

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 14

Funktionenfolgen, punktweise & gleichmäßige Konvergenz, Potenzreihen

- **Definition:** Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt
 - **punktweise konvergent gegen f** $\iff \forall x \in D : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.
 - **gleichmäßig konvergent gegen f** $\iff \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Bemerkungen:

- (a) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ punktweise $\iff \forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N} : (n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$
- (b) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ gleichmäßig $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall x \in D : (n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$

- **Definition:** Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ bezüglich einer Folge von Funktionen $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **punktweise** bzw. **gleichmäßig konvergent**, wenn die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummenfunktionen $S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x)$ punktweise bzw. gleichmäßig auf D konvergiert.

- **Satz 21.1:** Gilt $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ gleichmäßig für $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ sämtlich stetig, ist auch $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

- **Satz 21.4:** Es gilt $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$, falls $D = [a, b]$ in Satz 21.1 erfüllt ist.

- **Satz 21.5:** Gilt $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ punktweise, $f'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ gleichmäßig für $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ sämtlich stetig differenzierbar, so ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\forall x \in D : f'(x) = g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

- **Satz 21.2 [Konvergenzkriterium von Weierstraß]:** Seien $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkte Funktionen, d.h., für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $\|f_n\|_{\infty, K} := \sup_{x \in K} |f_n(x)| < \infty$. Gilt dann $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, K} < \infty$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ absolut und gleichmäßig auf K gegen eine Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{C}$.

- **Definition [Potenzreihe]:** Der punktweise Grenzwert der Polynomfunktionen $S_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $S_n(x) := \sum_{k=0}^n c_k(z - a)^k$ wird **Potenzreihe** $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k$ mit **Koeffizienten** $c_k \in \mathbb{C}$ und **Entwicklungspunkt** $a \in \mathbb{C}$ genannt.

- **Satz 21.3:** Konvergiert eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k$ für ein $z_1 \neq a$, dann konvergiert für jedes $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < |z_1 - a|$ sowohl die Potenzreihe selbst als auch die gliedweise differenzierte Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} k c_k(z - a)^{k-1}$ absolut und gleichmäßig auf der abgeschlossenen Kugel

$$\overline{B_r(a)} := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}.$$

- **Definition [Konvergenzradius]:** Zu einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k$ heißt die durch

$$R := \sup_{z \in \mathbb{C}} \left\{ |z - a| : \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k \text{ konvergiert} \right\}$$

definierte Zahl $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ der **Konvergenzradius** der Potenzreihe.

Bemerkungen:

(a) Satz 21.3 besagt, dass die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - a| < R$ konvergiert und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - a| > R$ divergiert. Über die Konvergenz auf dem Kreisrand $|z - a| = R$ existiert keine allgemeingültige Konvergenzaussage. Die Potenzreihe ist jedoch im Inneren von $\overline{B_r(a)}$ stetig.

(b) Bestimmen können wir R durch
$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \quad (\text{Formel von Hadamard})$$

(wobei $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$ vereinbart wird) bzw. $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ (falls existiert).

(c) Ableitungen bzw. Integrale reellwertiger Potenzreihen können auf dem jeweiligen Konvergenzintervall $]x_0 - R, x_0 + R[$ durch Ableiten bzw. Integrieren der einzelnen Monome ermittelt werden:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}, \quad \int \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1}$$

(d) Insbesondere ist eine auf $I :=]a - r, a + r[$ konvergente Potenzreihe $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - a)^k$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Taylor-Reihen

- **Satz 22.1 [Taylor-Formel]:** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $x, x_0 \in I$ die TAYLORSche Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_{n+1}(x) \quad \text{mit Restglied} \quad R_{n+1}(x) := \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

oder
$$R_{n+1}(x) := \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0)) d\theta.$$

Definition:
$$T_{f,x_0,n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$
 heißt das n -te **Taylorpolynom** von f bei x_0 .

