Zusatzmaterial zur Analysis II – Übung zu Serie 1

Vektorräume

- Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Menge X zusammen mit einer Verknüpfung $+ : X \times X \to X$, genannt die Addition auf X, und einer (äußeren) Operation $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$, genannt skalare Multiplikation, heißt ein $\mathbb{K}$**-Vektorraum** oder ein **linearer Raum über** $\mathbb{K}$, falls Folgendes erfüllt ist

  (i) $(X, +)$ ist eine abelsche Gruppe und

  (ii) für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $x, y \in X$ gilt

  (a) $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$, (b) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot y$, (c) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ und (d) $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$.

- Ein bereits bekanntes Beispiel aus dem ersten Semester ist zum Beispiel für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ der n-dimensionale reelle Vektorraum $X = \mathbb{R}^n$ mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation. Für zwei Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ in X und $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ und $\lambda \cdot x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. Dann ist X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ebenso ist $C([a, b]) := \{ f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

- Eine Funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Vektorraum X heißt **Skalarprodukt**, falls

  (i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (Symmetrie)

  (ii) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ (Bilinearität)

  (iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ (Positiv-Definitheit)

  für alle $x, y, z \in X$ und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt. Ein Tupel $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nennen wir einen **Euklidischen Vektorraum**.

Normierte Räume

- Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\| \cdot \| : X \to [0, \infty)$ heißt eine **Norm** auf X, wenn für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

  (i) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ (Definitheit),

  (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (Homogenität),

  (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung).

- Ein Vektorraum X, versehen mit einer Norm $\| \cdot \|$, heißt ein **normierter Raum**.

- Ein Euklidischer Vektorraum wird mit der vom Skalarprodukt induzierten Norm $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ zu einem normierten Raum.

- Häufig verwendete Normen im $\mathbb{R}^n$ sind zum Beispiel

  (a) $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad \left(= \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ mit dem Euklidischen Skalarprodukt } \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)$ (2-Norm)

  (b) $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ (1-Norm), (c) $\|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ (Maximumsnorm).

- Auf dem Vektorraum $C([a, b]) := \{ f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$ kennen wir beispielsweise die Normen

  (a) $\|f\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{C([a,b])}} := \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 \, dx} \quad \left(= \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ mit dem Skalarprodukt } \langle f, g \rangle_{C([a,b])} := \int_a^b (fg)(x) dx \right)$

  (b) $\|f\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ (existiert, da mit f auch $|f|$ stetig und $[a, b]$ abgeschlossen und beschränkt)

Metrische Räume

- Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$ heißt **Metrik** auf M, falls

  (i) $\forall x, y \in M \; : \; d(x, y) = 0 \; \Leftrightarrow \; x = y$, (Definitheit)

(ii) $\forall x, y \in M \ : \ d(x,y) = d(y,x)$, (Symmetrie)

(iii) $\forall x, y, z \in M \ : \ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecksungleichung).

- Ist d eine Metrik auf M, so heißt das Paar (M,d) **metrischer Raum**. Für je zwei Elemente $x, y \in M$ heißt die Zahl $d(x,y)$ der Abstand oder die Distanz von x und y.
- Ist X ein normierter Vektorraum und bezeichnet $\|\cdot\|$ seine Norm, so wird durch $d(x,y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf X induziert.
- In einem metrischen Raum (M,d) nennen wir eine Menge $U \subset M$ genau dann offen, wenn es zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die offene Kugel $B_\varepsilon(x)$ um x von Radius ε bezüglich der Metrik d vollständig in U enthalten ist; mit anderen Worten, wenn

  $$\forall x \in U \exists \varepsilon > 0 \ : B_\varepsilon(x) \subset U,$$

  wobei $B_\varepsilon(x) := \{y \in M |\ d(x,y) < \varepsilon\}$.
- Unter der Einheitskugel eines normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$ versteht man die offene Kugel um den Ursprung von Radius 1 bezüglich der durch die Norm induzierten Metrik, d.h. die Menge

  $$\{x \in X |\ \|x\| < 1\}.$$
- Die Menge T_d aller offenen Teilmengen eines metrischen Raumes (M,d) nennt man die (von der Metrik d erzeugte/induzierte) **Topologie** von M. Die Menge T_d besitzt die Eigenschaften:
  - Beliebige Vereinigungen offener Mengen sowie endliche Durchschnitte offener Mengen sind wieder offen.
  - $\emptyset \in T_d$ und $M \in T_d$.

  Allgemein heißt ein System T von Teilmengen von M mit diesen beiden Eigenschaften eine **Topologie** auf der Menge M, das Paar (M,T) nennt man einen **topologischen Raum** und die Elemente von T **offen**.

  Achtung:
  Nicht jede Topologie wird durch eine Metrik induziert, es gibt z.B. Topologien, die nicht **Hausdorffsch** sind, d.h. für die es nicht zu je zwei (verschiedenen) Punkten $x, y \in M$ offene Mengen U, V mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$ gibt. Jede von einer Metrik induzierte Topologie ist jedoch Hausdorffsch.

Zusatzaufgabe 1.1:

Seien $w, x \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch $w := (1,4)$ beziehungsweise $x := (-3,2)$ und die Vektoren $y, z \in \mathbb{R}^3$ durch $y = (-2,2,1)$ beziehungsweise $z = (0,1,0)$.

(a) Berechnen Sie $w + 2x$ und $3z - y$ jeweils einmal rechnerisch und einmal zeichnerisch.

(b) Berechnen Sie für jeden der oben definierten Vektoren w, x, y und z jeweils seine Länge in den Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.1:

(a) Rechnerisch erhält man aus der komponentenweisen Addition und skalaren Multiplikation

$$w + 2x \ = \ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 1-6 \\ 4+4 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

und entsprechend

$$3z - y \ = \ 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0+2 \\ 3-2 \\ 0-1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Für die Normen erhalten wir

$$\begin{aligned} \|w\|_1 &= 1 + 4 = 5, & \|x\|_1 &= |-3| + 2 = 5, \\ \|y\|_1 &= |-2| + 2 + 1 = 5, & \|z\|_1 &= 0 + 1 + 0 = 1, \\ \|w\|_2 &= \sqrt{1 + (4)^2} = \sqrt{17}, & \|x\|_2 &= \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}, \\ \|y\|_2 &= \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3, & \|z\|_2 &= \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1, \\ \|w\|_\infty &= \max\{1,4\} = 4, & \|x\|_\infty &= \max\{|-3|, 2\} = 3, \end{aligned}$$

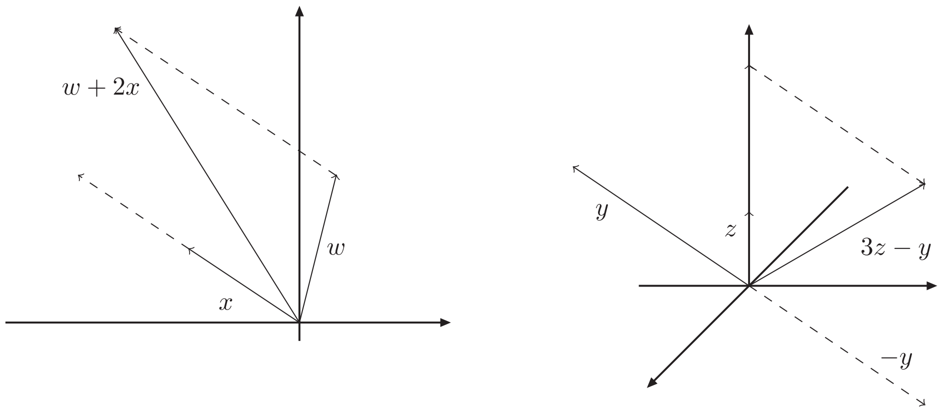


Abbildung 1: Geometrische Darstellung der Addition von $w+2x$ und $3z-y$

und

$$\|y\|_\infty = \max\{|-2|,2,1\} = 2, \qquad\qquad \|z\|_\infty = \max\{0,1\} = 1.$$

Zusatzaufgabe 1.2:

Zeigen Sie, dass $d(x,y) := |x-y|$ auf $M := \mathbb{R}$ eine Metrik definiert.

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.2:

Es sind die drei Eigenschaften (i)-(iii) einer Metrik zu zeigen:

(i) $d(x,y) = |x-y| \geq 0 \quad \wedge \quad d(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; |x-y| = 0 \;\Leftrightarrow\; x-y=0 \;\Leftrightarrow\; x=y\,.$

(ii) $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)\,.$

(iii) $d(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y)+d(y,z)\,.$

Zusatzaufgabe 1.3:

Wie sieht die offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt bezüglich folgender Metriken aus?

(a) $d(x,y) = \max(|x_1-y_1|, |x_2-y_2|)$ (ii) $d(x,y) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|$ (iii) $d(x,y) = \big(|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2\big)^{\frac{1}{2}}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.3:

(a) Quadrat $]-1,1[\ \times\ ]-1,1[\ := \ \big\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,\big|\, -1<x_1<1, -1<x_2<1\big\}\,;$

(b) Raute $\big\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,\big|\, |x_1|+|x_2|<1\big\}\,;$ (c) Einheitskreis $\big\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,\big|\, x_1^2+x_2^2<1\big\}\,.$

Zusatzaufgabe 1.4:

(a) Zeigen Sie, dass die Nichtnegativität einer Norm nicht explizit gefordert werden muss, sondern sich aus den übrigen Eigenschaften einer Norm ergibt.

(b) Zeigen Sie, dass die Nichtnegativität einer Metrik nicht explizit gefordert werden muss, sondern sich aus den übrigen Eigenschaften einer Metrik ergibt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.4:

(a) $\forall x\in X : 0 = 0\|0\| = \|0\| = \|x-x\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\| \quad\Longrightarrow\quad \|x\|\geq 0$

(b) $\forall x,y\in M : 0 = d(x,x) \leq d(x,y)+d(y,x) = 2d(x,y) \quad\Longrightarrow\quad d(x,y)\geq 0$

Zusatzaufgabe 1.5:

Beweisen Sie für alle $x,y\in\mathbb{R}^n$ und $p\in]1,\infty[$ die Ungleichung

$$\|x+y\|_p \;\leq\; \|\,x\,\|_p \;+\; \|y\|_p\;,$$

wobei die Abbildung $\|\cdot\|_p$ für alle $x\in\mathbb{R}^n$ und $p\in]1,\infty[$ durch

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

definiert sei.

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.5:

(i) Wir zeigen zunächst für q mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ die HÖLDERsche Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k| \;\le\; \|x\|_p\|y\|_q \;=\; \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} .$$

Falls $\|x\|_p=0$, dann ist $x_k=0$ für alle $k\in\{1,\dots,n\}$, so dass auch $\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k y_k|=0$ folgt. Demzufolge ist in dieser Situation nichts zu beweisen (denn $0\le 0$ ist trivial). Analoges gilt im Falle $\|y\|_q=0$.

O.B.d.A. seien demnach $\|x\|_p\neq 0$ und $\|y\|_q\neq 0$. Definieren wir für $k\in\{1,\dots,n\}$ die Hilfsgrößen

$$\xi_k \;:=\; \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p}\,, \qquad \eta_k \;:=\; \frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q}\,,$$

so ergeben sich

$$\sum_{k=1}^{n}\xi_k \;=\; \frac{1}{\|x\|_p^p}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p}_{=\|x\|_p^p} \;=\; 1, \qquad \sum_{k=1}^{n}\eta_k \;=\; \frac{1}{\|y\|_q^q}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q}_{=\|y\|_q^q} \;=\; 1 .$$

Weiterhin kennen wir die sich aus der Konkavität des Logarithmus für alle $a,b\in]0,\infty[$ ergebenden Ungleichungen

$$\frac{1}{p}\ln(a) + \frac{1}{q}\ln(b) \;\le\; \ln\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\right) \quad \overset{e^x \text{ monoton}}{\Longrightarrow} \quad a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}} \;\le\; \frac{a}{p}+\frac{b}{q} .$$

Damit ergibt sich für $k\in\{1,\dots,n\}$ die Ungleichung

$$\frac{|x_k y_k|}{\|x\|_p\ \|y\|_q} \;=\; \xi_k^{\frac{1}{p}}\eta_k^{\frac{1}{q}} \;\le\; \frac{\xi_k}{p}+\frac{\eta_k}{q}$$

und nach Aufsummieren

$$\frac{1}{\|x\|_p\ \|y\|_q}\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k| \;=\; \sum_{k=1}^{n}\frac{|x_k y_k|}{\|x\|_p\ \|y\|_q} \;\le\; \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\xi_k}{p}+\frac{\eta_k}{q}\right) \;=\; \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\xi_k+\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n}\eta_k \;=\; 1.$$

(ii) Zunächst halten wir fest, dass für positive $p,q\in\mathbb{R}$ die Gleichung $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ gleichbedeutend mit $\frac{p}{q}=p-1$ ist. Nach Dreiecksungleichung und dem ersten Teil folgt

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p \;&=\; \sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p \;=\; \sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k||x_k+y_k|^{p-1} \;\le\; \sum_{k=1}^{n}|x_k||x_k+y_k|^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}|y_k||x_k+y_k|^{p-1}\\
&\le\; \left(\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&=\; \Big(\|x\|_p+\|y\|_p\Big)\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \;=\; \Big(\|x\|_p+\|y\|_p\Big)\|x+y\|_p^{p-1} .
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 1.6:

Zeigen Sie, dass $\{\emptyset,\{1\},X\}$ eine Topologie auf $X:=\{1,2\}$ definiert, die jedoch nicht Hausdorffsch ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.6:

Man hat nachzuprüfen, dass neben $\emptyset, X$ auch beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte von offenen Mengen selbst wieder offen sind. Dies ist offensichtlich der Fall.

Der Punkt 2 hat keine Umgebung, in der nicht 1 enthalten ist, denn $\{1,2\}$ ist die einzige Umgebung von 2. Also ist die angegebene Topologie nicht Hausdorffsch.

Alle Übungsaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

Zusatzmaterial zur Analysis II – Übung zu Serie 2

Äquivalenz von Normen

- Zwei Normen auf einem Vektorraum X heißen **äquivalent**, wenn die beiden induzierten Metriken dieselbe Topologie besitzen. Dies ist nach der Vorlesung dann und nur dann der Fall, wenn es Konstanten $C, c > 0$ gibt, so dass
$$c\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\|$$
für alle $x \in X$ gilt.
- Zum Beispiel sind im $\mathbb{R}^n$, und somit insbesondere in jedem endlich-dimensionalen normierten Raum, alle Normen äquivalent.
- Äquivalenz von Normen bildet eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen eines Vektorraumes X, d.h. die Äquivalenz von Normen ist reflexiv, symmetrisch und transitiv (siehe Übungsaufgabe).

Konvergenz in normierten Räumen

- Eine Folge x_k von Punkten in einem normierten Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ nennt man konvergent gegen den Punkt $x \in X$, falls $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0$ in $\mathbb{R}$ gilt oder äquivalenterweise
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{N} : \forall k \geq K : \|x_k - x\| \leq \varepsilon.$$
- Für äquivalente Normen konvergiert eine Folge von Punkten dann und nur dann bezüglich einer der beiden Normen, wenn sie es auch bezüglich der anderen tut. Insbesondere konvergiert eine Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ dann und nur dann gegen ein $x \in \mathbb{R}^n$, wenn alle Komponenten der Folge in $\mathbb{R}$ gegen die jeweilige Komponente von x konvergieren.
- **Wichtig:** Die Konvergenz einer Folge in einem endlich-dimensionalen normierten Raum hängt nicht von der Norm ab. Konvergiert sie bezüglich einer Norm, so auch bezüglich aller anderen Normen.
- **Achtung:** In unendlich-dimensionalen normierten Räumen kann die Konvergenz einer Folge sehr wohl von der Norm abhängen.

Konvergenz in metrischen Räumen

- Eine Folge x_k von Punkten in einem metrischen Raum (X, d) nennt man konvergent gegen den Punkt $x \in X$, falls $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k, x) = 0$ in $\mathbb{R}$ gilt oder äquivalenterweise
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{N} :\ \forall k \geq K\ : d(x_k, x) \leq \varepsilon.$$
- Dieser Konvergenzbegriff kann topologisch wie folgt charakterisiert werden: Eine Folge x_k von Punkten in einem metrischen Raum (X, d) konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn in jeder Umgebung von x alle bis auf endlich viele Folgenglieder x_k liegen, d.h. wenn
$$\forall(\text{Umgebungen } V \text{ von } x)\ \exists K \in \mathbb{N} :\ \forall k \geq K : x_k \in V.$$
Dies zeigt, dass die Konvergenz in metrischen Räumen nicht direkt von der Wahl der Metrik selbst abhängt, sondern in Wahrheit nur von der zugrunde liegenden Topologie.

Zusatzaufgabe 2.1:

(a) Zeigen Sie, dass durch $\|x\|_X := \|Ax\|_Y$ für eine injektive lineare Abbildung $A : X \to Y$ und eine Norm $\|\cdot\|_Y$ auf Y eine Norm auf X definiert wird.

(b) Geben Sie die optimalen Konstanten $c, C > 0$ an, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$
$$c\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_\infty$$
gilt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.1:

(a) Es sind die drei Eigenschaften einer Norm (Definitheit, Homogenität und Dreiecksungleichung) zu zeigen.

   (i) (Definitheit) $0 = \|x\|_X = \|Ax\|_Y \iff Ax = 0 \iff x = 0$, da A injektiv ist und aufgrund der Linearität in jedem Fall $A0 = 0$ gilt.

   (ii) (Homogenität) Unter Ausnutzung der Linearität von A erhalten wir für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in X$

$$\|\lambda x\|_X \;=\; \|A(\lambda x)\|_Y \;=\; \|\lambda(Ax)\|_Y \;=\; |\lambda|\|Ax\|_Y \;=\; |\lambda|\|x\|_X,$$

   also die Homogenität von $\|\cdot\|_X$.

   (iii) (Dreiecksungleichung) Abschließend folgt für $x, y \in X$ aus der Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_Y$ gemäß

$$\|x+y\|_X \;=\; \|A(x+y)\|_Y \;=\; \|Ax+Ay\|_Y \;\le\; \|Ax\|_Y + \|Ay\|_Y \;=\; \|x\|_X + \|y\|_X$$

   die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_X$.

   Somit bildet $\|\cdot\|_X$ in der Tat eine Norm auf X.

(b) Für alle $x \in X$ gilt

$$\|x\|_\infty \;=\; \max_{k=1,\dots,n} |x_k| \;\le\; \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1 \;\le\; \sum_{i=1}^n \max_{k=1,\dots,n} |x_k| \;\le\; n\|x\|_\infty,$$

   so dass $c = 1$ und $C = n$ gewählt werden können. Die Optimalität ergibt sich mit $x = (1,0,0,\dots,0)^T$ beziehungsweise $x = (1,1,\dots,1)^T$.

Zusatzaufgabe 2.2:

Zeigen Sie, dass für einen metrischen Raum (X,d) durch $d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ eine zu d äquivalente Metrik definiert wird.

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.2:

Sei $U \subset X$ bezüglich der Metrik d auf X offen und sei $x_0 \in U$ beliebig. Nach Definition existiert dann ein $\varepsilon > 0$, so dass die offene Kugel $B_\varepsilon(x_0)$ von Radius ε um x_0 bezüglich d vollständig in U enthalten ist. Wählen wir nun $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < 1$, so gilt für jedes $y \in X$ mit $d'(x_0,y) < \varepsilon'$ offensichtlich

$$d(x_0,y) \;=\; \frac{d'(x_0,y)}{1-d'(x_0,y)} \;\le\; \frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon'} \;<\; \frac{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}{1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \;=\; \frac{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}{\frac{1}{1+\varepsilon}} \;=\; \varepsilon\,.$$

Also liegt die bezüglich d' offene Kugel $B'_{\varepsilon'}(x_0)$ von Radius $\varepsilon' > 0$ um x_0 in $B_\varepsilon(x_0)$ und somit folglich in U. Da $x_0 \in U$ beliebig war, zeigt dies die Offenheit der Menge U bezüglich der durch d' induzierten Topologie.

Umgekehrt, stelle nun $U \subset X$ eine beliebige bezüglich der Metrik d' offene Menge in X dar, und sei $x_0 \in U$. Dann gibt es ein $\varepsilon' > 0$ mit $B'_{\varepsilon'}(x_0) \subset U$, wobei $B'_{\varepsilon'}(x_0)$ erneut die bezüglich d' offene Kugel um x_0 von Radius ε' bezeichnet. Ist nun $0 < \varepsilon < \varepsilon'$, so impliziert für jedes $y \in X$ die Abschätzung $d(x_0,y) < \varepsilon$ insbesondere

$$d'(x_0,y) = \frac{d(x_0,y)}{1+d(x_0,y)} \le d(x_0,y) < \varepsilon < \varepsilon'.$$

Folglich liegt für solche ε die Kugel $B_\varepsilon(x_0)$ in $B'_{\varepsilon'}(x_0)$, was die Offenheit von U bezüglich d zeigt.

