Aufgabe 13.1: (2+1+1P)

(a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt (also das 2-dimensionale Lebesgue-Maß $\lambda_2(A)$) der Mengen $A := \{(x,y)\,|\,0 \leq y \leq 1\,, y^2 \leq x \leq y\} \subset \mathbb{R}^2$ und $B := \{(x,y)\,|\,0 \leq x \leq 1\,,\, 1-x \leq y \leq 1+x^2\}$.

(b) Bestimmen Sie $\lambda_2(K)$ für die von den Kurven $y = 4x$, $y = \frac{1}{x}$ und $y = x$ berandete Menge $K \subset [0,\infty[^2$.

(c) Berechnen Sie das Lebesgue-Integral $\int_\Omega f(x,y)\,d\lambda_2(x,y)$ von $f(x,y) := x+y$ über das Dreieck $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,|\,0 \leq x \leq 1\,,\, 0 \leq y \leq 1-x\}$.

Aufgabe 13.2: (1+2+3P)

(a) Berechnen Sie $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \arctan \frac{x}{y}$ und $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \arctan \frac{x}{y}$ für $y \neq 0$.

(b) Die Funktion $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,, & (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0\,, & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

Ist diese Funktion λ_2-integrierbar?

(c) Berechnen Sie das Integral
$$\int_{[0,\infty)} \left(\int_{[0,\infty)} y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}\,d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x).$$
Zeigen Sie dann mittels des Satzes von Fubini
$$\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-x^2}\,d\lambda_1(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Aufgabe 13.3: (2+1P)

(a) Zeigen Sie: Ist $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $Tx = Ax + b$ eine affine Transformation mit invertierbarer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie $b \in \mathbb{R}^n$ und ist f über eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ λ_n-integrierbar, dann ist $f \circ T$ über das Urbild $T^{-1}(U)$ λ_n-integrierbar mit
$$\int_{T^{-1}(U)} f(Ax+b)\,d\lambda_n(x) = \frac{1}{|\det(A)|} \cdot \int_U f(y)\,d\lambda_n(y)\,.$$

(b) Zeigen Sie für U und T aus (a) mit Hilfe von (a), dass $\lambda_n(T(U)) = |\det(A)| \cdot \lambda_n(U)$ gilt.

Aufgabe 13.4: (2+2+3P)

(a) Berechnen Sie das Lebesgue-Integral $\int_{\{(x,y)\,|\,0<y<x\}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(x^2-y^2)\,d\lambda_2(x,y)$, indem Sie den Transformationssatz auf Φ aus Aufgabe 9.2 (b) und anschließend den Satz von Fubini anwenden.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Psi(\xi,r) := \left(r\xi, r\sqrt{1-\xi^2}\right)$ in der Nähe jedes Punktes $(\xi,r) \in \mathbb{R}^2$ mit $|\xi| < 1$ und $r \neq 0$ eine differenzierbare Umkehrabbildung besitzt. Beweisen Sie, dass Ψ ein Diffeomorphismus vom Halbstreifen $(-1,1) \times (0,\infty)$ auf $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ ist.

(c) Berechnen Sie das Integral
$$\int_{(-1,1)\times(0,\infty)} \frac{1}{(1+r^2\xi^2)\cdot(1+r\sqrt{1-\xi^2})^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\lambda_2(\xi,r)\,,$$
indem Sie den Transformationssatz auf Ψ und anschließend den Satz von Fubini anwenden.

Alle Übungsaufgaben sowie alle Lösungen sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`