- **Satz 22.2 [Lagrange'sche Form des Restgliedes]:** Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Für $n \geq 0$ existiere die n -te Ableitung $f^{(n)}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, welche stetig sei. Weiterhin existiere die $(n+1)$ -te Ableitung $f^{(n+1)}:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ im Inneren. Dann existiert für beliebige $x, x_0 \in [a, b]$ mit $x \neq x_0$ ein ξ zwischen x und x_0 (oder alternativ ein $\theta \in]0, 1[$), so dass die TAYLORSche Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_{n+1}(x) \quad \text{mit dem Restglied} \quad R_{n+1}(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

oder $R_{n+1}(x) := \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$ gilt. R_{n+1} heißt **Lagrange'sches Restglied**.

- **Definition [Taylor-Reihe]:** Ist eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar und $x_0 \in [a, b]$, dann heißt die Potenzreihe

$$T_{f,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

die **Taylor-Reihe** oder **Taylor-Entwicklung** von f um den **Entwicklungspunkt** x_0 . Der Konvergenzradius muss nicht > 0 sein und auf dem Konvergenzintervall muss T_{f,x_0} nicht gegen f konvergieren, sondern tut dies nur dann, wenn das Restglied für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.

- **Satz 22.3:** Ist $a \in \mathbb{R}$ und der Konvergenzradius R von $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ positiv, so konvergiert $T_{f,a}(x)$ für alle $x \in]a - R, a + R[$ gegen $f(x)$, d.h., die Reihen stimmen überein.

- **Satz 22.5 [Abelscher Grenzwertsatz]:** Ist $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine reelle Zahlenfolge und konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, dann konvergiert die Potenzreihe $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ gleichmäßig auf $[0, 1]$.

- **Sätze 22.4/6/7:**

- Für alle $|x| < 1$ (und sogar $x = 1$) gilt $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$. (**Logarithmus-Reihe**)
- Für alle $|x| \leq 1$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x)$. (**Arcus-Tangens-Reihe**)
- Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Für alle $|x| < 1$ gilt dann $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$. (**Binomische Reihe**)

Zusatzaufgabe 14.1:

- (a) Konvergiert die Folge $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ der durch $f_n(x) := \begin{cases} 0, & x < 1 - \frac{2}{n} \\ n(x-1) + 2, & 1 - \frac{2}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ 1, & 1 - \frac{1}{n} < x \end{cases}$ definierten Funktionen punktweise auf $[0, 1]$? Konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[0, 1]$?
- (b) Konvergiert die durch $g_n(x) := e^{-\frac{n}{x}}$ definierte Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise auf $]0, \infty[$?
- (c) Sei $b > 0$. Konvergiert die in (b) definierte Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $]0, b]$? Und auf $]0, \infty[$?
- (d) Zeigen Sie: Die Folge der Funktionen $f_n(x) := \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}$ konvergiert auf $[0, \infty[$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion, aber für das uneigentliche Integral ist $\int_0^\infty f_n(x) dx = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
- (e) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie: Bei gleichmäßiger Konvergenz von $y_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ gegen $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergieren auch die Integrale $\int_a^b f(y_n(x)) dx$ für $n \rightarrow \infty$ gegen $\int_a^b f(y(x)) dx$, falls alle Integrale existieren und endlich sind.

Zusatzaufgabe 14.2:

- (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} (n^3 + 2n - 1)x^n$, (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}(x+7)^n$, (iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$, (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

und geben Sie an, für welche x die jeweilige Potenzreihe konvergiert und für welche sie divergiert.

- (b) Wo konvergieren die Potenzreihen (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}(x+2)^n$ und (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-3)^{2n}$?
- (c) Bestimmen Sie die Grenzfunktion der Potenzreihe $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)x^n$ auf $] -1, 1[$.

Zusatzaufgabe 14.3:

- (a) Geben Sie das Taylorpolynom ersten und zweiten Grades der Funktion $f(x) = \sqrt[4]{x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 := 1$ an. Bestimmen Sie das Lagrangesche Restglied zum Taylorpolynom ersten Grades, und schätzen Sie ab, wie weit dieses Taylorpolynom auf $[\frac{9}{10}, \frac{11}{10}]$ von f maximal abweicht.
- (b) Nutzen Sie für den Beweis von $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$ die Taylor-Entwicklung der Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$ um den Punkt $x_0 = 0$.
- (c) Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades von $f(x) := \operatorname{arsinh}(x)$ im Punkt $x_0 := 0$.