Da in beiden Fällen die offene Menge U beliebig war, sind die induzierten Topologien wie behauptet gleich.

Zusatzaufgabe 2.3:

(a) Bezeichne $\mathbb{R}^\mathbb{N} := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller (nicht notwendigerweise konvergenten) reellen Zahlenfolgen. Zeigen Sie, dass für beliebige $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Zahl

$$d\Big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) \;:=\; \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \frac{|a_n - b_n|}{1+|a_n-b_n|}$$

   endlich ist und auf diese Weise eine Metrik auf $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ definiert wird.

(b) Bezeichne c_0 die Menge all derjenigen reellen Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, die für $n \to \infty$ gegen 0 konvergieren. Zeigen Sie, dass c_0 versehen mit

$$\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

   für $x = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in c_0 einen normierten Vektorraum bildet.

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.3:

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, definiert durch $f(x) = \frac{x}{1+x}$, ist wegen $0 \leq \frac{x}{1+x} \leq \frac{1+x}{1+x} = 1$ offensichtlich nach oben beschränkt. Mit der konvergenten Majorante $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$ existiert somit für beliebige $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Zahl

$$d\Big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|} .$$

Dadurch ist eine Metrik auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ erklärt, denn

- Die Definitheit ist erfüllt:

$$\begin{aligned} d\Big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = 0 \quad &\iff \quad \forall n \in \mathbb{N} : \frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|} = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N} : |a_n - b_n| = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N} : a_n = b_n \\ &\iff (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ stimmt mit } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ überein.} \end{aligned}$$

- Die Symmetrie ist erfüllt:

$$d\Big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|b_n - a_n|}{1 + |b_n - a_n|} = d\Big((b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$$

- Die Dreiecksungleichung ist erfüllt, denn die Funktion $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ist wegen $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$ auf $\mathbb{R}_0^+$ monoton wachsend. Somit folgt aus $x \leq y$ auch $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$, also auch (aufgrund der absoluten Konvergenz der beteiligten Reihen) mit der Dreiecksungleichung des Betrages

$$\begin{aligned} d\Big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|a_n - c_n + c_n - b_n|}{1 + |a_n - c_n + c_n - b_n|} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|a_n - c_n| + |c_n - b_n|}{1 + |a_n - c_n| + |c_n - b_n|} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\frac{|a_n - c_n|}{1 + |a_n - c_n| + |c_n - b_n|} + \frac{|c_n - b_n|}{1 + |a_n - c_n| + |c_n - b_n|} \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|a_n - c_n|}{1 + |a_n - c_n|} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|c_n - b_n|}{1 + |c_n - b_n|} \\ &= d\Big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) + d\Big((c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) \end{aligned}$$

(b) Da Summen und skalare Vielfache von Nullfolgen erneut Nullfolgen bilden, ist die lineare Struktur auf c_0 klar. Weiter ist es offensichtlich, dass $\|\cdot\|_\infty$ definit und homogen ist, während die Dreiecksungleichung für zwei Folgen $x := \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $y := \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus c_0 aus der Ungleichung

$$|a_m - b_m| \leq |a_m| + |b_m| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

durch Übergang zum Supremum über $m \in \mathbb{N}$ folgt.

Zusatzaufgabe 2.4:

Welche der angegebenen Folgen von Punkten im $\mathbb{R}^n$ konvergieren?

(a) $x_k = \left(\frac{1}{k}\cos k, \frac{1}{1+k}\sin k\right) \in \mathbb{R}^2$

(b) $y_k = \Big(\left(\frac{4}{3k} - 1\right)^k, \frac{k^2+7}{k^2-1}, \cos(2k)\Big) \in \mathbb{R}^3$

(c) $z_k = \left(\ln\left(\frac{4k}{k+1}\right), \mathrm{e}^{-k} \cdot s^{123k}\right) \in \mathbb{R}^2$ mit $s > 0$

Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Hinweis: $\lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k = \mathrm{e}^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.4:

(a) Die Folge $\{x_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $0 \in \mathbb{R}^2$, da wir mit der Notation $x_{1k} := \frac{1}{k}\cos s$ und $x_{2k} := \frac{1}{k+1}\sin k$ sehen, dass die Komponenten gemäß $|x_{1k}| = \left|\frac{1}{k}\cos k\right| \leq \frac{1}{k}$ beziehungsweise $|x_{2k}| = \left|\frac{1}{1+k}\sin k\right| \leq \frac{1}{k+1}$ jeweils Nullfolgen bilden.

(b) Wäre $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent, so auch insbesondere die erste Komponente. Erinnern wir uns jedoch an den Zusammenhang $\mathrm{e}^x = \lim\limits_{k\to\infty}(1+\frac{x}{k})^k$ für alle $x\in\mathbb{R}$, so folgt nach

$$\left(\tfrac{4}{3k}-1\right)^k = (-1)^k\left(1-\tfrac{4/3}{k}\right)^k,$$

dass für $k\to\infty$ die Folge der ersten Komponenten die beiden Häufungspunkte $\pm\mathrm{e}^{-4/3}$ aufweist und somit divergent ist. Also divergiert die Folge $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^3$.

(c) Betrachten wir einmal mehr die Komponenten einzeln, so ist die Konvergenz der ersten offensichtlich. In der Tat gilt $\frac{4k}{k+1}\to 4$ für $k\to\infty$ und somit aufgrund der Stetigkeit der Logarithmus-Funktion

$$\lim_{k\to\infty}\ln\left(\tfrac{4k}{k+1}\right) = \ln\left(\lim_{k\to\infty}\tfrac{4k}{k+1}\right) = \ln 4.$$

Um nun die zweite Komponente z_{k2} der Folge $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ebenfalls auf Konvergenz zu untersuchen, schreiben wir diese mit Hilfe des Logarithmus als

$$\mathrm{e}^{-k}\cdot s^{123k} \;=\; \mathrm{e}^{-k}\mathrm{e}^{\ln s^{123k}} \;=\; \mathrm{e}^{123k\ln(s)-k} \;=\; \mathrm{e}^{k(123\ln(s)-1)}.$$

Damit wird die Konvergenz beziehungsweise Divergenz von z_{k2} für $k\to\infty$ in Abhängigkeit von $s>0$ ersichtlich:

$$z_{k2}\to\begin{cases}0, & s<\mathrm{e}^{1/123},\\ 1, & s=\mathrm{e}^{1/123},\\ \infty, & s>\mathrm{e}^{1/123}.\end{cases}$$

Insgesamt folgern wir also, dass im Falle $s\le\mathrm{e}^{1/123}$ die Folge $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $(\ln 4,0)$ beziehungsweise $(\ln 4,1)$ für $k\to\infty$ konvergiert, während für $s>\mathrm{e}^{1/123}$ diese divergiert.

Zusatzaufgabe 2.5:

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N},d_\mathbb{N})$ mit $d_\mathbb{N}(m,n):=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|$ ein metrischer Raum ist.

(b) Zeigen Sie, dass im mit der diskreten Metrik, definiert durch

$$d_{\text{diskret}}(x,y) \;:=\; \begin{cases}0 & \text{für } x=y\\ 1 & \text{für } x\neq y\end{cases},$$

versehenen $\mathbb{R}^n$ eine Folge x_k genau dann gegen x konvergiert, wenn sie ab einem gewissen Index K konstant gleich x ist, d.h. wenn $\exists K\in\mathbb{N}:\forall k\ge K\,:\,x_k=x$.

(c) Geben Sie eine Folge an, die in $(\mathbb{R},d_{|\cdot|})$ konvergiert, jedoch in $(\mathbb{R},d_{\text{diskret}})$ nicht einmal eine Cauchy-Folge ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.5:

(a) Es ist $(\mathbb{N},d_\mathbb{N})$ ein metrischer Raum, wenn $d_\mathbb{N}:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ die drei Eigenschaften einer Metrik besitzt:

(i) $\forall m,n\in\mathbb{N}\;:\;\big(d_\mathbb{N}(m,n)\;=\;0 \iff \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|=0 \iff \frac{1}{n}=\frac{1}{m} \iff m=n\big)$

(ii) $\forall m,n\in\mathbb{N}\;:\;d_\mathbb{N}(m,n)\;=\;\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|\;=\;\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|\;=\;d_\mathbb{N}(n,m)$.

(iii) $\forall l,m,n\in\mathbb{N}\;:\;d_\mathbb{N}(l,n)\;=\;\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{l}\right|\;\le\;\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|+\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{l}\right|\;=\;d_\mathbb{N}(m,n)+d_\mathbb{N}(l,m)$.

(b) Sei $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^n$ eine beliebige Folge. Angenommen, x_k konvergiere für $n\to\infty$ bezüglich der diskreten Metrik d_{diskret} gegen einen Punkt $x\in\mathbb{R}^n$. Dann finden wir nach Definition zu der bezüglich der diskreten Topologie offenen Kugel $B_\varepsilon(x)\subset\mathbb{R}^n$ um x von Radius $\varepsilon=\frac{1}{2}$ ein Index $K\in\mathbb{N}$, so dass $x_k\in B_\varepsilon(x)$ für alle $k\ge K$ gilt. Da jedoch $B_\varepsilon(x)$ eben nur aus dem Element x selbst besteht, folgt somit $x_k=x$ für alle $k\ge K$.

Bleibt umgekehrt eine Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ab einem gewissen Index $K\in\mathbb{N}$ konstant, so gilt natürlich für alle $\varepsilon>0$

$$d_{\text{diskret}}(x,x_k)\;=\;0\;<\;\varepsilon$$

für $k\ge K$, d.h. x_k konvergiert bezüglich d_{diskret} gegen x für $k\to\infty$. Dies zeigt die Behauptung.

(c) Die Folge $x_n:=\frac{1}{n}$ konvergiert im metrischen Raum $(\mathbb{R},d_{|\cdot|})$ gegen $0\in\mathbb{R}$, da für beliebiges $\varepsilon>0$ bis auf endlich viele Ausnahmen alle Folgenglieder in der ε-Kugel $B_\varepsilon(0):=\{x\in\mathbb{R}\;:\;d_{|\cdot|}(x,0)=|x-0|<\varepsilon\}$ liegen. Da jedoch kein Folgenglied in den ε-Kugeln $B_\varepsilon(0):=\{x\in\mathbb{R}\;:\;d_{\text{diskret}}(x,0)<\varepsilon\}=\{0\}$ liegt, falls $\varepsilon<1$ ist, konvergiert x_n im metrischen Raum $(\mathbb{R},d_{\text{diskret}})$ nicht. Wegen $d_{\text{diskret}}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)=1$ für $m\neq n$ ist x_n noch nicht einmal eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R},d_{\text{diskret}})$.

Alle Übungsaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

Zusatzmaterial zur Analysis II – Übung zu Serie 3

Umgebung, Berührpunkt, Abschluss, Inneres, Rand

- Eine Teilmenge $V \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) heißt **Umgebung** des Punktes $x \in X$, falls es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset V$ gibt, oder äquivalenterweise, falls es eine offene Menge $U \subset V$ mit $x \in U$ gibt.
- Ein Punkt x heißt **Berührpunkt** einer Teilmenge $M \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d), wenn es eine Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ gibt, oder äquivalenterweise, wenn in jeder Umgebung von x mindestens ein Punkt aus M liegt.
- Die Menge aller Berührpunkte von M bezeichnet man mit $\overline{M}$ und nennt sie den **Abschluss** von M. Insbesondere gilt $M \subset \overline{M}$, da für $x \in M$ die konstante Folge $x, x, \ldots$ offensichtlich gegen x konvergiert.
- Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) nennt man **abgeschlossen**, wenn sie jeden ihrer Berührpunkte enthält, d.h. wenn $A = \overline{A}$ gilt, oder – mit anderen Worten – wenn für jede Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset A$, die in X konvergiert, auch der Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$ in A liegt.
  - Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raums (X, d) ist genau dann abgeschlossen, wenn sie das Komplement $A = X \setminus U$ einer offenen Menge in X ist (siehe Aufgabe). Folglich kann dies auch als die Definition einer abgeschlossenen Menge eines metrischen Raumes verwendet werden.
- Die Bezeichnung von $\overline{M}$ als Abschluss einer Teilmenge $M \subset X$ eines metrischen Raumes (M, d) macht insofern Sinn, als dass $\overline{M}$ in der Tat die minimale M enthaltende abgeschlossene Menge ist. Analog dazu nennt man die maximale in M enthaltene offene Menge das **Innere** von M und bezeichnet Sie mit M^o. Die Menge M^o besteht gerade aus den **inneren Punkten** von M, d.h. aus denjenigen Punkten $x \in M$, für die es eine Kugel $B_r(x)$ ($r > 0$) um x mit $B_r(x) \subset M$ gibt.
- Zuletzt definiert man noch den **Rand** ∂M einer Teilmenge $M \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) durch $\partial M := \overline{M} \setminus M^o$. Der Rand von M besteht genau aus den Punkten x, für die in jeder Umgebung von x sowohl Punkte aus M als auch aus $X \setminus M$ liegen, d.h., $\partial M = \{x \in X \mid \forall\varepsilon > 0\ \exists y \in B_\varepsilon(x) \cap M, \exists z \in B_\varepsilon(x) \setminus M\}$.

Vollständigkeit, Banach-Raum, Hilbert-Raum

- Eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt eine **Cauchy-Folge**, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $l, k \geq N$ die Ungleichung $d(x_k, x_l) < \varepsilon$ gilt.
- Ein metrischer Raum (X, d) heißt **vollständig**, wenn in X jede Cauchy-Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Einen vollständigen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ nennt man einen **Banach-Raum**. Entsprechend wird ein vollständiger Euklidischer Raum **Hilbert-Raum** genannt.
- Wichtige Beispiele für Banach-Räume bilden die reellen Vektorräume $\mathbb{R}^n$ ausgestattet mit einer beliebigen Norm, oder die Menge $C([a, b], \mathbb{R})$ der stetigen Abbildungen vom Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ versehen mit der Supremumsnorm $\|u\|_\infty := \sup\limits_{x\in[a,b]} |u(x)|$. Der $\mathbb{R}^n$ wird mit dem Euklidischen Skalarprodukt ein Hilbert-Raum.
- Jede abgeschlossene Teilmenge $M \subset X$ eines vollständigen metrischen Raumes (X, d) ist mit der eingeschränkten Metrik $d|_{M\times M}$ wieder vollständig. Insbesondere ist jeder abgeschlossene Unterraum eines Banach-Raumes erneut selbst (versehen mit der ursprünglichen Norm) ein Banach-Raum.
- Ist umgekehrt (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ derart, dass (M, d_M) ($d_M := d\big|_M$) zu einem vollständigen metrischen Raum wird, dann ist M eine abgeschlossene Teilmenge von X (siehe Aufgabe).
- Jeder metrische Raum kann isometrisch in einem vollständigen metrischen Raum eingebettet werden. Genauer gesagt existiert zu jedem metrischen Raum (X, d) ein vollständiger metrischer Raum $(\tilde{X}, \tilde{d})$ und eine Abbildung $\iota : X \to \tilde{X}$, so dass $\iota(X)$ dicht in $\tilde{X}$ liegt, d.h. $\overline{\iota(X)} = \tilde{X}$, und $\tilde{d}(\iota(x), \iota(y)) = d(x, y)$ gilt.

Banachscher Fixpunktsatz

- Ist $f : X \to X$ eine Kontraktion auf dem vollständigen metrischen Raum (X, d), d.h., existiert ein $L < 1$, so dass für alle $x, y \in X$ die Ungleichung $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$ erfüllt wird, dann gibt es genau einen Punkt $x^* \in X$ mit $f(x^*) = x^*$, welcher **Fixpunkt** von f genannt wird. Darüber hinaus konvergiert zu jedem Startwert $x_0 \in X$ jeweils die rekursiv definierte Folge $x_{k+1} = f(x_k)$ gegen den Fixpunkt x^* von f.

Zusatzaufgabe 3.1: Zeigen Sie:

(a) Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raums (X, d) ist genau dann abgeschlossen, wenn sie das Komplement $A = X \setminus U$ einer offenen Menge in X ist.

(b) Ist (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ derart, dass (M, d_M) ($d_M := d\big|_M$) zu einem vollständigen metrischen Raum wird, dann ist M eine abgeschlossene Teilmenge von X .

(c) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass dann die „Vierecksungleichung" für beliebige Elemente $u, v, x, y \in M$ gilt:

$$|d(u,v) - d(x,y)| \ \leq \ d(u,x) + d(v,y).$$

(d) Für beliebiges $M \neq \emptyset$ bezeichne $\operatorname{diam}(M) := \sup\limits_{x,y \in M} d(x,y)$. Beweisen Sie, dass $\operatorname{diam}(M) = \operatorname{diam}(\overline{M})$ gilt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.1:

(a) Die Äquivalenz der beiden angegebenen Bedingungen kann man folgendermaßen einsehen:

- Enthält A all seine Berührpunkte, dann ist jeder Punkt $x \in X \setminus A$ kein Berührpunkt von A , also gibt es zu jedem Punkt $x \in X \setminus A$ eine Umgebung V von x , in der kein Punkt aus A liegt, d.h. eine Umgebung V von x mit $V \subset X \setminus A$. Somit ist $U := X \setminus A$ Umgebung all seiner Punkte und daher offen, d.h. $A = X \setminus U$ ist das Komplement einer offenen Menge.
- Ist umgekehrt $A = X \setminus U$ Komplement einer offene Menge U und x ein Berührpunkt von A , dann kann x nicht in U liegen. Denn läge x in U , dann gäbe es aufgrund der Offenheit von U eine Umgebung um x , die komplett in U läge und daher keinen Punkt aus A enthielte, im Widerspruch dazu, dass x Berührpunkt von A ist. Also liegt x (und somit jeder Berührpunkt von A) automatisch in A .

(b) Sei $x \in X$ ein Berührpunkt von M . Dann existiert eine in X konvergente Folge $\{x_k\}_k$ aus M . Insbesondere ist dann $\{x_k\}_k$ eine Cauchy-Folge in M . Da (M, d_M) vollständig ist, konvergiert die Folge $\{x_k\}_k$ bereits in M (also gegen ein $m \in M$). Aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwertes muss nun aber $x = m$, also $x \in M$ gelten. Also enthält M alle seine Berührpunkte in X und ist somit eine abgeschlossene Teilmenge von X .

(c) Mit zweimaliger Anwendung der Dreiecksungleichung folgt

$$d(u,v) \ \leq \ d(u,x) + d(x,v) \ \leq \ d(u,x) + d(x,y) + d(y,v) \ = \ d(x,y) + d(u,x) + d(v,y),$$

also

$$d(u,v) - d(x,y) \ \leq \ d(u,x) + d(v,y) \ .$$

Analog ergibt sich auch

$$d(x,y) - d(u,v) \ \leq \ d(u,x) + d(v,y)$$

und damit die Behauptung.

(d) Wir beginnen mit der Beobachtung, dass natürlich $\operatorname{diam}(M) \leq \operatorname{diam}(\overline{M})$ gilt. Außerdem ist $\operatorname{diam}(M) = \operatorname{diam}(\overline{M})$, falls das Supremum $\sup\{d(x,y) | x, y \in \overline{M}\}$ für zwei Elemente x, y aus M angenommen wird. Ist dies hingegen nicht der Fall, so existieren Folgen

$$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \overline{M} \qquad \text{mit} \qquad d(x_k, y_k) \to \operatorname{diam}(\overline{M})$$

für $k \to \infty$. Nun sind für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Folgenglieder $x_k, y_k \in \overline{M}$ jeweils Berührungspunkte von M , so dass wir $\tilde{x}_k, \tilde{y}_k \in M$ mit $d(\tilde{x}_k, x_k) \leq \frac{1}{k}$ und entsprechend $d(\tilde{y}_k, y_k) \leq \frac{1}{k}$ finden. Für die so definierten Folgen $\{\tilde{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{\tilde{y}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in M erhalten wir mittels der Vierecksungleichung aus Aufgabenteil (c) demnach

$$0 \ \leq \ |d(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) - d(x_k, y_k)| \ \leq \ d(\tilde{x}_k, x_k) + d(\tilde{y}_k, y_k) \ \leq \ \frac{2}{k} \ \to \ 0$$

für $k \to \infty$. Folglich impliziert dies

$$\lim_{k\to\infty} d(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \ = \ \lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k) \ = \ \operatorname{diam}(\overline{M}),$$

und somit $\operatorname{diam}(\overline{M}) \ \leq \ \operatorname{diam}(M)$, was die Behauptung zeigt.

