert.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n(x+5)^n}{n^2}$ konvergiert.

(c) Stellen Sie $\dfrac{x^5}{(x+1)^2}$ und $\dfrac{1}{x^2+1}$ für beliebige $x \in\,]0,1[$ jeweils als Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ dar.

(d) Stellen Sie e^{-x^2} für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ als Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ dar.

Lösung zu Zusatzaufgabe 13.2:

(a) (i) Für den Konvergenzradius ergibt sich $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+2n-1}{(n+1)^3+2(n+1)-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^3}} = 1$, so dass die Potenzreihe auf dem Intervall $]-1,1[$ konvergiert und außerhalb des Intervalls $[-1,1]$ divergiert. In den Randpunkten $x = 1$ und $x = -1$ divergiert sie ebenfalls, da dort wegen $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3+2n-1) \neq 0$ das notwendige Konvergenzkriterium für Reihen verletzt ist. Also konvergiert die Potenzreihe genau für $x \in\,]-1,1[$.

(ii) Es gilt $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$ oder nach Hadamard auch $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, so dass die Potenzreihe auf dem Intervall $]-9,-5[$ konvergiert und außerhalb des Intervalls $[-9,-5]$ divergiert. In den Randpunkten $x=-9$ und $x=-5$ divergiert sich ebenfalls, da dort wegen $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n}(\pm 2)^n = \lim\limits_{n\to\infty} (\pm 1)^n \neq 0$ das notwendige Konvergenzkriterium für Reihen verletzt ist. Also konvergiert die Potenzreihe genau für $x \in\,]-9,-5[$.

(iii) Wegen $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty$ konvergiert die Potenzreihe für beliebiges $x \in \mathbb{R}$. In der Tat gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!} = \exp(x-3)$, wie wir bereits wissen.

(iv) Mit der Stetigkeit der Wurzel folgt $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = 1$ oder nach Hadamard auch $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$. Demnach konvergiert die Potenzreihe auf $]0,2[$ und divergiert außerhalb des Intervalls $[0,2]$. Im linken Randpunkt $x=0$ stimmt die Potenzreihe mit der nach dem Leibniz-Kriterium konvergenten Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ überein, während sie im rechten Randpunkt $x=2$ mit der nach dem Minorantenkriterium divergenten Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ zusammenfällt (wähle die harmonische Reihe als divergente Minorante). Somit konvergiert die Potenzreihe genau für $x \in [0,2[$.

(b) Zunächst bestimmen wir den Konvergenzradius $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}}} = \frac{1}{2(\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}})^2} = \frac{1}{2}$. Somit divergiert die Reihe außerhalb von $\left[-\frac{11}{2},-\frac{9}{2}\right]$. In den Randpunkten $x=-\frac{11}{2}$ und $x=-\frac{9}{2}$ stimmt die Potenzreihe mit den sogar absolut konvergenten Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ überein (letztere konvergiert beispielsweise auch nach dem Integralvergleichskriterium – vgl. ZA 12.3(c)). Somit konvergiert die Potenzreihe genau für $x \in \left[-\frac{11}{2},-\frac{9}{2}\right]$.

(c) Nach Satz 6, §22 Forster I, und aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz nach Corollar zu Satz 5, §22 Forster I, gilt auf dem Intervall $]0,1[$ demnach

$$\frac{x^5}{(x+1)^2} = x^5\left(-\frac{1}{1+x}\right)' = x^5\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)' = x^5\left(-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}\right) = \sum_{n=5}^{\infty}(-1)^{n+1}(n-4)x^n$$

und analog

$$\frac{1}{x^2+1} = (\arctan(x))' \overset{\text{Satz 6}}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' \overset{\text{Satz 5}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},$$

also hier für die Koeffizienten $a_{2n} = (-1)^n$ und $a_{2n+1} = 0$ gilt. Die zweite Potenzreihe hätten wir auch gleich mittels geometrischer Reihe für $q = -x^2$ erhalten.

(d) Mit Hilfe der überall konvergenten Exponentialreihe ergibt sich $\mathrm{e}^{-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$, also ergibt sich für die Koeffizienten $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!}$ und $a_{2n+1} = 0$.

Zusatzaufgabe 13.3:

(a) Bestimmen Sie die Taylor-Polynome $T_{\mathrm{e}^{\cos(x)},0,2}(x)$ und $T_{\ln(\sin(x)),\frac{\pi}{2},3}(x)$.

