Aufgabe 16.1: **(Rotationskörper)**

Sei $r : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, positiv, $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a,b],\ x^2+y^2 \le (r(z))^2\}$ der Rotationskörper mit Meridiankurve r. Zeigen Sie:

(a) A besitzt das Volumen $\mu(A) = \pi \int\limits_a^b (r(z))^2 \, d\mu(z)$.

(b) Ist (ξ, ζ) der Schwerpunkt der Fläche $F \subset \mathbb{R}^2$, $F := \{(x,z) : z \in [a,b],\ 0 \le x \le r(z)\}$, so gilt

$$\mu(A) = 2\pi\xi \cdot \mu(F) \qquad \text{(Guldinsche Regel).}$$

(c) Sei T der Volltorus, der durch Rotation der Kreisscheibe $\{(x,z) : (x-R)^2 + z^2 \le r^2\}$, $0 < r < R$, um die z-Achse entsteht. Berechnen Sie das Volumen von T und verifizieren Sie hieran die Guldinsche Regel.

Aufgabe 16.2: (**Schwerpunkt**)

(a) Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine affine Transformation $Ax + b$ mit regulärem A. Zeigen Sie: Ist S der Schwerpunkt einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu(K) \neq 0$, so ist $T(S)$ der Schwerpunkt der Bildmenge $T(K)$.

(b) Eine dünne Platte habe die Form des Bereiches zwischen der Parabel $y = -2x^2 + 18$ und der x-Achse. Ihre Flächendichte sei $\rho(x,y) = e^x$. Berechnen Sie den Schwerpunkt der Platte.

Aufgabe 16.3: (**Transformation auf Polar- und Zylinderkoordinaten**)

(a) Bestimmen Sie das Integral der Funktion $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ über dem durch $x^2 + y^2 = a^2$ begrenzten Bereich. (**Hinweis:** Verwenden Sie hierbei Polarkoordinaten.)

(b) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der Koordinatentransformation für die Zylinder-Koordinaten

$$x(r,\varphi,z) = r\cos\varphi, \qquad y(r,\varphi,z) = r\sin\varphi, \qquad z(r,\varphi,z) = z.$$

Bestimmen Sie anschließend das Integral der Funktion $f(x,y,z) = (z^2 - 6z + 9)e^{(z-3)\sqrt{x^2+y^2}}$ über dem Zylinder

$$Z := \left\{ 0 \le \frac{x^2+y^2}{4} \le 1,\ \ -3 \le z \le 0 \right\}.$$

Aufgabe 16.4: **(Simplex im $\mathbb{R}^n$)**

Das Simplex im $\mathbb{R}^n$ mit den Eckpunkten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ist die Menge

$$S := \left\{ x = \sum_{\nu=1}^{n} t_\nu (a_\nu - a_0) \ :\ (t_1, \ldots, t_n) \in \Delta^n \right\}.$$

Zeigen Sie, dass für sein Volumen $\mu(S) = \frac{1}{n!} \Big| \det(a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_n - a_0) \Big|$ gilt.

Alle Übungsaufgaben sind verfügbar unter:
`https://studip.uni-rostock.de/studip/`