Zusatzaufgabe 3.2: Welche der folgenden Abbildungen $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definieren eine Metrik auf X ?

(a) $d(x,y) := \mathrm{e}^{x-y} - 1$ auf $X = \mathbb{R}$

(b) $d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 + \frac{1}{x+y} & \text{für } x \neq y \end{cases}$ auf $X = \mathbb{N}$

(c) $d(x,y) := |S(x) - S(y)|$ mit $S(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ auf $X = \mathbb{R}$

(d) $d(x,y) := \sin(\|x - y\|_2)$ auf $X = \mathbb{R}^2$

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.2:

(a) Es handelt sich offenbar nicht um eine Metrik, da im Allgemeinen $\mathrm{e}^x \neq \mathrm{e}^{-x}$ und daher für $x \neq y$ somit $d(x,y) = \mathrm{e}^{x-y} - 1 = \mathrm{e}^{-(y-x)} - 1 \neq \mathrm{e}^{y-x} - 1 = d(y,x)$, also die Symmetrie nicht gegeben ist.

(b) Es handelt es sich um eine Metrik, denn sowohl die Definitheit als auch die Symmetrie sind offenbar erfüllt. Für beliebige, paarweise verschiedene (sonst ist nichts zu zeigen) $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt darüberhinaus

$$d(x,z) = 1 + \frac{1}{x+z} \leq 1 + 1 \leq 1 + \frac{1}{x+y} + 1 + \frac{1}{y+z} = d(x,y) + d(y,z) .$$

(c) Da die stetige Funktion $S(x)$ wegen $S'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} > 0$ streng monoton wachsend ist, folgt sofort auch die Injektivität von $S(x)$, was die Definitheit

$$0 = d(x,y) \iff 0 = |S(x) - S(y)| \iff 0 = S(x) - S(y) \iff S(x) = S(y) \iff x = y$$

liefert. Die Symmetrie ist offensichtlich und die Dreiecksungleichung ergibt sich wegen

$$d(x,z) = |S(x) - S(z)| = |S(x) - S(y) + S(y) - S(z)| \leq |S(x) - S(y)| + |S(y) - S(z)| = d(x,y) + d(y,z) ,$$

so dass es sich hier tatsächlich um eine Metrik handelt.

(d) Hier liegt keine Metrik vor, denn beispielsweise für Vektoren $(3n\pi, 0)^T = x \neq y = (0, 4n\pi)^T$ ($n \in \mathbb{N}$) ist

$$d(x,y) = \sin\left(\left\| \begin{pmatrix} 3n\pi \\ -4n\pi \end{pmatrix} \right\|_2\right) = \sin\left(\sqrt{9n^2\pi^2 + 16n^2\pi^2}\right) = \sin(5n\pi) = 0 ,$$

was der Definitheit einer Metrik widerspräche.

Zusatzaufgabe 3.3:

Zeigen Sie, dass für $1 < p < \infty$ der Vektorraum l^p der reellen Zahlenfolgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, für die $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ konvergiert, versehen mit der Norm

$$\|a\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

vollständig ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.3:

Sei $1 < p < \infty$ und dazu eine beliebige Cauchy-Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in l^p gegeben. Wir beginnen mit der Konstruktion des Grenzwertes der Cauchy-Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dazu verwenden wir die Notation $x_n = \{a_{nm}\}_{m\in\mathbb{N}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann zeigt die Abschätzung

$$|a_{kn} - a_{ln}| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ki} - a_{li}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x_k - x_l\|_p^p,$$

dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Komponentenfolge $\{a_{nm}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ bildet und aufgrund des Vollständigkeitsaxiom somit $a_m := \lim\limits_{n\to\infty} a_{nm}$ existiert. Definieren wir nun $x := \{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, dann bleibt nur noch $x \in l^p$ und $\|x - x_n\|_p \to 0$ für $n \to \infty$ zu zeigen. Wählen wir dazu $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Cauchy-Eigenschaft der Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existiert ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\|x_k - x_l\|_p < \varepsilon$ für alle $k, l \geq K$. Insbesondere erhalten wir damit für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\left(\sum_{i=1}^{N} |a_{ki} - a_{li}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ki} - a_{li}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x_k - x_l\|_p < \varepsilon$$

für $k, l \geq K$ und daher – nach dem Übergang $l \to \infty$ – ebenso

$$\left(\sum_{i=1}^{N} |a_{ki} - a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

für alle Indizes $k \geq K$. Da $N \in \mathbb{N}$ beliebig war, impliziert somit $k \geq K$ die Gültigkeit von

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ki} - a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon .$$

Folglich ist $x_K - x \in l^p$ und aufgrund der Linearität von l^p auch

$$x = x_K - x_K + x = x_K - (x_K - x) \in l^p.$$

Da nun $\varepsilon > 0$ auch noch beliebig war, zeigt unsere obere Argumentation auch zugleich die Konvergenz $\|x_n - x\|_p \to 0$ für $n \to \infty$. Also ist l^p versehen mit der $\|\cdot\|_p$-Norm wie behauptet vollständig.

Zusatzaufgabe 3.4:

(a) Sei $f(x) := x^2$. Bestimmen Sie das maximale (beschränkte) Intervall, auf dem f eine Selbstabbildung ist.

(b) Für welche $b > 0$ ist $f : [0, b] \to [0, b]$ aus (a) eine Kontraktion?

(c) Zeigen Sie, dass $\|Ax\|_2 \leq 2\|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit der Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ erfüllt ist.

(d) Beweisen Sie, dass die durch $f(x) := \frac{1}{4}(Ax + b)$ mittels der oben angegebenen Matrix A und dem Vektor $b := (1, \sqrt{3})^T$ definierte Abbildung auf der Teilmenge $D := \{(x, y)^T \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ der Euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.4:

(a) Das maximale Intervall ist $[-1, 1]$, denn $f([-1, 1]) \subset [0, 1]$ und aus $|x| > 1$ folgt $f(x) > |x|$.

(b) Für alle $b < \frac{1}{2}$, denn für $x, y \in [0, b]$ gilt $\quad |f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y| \leq 2b \cdot |x - y|$.

(c) Für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \left\| A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2^2 = (x-\sqrt{2}y)^2+(-\sqrt{2}x)^2 = 3x^2-2\sqrt{2}xy+2y^2 \leq 4(x^2+y^2) = 4 \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

wegen

$$0 \leq (x \pm \sqrt{2}y)^2 = x^2 \pm 2\sqrt{2}xy + 2y^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |2\sqrt{2}xy| \leq x^2 + 2y^2.$$

Mittels Wurzelziehen folgt nun die Behauptung.

(d) Als abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes $(\mathbb{R}^2, d_{\|\cdot\|_2})$ wird die Kreisscheibe $D \subset \mathbb{R}^2$ mit der auf D eingeschränkten Metrik $d_{\|\cdot\|_2}\big|_D$ selbst zu einem vollständigen metrischen Raum. Also hat man nur noch zu überprüfen, ob f eine kontrahierende Selbstabbildung auf D ist. Die Abbildung f bildet die Kreisscheibe tatsächlich in sich ab, denn für jedes $x \in D$ gilt

$$\|f(x)\|_2 \leq \frac{1}{4}(\|Ax\|_2 + \|b\|_2) \leq \frac{1}{4}(2\|x\|_2 + \|b\|_2) \leq \frac{1}{4}(2 + 2) = 1 ,$$

also $f(x) \in D$. Darüberhinaus bildet f gemäß

$$\|f(x) - f(y)\|_2 = \frac{1}{4}\|Ax - Ay\| = \frac{1}{4}\|A(x - y)\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|$$

für alle $x, y \in D$ eine Kontraktion mit Konstraktionskonstanten $L = \frac{1}{2} < 1$. Also ist der BANACHsche Fixpunktsatz anwendbar und liefert die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes in D.

Zusatzaufgabe 3.5:

(a) Sei (X, d) metrisch und $Y, Z \subset X$. Zeigen Sie: (i) Y offen $\Longleftrightarrow \partial Y \cap Y = \emptyset \Longleftrightarrow Y = Y^o$

(ii) Y abgeschlossen $\Longleftrightarrow \partial Y \subset Y \Longleftrightarrow Y = \overline{Y}$ (iii) $\overline{Y \cup Z} = \overline{Y} \cup \overline{Z}$ (iv) $\overline{Y \cap Z} \subset \overline{Y} \cap \overline{Z}$

(b) Sind die Mengen $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 1, x > 0, y > 0\}$, $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x)^2 + (3y)^2 \geq 4\}$ und $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 1 < y \leq 2\}$ in $(\mathbb{R}, d_{\|\cdot\|_2})$ offen bzw. abgeschlossen?

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.5:

(a) (i) Es ist (Y offen) $\Longleftrightarrow (\forall x \in Y \ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset Y) \Longleftrightarrow (\forall x \in Y \ : \ x \notin \partial Y) \Longleftrightarrow (Y \cap \partial Y = \emptyset)$.
Dabei haben wir verwendet, dass $B_\varepsilon(x) \subset X \setminus Y$ für $x \in Y$ nicht möglich ist.
Wegen $Y^o \subset Y \subset \overline{Y}$ und $\partial Y = \overline{Y} \setminus Y^o$ gilt $(Y \cap \partial Y = \emptyset) \Longleftrightarrow (Y \cap \overline{Y} \setminus Y^o = \emptyset) \Longleftrightarrow (Y = Y^o)$.

(ii) Mit $\partial Y = \partial(X \setminus Y)$ gilt (Y abgeschlossen) $\Longleftrightarrow$ ($X \setminus Y$ offen) $\overset{\text{(i)}}{\Longleftrightarrow} (\partial(X\setminus Y) \cap (X \setminus Y) = \emptyset) \Longleftrightarrow (\partial Y \subset Y)$ und wegen $\partial Y = \overline{Y} \setminus Y^o$ und $Y^o \subset Y \subset \overline{Y}$ gilt $(\partial Y \subset Y) \Longleftrightarrow (\overline{Y} \setminus Y^o \subset Y) \Longleftrightarrow (\overline{Y} \subset Y) \Longleftrightarrow (\overline{Y} = Y)$.

(iii) Es gilt $x \in \overline{Y} \cup \overline{Z} \Longleftrightarrow x$ Berührpunkt von Y oder $Z \Longleftrightarrow x$ Berührpunkt von $Y \cup Z \Longleftrightarrow x \in \overline{Y \cup Z}$

(iv) Es gilt $x \in \overline{Y \cap Z} \Longleftrightarrow x$ Berührpunkt von $Y \cap Z \Longrightarrow x$ Berührpunkt von Y und von $Z \Longleftrightarrow x \in \overline{Y} \cap \overline{Z}$

(b) (i) Offen, denn es gilt $\partial A \cap A = \emptyset$ wegen

$$\partial A = \{(x, y) \mid x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\} \cup \{(x, y) \mid x = 0, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 0\} .$$

(ii) Abgeschlossen, denn es gilt $\quad \partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x)^2 + (3y)^2 = 4\} \subset B$.

(iii) Weder offen noch abgeschlossen, denn es gilt sowohl $\partial C \cap C \neq \emptyset$ als auch $\partial C \cap (\mathbb{R}^2 \setminus C) \neq \emptyset$ wegen

$$\partial C = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y \in \{1, 2\}\} \cup \{(x, y) \mid x \in \{0, 1\}, 1 \leq y \leq 2\} .$$

Alle Übungsaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

Zusatzmaterial zur Analysis II – Übung zu Serie 4

Stetigkeit, Lipschitz- und gleichmäßige Stetigkeit, stetige Fortsetzbarkeit, gleichmäßige Konvergenz

- Eine Abbildung $f : X \to Y$ von einem metrischen Raum (X, d_X) in einen metrischen Raum (Y, d_Y) heißt **stetig** im Punkt $a \in X$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in X$ die Implikation $d_X(x, a) \le \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) \le \varepsilon$ gilt (Definition 1.34). Dieses ε - δ -Kriterium der Stetigkeit ist äquivalent zu folgenden weiteren Charakterisierungen:
  - Für jede Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ folgt $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.
  - Zu jeder Umgebung $V \subset Y$ von $f(a)$ existiert eine Umgebung $U \subset X$ von a mit $f(U) \subset V$ (Lemma 1.35).

  Ist die Abbildung f in jedem Punkt $a \in X$ stetig, so bezeichnen wir f als **stetig** auf X oder einfach stetig.
- Eine Abbildung $f : X \to Y$ vom metrischen Raum (X, d_X) in den metrischen Raum (Y, d_Y) ist genau dann stetig, wenn Urbilder offener Mengen in Y offen in X sind, oder äquivalenterweise die Urbilder abgeschlossener Mengen in Y abgeschlossen in X sind (Satz 1.36).
- Seien metrische Räume $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ und Abbildungen $f = (f_1, f_2) : X \to Y \times Z$, $g : X \to Y$ und $h : Y \to Z$ gegeben. Dann ist die Abbildung f genau dann im Punkt $a \in X$ stetig, wenn die Komponentenfunktionen $f_1 : X \to Y$ und $f_2 : X \to Z$ stetig sind (Lemma 1.39). Ist die Abbildung g im Punkt $a \in X$ und die Abbildung h im Punkt $g(a)$ stetig, dann ist auch die Komposition $h \circ g : X \to Z$ stetig (Satz 1.40).
- Beispiele für stetige Abbildungen sind die konstanten Abbildungen zwischen metrischen Räumen, die Norm sowie die Addition und skalare Multiplikation eines normierten Raumes oder die Projektion $X \times Y \ni (x, y) \mapsto x \in X$ (Beispiel 1.38).
- Weiter sind für stetige Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$ auf einem metrische Raum (X, d) die Abbildungen $f + g$ und $f \cdot g$ stetig. Gilt darüberhinaus $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig auf X (Korollar 1.41).
- (Definition 1.44) Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) heißt
  - **Lipschitz-stetig**, wenn es ein $L \ge 0$ mit
    $$d_Y(f(x), f(x')) \le L\, d_X(x, x')$$
    für alle $x, x' \in X$ gibt.
  - **gleichmäßig stetig**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass
    $$d_X(x, x') \le \delta \qquad \Longrightarrow \qquad d_Y(f(x), f(x')) \le \varepsilon$$
    für alle $x, x' \in X$ gilt, und
- Aus Lipschitz-Stetigkeit folgt gleichmäßige Stetigkeit, aus gleichmäßiger Stetigkeit folgt Stetigkeit (Lemma 1.45).
- Eine stetige Bijektion $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen $(X, d_X), (Y, d_Y)$, deren Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ auch stetig ist, heißt ein **Homöomorphismus** zwischen X und Y. Die Räume X und Y werden in diesem Fall **homöomorph** genannt. Für solch eine Abbildung ist $x_k \to x$ äquivalent zu $f(x_k) \to f(x)$.
- Analog können wir den Grenzwert einer Abbildung $f : D \to Y$ ($D \subset X$) in einem Berührpunkt a von $D \setminus \{a\}$ und – im Falle der Existenz – die stetige Abänderung/Fortsetzung von f in a definieren (Definition 1.47).
- Eine Folge $f_k : X \to Y$ von Abbildungen zwischen metrischen Räumen (X, d_X), (Y, d_Y) heißt **gleichmäßig konvergent** gegen $f : X \to Y$, falls $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\sup\limits_{x\in X} d_Y(f_k(x), f(x)) \right) = 0$ erfüllt ist (Definition 1.48).
- Die Grenzabbildung $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ einer gleichmäßig konvergenten Folge $f_k : X \to Y$ stetiger Abbildungen zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) ist selbst wieder stetig (Lemma 1.49).

Stetige lineare Abbildungen

- Eine lineare Abbildung $A : X \to Y$ zwischen normierten Vektorräumen $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ ist genau dann stetig, wenn es eine Konstante $L < \infty$ gibt, so dass für alle $x \in X$ die Ungleichung
  $$\|Ax\|_Y \;\le\; L\|x\|_X \tag{4.1}$$

gilt (Lemma 1.50). Insbesondere gelten für eine lineare Abbildung $A : X \to Y$ folgende Äquivalenzen:

$$A \text{ stetig} \iff A \text{ stetig bei } x = 0 \iff \exists L < \infty\ \forall x \in X : \|Ax\|_Y \le L\|x\|_X \iff A \text{ gleichmäßig stetig}$$

- Die Menge $L(X, Y)$ aller stetigen linearen Abbildungen von einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ in einen normierten Raum $(Y, \|\cdot\|_Y)$ bildet einen Vektorraum. Durch

$$\|A\|_{L(X,Y)} := \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0_X}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X=1}} \|Ax\|_Y$$

wird auf $L(X, Y)$ eine Norm definiert, welche **Operatornorm** von $A : X \to Y$ genannt wird, welche genau die kleinstmögliche Lipschitz-Konstante in Gleichung (4.1) darstellt und welche $\|Ax\|_Y \le \|A\|_{L(X,Y)}\|x\|_X$ für alle $x \in X$ erfüllt (Lemma 1.51). Speziell ist $L(X, X)$ der Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen $A : X \to X$, welche **Endomorphismen** genannt werden.

- (Lemma 1.51) Sind $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ normierte Räume und $A \in L(X, Y)$ sowie $B \in L(Y, Z)$, dann gilt $B \circ A \in L(X, Z)$ mit

$$\|B \circ A\|_{L(X,Z)} \le \|B\|_{L(Y,Z)} \cdot \|A\|_{L(X,Z)}$$

Ist X ein Banach-Raum, dann ist der Vektorraum $L(X, X)$ ebenfalls vollständig und bildet zusammen mit der Komposition von Abbildungen eine sogenannte **Banach-Algebra**, d.h., $L(X, X)$ ist ein Banach-Raum versehen mit einer bilinearen assoziativen Multiplikation

$$L(X, X) \times L(X, X) \ni (A, B) \longmapsto AB := A \circ B \in L(X, X)$$

und der zusätzlichen Eigenschaft, dass $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$ für alle $A \in L(X, X)$ gilt (Lemma 1.53).

- Auf einem Banach-Raum können wir auch Folgen und Reihen betrachten. Insbesondere konvergiert jede absolut konvergente Reihe auch im üblichen Sinne (Lemma 1.54). In Banach-Algebren lassen sich auch die Begriffe Potenzreihe und Konvergenzradius übertragen. Für $A \in L(X, X)$ heißt $f(A) := \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ die **Neumann-Reihe**.

- Die Gruppe $GL(X)$ aller invertierbaren stetigen linearen Abbildungen auf einem Banach-Raum X ist eine offene Teilmenge von $L(X, X)$, und die Abbildung $GL(X) \ni A \longmapsto A^{-1} \in GL(X)$ stetig (Satz 1.55).

Kompaktheit

- Sei (X, T) ein topologischer Raum. Eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ (mit einer beliebig großen Indexmenge I) von offenen Mengen $U_i \in T$ heißt **offene Überdeckung** von $A \subset X$, wenn

$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$$

gilt. Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt **(überdeckungs)kompakt**, falls zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von K eine endliche Teilüberdeckung existiert, d.h., falls mit endlich vielen Indizes $i_1, \ldots, i_m \in I$ bereits

$$X \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_{i_j}$$

erfüllt ist (Definition 1.56). In metrischen Räumen (X, d) ist die Kompaktheit einer Teilmenge $K \subset X$ äquivalent dazu, dass jede Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt (Lemma 1.57). Letztere Eigenschaft wird auch **Folgen-Kompaktheit** genannt. Insbesondere folgt, dass eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes beschränkt und abgeschlossen sein muss. Die Umkehrung gilt jedoch i.A. nicht.

- In endlich-dimensionalen normierten Räumen $(X, \|\cdot\|)$ ist eine Teilmenge $K \subset X$ genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist (Satz 1.58). Insbesondere folgt damit, dass jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten metrischen Raumes wieder kompakt ist (Lemma 1.62).

- Stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen erhalten Kompaktheit in dem Sinne, als dass Bilder $f(K) \subset Y$ von kompakten Mengen $K \subset X$ unter einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ wieder kompakt sind (Satz 1.59). Eine direkte Folge davon ist, dass im Falle $Y = \mathbb{R}$ die stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ auf jedem Kompaktum $K \subset X$ ein Maximum und ein Minimum annimmt (Korollar 1.60).

- Sind X, Y metrische Räume und X kompakt, dann ist jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ gleichmäßig stetig (Satz 1.61). Ist f zusätzlich bijektiv, dann ist auch ihre Umkehrabbildung f^{-1} stetig, d.h. jede stetige Bijektion von einem kompakten metrischen Raum in einen metrischen Raum bildet einen Homöomorphismus (Satz 1.63).

Zusatzaufgabe 4.1:

(a) Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und $C([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig } \}$. Ist $C([a,b],\mathbb{R})$ vollständig mit

$$\text{(i)} \quad \|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \,, \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|dx \;?$$

(b) Ist $d(f,g) := |f(0) - g(0)|$ eine Metrik auf $C([0,1],\mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig } \}$?