(b) Bestimmen Sie das 3. Taylor-Polynom von auf dem Intervall $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ definierten Funktion $f(x) = \tan(x)$ an der Stelle $x=0$.

(c) Approximieren Sie die Funktion $f(x) = x\mathrm{e}^x$ durch ein Taylor-Polynom geeigneter Ordnung an der Stelle $a = \frac{1}{2}$, so dass der maximale Fehler auf dem Intervall $\left[\frac{1}{4},1\right]$ kleiner als 10^{-3} ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 13.3:

(a) Wegen $\left(\mathrm{e}^{\cos(x)}\right)' = -\sin(x)\mathrm{e}^{\cos(x)}$ und $\left(\mathrm{e}^{\cos(x)}\right)'' = \left((\sin(x))^2 - \cos(x)\right)\mathrm{e}^{\cos(x)}$ ergibt sich für das erste Taylor-Polynom

$$T_{\mathrm{e}^{\cos(x)},0,2}(x) \;=\; \sum_{k=0}^{2} \frac{\left(\mathrm{e}^{\cos(x)}\right)^{(k)}\Big|_{x=0}}{k!}(x-0)^k \;=\; \left(1 \;-\; \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}\;.$$

Mit den Ableitungen $(\ln(\sin(x)))' = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, $(\ln(\sin(x)))'' = \frac{-1}{(\sin(x))^2}$ und $(\ln(\sin(x)))''' = \frac{2\cos(x)}{(\sin(x))^3}$ folgt nun für das zweite Taylor-Polynom

$$T_{\ln(\sin(x)),\frac{\pi}{2},3}(x) \;=\; \sum_{k=0}^{3} \frac{(\ln(\sin(x)))^{(k)}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}}{k!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^k \;=\; -\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 \;=\; -\frac{x^2}{2}+\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi^2}{8}\;.$$

(b) Wir benötigen die ersten 3 Ableitungen von $f(x) = \tan(x)$:

$$f'(x) = 1+(f(x))^2\;, \qquad f''(x) = 2f(x)\left(1+(f(x))^2\right)\;, \qquad f'''(x) = 2\left(1+(f(x))^2\right)\left(1+2(f(x))^2\right)$$

Somit ergibt sich $T_{\tan(x),0,3}(x) = \sum\limits_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = 0+x+0+\frac{1}{3}x^3$ als Taylor-Polynom vom Grad 3.

(c) Per vollständiger Induktion zeigen wir zunächst $f^{(n)}(x) = (n+x)\mathrm{e}^x$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$.

- Offenbar ist der Induktionsanfang wegen $f^{(0)}(x) = f(x) = x\mathrm{e}^x = (0+x)\mathrm{e}^x$ erfüllt.
- Gilt nun $f^{(n)}(x) = (n+x)\mathrm{e}^x$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ (Induktionsvoraussetzung), dann folgt mittels Produktregel auch die Induktionsbehauptung wegen

$$f^{(n+1)}(x) \;=\; \left(f^{(n)}(x)\right)' \;=\; ((n+x)\mathrm{e}^x)' \;=\; \mathrm{e}^x \;+\; (n+x)\mathrm{e}^x \;=\; (n+1+x)\mathrm{e}^x\;.$$

Als n-tes Taylor-Polynom an der Stelle $a = \frac{1}{2}$ ergibt sich daher

$$T_{x\mathrm{e}^x,\frac{1}{2},n}(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)}{k!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{k!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^k\;.$$

Das Lagrangesche Restglied (vgl. Satz 2, §22 Forster I) liefert nun $R_{n+1}(x) = \frac{n+1+\xi}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\xi}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ für ein ξ zwischen x und $\frac{1}{2}$, so dass wir wegen $\left|x-\frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}$ auf $\left[\frac{1}{4},1\right]$ den Fehler durch

$$|R_{n+1}(x)| \;=\; \left|\frac{n+1+\xi}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\xi}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right| \;\le\; \frac{n+2}{(n+1)!}\cdot\frac{\mathrm{e}}{2^{n+1}}$$

abschätzen können. Für $n = 5$ erhalten wir daher $|R_{5+1}(x)| = \frac{7\mathrm{e}}{720\cdot 64} \approx 0.00041293 < 10^{-3}$ als Abschätzung für den maximalen Fehler. Für $n = 4$ gilt jedoch noch $|R_{4+1}(x)| = \frac{6\mathrm{e}}{120\cdot 32} = \frac{\mathrm{e}}{640} > 10^{-3}$.

