Aufgabe 14.1: (3+2 P)

(a) Gegeben sei die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x < -\frac{\pi}{n}\,, \\ \sin\left(\frac{nx}{2}\right) & \text{für } x \in \left[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right], \\ 1 & \text{für } x > \frac{\pi}{n}\,. \end{cases}$

- (i) Untersuchen Sie die Funktionen f_n auf Differenzierbarkeit.
- (ii) Existiert der punktweise Grenzwert $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$? Konvergiert f_n gleichmäßig ?

(b) Gegeben sei die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $g_n\colon [0,1]\to\mathbb{R}$, $g_n(x) := nx(1-x)^n$.

- (i) Bestimmen Sie für jedes $x\in[0,1]$ den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$.
- (ii) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[0,1]} g_n(x)\right)$. Ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergent ?

Aufgabe 14.2: (3+2 P)

(a) Angenommen, es konvergieren f_n gegen f und g_n gegen g jeweils gleichmäßig auf D.

- (i) Zeigen Sie: Dann konvergiert $f_n + g_n$ gleichmäßig gegen $f+g$ auf D.
- (ii) Zeigen Sie: Sind f_n, g_n beschränkt, so konvergiert $f_n \cdot g_n$ gleichmäßig gegen $f\cdot g$ auf D.
- (iii) Gilt (ii) auch ohne die Beschränktheitsvoraussetzung ?

(b) Konvergiert die Funktionenfolge $u_n(x) := \dfrac{nx^4}{1+nx^2}$ punktweise/gleichmäßig auf $\mathbb{R}$?

Bonus: (+3 ZP)

Zeigen Sie: Die Funktionen $v_n := \sqrt{u_n}$ sind beliebig oft differenzierbar und konvergieren für $n\to\infty$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, jedoch ist die Grenzfunktion nicht differenzierbar.

Aufgabe 14.3: (2+1+2 P)

(a) Warum konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ für $k>1$?

(b) Bestimmen Sie alle $x\in\mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+5)^n}{n^2}$ konvergiert.

(c) Stellen Sie $\dfrac{x^5}{(x+1)^2}$ und $\dfrac{1}{x^2+1}$ für beliebige $x\in\,]0,1[$ jeweils als Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dar.

Bonus: Stellen Sie e^{-x^2} für beliebiges $x\in\mathbb{R}$ als Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dar. (+1 ZP)

Aufgabe 14.4: (2+1+2 P)

(a) Bestimmen Sie die Taylor-Polynome $T_{\mathrm{e}^{\cos(x)},0,2}(x)$ und $T_{\ln(\sin(x)),\frac{\pi}{2},3}(x)$.

(b) Bestimmen Sie das 3. Taylor-Polynom von $\tan\colon \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$ an der Stelle $x=0$.

(c) Approximieren Sie die Funktion $f(x) = x\mathrm{e}^x$ durch ein Taylor-Polynom geeigneter Ordnung an der Stelle $a=\frac{1}{2}$, so dass der maximale Fehler auf dem Intervall $\left[\frac{1}{4},1\right]$ kleiner als 10^{-3} ist.