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.1:

(a) (i) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\big(C([a,b],\mathbb{R}), \|\,.\,\|_\infty\big)$. Dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m,n \in \mathbb{N} \;:\; \Big(n,m \geq n_0 \implies \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\Big) \,,$$

so dass insbesondere $(f_n(x))$ für jedes feste $x \in [a,b]$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist, welche aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ jeweils gegen ein $f(x)$ konvergiert. Die durch den punktweisen Grenzwert gegebene Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ erfüllt jedoch (nach Grenzübergang) ebenso

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m,n \in \mathbb{N} \;:\; \Big(n,m \geq n_0 \implies \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big) \,,$$

was genau der gleichmäßigen Konvergenz der stetigen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ entspricht. Nach Lemma 1.49 ist nun f selbst wiederum stetig, also in $C([a,b],\mathbb{R})$ enthalten. Somit wird $C([a,b],\mathbb{R})$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ zu einem Banach-Raum.

(ii) Mit der Norm $\|\cdot\|_1$ ist $C([a,b],\mathbb{R})$ jedoch nicht vollständig, denn beispielsweise die durch

$f_n(x) \;:=\; \begin{cases} nx, & x \in \left[0,\frac{1}{n}\right[\\ 1, & x \in \left[\frac{1}{n},1\right] \end{cases}$ gegebene Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $(C([0,1],\mathbb{R})$ besitzt $f(x) \;:=\; \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \in \left]0,1\right] \end{cases}$

als punktweisen Grenzwert, der in 0 unstetig und daher nicht mehr in $(C([0,1],\mathbb{R})$ ist. Andererseits gilt

$$\|\, f_n - f \,\|_1 \;=\; \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx \;=\; \int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nx)dx \;=\; \Big[x - \frac{n}{2}x^2\Big]_0^{\frac{1}{n}} \;=\; \frac{1}{2n} \;\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 0.$$

(b) Nein, denn beispielsweise für $f(x) = x^2$ und $g(x) = 0$ gilt einerseits $f(0) = g(0)$, also demzufolge $d(f,g) = 0$, aber offenbar ist $f \neq g$, womit die Definitheit verletzt wäre.

Zusatzaufgabe 4.2:

(a) Sei (X,d) ein metrischer Raum und seien $f,g : X \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie: Die Funktionen

$$\text{(i)} \quad x \mapsto \max(f(x),g(x)) \qquad \text{und} \qquad \text{(ii)} \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)^2}{\sqrt{f(x)^2+g(x)^2}} & ,\ (f(x),g(x)) \neq (0,0) \\ 0 & ,\ (f(x),g(x)) = (0,0) \end{cases}$$

sind stetig von X nach $\mathbb{R}$.

(b) Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \frac{\sin(x^2)}{x^2+y^2}$ beschränkt?
Kann man f bezüglich der Euklidischen Norm stetig in den Punkt $(0,0)$ fortsetzen?

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.2:

(a) (i) Da $f,g : X \to \mathbb{R}$ nach Voraussetzung beide stetig sind, folgt aus der Konvergenz $y \to x$ insbesondere auch $f(y) \to f(x)$ als auch $g(y) \to g(x)$. Weiter gilt

$$\max(f(x),g(x)) \;=\; \frac{1}{2}|f(x) - g(x)| + \frac{1}{2}(f(x) + g(x)),$$

so dass wir unter Berücksichtigung von $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \Big|\max(f,g)(x) - \max(f,g)(y)\Big| \;&=\; \frac{1}{2}\Big||f(x) - g(x)| + f(x) + g(x) - |f(y) - g(y)| - f(y) - g(y)\Big| \\ &\leq\; \frac{1}{2}\Big(\Big||f(x) - g(x)| - |f(y) - g(y)|\Big| + |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|\Big) \\ &\leq\; \frac{1}{2}\Big(\Big|(f(x) - g(x)) - (f(y) - g(y))\Big| + |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|\Big) \\ &\leq\; |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \end{aligned}$$

finden. Demzufolge impliziert $y \to x$ auch $\max(f,g)(y) \to \max(f,g)(x)$, also die Stetigkeit von $\max(f,g)$ in x. Da $x \in X$ beliebig war, folgt somit die Behauptung.

(ii) Zunächst folgt nach Lemma 1.39 die Stetigkeit von $x \mapsto (f(x), g(x))$. Weiterhin ist die Funktion

$$(u,v) \mapsto \begin{cases} \frac{u^2}{\sqrt{u^2+v^2}} & ,\ (u,v) \neq (0,0) \\ 0 & ,\ (u,v) = (0,0) \end{cases}$$

von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ ist stetig, da sie einerseits in jedem Punkt $(u,v) \neq (0,0)$ als Quotient der stetigen Funktionen $(u,v) \mapsto u^2$ und $(u,v) \mapsto \|(u,v)\|_2$ stetig ist und andererseits wegen $\frac{u^2}{\sqrt{u^2+v^2}} \leq \frac{u^2}{\sqrt{u^2}} \leq |u|$ im Punkt $(0,0)$ stetig ist, weil diese Ungleichung insbesondere

$$\frac{u^2}{\sqrt{u^2+v^2}} \to 0$$

für $(u,v) \mapsto 0 \in \mathbb{R}^2$ impliziert. Als Komposition von stetigen Abbildungen ist somit insbesondere

$$x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto \frac{f(x)^2}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}$$

auf ganz X stetig.

(b) Es gilt $|\sin(x^2)| \leq x^2 \leq x^2 + y^2$, also ist $|f(x,y)| \leq 1$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$, und somit ist f beschränkt. Aber f kann nicht stetig in $(0,0)$ fortgesetzt werden, denn einerseits gilt nach den Regeln von L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^2)}{2x} = 1,$$

andererseits aber $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$.

Zusatzaufgabe 4.3:

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\ , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f partiell (d.h. in jedem Argument) stetig ist, die iterierten Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$, $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ existieren, jedoch f in $(0,0)$ nicht stetig ist.

(b) Für $\left(C^1([-1,1]), \|\,.\,\|_\infty\right)$ und $\left(C([-1,1]), \|\,.\,\|_\infty\right)$ betrachten wir die durch $A(f) := f'$, $f \in C^1([-1,1])$, definierte lineare Abbildung $A : C^1([-1,1]) \to C([-1,1])$. Untersuchen Sie, ob A stetig ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.3:

(a) Halten wir eines der beiden Argumente von f (bspw. y) fest, so ist $f_y(x) := f(x,y)$ in allen $x \in \mathbb{R}$ stetig:

- Ist $y \neq 0$, dann gilt für den Nenner stets $x^2y^2 + (x-y)^2 > 0$, so dass $f_y(x)$ als Quotient stetiger Funktionen in allen $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.
- Ist $y = 0$, dann ist $f_0(y)$ nach Definition die konstante Nullfunktion, die auch stetig ist.

Aufgrund der Symmetrie folgt analog die Stetigkeit der Funktionenschar $f_x(y) := f(x,y)$. Somit ist f partiell stetig.

Für $y \neq 0$ ergibt sich zunächst $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{0}{y^2} = 0$. Für $y = 0$ erhalten wir ähnlich

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0.$$

Also folgt insgesamt $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$. Aufgrund der Symmetrie von f in seinen beiden Argumenten, d.h.

$$\forall x,y \in \mathbb{R} : f(x,y) = f(y,x)\ ,$$

folgt dann auch $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$. Damit existieren die beiden iterierten Limiten.

Für die Stetigkeit von f in $(0,0)$ müsste gelten, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x,y \in \mathbb{R}\ :\ \left(d_{\mathbb{R}^2}\big((0,0),(x,y)\big) < \delta \implies |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon\right)\ .$$

Dies ist aber nicht erfüllt, denn wegen

$$\left|f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) - 0\right| = \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2} - \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)^2} = 1$$

und

$$d_{\mathbb{R}^2}\left((0,0),\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{n}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{n}-0\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

finden wir zu keinem $\varepsilon < 1$ solch ein $\delta > 0$. Demzufolge kann f in $(0,0)$ nicht stetig sein.

(b) Offenbar ist die Abbildung A bezüglich der angegebenen Räume nicht stetig, da beispielsweise für die Funktionenfolgen $f_n(x) := x^n$ oder $g_n(x) := \sin(nx)$ zwar jeweils

$$\| f_n \|_\infty \;:=\; \max_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = 1\ , \quad \text{bzw.} \quad \| g_n \|_\infty \;:=\; \max_{x\in[-1,1]} |g_n(x)| = 1\ ,$$

aber auch

$$\begin{aligned} \| Af_n \|_\infty &= \| f_n' \|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |nx^{n-1}| = n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \\ \| Ag_n \|_\infty &= \| g_n' \|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |n\cos(nx)| = n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \end{aligned}$$

gelten. Somit kann es keine Konstante $C < \infty$ geben, für die gilt, dass

$$\forall f \in C^1([-1,1]) \ :\ \| Af \|_\infty \;\le\; C\cdot \| f \|_\infty\ .$$

Zusatzaufgabe 4.4:

(a) Sei $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ derart, dass zu festen Basen eine zugehörige symmetrische Matrix $A := (a_{jk})_{j,k=1}^n$ von $\mathcal{A}$ existiert. Bestimmen Sie von A als Abbildung von $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ nach $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ die Operatornorm.[1]

(b) Sei $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ gegeben. Zu festen Basen sei $B := (b_{jk})_{j,k=1}^{n,m}$ die zugehörige Matrix von $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie die Operatornorm von B als Abbildung von $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$ nach $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$.

(c) Bestimmen Sie die Operatornorm von $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{7} \\ \sqrt{7} & -4 \end{pmatrix}$ als Abbildung von $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ nach $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ und von $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & -12 \end{pmatrix}$ als Abbildung von $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$ nach $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.4:

(a) Dass die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ symmetrischer Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sämtlich reell sind und darüberhinaus eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert, so dass $U^TAU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ Diagonalgestalt hat, wurde oder wird in der Linearen Algebra gezeigt. Besitze also im Folgendem $\mathcal{A}$ eine symmetrische Darstellungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und bezeichne $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die zugehörige orthogonale Transformationsmatrix U mit

$$U^TAU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =: D.$$

Dann gilt aufgrund der Orthogonalität $U^TU = I_n$ und damit für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|Ux\|_2^2 \;=\; \langle Ux, Ux\rangle \;=\; (Ux)^TUx \;=\; x^T(U^TUx) \;=\; x^TI_nx \;=\; x^Tx \;=\; \|x\|_2^2$$

und somit insbesondere $U(\partial B_1(0)) = \partial B_1(0) = U^T(\partial B_1(0))$. Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|AUx\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|U^TAUx\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Dx\|_2 \\ &= \sup_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 x_k^2} \;\le\; \max_{k=1,\ldots,n} |\lambda_k| \sup_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} = \max_{k=1,\ldots,n} |\lambda_k| \sup_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = \max_{k=1,\ldots,n} |\lambda_k|. \end{aligned}$$

Da für einen Einheitsvektor $x = e_j$ zu einem j mit $\max\limits_{k=1,\ldots,n} |\lambda_k| = |\lambda_j|$ weiterhin $\|De_j\|_2 = \max\limits_{k=1,\ldots,n} |\lambda_k|$ gilt, folgt sogar Gleichheit.

(b) Die Operatornorm ist in diesem Fall $\|B\| = \max\limits_{s=1,\ldots,m} \sum\limits_{j=1}^n |b_{js}|$ (die sog. Spaltensummennorm), denn mit $Bx = \left(\sum\limits_{k=1}^m b_{jk}x_k\right)_{j=1}^n$ erhalten wir

$$\|Bx\|_1 \;=\; \sum_{j=1}^n \left|\sum_{k=1}^m b_{jk}x_k\right| \;\le\; \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^m |b_{jk}|\cdot|x_k| \;\le\; \sum_{k=1}^m \max_{s=1,\ldots,m}\left(\sum_{j=1}^n |b_{js}|\right)|x_k| \;\le\; \max_{s=1,\ldots,m}\left(\sum_{j=1}^n |b_{js}|\right)\|x\|_1,$$

wobei die Gleichheit etwa für den j-ten Einheitsvektor auftritt, falls die j-te Spaltensumme maximal ist.

[1] Zur Erinnerung: Symmetrische Matrizen A (also Matrizen, für die $A^T = A$ gilt) besitzen nur reelle Eigenwerte. Weiterhin existiert eine orthogonale Matrix U (deren Spalten genau aus den paarweise orthogonalen Eigenvektoren von A besteht), so dass U^TAU eine Diagonalmatrix ist (Hauptachsentransformation), welche die Eigenwerte auf der Diagonalen stehen hat.

(c) Nach (b) ist einerseits $\|A\| = 5$, da sich die Eigenwerte 3 und -5 von A als die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(\lambda I_2 - A) = (\lambda-2)(\lambda+4) - 7 = \lambda^2 + 2\lambda - 15 = (\lambda+5)(\lambda-3)$ von A ergeben, und andererseits

$$\|B\| = \max_{k=1,\ldots,3} \sum_{j=1}^{2} |b_{jk}| = \max\{|3| + |1|, |-5| + |2|, |7| + |-12|\} = \max\{4, 7, 19\} = 19.$$

Zusatzaufgabe 4.5:

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie die Offenheit von

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \{x \in X \mid f(x) = c_i\} . \tag{4.2}$$

(b) Zeigen Sie: Die Menge $A := \left\{\frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ ist als Teilmenge des euklidischen $\mathbb{R}$ kompakt.

(c) Zeigen Sie, dass die Menge $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | \ A^T A = \mathrm{Id}\}$ der orthogonalen reellen $n \times n$-Matrizen im normierten Raum $\big(L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L(R^n,\mathbb{R}^n)}\big)$ der stetigen linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ kompakt ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.5:

(a) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist das Urbild $f^{-1}(\{c\})$ von c unter f aufgrund der Stetigkeit und Abgeschlossenheit von $\{c\} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen in X. Da jede endliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen eines metrischen Raumes wieder abgeschlossen ist, muss (4.2) als Komplement einer solchen offen sein.

(b) Es ist zu zeigen, dass zu einer beliebigen offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von A eine endliche Teilüberdeckung existiert.
Sei nun $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein U_{i_n}, so dass $\frac{1}{n} \in U_{i_n}$. Weiterhin gibt es auch ein U_{i_0}, so dass $\{0\} \in U_{i_0}$. Da U_{i_0} offene Teilmenge im euklidischen $\mathbb{R}$, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(0) \subset U_{i_0}$. Da weiterhin $\frac{1}{n}$ Nullfolge in $\mathbb{R}$ ist, existiert zu diesem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} \;:\; \left(n \geq N \implies \frac{1}{n} \in B_\varepsilon(0)\right) .$$

Demzufolge überdeckt U_0 bereits unendlich viele der $\frac{1}{n}$, so dass bereits

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{N-1} U_{i_k} .$$

Somit haben wir eine endliche Teilüberdeckung gefunden. Da $\{U_i\}_{i\in I}$ beliebig war, folgt daraus die Kompaktheit der Menge A.

(c) Zunächst halten wir fest, dass die Dimension von $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ endlich, nämlich n^2 ist. Es genügt somit, die Beschränkheit und Abgeschlossenheit von $O(n)$ in $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ zu zeigen.
Wir betrachten dazu den $\mathbb{R}^n$ versehen mit der Euklidischen Norm. Ist $A \in O(n)$, dann gilt nach Definition $A^T A = \mathrm{Id}$ und somit für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|Ax\|_2 \;=\; \sqrt{\langle Ax, Ax\rangle} \;=\; \sqrt{(Ax)^T Ax} \;=\; \sqrt{x^T A^T Ax} \;=\; \sqrt{x^T \,\mathrm{Id}\, x} \;=\; \sqrt{\langle x, x\rangle} \;=\; \|x\|_2.$$

Folglich ist $\|A\| \leq 1$ für $A \in O(n)$, und deswegen $O(n)$ beschränkt.
Um die Abgeschlossenheit zu sehen, sei die Abbildung $f : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ durch $f(A) := A^T A$ definiert. Dann ist $f(A) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\begin{aligned} \|f(A) - f(B)\| \;&=\; \|A^T A - B^T B\| \;=\; \|A^T A - A^T B + A^T B - B^T B\| \\ &\leq\; \|A^T A - A^T B\| + \|A^T B - B^T B\| \;\leq\; \|A^T\|\|A - B\| + \|A^T - B^T\|\|B\|. \end{aligned}$$

Konvergiert nun B gegen A, dann tut es insbesondere auch jede Komponente, und somit konvergiert B^T gegen A^T. Damit aber folgt gemäß der oberen Abschätzung auch $f(A) \to f(B)$. Also ist die Abbildung f stetig und es gilt offensichtlich $f^{-1}(\{\mathrm{Id}\}) = O(n)$. Da in jedem metrischen Raum eine einelementige Menge abgeschlossen ist, impliziert dies die Abgeschlossenheit von $O(n)$. Dies zeigt die Behauptung.

Alle Übungsaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

Zusatzmaterial zur Analysis II – Übung zu Serie 5

Zusammenhang, Wegzusammenhang

- Ein metrischer Raum (X, d) heißt **zusammenhängend**, falls es keine Zerlegung $X = U \cup V$ von X in disjunkte, offene und nichtleere Teilmengen $U, V \subset X$ gibt, oder äquivalenterweise $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind (Definition 1.67).
- Stetige Abbildungen erhalten die Zusammenhangseigenschaft in dem Sinne, als dass das Bild $f(X)$ eines zusammenhängenden metrischen Raumes (X, d_X) unter einer gegebenen stetigen Abbildung $f : X \to Y$ eine zusammenhängende Teilmenge des metrischen Raumes (Y, d_Y) bildet (Satz 1.68).
- Einfache Beispiele zusammenhängender metrischer Räume bilden die Intervalle der reellen Zahlenachse. Dies sind auch die einzigen zusammenhängenden Mengen in $\mathbb{R}$ (Beispiel 1.69).
- Als **Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes** ergibt sich für reellwertige stetige Abbildungen auf allgemeinen zusammenhängenden metrischen Räumen folgende Aussage (Korollar 1.70):

  Ist (X, d_X) ein zusammenhängender metrischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in X$, dann existiert zu jedem $c \in [f(a), f(b)]$ beziehungsweise $c \in [f(b), f(a)]$ ein $x \in X$ mit $f(x) = c$.
- Ein metrischer Raum (X, d) heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $x, x' \in X$ einen Weg von x nach x' in X gibt; sprich eine stetige Abbildung $c : [0, 1] \to X$ mit $c(0) = x$ und $c(1) = x'$.
- Jeder wegzusammenhängende metrische Raum ist insbesondere zusammenhängend (Satz 1.72).
- Jede zusammenhängende offene Teilmenge M eines normierten Raumes X ist wegzusammenhängend (vgl. Königsberger, Analysis 2, S. 35), d.h. also eine offene Teilmenge $M \subset X$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie auch wegzusammenhängend ist. Für beliebige Teilmengen ist diese Aussage aber falsch, wie weiter unten gezeigt wird.
- Für $n > 1$ ist $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend (Beispiel 1.73), woraus insbesondere folgt, dass $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}$ sein kann (Satz 1.74).

Zusatzaufgabe 5.1:

Auf der Menge $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sei $g : \bar{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ definiert durch
$$g(x) := \begin{cases} x & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ \operatorname{sign}(x) - \frac{1}{4x} & |x| \ge \frac{1}{2} \\ \pm 1 & x = \pm\infty \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\bar{\mathbb{R}}$ mit $d_{\bar{\mathbb{R}}} : \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, $d_{\bar{\mathbb{R}}}(x, y) := |g(x) - g(y)|$, zu einem vollständigen metrischen Raum wird.

(b) Konvergieren die Folgen $x_n := \mathrm{e}^n$, $y_n := \mathrm{e}^{-n}$ und $z_n := \begin{cases} n^2 & n \text{ gerade} \\ \infty & n \text{ ungerade} \end{cases}$ in $(\bar{\mathbb{R}}, d_{\bar{\mathbb{R}}})$?

(c) Kann man die Funktion $f(x) := \frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ zu einer stetigen Funktion $f : (\bar{\mathbb{R}}, d_{\bar{\mathbb{R}}}) \to (\bar{\mathbb{R}}, d_{\bar{\mathbb{R}}})$ fortsetzen? Wie ist es mit $|f|$?