Zusatzaufgabe 13.4:

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\{1, \cos(kx), \sin(kx) \mid k \in \mathbb{N}\}$ bzgl. (13.1) orthogonal zueinander sind.

(b) Wie müssen die Funktionen skaliert werden, damit sie ein Orthonormalsystem bzgl. (13.1) bilden?

(c) Leiten Sie aus der komplexen Parsevalschen Gleichung die reelle Version (13.4) ab.

(d) Zeigen Sie, dass die reelle FOURIER-Reihe einer geraden (bzw. ungeraden) 2π-periodischen Funktion f die Form $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx)$ (bzw. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kx)$) besitzt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 13.4:

(a) Offenbar gilt $\langle 1, \cos(kx)\rangle = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ wegen $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(kx)\,dx = -\frac{\sin(kx)}{k}\Big|_0^{2\pi} = 0$. Aufgrund der 2π-Periodizität und – da es sich insgesamt um ungerade Integranden handelt – folgen

$$\int_0^{2\pi}\sin(kx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)dx \;=\; 0 \quad\text{und}\quad \int_0^{2\pi}\cos(kx)\sin(lx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\sin(lx)dx \;=\; 0$$

für alle $k,l \in \mathbb{N}$ und damit auch die Beziehungen $\langle 1, \sin(kx)\rangle = \langle \cos(kx), \sin(lx)\rangle = 0$ für alle $k,l \in \mathbb{N}$. Aus den Additionstheoremen $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) &= \frac{\cos(2\alpha)+\cos(2\beta)}{2} \\
\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) &= \frac{\cos(2\beta)-\cos(2\alpha)}{2}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)\,dx &= \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{k+l}{2}x + \frac{k-l}{2}x\right)\cos\left(\frac{k+l}{2}x - \frac{k-l}{2}x\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos((k+l)x)\,dx}_{=0} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((k-l)x)\,dx = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \pi & k = l \end{cases}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx)\,dx &= \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{k+l}{2}x + \frac{k-l}{2}x\right)\sin\left(\frac{k+l}{2}x - \frac{k-l}{2}x\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((k-l)x)\,dx - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos((k+l)x)\,dx}_{=0} = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \pi & k = l \end{cases}
\end{aligned}$$

und daher $\langle \cos(kx), \cos(lx)\rangle = \langle \sin(kx), \sin(lx)\rangle = 0$ für alle $k,l \in \mathbb{N}$ mit $k \neq l$.

(b) In (a) haben wir bereits gesehen, dass $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(kx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(kx)\,dx = \pi$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Somit ergeben sich für die Funktionen $\sqrt{2}\cos(kx)$ und $\sqrt{2}\sin(kx)$ und 1 genau

$$\begin{aligned}
\left\|\sqrt{2}\cos(kx)\right\|_2 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{2}\cos(kx)\right)^2 dx} = 1\,, \\
\left\|\sqrt{2}\sin(kx)\right\|_2 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{2}\sin(kx)\right)^2 dx} = 1\,, \\
\|1\|_2 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1^2 dx} = 1\,.
\end{aligned}$$

Demnach ist die Familie $\left\{1, \sqrt{2}\cos(kx), \sqrt{2}\sin(kx) \;\middle|\; k \in \mathbb{N}\right\}$ bezüglich des Skalarproduktes (13.1) ein Orthonormalsystem.

(c) Wegen $|c_k|^2 = \frac{1}{4}(a_k^2 + b_k^2) = |c_{-k}|^2$ ergibt sich aus der komplexen Parsevalschen Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \langle f, f\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{4}a_0^2 + 2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4}(a_k^2 + b_k^2)$$

und nach Multiplikation mit 2 auf beiden Seiten somit (13.4).

(d) Ist f gerade, dann ist $f(x)\sin(x)$ ungerade. Daher gilt

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(x)\,dx = 0.$$

Ist f ungerade, dann ist $f(x)\cos(x)$ ungerade. Daher gilt

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(x)\,dx = 0.$$

Beim Verschieben des Integrationsbereiches wurde dabei jeweils die 2π-Periodizität ausgenutzt.

Alle Zusatzaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`