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.1:

(a) Analog Aufgabe 2.4 (a) folgt mit der Injektivität von g die Definitheit. Die Symmetrie ist offensichtlich und die Dreiecksungleichung ergibt sich wegen $d_{\bar{\mathbb{R}}}(x, z) = |g(x) - g(z)| \le |g(x) - g(y)| + |g(y) - g(z)| = d_{\bar{\mathbb{R}}}(x, y) + d_{\bar{\mathbb{R}}}(y, z)$. Damit ist $d_{\bar{\mathbb{R}}}$ eine Metrik und somit $(\bar{\mathbb{R}}, d_{\bar{\mathbb{R}}})$ ein metrischer Raum. Darüberhinaus ist $(\bar{\mathbb{R}}, d_{\bar{\mathbb{R}}})$ vollständig, denn ist x_n eine Cauchyfolge in $(\bar{\mathbb{R}}, d_{\bar{\mathbb{R}}})$, dann ist $g(x_n)$ eine Cauchyfolge in $[-1, 1]$, und aufgrund der Vollständigkeit von $[0, 1]$ (als abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$) konvergiert also $g(x_n)$ gegen ein $y \in [-1, 1]$. Aufgrund der Bijektivität von g gibt es dann ein $x \in \bar{\mathbb{R}}$ mit $g(x) = y$, und x_n konvergiert gegen dieses x in $(\bar{\mathbb{R}}, d_{\bar{\mathbb{R}}})$.

(b) Alle diese Folgen konvergieren in $(\bar{\mathbb{R}}, d_{\bar{\mathbb{R}}})$, denn:

(i) Mit $d(\mathrm{e}^n, \infty) = 1 - (1 - \frac{1}{4\mathrm{e}^n}) = \frac{1}{4\mathrm{e}^n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ ergibt sich $\mathrm{e}^n \overset{d_{\bar{\mathbb{R}}}}{\to} \infty \in \bar{\mathbb{R}}$.

(ii) Wegen $d(\mathrm{e}^{-n}, 0) = \mathrm{e}^{-n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ haben wir hier $\mathrm{e}^{-n} \overset{d_{\bar{\mathbb{R}}}}{\to} 0$.

(iii) Aufgrund von $d(x_n, \infty) \leq 1 - (1 - \frac{1}{4n^2}) = \frac{1}{4n^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ erhalten wir $z_n \overset{d_{\bar{\mathbb{R}}}}{\to} \infty \in \bar{\mathbb{R}}$.

(c) Die Funktion f kann nicht zu einer stetigen Funktion $f : (\bar{\mathbb{R}}, d_{\bar{\mathbb{R}}}) \to (\bar{\mathbb{R}}, d_{\bar{\mathbb{R}}})$ fortgesetzt werden, denn es ist

$$d_{\bar{\mathbb{R}}}\left(f\left(-\frac{1}{n}\right), f\left(\frac{1}{n}\right)\right) = d_{\bar{\mathbb{R}}}(-n, n) = 1 - \frac{1}{4n} - \left(-1 + \frac{1}{4n}\right) = 2 - \frac{1}{2n} \not\to 0$$

Andererseits kann $|f|$ durch $f(\pm\infty) := 0$ und $f(0) := \infty$ zu einer stetigen Funktion $|f| : (\bar{\mathbb{R}}, d_{\bar{\mathbb{R}}}) \to (\bar{\mathbb{R}}, d_{\bar{\mathbb{R}}})$ fortgesetzt werden, denn für $x_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ gilt

$$d_{\bar{\mathbb{R}}}(f(x_n), f(0)) = d_{\bar{\mathbb{R}}}\left(\frac{1}{x_n}, \infty\right) = \left|1 - \frac{x_n}{4} - 1\right| = \frac{|x_n|}{4} \overset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

Zusatzaufgabe 5.2:

(a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} .$$

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{\substack{t\to0\\t\neq0}} f(t, at)$ und $\lim\limits_{\substack{t\to0\\t\neq0}} f(t, at^2)$ für die Funktion $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$
Ist die Funktion f in $(0,0)$ stetig? Ist sie in $(0,0)$ stetig abänderbar?

(c) Zeigen Sie, dass es für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $|f(a)| < 1$ eine abgeschlossene Umgebung U von a gibt, auf der $\sup\limits_{x\in U} |f(x)| < 1$ gilt.

(d) Der Raum der beschränkten reellen Zahlenfolgen $\quad l^\infty := \left\{\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}\ \xi_n \in \mathbb{R} \wedge \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n| < \infty\right\}$
wird mit $\|\xi\|_\infty := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$ zu einem normierten Raum $(l^\infty, \|.\|_\infty)$. Auf diesem normierten Vektorraum seien der **Shift-Operator** $S : l^\infty \to l^\infty$ durch $S(\xi_1, \xi_2, \dots) := (\xi_2, \xi_3, \dots)$ und der **Differenzoperator** $D : l^\infty \to l^\infty$ durch $D(\xi_1, \xi_2, \dots) := (\xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_2, \dots)$ definiert. Berechnen Sie $\|S\|$ und $\|D\|$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.2:

(a) Mit der dritten binomischen Formel ergibt sich aufgrund der Stetigkeit der Wurzel

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2+1-1} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \sqrt{x^2+y^2+1}+1 = 2 .$$

Da die Potenzreihe $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}$ auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert und der jeweilige Grenzwert mit $\sin(\alpha)$ übereinstimmt (vgl. Forster, Beispiel (22.4)), es sich hier jedoch um eine Leibniz-Reihe handelt, so dass wir die Abschätzung $|\sin(\alpha)| \leq |\alpha|$ gewinnen (vgl. Satz 4, Forster §7). Für $(x,y) \neq (0,0)$ erhalten wir demnach

$$\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right| = \frac{|\sin(x^3+y^3)|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leq |x|\frac{x^2}{x^2+y^2} + |y|\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq |x|+|y| = \|(x,y)\|_1 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0 .$$

Dabei haben wir verwendet, dass sowohl $x^2 \leq x^2+y^2$ als auch $y^2 \leq x^2+y^2$ ist.

(b) Es ist einerseits

$$\lim_{\substack{t\to0\\t\neq0}} f(t, at) = \lim_{t\to0} \frac{t^2-a^2t^2}{t^2+a^2t^2} = \lim_{t\to0} \frac{1-a^2}{1+a^2} = \frac{1-a^2}{1+a^2}$$

und andererseits

$$\lim_{\substack{t\to0\\t\neq0}} f(t, at^2) = \lim_{t\to0} \frac{t^2-a^2t^4}{t^2+a^2t^4} = \lim_{t\to0} \frac{1-a^2t^2}{1+a^2t^2} = 1 .$$

Da sowohl (t, at) als auch (t, at^2) für $t \to 0$ gegen den Nullpunkt $(0,0)$ konvergieren, die Funktionswerte – wie eben untersucht – jedoch nicht gegen den Funktionswert 0, sondern sogar gegen (überabzählbar viele) verschiedene Werte streben, ist f in $(0,0)$ weder stetig noch stetig abänderbar.

(c) Mit f ist auch $|f|$ stetig. Sei $|f(a)| < 1$. Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $|f(a)| < 1 - \varepsilon$, dann ist aufgrund der Stetigkeit von $|f|$ das Urbild $V := |f|^{-1}(]-1+\varepsilon, 1-\varepsilon[)$ des offenen Intervalls $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$ eine offene Umgebung von a. Der Abschluss $U := \bar{V}$ ist daher auch eine Umgebung von a, und er enthält wegen der Stetigkeit nur Punkte x mit $|f(x)| \leq 1 - \varepsilon$. Also gilt $\sup\limits_{x\in U} |f(x)| \leq 1 - \varepsilon < 1$, was zu zeigen war.

(d) Betrachten wir den Shift-Operator $S : l^\infty \to l^\infty$, so gilt

$$\|S\xi\| \;=\; \|S(\xi_1, \xi_2, \dots)\| \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_{n+1}| \;\leq\; \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n| \;=\; \|\xi\|$$

Daher gilt zunächst $\|S\| \leq 1$. Andererseits gilt für $\xi = (0, 1, 1, \dots)$, dass sowohl $\|\xi\| = 1$ als auch $\|S\xi\| = 1$ erfüllt ist. Demnach wissen wir nun, dass $\|S\| = 1$.

Wegen $D\xi = S\xi - \xi$ folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung sofort $\|D\xi\| \;\leq\; \|S\xi\| + \|-\xi\| \;\leq\; 2\|\xi\|$, also $\|D\| \leq 2$. Andererseits gilt $\|D\xi\| \;=\; 2\|\xi\|$ für $\xi = (1, -1, 0, 0, \dots)$ und somit $\|D\| = 2$.

Zusatzaufgabe 5.3:

(a) Zeigen Sie, dass aus der Kompaktheit der Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) die Kompaktheit von $(X \times Y, d_{X\times Y})$ folgt, wobei $d_{X\times Y}((x, y), (\tilde{x}, \tilde{y})) := d_X(x, \tilde{x}) + d_Y(y, \tilde{y})$ ist.

(b) Beweisen Sie das Lebesguesche Lemma: Sei (M, d) ein kompakter metrischer Raum. Zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von M existiert ein $\lambda > 0$, so dass jede Teilmenge $A \subset M$ mit $\operatorname{diam}(A) < \lambda$ in einem U_i liegt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.3:

(a) Nach Lemma 1.57 ist ein metrischer Raum (M, d) genau dann kompakt, wenn jede Folge in M eine konvergente Teilfolge besitzt. Ist nun (x_n, y_n) eine Folge in $X \times Y$, so besitzt x_n aufgrund der Kompaktheit von (X, d_X) eine Teilfolge x_{n_k} , die in $(X, d_X$ gegen ein $x \in X$ konvergiert. Nun besitzt aber auch y_{n_k} aufgrund der Kompaktheit von (Y, d_Y) eine Teilfolge $y_{n_{k_i}}$, die in (Y, d_Y) gegen ein $y \in Y$ konvergiert. Also konvergiert die Teilfolge $(x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}})$ in $(X \times Y, d_{X\times Y})$ gegen (x, y) , so dass wiederum mit Lemma 1.57 die Kompaktheit von $(X \times Y, d_{X\times Y})$ folgt.

(b) Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von M . Dann existiert zu jedem $x \in M$ ein Index $i_x \in I$ mit $x \in U_{i_x}$. Da U_{i_x} offen, existiert ein $r_x > 0$, so dass für die offene Kugel $B_{r_x}(x) \subset U_{i_x}$ gilt. Die offenen Mengen

$$\Big\{ B_{\frac{r_x}{2}}(x) \;:\; x \in M \Big\} \tag{4.1}$$

bilden demzufolge ebenso eine offene Überdeckung von M . Da nun jedoch (M, d) ein kompakter metrischer Raum war, existiert eine endliche Teilüberdeckung

$$\Big\{ B_{\frac{r_{x_k}}{2}}(x_k) \;:\; 1 \leq k \leq n \Big\} . \tag{4.2}$$

Sei nun $\lambda := \min\limits_{1\leq k\leq n} \frac{r_{x_k}}{2}$. Ist nun $A \subset M$ eine beliebige Teilmenge mit $\operatorname{diam}(A) < \lambda$, dann gilt für beliebige $x, y \in A$ auch $d(x, y) < \lambda$. Da (4.2)) (als endliche Teilüberdeckung von (4.1)) offene Überdeckung von M ist, gibt es ein x_k , so dass $x \in B_{\frac{r_{x_k}}{2}}(x_k)$. Weiterhin gilt auch

$$d(x, y) < \lambda \leq \frac{r_{x_k}}{2} \;.$$

Somit ergibt sich auch

$$d(x_k, y) \leq d(x_k, x) + d(x, y) < \frac{r_{x_k}}{2} + \frac{r_{x_k}}{2} = r_{x_k}$$

und somit schließlich $A \subset B_{r_{x_k}}(x_k) \subset U_{i_{x_k}}$.

Zusatzaufgabe 5.4:

(a) Zeigen Sie, dass jede konvexe Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend ist. Dabei heißt M konvex, wenn mit $x, y \in M$ auch die Verbindungsgerade $\{x + t(y - x) | t \in [0, 1]\}$ vollständig in M enthalten ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Menge $X := \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mid x > 0 \right\} \cup \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

(c) Geben Sie ein Beispiel einer nichtkonvexen zusammenhängenden Menge an.

(d) Zeigen Sie, ein metrischer Raum (M, d) mit der Eigenschaft, dass jede stetige Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ jeden Wert zwischen zwei Funktionswerten annimmt, ist zusammenhängend.

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.4:

(a) Da M konvex ist, liegt für je zwei Punkte x, y auch die Strecke $[0, 1] \mapsto x + t(y - x)$ von x nach y in M , also ist M wegzusammenhängend und somit auch insbesondere zusammenhängend.

(b) Angenommen X besitzt eine Zerlegung $U \cup V$ in offene disjunkte Teilmengen $U, V \subset \mathbb{R}^2$. Dann können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $(0,0) \in U$ annehmen. Da U offen ist, finden wir insbesondere ein $x' > 0$ mit $\left(x', \sin\left(\frac{1}{x'}\right)\right) \in U$. Nun ist der Graph der Funktion $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ in $\mathbb{R}^2$ wegzusammenhängend, und damit also insbesondere zusammenhängend, so dass aus $\left(x', \sin\left(\frac{1}{x'}\right)\right) \in U$ unmittelbar $\left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mid x > 0\right\} \subset U$ folgt. Also ist $U = X$ und $V = \emptyset$. Dies zeigt, dass die Menge X zusammenhängend ist.
Die Menge X ist aber nicht wegzusammenhängend. Denn sei $x' > 0$ beliebig und angenommen $c : [0,1] \to X$ ist eine stetige Abbildung mit $c(0) = (0,0)$ und $c(1) = \left(x', \sin\left(\frac{1}{x'}\right)\right)$. Dann würde $t \to 0$ offenbar $c(t) \to (0,0)$, also $c_1(t) \to 0$ und $c_2(t) \to 0$, implizieren. Da aber $\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ für $t \to 0$ divergent ist, erhalten wir einen Widerspruch zu der Stetigkeit von c.
Die Menge X ist weder offen noch abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$, und zeigt, dass im Gegensatz zu offenen Teilmengen normierter Räume beliebige zusammenhängende Mengen nicht wegzusammenhängend sein müssen. Ein anderes Beispiel für diesen Sachverhalt stellt die Menge

$$Y = \left\{\left(x, \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) \mid x > 0\right\} \cup \{(x,0) | \ x \in [-1,1]\} \in \mathbb{R}^2,$$

welche in $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen ist, dar.

(c) Ein Beispiel einer nichtkonvexen zusammenhängender Menge bildet $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ für $n \geq 2$, denn es ist – vergleichen Sie gegebenenfalls mit Beispiel 1.73 im Skript – eine wegzusammenhängende Menge, welche aber aufgrund $x + t(-x - x) \notin \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $t = \frac{1}{2}$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ nicht konvex ist.

(d) Sei nun (M, d) ein metrischer Raum mit der Eigenschaft, dass jede stetige Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ jeden Wert zwischen zwei Funktionswerten annimmt. Angenommen, es gäbe nichtleere offene Teilmengen $A_1, A_2 \subset M$ mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und $A_1 \cup A_2 = M$. Dann ist die durch

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A_1, \\ 0 & \text{für } x \in A_2. \end{cases}$$

erklärte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ stetig, weil Urbilder offener Mengen wieder offen sind, denn:

- Ist $B \subset \mathbb{R}$ offen mit $1 \in B$, aber $0 \notin B$, so ist $f^{-1}(B) = A_1$, also offen;
- Ist $B \subset \mathbb{R}$ offen mit $0 \in B$, aber $1 \notin B$, so ist $f^{-1}(B) = A_2$, also offen;
- Ist $B \subset \mathbb{R}$ offen mit $0 \in B$, aber $1 \in B$, so ist $f^{-1}(B) = M$, also offen.

Jedoch nimmt, da A_1 und A_2 nicht leer sind, die Werte 0 und 1 an, aber keinen Wert, der echt zwischen 0 und 1 liegt. Dies war nach Voraussetzung jedoch vorausgesetzt. Aus dem Widerspruch folgt, dass M zusammenhängend sein muss.

Zusatzaufgabe 5.5:

(a) Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ die Menge $GL(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) \neq 0\}$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen offen und nicht zusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, ein metrischer Raum (M, d) mit einer einelementigen Menge $M = \{a\}$ ist zusammenhängend.

(c) Sind die Mengen $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \,|\, A^T A = 0\}$ und $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \,|\, A^T A = -\operatorname{Id}\}$ zusammenhängend?

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.5:

(a) Die Determinante ist als Funktion $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ stetig, da $\det(A)$ ein Polynom n-ten Grades in den Einträgen a_{ij} der Matrix A ist. Also ist $GL(n)$ als Urbild der offenen Menge $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ unter det offen, und da $\det(GL(n)) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ nicht zusammenhängend (da kein Intervall) ist, ist $GL(n)$ auch nicht zusammenhängend.

(b) Die von der Metrik erzeugte Topologie ist $T_d := \{\emptyset, M\}$, d.h. insbesondere, dass es nur zwei offene Mengen in (M, d) gibt, also $\emptyset$ und M die einzigen Mengen sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Demnach ist (M, d) zusammenhängend.

(c) Da auf der Diagonalen der Matrix $A^T A$ genau die Normen der Spalten von A stehen, können diese Einträge nicht negativ sein, d.h., das Urbild von $\{-\operatorname{Id}\}$ unter der stetigen (vgl. ZA 4.5 (c)) Abbildung $f : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ definiert durch $f(A) := A^T A$ ist leer und somit insbesondere kein topologischer bzw. metrischer Raum. Somit ist hier Zusammenhang gar nicht definiert.
Desweiteren bedeutet jeder Nulleintrag auf der Diagonalen von $A^T A$, dass die entsprechende Spalte von A mit dem Nullvektor übereinstimmt, so dass das Urbild von $f^{-1}(\{0\})$ nur die Nullmatrix enthält. Als einelementige Menge ist $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \,|\, A^T A = 0\}$ nach (b) zusammenhängend (egal welche Metrik wir betrachten, denn Zusammenhang ist eigentlich ein topologischer Begriff und mit einer einelementigen Menge können wir genau einen topologischen Raum erhalten).

Zusatzmaterial zur Analysis II – Übung zu Serie 6

Differenzierbare Kurven

- Eine stetige Abbildung $c : I \to X$ eines Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ in einen metrischen Raum X nennt man eine **parametrisierte Kurve**. Im Weiteren betrachten wir vor allem parametrisierte Kurven in Banach-Räumen $(X, \|\cdot\|)$, wobei $X = \mathbb{R}^n$ den einfachsten und für $n = 2$ oder $n = 3$ den anschaulichsten Fall darstellt.
- Das Bild $C := c(I) \subset X$ einer parametrisierten Kurve c heißt die **Spur** von c oder einfach auch die **Kurve**, die durch c parametrisiert wird.
- (Definition 2.1) Eine parametrisierte Kurve $c : I \to X$ in einem Banach-Raum X heißt **differenzierbar in** $t^* \in I$, wenn der Grenzwert
$$\dot{c}(t^*) = \lim_{t \to t^*} \frac{c(t) - c(t^*)}{t - t^*}$$
existiert, und $\dot{c}(t^*)$ nennt man dann die **Ableitung** (oder auch **Tangentialvektor**) von c in t^*. Desweiteren heißt c **differenzierbar**, falls c in jedem Punkt $a \in I$ differenzierbar ist. Ist zusätzlich die durch Differentiation induzierte Abbildung $\dot{c} : t \mapsto \dot{c}(t)$ auch noch stetig, so nennt man c **stetig differenzierbar**.
- Falls $X = \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $c = (c_1, \ldots, c_n) : I \to \mathbb{R}^n$ genau dann stetig, wenn alle Komponenten $c_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots n$, von c stetig sind. Analog ist eine parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ genau dann differenzierbar, wenn jede Komponentenfunktion $c_i : I \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$, differenzierbar ist (Lemma 1.16).
- Das Ableiten von parametrisierten Kurven ist linear, d.h. $\frac{d}{dt}(\lambda c + \mu \tilde{c}) = \lambda \dot{c} + \mu \dot{\tilde{c}}$ gilt für Konstanten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Sei $C \subset X$ eine Kurve im Banach-Raum X und $c : I \to X$ eine Parametrisierung von C. Ist $\phi : J \to I$ eine stetig differenzierbare Abbildung zwischen Intervallen I, J mit $\phi(J) = I$ und $\phi' \neq 0$, dann heißt ϕ eine **Parametertransformation**. Durch $c \circ \phi : J \to X$ ist eine neue Parametrisierung von C gegeben.
- Ist $c : I \to X$ eine differenzierbare Parametrisierung einer Kurve $C \subset X$ im Banach-Raum X, und $\phi : J \to I$ eine Parametertransformation, so ist $c \circ \phi$ in allen $t \in J$ differenzierbar mit Ableitung $\frac{d}{dt}(c \circ \phi)(t) = \dot{c}(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$ (Lemma 2.3). Da $\phi'(t)$ alle möglichen Werte aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ annehmen kann, ist nur die Menge $T_x C$ aller Tangentialvektoren in einem Punkt $x \in C$ durch C eindeutig bestimmt.
- Ist C eine Kurve in einem Banach-Raum und ist $x \in C$ ein Punkt, an welchen die Ableitung jeder stetig differenzierbaren Parametrisierung von C verschwindet (also $T_x C = \{0\}$ gilt), so heißt x ein **singulärer Punkt** von C. Andernfalls bezeichnet man $x \in C$ als einen **regulären Punkt** von C (vgl. vor Beispiel 2.8).
- Existiert (mindestens) eine stetig differenzierbare Parametrisierung $c : I \to X$ von C, die injektiv ist und $\dot{c}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ erfüllt, so heißt C eine **injektiv immersierte Kurve**.[1] In diesem Fall ist die Menge $T_x C$ aller möglichen Tangentialvektoren am Punkt $x \in C$ ein eindimensionaler Unterraum von X. [2]
- Eine parametrisierte Kurve $c : I \to X$ in einem Banach-Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt **rektifizierbar**, wenn die Längen aller Sehnenpolygone von c beschränkt sind. Dabei versteht man unter einem Sehnenpolygon zu einer Zerlegung $Z = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_k\}$ von I mit Punkten $t_i \in I$ das durch die Strecken von $c(t_{i-1})$ nach c_{t_i} gegebene Polygon, und unter der Länge dieses Sehnenpolygons den Wert $\sum_{i=1}^k \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|$.
- (Definition 2.11) Die **Bogenlänge** $L(c)$ einer rektifizierbaren Kurve $c : I \to X$ in einem Banach-Raum X ist das Supremum aller Längen der Sehnenpolygone von c, wobei das Supremum über alle Zerlegungen $Z = \{t_0 < t_t < \cdots < t_k\}$ von I mit Punkten $t_i \in I$ gebildet wird.
- (Satz 2.13) Jede stetig differenzierbare Parametrisierung $c : [a, b] \to X$ einer Kurve in einem Banach-Raum X ist rektifizierbar und besitzt die Bogenlänge
$$L(c) \;=\; \int_b^a \|\dot{c}(t)\| dt. \tag{1.1}$$
Ist $c : I \to X$ eine stetig differenzierbare Parametrisierung und $\phi : J \to I$ eine Parametertransformation, so gilt $L(c) = L(c \circ \phi)$.

[1] Selbst injektiv immersierte Kurven können Punkte besitzen, in deren Nähe die Kurve nicht homöomorph zu einem Intervall ist (vgl. Beispiel 2.10).
[2] Für eine Kurve C können wir immer eine Parametrisierung finden, die für ein Intervall konstant ist und dort Ableitung Null besitzt.

- Eine Kurve C in einem Banach-Raum X heißt durch eine stetig differenzierbare Parametrisierung $c : I \to X$ **nach Bogenlänge parametrisiert**, wenn $\|\dot{c}(t)\| = 1$ für alle $t \in I$ gilt (s. letzten Absatz vor Abschnitt 2.2).

Zusatzaufgabe 6.1: Geben Sie Beispiele für eine Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ an,

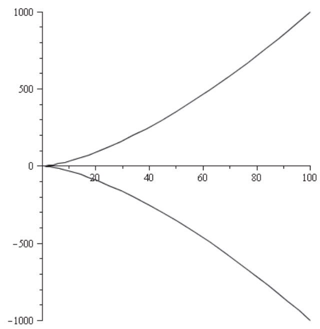
(a) welche singuläre Punkte enhält;

(b) welche keine singulären Punkte enthält (eine sogenannte immersierte Kurve), aber keine injektive Parametrisierung existiert;

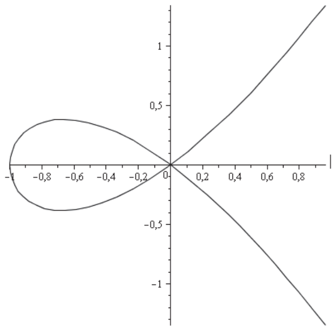
(c) welche injektiv immersiert ist, jedoch mindestens einen Punkt besitzt, in deren Nähe die Kurve nicht homöomorph zu einem Intervall ist.[3]

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.1:

(a) (Beispiel 2.8) Die durch $t \mapsto (t^2, t^3)$ parametrisierte Neilsche Parabel C hat $(0,0)$ als singulären Punkt. Denn ist $c(t) = (x(t), y(t))$ eine beliebige Parametrisierung mit $c(0) = (0,0)$, dann muss $x'(0) = 0$ gelten, da $x(t)$ bei $t = 0$ ein globales Minimum hat, und wegen $y(t)^2 = x(t)^3$ (ansonsten würde c gar nicht die Kurve C parametrisieren) gilt dann auch $y'(0) = \pm \frac{3}{2}\sqrt{|x(0)|}x'(0) = 0$.

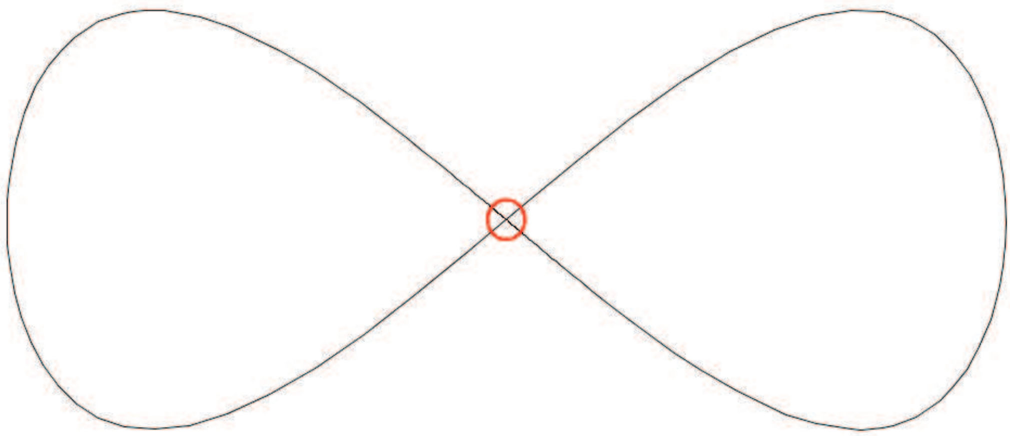


(b) (Beispiel 2.9) Der durch die beliebig oft differenzierbare Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $c(t) := (t^2 - 1, t^3 - t)$ parametrisierte Newtonsche Knoten C besitzt den Doppelpunkt $c(1) = (0,0) = c(-1)$, bei dem $\dot{c}(1) = (2,2)$ kein Vielfaches von $\dot{c}(-1) = (-2,2)$ ist.



(c) (Beispiel 2.10) Die durch $c(t) := (2\sin(2\arctan(t)), \sin(4\arctan(t)))$ mit $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ parametrisierte Kurve C sieht aus wie eine liegende Acht, obwohl c injektiv ist und $\dot{c}(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Insbesondere gibt es keinen Homöomorphismus von $C \cap U$ auf ein offenes Intervall I, wenn U eine offene Umgebung von $(0,0)$ ist. Denn $(C \cap U) \setminus \{(0,0)\}$ hat vier Zusammenhangskomponenten, während $I \setminus \{r\}$ ($r \in I$ beliebig) zwei Zusammenhangskomponenten hat, was der Eigenschaft widerspricht, dass ein Homöomorphismus zusammenhängende Mengen auf zusammenhängende Mengen abbildet.



Zusatzaufgabe 6.2: Zeigen Sie:

(a) Jede Lipschitz-stetige Parametrisierung $c : [a,b] \to X$ auf einem kompakten Intervall $[a,b]$ ist rektifizierbar.

(b) Die Länge einer stetig differenzierbaren Parametrisierung $c : [a,b] \to X$ einer Kurve hängt nicht von der Parametrisierung ab, sondern nur von der Kurve $C \subset X$ selbst.

[3] Ist die Parametrisierung $c : I \to C$ nicht nur eine injektive Immersion, sondern sogar ein Homöomorphismus auf ihr mit der Relativtopologie versehenes Bild $C \subset X$, so ist C ein Beispiel für eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von X. Die genaue Definition einer Untermannigfaltigkeit werden wir später kennenlernen.

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.2:

(a) Mit einer Lipschitz-Konstanten L von c gilt

$$\sum_{i=1}^{k} \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^{k} L|t_i - t_{i-1}| = L(b-a)$$

für eine beliebige Zerlegung $Z = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_k\}$ von I ($t_i \in I$). Damit ist die Länge jedes Sehnenpolygons beschränkt, also c rektifizierbar. Insbesondere folgt $L(c) := \sup_Z \sum_{i=1}^{k} \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| \leq L \cdot (b-a)$.

(b) Ist $\phi : [a', b'] \to [a, b]$ eine stetig differenzierbare Parametertransformation mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung ϕ^{-1} , dann gilt

$$\int_{a'}^{b'} \left\| \frac{d}{ds}(c \circ \phi)(s) \right\| ds = \int_{a'}^{b'} \|\dot{c}(\phi(s))\| \cdot |\phi'(s)| \, ds = \int_{a}^{b} \|\dot{c}(t)\| \, dt$$

nach der Kettenregel und der Substitutionsregel.

Zusatzaufgabe 6.3:

(a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung des Kreises um den Nullpunkt mit Radius $R > 0$. Berechnen Sie anschließend mit Hilfe der Bogenlänge den Umfang dieses Kreises.

(b) Zeigen Sie, dass der Graph einer Funktion $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ keine singulären Punkte besitzt, rektifizierbar ist mit Bogenlänge

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt \; . \tag{3.2}$$

(c) Zeigen Sie, dass eine nach Polarkoordinaten parametrisierte Kurve $\varphi \mapsto (r(\varphi)\cos(\varphi), r(\varphi)\sin(\varphi))$ mit einem $r \in C^1([\alpha, \beta], [0, \infty])$ die Bogenlänge

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\varphi))^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}(\varphi)\right)^2} \, d\varphi \tag{3.3}$$

besitzt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.3:

(a) Verwenden wir für den Kreis um den Nullpunkt mit Radius $R > 0$ die Parametrisierung $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (R\cos(t), R\sin(t))$, so ist der Tangentialvektor am Punkt $\gamma(t)$ genau $\dot{\gamma}(t) = (-R\sin(t), R\cos(t))$ und besitzt die Länge $\|\dot{\gamma}(t)\|_2 = \sqrt{(-R\sin(t))^2 + (R\cos(t))^2} = \sqrt{R^2} = R$. Da $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ offenbar stetig differenzierbar ist, folgt nun nach Satz 2.13 die Rektifizierbarkeit und somit nach der dort auftauchenden Gleichung (1.1) für die Bogenlänge

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\|_2 dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R \; .$$

(b) Der Graph einer Funktion $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ lässt sich darstellen als

$$G_f = \left\{(t, f(t)) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t \in [a, b]\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

bzw. mit der parametrisierten Kurve $\gamma : t \mapsto (t, f(t))$ mit $t \in [a, b]$. Da f stetig differenzierbar nach Voraussetzung ist auch γ stetig differenzierbar mit Ableitung $\dot{\gamma}(t) = (1, f'(t))$, die wegen $\|\dot{\gamma}(t)\|_2 = \sqrt{1 + (f'(t))^2} \geq 1$ nirgends gleich dem Nullvektor ist, womit alle Punkte regulär sind. Nach Satz 2.13 folgt nun wiederum die Rektifizierbarkeit und über Einsetzen in (1.1) der Rest der Behauptung.

(c) Da r stetig differenzierbar ist, sind es auch die Komponenten $x(\varphi) = r(\varphi)\cos(\varphi)$ und $y(\varphi) = r(\varphi)\sin(\varphi)$, so dass wiederum nach Satz 2.13 die Kurve rektifizierbar ist mit Bogenlänge

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_\alpha^\beta \|\dot{\gamma}(\varphi)\|_2 d\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\dot{r}(\varphi)\cos(\varphi) - r(\varphi)\sin(\varphi)\right)^2 + \left(\dot{r}(\varphi)\sin(\varphi) + r(\varphi)\cos(\varphi)\right)^2} d\varphi \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\dot{r}(\varphi)\right)^2 + \left(r(\varphi)\right)^2} d\varphi \; . \end{aligned}$$

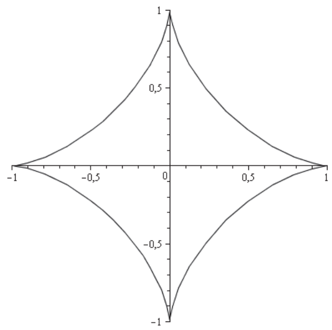
Zusatzaufgabe 6.4: Berechnen Sie jeweils die Bogenlänge von

(a) $x = (\cos(t))^3,\ y = (\sin(t))^3 \qquad (0 \le t \le 2\pi)$ (b) $r = \left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right)^3$ über die gesamte Kurve

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.4:

(a) Da es sich bei der Astroide um eine parametrisierte Kurve handelt, erhalten wir wegen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 3(\cos(t))^2 \cdot (-\sin(x)) \ , \\ \dot{y}(t) &= 3(\sin(t))^2 \cdot \cos(t)\end{aligned}$$



und $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ sowie

$$\begin{aligned}(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 &= 9(\sin(t))^2(\cos(t))^2\Big((\cos(t))^2 + (\sin(t))^2\Big) \\ &= \Big(3\sin(t)\cos(t)\Big)^2 = \left(\frac{3\sin(2t)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

für die Bogenlänge aufgrund der Symmetrie

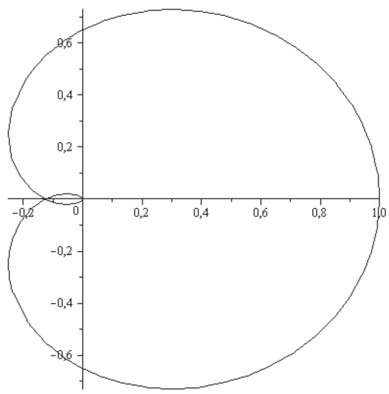
$$L(c) = \int_0^{2\pi} \|\dot{c}(t)\|_2 dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\ dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} |\sin(2t)|\ dt = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\ dt = 6\left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6\ .$$

(b) Wegen $r \ge 0$ können wir $\varphi \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ wählen, um alle Punkte der Kurve zu erhalten. Eine mögliche Parametrisierung ist beispielsweise

$$x(\varphi) = r\cos(\varphi) = \left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right)^3\cos(\varphi)\ , \qquad y(\varphi) = r\sin(\varphi) = \left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right)^3\sin(\varphi)\ .$$

Nach Zusatzaufgabe 6.3 (c) ergibt sich für die Bogenlänge nun

$$\begin{aligned}L(\gamma) &= \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{(r(\varphi))^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}(\varphi)\right)^2}\ d\varphi \\ &= \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right)^6 + \left(-\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right)^2\sin\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right)^2}\ d\varphi \\ &= \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right)^2 d\varphi = \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{2\varphi}{3}\right)\right]_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2}\ ,\end{aligned}$$



wobei partielle Integration und Umstellen $\int (\cos(\alpha))^2\, d\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \sin(\alpha)\cos(\alpha)) = \frac{1}{4}(2\alpha + \sin(2\alpha))$ lieferte.

Zusatzaufgabe 6.5:

(a) Berechnen Sie die Tangentialvektoren und Kurvenlänge der Zykloide $c(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)\ ,\ t \in [0, 2\pi]$.

(b) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Neilschen Parabel $c(t) = (t^2, t^3)$ für $t \in [-1, 1]$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.5:

(a) Die Tangentialvektoren sind $\dot{c}(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ und wegen $(2\sin(\frac{t}{2}))^2 = 2(1 - \cos(t))$ ergibt sich die Kurvenlänge zu

$$L = \int_0^{2\pi} \|\ \dot{c}(t)\ \|_2\ dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\ dt = \int_0^{2\pi} 2\ \sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\ dt = -4\ \cos\left(\tfrac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 8.$$

(b) Mit $\dot{c}(t) = (2t, 3t^2)$ ergibt sich aufgrund der Symmetrie für die Bogenlänge

$$L(c) = \int_1^{-1} \|\dot{c}(t)\|_2 dt = 2\int_0^1 \sqrt{4t^2 + 9t^4} dt = \frac{2}{18}\int_0^1 18t\sqrt{4 + 9t^2}\, dt = \frac{2}{27}\cdot\sqrt{(4 + 9t^2)^3}\ \Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{2(13\sqrt{13} - 8)}{27} \approx 2{,}88.$$

Zusatzaufgabe 6.6:

Die Kettenlinie ist der Graph der Funktion $y(x) := a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ mit $a > 0$. Zeigen Sie, dass y die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y''(x) \;=\; \frac{y(x)}{a^2}$$

erfüllt. Berechnen Sie die Bogenlänge für Parameter $x \in [0,c]$, wobei $c > 0$ sei.

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.6:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $y'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$ und somit folglich

$$y''(x) \;=\; \frac{1}{a}\cosh\left(\tfrac{x}{a}\right) \;=\; \frac{y(x)}{a^2}.$$

Also erfüllt $y(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ die angegebene Differentialgleichung. Die Kurve $c(x) := (x, y(x))$ über dem Intervall $[0,c]$ besitzt die Länge

$$L(c) \;=\; \int_0^c \sqrt{1+(y'(x))^2}\;dx \;=\; \int_0^c \sqrt{1+\left(\sinh\left(\tfrac{x}{a}\right)\right)^2}\;dx \;=\; \int_0^c \cosh\left(\tfrac{x}{a}\right)\;dx \;= a\,\sinh\left(\tfrac{c}{a}\right).$$

Zusatzaufgabe 6.7:

(a) Zeigen Sie, dass für eine Parametrisierung $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ einer gegebenen Kurve nach Bogenlänge die Länge der Kurve gerade durch $L(c) = b - a$ gegeben ist.

(b) Beweisen Sie, dass eine Parametertransformation $\varphi : J \to I$ zwischen zwei Intervallen $I, J \subset \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung besitzt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.7:

(a) Nach Voraussetzung gilt $\|c'(t)\| = 1$ in jedem Punkt $t \in [a,b]$ und deswegen

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\|\,dt = \int_a^b 1\,dt = b - a\,.$$

(b) Da φ stetig differenzierbar ist und $\varphi(s)' \neq 0$ für alle $s \in J$ erfüllt, gilt für die Ableitung von φ entweder $\varphi' > 0$ oder $\varphi' < 0$. Somit ist φ entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Folglich besitzt φ eine Umkehrabbildung φ^{-1}. Da nun für alle $s \in J$ auch $\varphi'(s) \neq 0$ gilt, ist die Umkehrabbildung φ^{-1} von φ ebenfalls stetig differenzierbar, und ihre Ableitung im Punkt $t \in I$ ist genau durch den Wert $(\varphi^{-1})'(t) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}$ gegeben.

Zusatzaufgabe 6.8:

(a) Zeigen Sie, dass für eine diagonalisierbare Matrix $A = SDS^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $D = \operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n)$ die Gleichung

$$\exp(A) = S\exp(D)S^{-1}$$

gilt, und berechnen Sie $\exp(D)$.

(b) Ermitteln Sie die Lösung des Systems

$$\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}-1 & 4\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} \tag{8.4}$$

von linearen Differentialgleichungen zu den Anfangswerten $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.8:

(a) Wir beginnen zunächst mit der Berechnung von $\exp(D)$. Per Induktion zeigen wir, dass für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ die k-te Potenz D^k von D genau die Diagonalmatrix mit den k-ten Potenzen der Diagonaleinträge von D ist, also $D^k = \operatorname{diag}(d_1^k,\dots,d_n^k)$. Insbesondere gilt $D^0 = E_n = \operatorname{diag}(d_1^0,\dots,d_n^0)$ für $n = 0$, womit der Induktionsanfang getan ist. Weiterhin gelangen wir unter der Induktionsannahme $D^k = \operatorname{diag}(d_1^k,\dots,d_n^k)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ unmittelbar auf die Formel

$$D^{k+1} \;=\; DD^k \;=\; \begin{pmatrix} d_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1^k & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^k\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} d_1^{k+1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^{k+1}\end{pmatrix}$$

für $k+1$, womit die Induktionsbehauptung bewiesen und die Induktion somit fertig ist. Damit erhalten wir

$$\exp(D) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} \;=\; \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{d_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{d_n^k}{k!} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{e}^{d_n} \end{pmatrix}$$

und sehen, dass die Exponentialfunktion einer Diagonalmatrix erneut eine einfache Diagonalgestalt hat und genau durch die Exponentialfunktionen der Diagonalelemente gegeben ist.

Für den zweiten Teil der Aufgabe zeigen wir per Induktion, dass für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung

$$(SDS^{-1})^k = SD^kS^{-1}$$

erfüllt ist. Während für $k = 0$ dies offensichtlich richtig ist (Induktionsanfang), impliziert die Induktionsvoraussetzung, die Aussage sei für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$ richtig, unmittelbar

$$(SDS^{-1})^{k+1} = (SDS^{-1})^k(SDS^{-1}) = SD^kS^{-1}(SDS^{-1}) = SD^kDS^{-1} = SD^{k+1}S^{-1}$$

und somit die Induktionsbehauptung für $k+1$. Also erhalten wir nach Induktion

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(SDS^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{SD^kS^{-1}}{k!} = S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!}\right)S^{-1} = S\exp(D)S^{-1}$$

wie behauptet.

(b) Die Matrix A besitzt offenbar die Eigenwerte $\lambda_1 = -5$ und $\lambda_2 = 3$. Aus

$$\begin{pmatrix} \lambda_1+1 & -4 \\ -4 & \lambda_1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; 0\,, \qquad \begin{pmatrix} \lambda_2+1 & -4 \\ -4 & \lambda_2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; 0$$

erhalten wir $(x_1, y_1) = (1, -1)$ und $(x_2, y_2) = (1, 1)$ als Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2. Die Matrix

$$S \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

besitzt dann die Inverse

$$S^{-1} \;=\; \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und mit $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ gilt schließlich

$$SDS^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \;=\; A.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \exp(tSDS^{-1}) \\ &= S\exp(tD)S^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-5t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-5t}+\mathrm{e}^{3t} & -\mathrm{e}^{-5t}+\mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^{-5t}+\mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{-5t}+\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit bildet

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-5t}+\mathrm{e}^{3t} & -\mathrm{e}^{-5t}+\mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^{-5t}+\mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{-5t}+\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-5t}\begin{pmatrix} x_0-y_0 \\ y_0-x_0 \end{pmatrix} \;+\; \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} x_0+y_0 \\ x_0+y_0 \end{pmatrix}$$

eine Lösung des Differentialgleichungssystems (8.4) mit Anfangswert $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, was sich auch durch eine einfache Rechnung verifizieren lässt.

Zusatzmaterial zur Analysis II – Übung zu Serie 7

Partielle Differenzierbarkeit, Gâteaux-Differenzierbarkeit

- (Definition 2.15) Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Banach-Räumen X, Y heißt **im Punkt** $a \in X$ **partiell differenzierbar in Richtung** $h \in X$, falls der Grenzwert
$$\partial_h f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$
in Y existiert, und in diesem Fall bezeichnet man $\partial_h f(a)$ als die **partielle Ableitung von** f **im Punkt** a **in Richtung** h. Ist f im Punkt a in jede Richtung partiell differenzierbar, so nennt man die Funktion f **partiell differenzierbar in** a. Ist die Abbildung $G : h \mapsto \partial_h f(a)$ von X nach Y darüberhinaus noch linear und stetig (d.h. $G \in L(X, Y)$), dann heißt f **Gâteaux-differenzierbar in** a.

  Bemerkungen:

  (a) $f : X \to Y$ ist genau dann in a in Richtung h partiell differenzierbar, wenn die parametrisierte Kurve $c : \mathbb{R} \to Y$, definiert durch $c(t) = f(a + th)$, in 0 differenzierbar ist.
  (b) $f : X \to R$ ist genau dann in a in Richtung h partiell differenzierbar, wenn die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $t \mapsto f(a + th)$, in 0 differenzierbar ist.
  (c) Ist $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, im Punkt $a \in U$ partiell differenzierbar in die i-te Koordinatenrichtung $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, so schreiben wir anstelle von $\partial_{e_i} f(a)$ üblicherweise $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Mit der Abbildung $\varphi : \xi \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, \xi, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ gilt dann $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \varphi'(a_i)$.
  (d) Ist $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, im Punkt $a \in U$ Gâteaux-differenzierbar, so gilt $\partial_h f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$.
  (e) Achtung: Weder aus der partiellen Differenzierbarkeit noch aus der Gâteaux-Differenzierbarkeit kann i.A. auf die Stetigkeit einer Funktion geschlossen werden (s.u.). Ebenso muss die Kettenregel nicht gelten.

- (Lemma 2.17) Seien X, Y, Z Banach-Räume. Eine Abbildung $f = (f_1, f_2) : X \to Y \times Z$ ist genau dann in $a \in X$ partiell differenzierbar in Richtung $h \in X$, wenn die Abbildungen f_1 und f_2 in a in Richtung h partiell differenzierbar sind. In diesem Falle gilt für die partiellen Ableitungen $\partial_h f(a) = (\partial_h f_1(a), \partial_h f_2(a))$.

- Der Mittelwertsatz gilt in der folgenden Form (Satz 2.20):

  Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge eines Banach-Raumes X und seien $x, \tilde{x} \in U$ Punkte, für die die Strecke $C := \{x + t(\tilde{x} - x) \mid t \in [0, 1]\}$ in U enthalten ist. Ist die Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt der Strecke C partiell differenzierbar in Richtung $\tilde{x} - x$, dann gibt es ein $\theta \in (0, 1)$ mit $f(\tilde{x}) - f(x) = \partial_{(\tilde{x} - x)} f(x + \theta(\tilde{x} - x))$.

- Ist f in jedem Punkt aus U partiell differenzierbar in Richtung h und ist auch die partielle Ableitung $\partial_h f$ als Funktion von U nach Y in jedem Punkt aus U partiell differenzierbar in Richtung k, dann heißt f zweimal partiell differenzierbar und $\partial_k \partial_h f(a)$ wird die **zweite partielle Ableitung im Punkt** $a \in U$ **in Richtung** (h, k) genannt. Rekursiv kann man analog partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnungen definieren.[1]

- Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge eines Banach-Raumes X und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt, f hat in $x^* \in U$ ein **lokales Minimum** beziehungsweise ein **lokales Maximum**, wenn es eine Umgebung V von x^* mit $f(x^*) \leq f(x)$ beziehungsweise $f(x^*) \geq f(x)$ für alle $x \in V$ gibt.

- Notwendiges Kriterium für lokale Extrema (Satz 2.22):

  Besitzt eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset X$ eines Banach-Raumes X in $x^* \in U$ ein lokales Extremum und ist f in x^* partiell differenzierbar in Richtung h, dann gilt $\partial_h f(x^*) = 0$.

Differenzierbarkeit

- (Definition 2.23) Seien X, Y Banach-Räume. Eine Abbildung $f : U \to Y$, $U \subset X$ offen, heißt **im Punkt** $a \in U$ **differenzierbar**, wenn es eine lineare und stetige Abbildung $A : X \to Y$ gibt (d.h. $A \in L(X, Y)$), so dass
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - Ah}{\|h\|} = 0 .$$
In diesem Fall heißt A die **Ableitung von** f **im Punkt** a und wird mit $df(a) := A$ symbolisiert.[2]

[1] Vorsicht: Im Allgemeinen gilt $\partial_k \partial_h f(a) \neq \partial_h \partial_k f(a)$

[2] In der Literatur wird die Differenzierbarkeit im oben definierten Sinn auch oft als totale oder auch Fréchet-Differenzierbarkeit und die Ableitung A entsprechend als das totale oder Fréchet-Differential bezeichnet.

- (Satz 2.24) Ist die Abbildung $f : U \to Y$ mit $U \subset X$ offen und Banach-Räumen X, Y in $a \in U$ differenzierbar, dann ist f in a in jede Richtung $h \in X$ partiell differenzierbar und es gilt $df(a)h = \partial_h f(a)$. Insbesondere ist f somit in a auch Gâteaux-differenzierbar.

- Ist $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ im Punkt $a \in U$ differenzierbar, kann die Ableitung $df(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ von f in a als lineare Abbildung bezüglich der kanonischen Basis durch die $(m \times n)$-Matrix

$$Jf(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}$$

repräsentiert werden. Diese wird dann als die **Jacobi-Matrix** von f im Punkt a bezeichnet.

- Speziell für eine in a differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ definiert man den **Gradienten** $\operatorname{grad} f(a)$ als Spaltenvektor mittels des Euklidischen Skalarproduktes $\langle \cdot , \cdot \rangle$ durch $df(a) = \langle \operatorname{grad} f(a), \cdot \rangle$.

- (Satz 2.26) Seien X, Y Banach-Räume und sei $f : U \to Y$ eine Abbildung auf einer offenen Teilmenge $U \subset X$. Ist f in einem Punkt $a \in U$ differenzierbar, dann ist f auch stetig in a.

Zusatzaufgabe 7.1: Seien X, Y Banach-Räume.

(a) Zeigen Sie, dass für Abbildungen $f, g : X \to Y$, die im Punkt $a \in X$ partiell differenzierbar in Richtung h sind, auch die Linearkombination $(\lambda f + \mu g)$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ im Punkt a partiell differenzierbar in Richtung h ist und $\partial_h(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \partial_h f(a) + \mu \partial_h g(a)$ gilt.

(b) Beweisen Sie, dass $f : X \to Y$ im Punkt $a \in X$ für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ in Richtung λh partiell differenzierbar ist, falls $f : X \to Y$ im Punkt $a \in X$ in Richtung h partiell differenzierbar ist, und dass $\partial_{\lambda h} f(a) = \lambda \partial_h f(a)$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.1:

(a) Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \partial_h(\lambda f + \mu g)(a) &= \lim_{t \to 0} \frac{(\lambda f(a+th) + \mu g(a+th)) - (\lambda f(a) + \mu g(a))}{t} \\ &= \lambda \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} + \mu \lim_{t \to 0} \frac{g(a+th)) - g(a)}{t} = \lambda\, \partial_h f(a) + \mu\, \partial_h g(a)\ , \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt.

(b) Während für $\lambda = 0$ die Aussage klar ist, folgt diese für $\lambda \neq 0$ unmittelbar aus

$$\partial_{\lambda h} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\lambda h) - f(a)}{t} = \lambda \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\lambda h) - f(a)}{\lambda t} = \lambda \lim_{s \to 0} \frac{f(a + sh) - f(a)}{s} = \lambda\, \partial_h f(a)\ .$$

Zusatzaufgabe 7.2:

(a) Sei $(X, \langle ., . \rangle)$ ein Hilbertraum und $f(x) := \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ die Abbildung, welche einem $x \in X$ seine Euklidische Norm zuordnet. Ist $f : X \to \mathbb{R}$ in Punkten $a \neq 0$ partiell differenzierbar in jede Richtung $h \in X$? Ist sie dort sogar Gâteaux-differenzierbar?

(b) Zeigen Sie: Die durch $f(x) := \|x\|_2^{-2n} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ definierte Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist in Null für beliebiges $i = 1, \dots, n,$ in die Koordinatenrichtung e_i partiell differenzierbar, aber dort nicht stetig.

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.2:

(a) (Beispiel 2.16) Die Funktion $t \mapsto f(a + th) = \sqrt{\langle a + th, a + th \rangle} = \left(\|a\|^2 + 2t\langle a, h \rangle + t^2\|h\|^2\right)^{1/2}$ ist bei $a \neq 0$ nach den üblichen Differentiationsregeln aus der Analysis I in $t = 0$ differenzierbar mit Ableitung

$$\partial_h f(a) = \frac{2\langle a, h \rangle}{2\left(\|a\|^2\right)^{1/2}} = \frac{\langle a, h \rangle}{\|a\|}\ .$$

Offensichtlich ist $h \mapsto \partial_h f(a) = \frac{\langle a, h \rangle}{\|a\|}$ linear, und die Stetigkeit dieser linearen Abbildung folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung $|\langle a, h \rangle| \leq \|a\|\|h\|$, nach welcher die lineare Abbildung $h \mapsto \partial_h f(a)$ die Operatornorm $\frac{\|a\|}{\|a\|} = 1 < \infty$ besitzt. Also ist f Gâteaux-differenzierbar auf $X \setminus \{0\}$, da $\partial_h f(a)$ bei $a \neq 0$ für jedes $h \in X$ existiert sowie linear und stetig in h ist.

(b) (Beispiel 2.18) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\|x\|_2^{2n}}$ bei $x \neq 0$ und $f(0) := 0$, ist nicht nur in allen Punkten $a \neq 0$ partiell differenzierbar, sondern auch im Nullpunkt in die Koordinatenrichtungen e_i partiell differenzierbar, denn wegen $f(te_i) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{f(te_i) - 0}{t} = 0 \quad .$$

Aber f ist nicht stetig im Nullpunkt, denn beispielsweise existiert der Grenzwert von $f(t,t,\ldots,t) = \frac{t^n}{(nt^2)^n}$ für $t \to 0$ nicht und ist somit insbesondere nicht gleich $f(0) = 0$.

Zusatzaufgabe 7.3:

(a) Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x,y) \;:=\; \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Nullpunkt partielle Ableitungen in jede Richtung besitzt, aber dass $h \mapsto \partial_h f(0)$ nicht linear und somit f in 0 nicht Gâteaux-differenzierbar ist, sowie f im Nullpunkt nicht stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass die durch

$$g(x,y) \;:=\; \begin{cases} \frac{2x\mathrm{e}^{-1/y^2}}{x^2+\mathrm{e}^{-2/y^2}}, & \text{für } y \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Nullpunkt Gâteaux-differenzierbar, aber dort trotzdem nicht stetig ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.3:

(a) Sei $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Ist $h = 0$, so gilt $\partial_h f(0,0) = 0$. Weiter ist offensichtlich $\partial_h f(0,0) = 0$ im Falle $h_1 = 0$ oder $h_2 = 0$, da in diesem Falle $f(th_1, th_2) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist. Ist hingegen $h_1, h_2 \neq 0$, so erhalten wir

$$\partial_h f(0,0) \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{f(th_1,th_2) - f(0,0)}{t} \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{t^3 h_1 h_2^2}{t^3(h_1^2 + t^2 h_2^4)} \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + t^2 h_2^4} \;=\; \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2}.$$

Sei nun $h = (1,1)$. Dann ist $\partial_h f(0,0) = 1$, jedoch sowohl $\partial_{(1,0)} f(0,0) = 0$ als auch $\partial_{(0,1)} f(0,0) = 0$. Dies zeigt, dass die Abbildung $h \mapsto \partial_h f(0,0)$ nicht linear ist. Also ist f im Ursprung nicht Gâteux-differenzierbar.
Die Funktion f ist im Ursprung auch nicht stetig, denn für die Folge $(x_n, y_n) := (\frac{1}{n}, \sqrt{\frac{1}{n}})$ gilt $(x_n, y_n) \to 0 \in \mathbb{R}^2$ für $n \to \infty$, aber

$$f(x_n, y_n) \;=\; \frac{x_n y_n^2}{x^2 + y^4} \;\geq\; \frac{x_n y_n^2}{x_n^2} \;=\; \frac{y_n^2}{x_n} \;=\; \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \;=\; 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, obwohl $f(0,0) = 0$.

(b) Wir behaupten, dass jede Richtungsableitung von g im Ursprung verschwindet, sprich für jedes $h \in \mathbb{R}^2$ stets $\partial_h g(0,0) = 0$ gilt. Während im Falle $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $h_2 = 0$ dies offensichtlich ist, folgt $\partial_h g(0,0) = 0$ in der Situation $h_2 \neq 0$ unter Berücksichtigung von $(th_1)^2 \mathrm{e}^{1/(th_2)^2} \to \infty$ und $\mathrm{e}^{-1/(th_2)^2} \to 0$ für $t \to 0$ aus

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(th_1,th_2) - g(0,0)}{t} \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{2h_1 \mathrm{e}^{-1/(t^2h_2^2)}}{t^2 h_1^2 + \mathrm{e}^{-2/(t^2h_2^2)}} \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{2h_1}{(th_1)^2 \mathrm{e}^{1/(t^2h_2^2)} + \mathrm{e}^{-1/(th_2)^2}} \;=\; 0.$$

Insbesondere ist damit die Funktion $h \mapsto \partial_h g(0,0)$ linear und stetig, so dass g im Ursprung Gâteaux-differenzierbar ist.
Die Funktion g ist aber im Ursprung nicht stetig, denn für die Folge $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{\ln n}})$ gilt einerseits $(x_n, y_n) \to (0,0)$ für $n \to \infty$, aber

$$g(x_n, y_n) \;=\; \frac{2x_n \mathrm{e}^{-1/y_n^2}}{x_n^2 + \mathrm{e}^{-2/y_n^2}} \;=\; \frac{\frac{2}{n}\mathrm{e}^{-\ln n}}{\frac{1}{n^2} + \mathrm{e}^{-2\ln n}} \;=\; \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \;=\; 1 \not\to 0 \;=\; g(0,0).$$

Zusatzaufgabe 7.4:

(a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) := (t, t^3)$, und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) := \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ sowie $g(0,0) := 0$, jeweils Gâteaux-differenzierbar sind, aber die Verkettung $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in 0 nicht differenzierbar ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine zweimal partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, für die $\partial_k \partial_h f(a) \neq \partial_h \partial_k f(a)$ an (mindestens) einem Punkt $a \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.4:

(a) Die parametrisierte Kurve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) := (t, t^3)$, ist differenzierbar mit $df(t)h = h\dot{f}(t)$ (vergleiche Beispiel 2.25) und somit nach Satz 2.24 Gâteaux-differenzierbar. Ebenso ist die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $g(x,y) := \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ sowie $g(0,0) := 0$, Gâteaux-differenzierbar, denn

- in allen Punkten $(x,y) \neq (0,0)$ erhalten wir trivialerweise

$$\partial_h g(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \, , \, \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \right) h = \frac{3x^2 y (y^2 - x^6)}{(x^6+y^2)^2} h_1 + \frac{x^3 (x^6 - y^2)}{(x^6+y^2)^2} h_2$$

  über die Quotientenregel oder direkt nach Definition über

$$\begin{aligned}
\partial_h g(x,y) &= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{(x+th_1)^3 (y+th_2)}{(x+th_1)^6 + (y+th_2)^2} - \frac{x^3 y}{x^6+y^2}}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(x+th_1)^3 (y+th_2)(x^6+y^2) - x^3 y ((x+th_1)^6 + (y+th_2)^2)}{t (x^6+y^2) \left((x+th_1)^6 + (y+th_2)^2 \right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{x^3 (x+th_1)^3 \left(h_2 x^3 - (3x^2 h_1 + 3xth_1^2 + t^2 h_1^3) y \right) + y (y+th_2) \left(\left(3x^2 h_1 + 3xth_1^2 + t^2 h_1^3\right) y - x^3 h_2 \right)}{(x^6+y^2) \left((x+th_1)^6 + (y+th_2)^2 \right)} \\
&= \frac{x^6 \left(h_2 x^3 - 3x^2 y h_1 \right) + y^2 \left(3x^2 y h_1 - x^3 h_2 \right)}{(x^6+y^2)^2} = \frac{3x^2 y (y^2 - x^6)}{(x^6+y^2)^2} h_1 + \frac{x^3 (x^6 - y^2)}{(x^6+y^2)^2} h_2 \, ,
\end{aligned}$$

  wobei die Abbildung $h \mapsto \partial_h g(x,y)$ offenbar aus $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ist.
- im Nullpunkt ist g Gâteaux-differenzierbar mit partieller Ableitung $\partial_h g(0,0) = 0$ für alle $h \in \mathbb{R}^2$ wegen

$$\partial_h g(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t^4 h_1^3 h_2}{t^6 h_1^6 + t^2 h_2^2} - 0}{t} = \lim_{t \to 0} t \frac{h_1^2 h_2^2}{t^4 h_1^6 + h_2^2} = 0 \quad ,$$

  wobei man beachte, dass bei $h_2 = 0$ der Zähler verschwindet, und da $h \mapsto \partial_h g(0,0)$ hier als konstante Nullfunktion trivialerweise linear und stetig ist.

Die Verkettung $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in 0 jedoch nicht differenzierbar, denn

$$(g \circ f)(t) = g(f(t)) = \frac{t^3 t^3}{t^6 + (t^3)^2} = \frac{1}{2}$$

gilt für jedes $t \neq 0$, jedoch $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(0,0) = 0$, und somit ist $g \circ f$ nicht einmal stetig in 0, also auch nicht differenzierbar.

(b) (Beispiel 2.21) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) := 0$, ist Gâteaux-differenzierbar mit partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(3x^2 y - y^3) - 2x(x^3 y - x y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^4 + 4x^2 y^2 - y^4) y}{(x^2+y^2)^2}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(x^3 - 3x y^2) - 2y(x^3 y - x y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^4 - 4x^2 y^2 - y^4) x}{(x^2+y^2)^2}$$

in Koordinatenrichtungen für $(x,y) \neq (0,0)$ sowie $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Die gemischten zweiten partiellen Ableitung im Nullpunkt existieren, sie sind aber wegen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{(0^4 + 4 \cdot 0^2 t^2 - t^4) t}{(0^2 + t^2)^2} - 0}{t} = -1$$

und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{(t^4 - 4t^2 0^2 - 0^4) t}{(t^2 + 0^2)^2} - 0}{t} = 1$$

voneinander verschieden.

Alle Übungsaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

Zusatzmaterial zur Analysis II – Übung zu Serie 8

Differenzierbarkeit, Kettenregel, Stetige Differenzierbarkeit, Schrankensatz, Taylorformel

- (Definition 2.23) Seien X, Y Banach, $U \subset X$ offen. Eine Abbildung $f : U \to Y$ heißt **im Punkt** $a \in U$ **differenzierbar**, wenn es eine lineare und stetige Abbildung $A : X \to Y$ gibt (d.h. $A \in L(X, Y)$), so dass
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{\|h\|} = 0 .$$
In diesem Fall heißt A die **Ableitung von** f **im Punkt** a und wird mit $df(a) := A$ symbolisiert.[1]

- (Satz 2.24) Seien X, Y Banach, $U \subset X$ offen. Ist $f : U \to Y$ in $a \in U$ differenzierbar, dann ist f in a in jede Richtung $h \in X$ partiell differenzierbar mit $df(a)h = \partial_h f(a)$, also f in a auch Gâteaux-differenzierbar.

- Ist $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ im Punkt $a \in U$ differenzierbar, kann $df(a) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ bezüglich der kanonischen Basen wegen $\langle df(a)e_j, e_i\rangle = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ mit $j = 1, \ldots, m$ und $i = 1, \ldots, n$ durch die $(m \times n)$ -Matrix
$$Jf(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix} \tag{8.1}$$
repräsentiert werden. Diese wird dann als die **Jacobi-Matrix** von f im Punkt a bezeichnet.

- Speziell für eine in a differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ definiert man den **Gradienten** $\operatorname{grad} f(a)$ als Spaltenvektor mittels des Euklidischen Skalarproduktes $\langle \cdot , \cdot \rangle$ durch $df(a) = \langle \operatorname{grad} f(a), \cdot \rangle$.

- (Satz 2.26) Seien X, Y Banach-Räume und sei $f : U \to Y$ eine Abbildung auf einer offenen Teilmenge $U \subset X$. Ist f in einem Punkt $a \in U$ differenzierbar, dann ist f auch stetig[2] in a .

- (Lemma 2.27) Seien $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y), (Z, \|.\|_Z)$ Banach-Räume, $U \subset X$ offene Teilmenge. Eine Abbildung $f = (f_1, f_2) : U \to Y \times Z$ ist genau dann im Punkt $a \in U$ differenzierbar, wenn die Abbildungen $f_1 : U \to Y$ und $f_2 : U \to Z$ im Punkt a differenzierbar sind. In diesem Fall gilt $df(a) = (df_1(a), df_2(a))$.

- (Lemma 2.28) Seien $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen. Dann gelten
  (a) Sind $f, g : U \to Y$ differenzierbar in $a \in U$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Konstanten, dann ist auch $(\lambda f + \mu g) : U \to Y$ differenzierbar in a mit Ableitung $d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda\, df(a) + \mu\, dg(a)$ (Linearität).
  (b) Sind $f : U \to Y$ und die skalarwertige Funktion $\lambda : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $a \in U$, dann ist $(\lambda f) : U \to Y$ differenzierbar in a mit Ableitung $d(\lambda f)(a)h = d\lambda(a)h \cdot f(a) + \lambda(a) \cdot df(a)h$ (Produktregel).

- (Satz 2.29) Seien $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y), (Z, \|.\|_Z)$ Banach-Räume und $U \subset X$, $V \subset Y$ offen. Ist $f : U \to V$ differenzierbar in $a \in U$ mit Ableitung $df(a) \in L(X, Y)$ und $g : V \to Z$ differenzierbar in $b = f(a)$ mit Ableitung $dg(b) \in L(Y, Z)$, dann ist $g \circ f$ differenzierbar in a mit Ableitung
$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a) \qquad \text{(Kettenregel)}. \tag{8.2}$$
Insbesondere gilt bei $X = \mathbb{R}^k$, $Y = \mathbb{R}^m$, $Z = \mathbb{R}^n$ für die Jacobi-Matrizen $J(g \circ f)(a) = Jg(f(a)) \cdot Jf(a)$.

- (Definition 2.31) Eine Abbildung $f : U \to Y$ mit $U \subset X$ offen und X, Y Banach-Räumen heißt **stetig differenzierbar**, wenn f auf U differenzierbar ist und die Ableitung $df : U \to L(X, Y)$ stetig ist.

- (Satz 2.33) Seien X, Y Banach, $U \subset X$ offen. Eine Abbildung $f : U \to Y$ ist genau dann stetig differenzierbar, wenn sie Gâteaux-differenzierbar mit stetiger Gâteaux-Ableitung $U \ni x \mapsto (h \mapsto \partial_h f(x)) \in L(X, Y)$ ist.

- (Korollar 2.34) Existieren für $f : U \to \mathbb{R}^n$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$ offen die partiellen Abbildungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in jedem Punkt von U und ist $x \mapsto \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ stetig für jedes $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, so ist f stetig differenzierbar.

- **Schrankensatz (Satz 2.36)**: Seien X, Y Banach, $U \subset X$ offen. Ist $f : U \to Y$ stetig differenzierbar, so gilt
$$\forall x, \tilde{x} \in U \quad : \quad \|f(\tilde{x}) - f(x)\|_Y \leq \left(\max_{t\in[0,1]} \|df(x + t(\tilde{x} - x))\|_{L(X,Y)} \right) \|\tilde{x} - x\|_X .$$

[1] In der Literatur wird die Differenzierbarkeit im oben definierten Sinn auch oft als totale oder auch Fréchet-Differenzierbarkeit und die Ableitung A entsprechend als das totale oder Fréchet-Differential bezeichnet.
[2] Achtung: Partielle Differenzierbarkeit oder Gâteaux-Differenzierbarkeit reichen im Allgemeinen nicht aus, um auf Stetigkeit schließen zu können. Vergleiche ZA 7.3 (a) und (b).

Insbesondere ist jede stetig differenzierbare Abbildung lokal Lipschitz-stetig, d.h. es gibt zu jedem Punkt eine Umgebung, auf der f Lipschitz-stetig ist (Korollar 2.37).

- (Definition 2.38) Seien X, Y Banach, $U \subset X$ offen. Ist die Abbildung $df : U \to L(X, Y)$ einer stetig differenzierbaren Abbildung $f : U \to Y$ selbst wieder stetig differenzierbar, so heißt f **zweimal stetig differenzierbar** mit $d^2 f : U \to L(X, L(X, Y))$. Induktiv definieren wir so **k-mal stetig differenzierbare Abbildungen**[3] und $C^k(U, Y)$ als den Vektorraum der k-mal stetig differenzierbaren Abbildungen $f : U \to Y$.

- **Satz von Schwarz (Satz 2.39):** Seien X, Y Banach, $U \subset X$ offen, $f \in C^2(U, Y)$. Für alle $x \in U$ gilt

$$\forall h, \tilde{h} \in X \quad : \quad d^2 f(x)(h, \tilde{h}) = d^2 f(x)(\tilde{h}, h) \ .$$

- (Definition 2.40) Seien X, Y Banach, $U \subset X$ offen, $f \in C^k(U, Y)$, $a \in X$. Weiter bezeichne $d^0 f(a) := f(a)$. Das **Taylorpolynom k-ten Grades von f im Entwicklungspunkt** a ist definiert durch die Abbildung

$$\boxed{T_k f(x; a) := \sum_{r=0}^{k} \tfrac{1}{r!} d^r f(a)(x-a)^r} \qquad \text{mit} \qquad \boxed{(x-a)^r \ := \begin{cases} ((x-a), (x-a), \cdots, (x-a)) \in X^r, & r > 0, \\ 1 \ , & r = 0. \end{cases}}$$

- Im Fall $f \in C^k(U, \mathbb{R})$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist die k-te Ableitung in Richtung h^k durch

$$\boxed{d^k f(x) h^k \ = \ \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(x)\, h_{i_1} \ldots h_{i_k}} \tag{8.3}$$

gegeben. Insbesondere gilt für $k = 2$ wegen $df(a)h = \langle \operatorname{grad} f(a), h \rangle$ und $d^2 f(a)(h, h) \ = \ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, h_i h_j$ mit der (nach Satz 2.39 symmetrischen) **Hesse-Matrix** $\operatorname{Hess} f(a) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1}^{n}$ die prägnante Formel

$$\boxed{T_2 f(x; a) \ = \ f(a) + \langle \operatorname{grad} f(a), x - a \rangle \ + \ \tfrac{1}{2} \langle \operatorname{Hess} f(a)(x-a), (x-a) \rangle} \, . \tag{8.4}$$

Lokale Extrema

- Ist $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset X$ offen und $(X, \|.\|_X)$ Banach-Raum partiell differenzierbar in $a \in U$ und gilt $\partial_h f(a) = 0$ für alle Richtungen $h \in X$, so heißt a **stationärer Punkt von** f.

- Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge eines Banach-Raumes X und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt, f hat in $x^* \in U$ ein **lokales Minimum** beziehungsweise ein **lokales Maximum**, wenn es eine Umgebung V von x^* mit $f(x^*) \leq f(x)$ beziehungsweise $f(x^*) \geq f(x)$ für alle $x \in V$ gibt.[4]

- Ein stationärer Punkt $a \in U$ wird insbesondere als **Sattelpunkt** von f bezeichnet, wenn zu jedem $\delta > 0$ Punkte $x, \tilde{x} \in B_\delta(a) \cap U$ mit $f(x) > f(a)$ und $f(\tilde{x}) < f(a)$ existieren.

- Besitzt $f : U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset X$ eines Banach-Raumes X in $x^* \in U$ ein lokales Extremum und ist f in x^* partiell differenzierbar, dann ist x^* ein stationärer Punkt[5] von f (vgl. Satz 2.22).

- (Definition 2.45) Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beziehungsweise die ihr zugeordnete quadratische Form $\mathbb{R}^n \ni h \mapsto \langle Ah, h \rangle \in \mathbb{R}$ heißt
  - **positiv (semi-)definit**, falls $\langle Ah, h \rangle > 0$ (bzw. $\langle Ah, h \rangle \geq 0$) für alle $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.
  - **negativ (semi-)definit**, falls $\langle Ah, h \rangle < 0$ (bzw. $\langle Ah, h \rangle \leq 0$) für alle $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.
  - **indefinit**, falls es Vektoren $h, \tilde{h} \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle Ah, h \rangle > 0$ und $\langle A\tilde{h}, \tilde{h} \rangle < 0$ gibt.

- (Lemma 2.46) Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt
  - A ist positiv (negativ) definit $\iff$ Jeder Eigenwert von A ist positiv (negativ).
  - A ist indefinit $\iff$ A besitzt sowohl einen positiven als auch negativen Eigenwert.
  - A ist positiv (negativ) semidefinit $\iff$ Alle Eigenwerte von A sind nicht-negativ (nicht-positiv).

- (Satz 2.47) Sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ ein stationärer Punkt (d.h. in diesem Fall $\operatorname{grad} f(a) = 0$). Ist $\operatorname{Hess} f(a)$ positiv (bzw. negativ) definit, so besitzt f in a ein lokales Minimum (bzw. Maximum).

[3] Da man Abbildungen $B \in L(X, L(X, Y))$ durch $(x, \tilde{x}) \mapsto B(x)(\tilde{x})$ mit bilinearen stetigen Abbildungen $X \times X \to Y$ identifizieren kann, folgt induktiv, dass die k-te Ableitung eine (nach Satz 2.39 symmetrische) k-lineare Abbildung $d^k f(x) : X \times \ldots \times X \to Y$ ist.

[4] In beiden Fällen wird auch von einem lokalen Extremum von f in $x^* \in U$ gesprochen.

[5] Vorsicht: Ist $K \subset X$ beliebig und $x^* \in \partial K \cap K$ lokales Extremum von $f : K \to \mathbb{R}$, gilt nicht notwendigerweise $\partial_h f(x^*) = 0$.

Zusatzaufgabe 8.1:

Seien X_1, X_2, Y Banach-Räume. Zeigen Sie: Eine bilineare Abbildung $B : X_1 \times X_2 \to Y$ ist genau dann stetig, falls eine Konstante $0 < C < \infty$ mit $\|B(x_1, x_2)\|_Y \leq C\|x_1\|_{X_1}\|x_2\|_{X_2}$ für alle $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ existiert.

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.1:

Sei die Abbildung B stetig. Dann ist für jedes Element $x_1 \in X_1$ die induzierte Abbildung $L_{x_1} : X_2 \ni x_2 \mapsto B(x_1, x_2) \in Y$ linear und stetig, sprich $L_{x_1} \in L(X_2, Y)$ und es gilt $\|L_{x_1}x_2\| \leq \|L_{x_1}\|\|x_2\|$ für $x_2 \in X_2$. Nun wird aber durch $X_1 \ni x_1 \mapsto L_{x_1} \in L(X_2, Y)$ eine lineare Abbildung von X_1 in den Banach-Raum $L(X_2, Y)$ definiert, da für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x_1, x_1' \in X_1$ offensichtlich $L_{\lambda x_1 + x_1'} = \lambda L_{x_1} + L_{x_1'}$ gilt. Wir behaupten nun, dass diese Abbildung auch stetig ist. Wäre sie es nämlich nicht, so würden wir eine Folge $\{x_1^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X_1$ mit $\|L_{x_1^k}\| > k\,\|x_1^k\|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ finden. Demnach gäbe es eine Folge $\{x_2^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X_2$ mit $\|x_2^k\| = 1$ und $\|L_{x_1^k}x_2^k\| > k\|x_1^k\|$. Dies würde aber

$$\left\|B\Big(\tfrac{x_1^k}{\sqrt{k}\|x_1^k\|}, \tfrac{1}{\sqrt{k}}x_2^k\Big)\right\| \;=\; \left\|\frac{L_{x_1^k}x_2^k}{k\|x_1^k\|}\right\| > 1 \qquad \text{implizieren, während} \qquad \Big(\tfrac{x_1^k}{\sqrt{k}\|x_1^k\|}, \tfrac{1}{\sqrt{k}}x_2^k\Big) \to (0,0)$$

für $k \to \infty$ konvergiert, im Widerspruch zur Stetigkeit von B im Ursprung und somit zur Stetigkeit von B an sich. Also ist die Abbildung $X_1 \ni x_1 \to L_{x_1} \in L(X_2, Y)$ stetig. Folglich finden wir eine Konstante $0 < C < \infty$ mit $\|L_{x_1}\| \leq C\|x_1\|$. Zusammenfassend heißt dies

$$\forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \quad : \quad \|B(x_1, x_2)\| = \|L_{x_1}x_2\| \leq \|L_{x_1}\|\|x_2\| \leq C\|x_1\|\|x_2\|$$

Existiert umgekehrt eine Konstante $0 < C < \infty$, so dass für alle $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ die Ungleichung $\|B(x_1, x_2)\| \leq K\|x_1\|\|x_2\|$ erfüllt ist, so gilt für eine Folge $\{(x_1^k, x_2^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $(x_1^k, x_2^k) \to (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ für $k \to \infty$ dann

$$\|B(x_1, x_2) - B(x_1^k, x_2^k)\| \;=\; \|B(x_1 - x_1^k, x_2) + B(x_1^k, x_2 - x_2^k)\| \;\leq\; K\|x_1 - x_1^k\|\|x_2\| + K\|x_1^k\|\|x_2 - x_2^k\| \;\to\; 0.$$

Dies zeigt die Stetigkeit von B in (x_1, x_2), und schließt den Beweis der Behauptung ab.

Zusatzaufgabe 8.2:

(a) Überprüfen Sie für $\lambda f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_3, x_2 - x_4)$ und $\lambda(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_4$ die Produktregel, indem Sie die Ableitung $d(\lambda f)$ sowohl direkt als auch mittels Lemma 2.28(b) bestimmen.

(b) Bestimmen Sie für $g(t) = (\sin(t) + \cos(t), t - t^2)$ und $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ die Ableitung von $(f \circ g)(t)$ im Punkt $t = 0$ mittels der Kettenregel.

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.2:

(a) Zunächst haben wir für $g(x) := (\lambda f)(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2x_3x_4, x_1(x_2x_4 - x_4^2)$ mit $x, h \in \mathbb{R}^4$ direkt

$$d(\lambda f)(x)h \;=\; \partial_h g(x) \;=\; \left(\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x)h_k\right)_{j=1}^{2} \;=\; \begin{pmatrix} 2x_1x_3x_4 & 0 & x_1^2x_4 & x_1^2x_3 \\ x_2x_4 - x_4^2 & x_1x_4 & 0 & x_1(x_2 - 2x_4) \end{pmatrix} h\,.$$

Wegen $df(x)h = \begin{pmatrix} x_3 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} h \in \mathbb{R}^2$ und aufgrund von $d\lambda(x)h = \begin{pmatrix} x_4 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix} h \in \mathbb{R}$ für $x, h \in \mathbb{R}^4$ mit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ergibt sich dann nach Produktregel (Lemma 2.28 (b)) ebenfalls

$$\begin{aligned} d(\lambda f)(x)h \;&=\; d\lambda(x)h \cdot f(x) + \lambda(x) \cdot df(x)h \;=\; \underbrace{\begin{pmatrix} x_4 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix} h}_{\in\mathbb{R}} \cdot \begin{pmatrix} x_1x_3 \\ x_2 - x_4 \end{pmatrix} + x_1x_4 \cdot \begin{pmatrix} x_3 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} h \\ &=\; \begin{pmatrix} x_1x_3 \\ x_2 - x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix} h + \begin{pmatrix} x_1x_3x_4 & 0 & x_1^2x_4 & 0 \\ 0 & x_1x_4 & 0 & -x_1x_4 \end{pmatrix} h \\ &=\; \begin{pmatrix} 2x_1x_3x_4 & 0 & x_1^2x_4 & x_1^2x_3 \\ x_2x_4 - x_4^2 & x_1x_4 & 0 & x_1(x_2 - 2x_4) \end{pmatrix} h\,. \end{aligned}$$

(b) Nach Beispiel 2.25 ist für eine Kurve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Ableitung durch $dg(t)h = h\dot{g}(t) = h\begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ 1 - 2t \end{pmatrix}$ mit $h \in \mathbb{R}$ gegeben, also im Ursprung somit $dg(0)h = h\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Weiterhin haben wir für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nach Satz 2.24 und aufgrund der Linearität der Gâteaux-Ableitung

$$df(x, y)h \;=\; \partial_h f(x, y) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h_1 \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)h_2 \;=\; \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+x^2+y^2} & \frac{2y}{1+x^2+y^2} \end{pmatrix} h\,.$$

Im relevanten Punkt $g(0) = (1,0)$ gilt dann $df(g(0))\tilde{h} = df(1,0)\tilde{h} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\tilde{h}$ mit $\tilde{h} \in \mathbb{R}^2$. Nach der Kettenregel ergibt sich nun

$$d(f \circ g)(0)h = df(g(0)) \circ dg(0)h = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} h \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix} \cdot h$$

beziehungsweise für die entsprechenden Jacobi-Matrizen

$$J(f \circ g)(0) = Jf(g(0)) \cdot Jg(0) = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 1}.$$

Zusatzaufgabe 8.3:

(a) Zeigen Sie, dass für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jeder Eigenwert reell ist.

(b) Ist die Hesse-Matrix einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an jedem Punkt symmetrisch?

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A := \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, d.h. die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

(d) Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + (2x+y+9)z + y^2 + 3$ auf stationäre Punkte und lokale Extrema.

(e) Bestimmen Sie für f aus (d) das Taylor-Polynom zweiter Ordnung an den Punkten $(0,0,0)$ und $(-4,-1,2)$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.3:

(a) Ähnlich dem Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ können wir auf $\mathbb{C}^n$ die Sesquilinearform (Hermite'sches Skalarprodukt) $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle_H := \bar{y}^T x = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k$ betrachten, welche die leicht überprüfbaren Eigenschaften

(i) $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}\forall x,y,z \in \mathbb{C}^n : \langle \alpha x + \beta y, z\rangle_H = \alpha\langle x,z\rangle_H + \beta\langle y,z\rangle_H$ (komplex-linear),

(ii) $\forall x,y \in \mathbb{C}^n : \langle x,y\rangle_H = \overline{\langle y,x\rangle_H}$ (hermite'sch),

(iii) $\forall x \in \mathbb{C}^n : \langle x,x\rangle_H \geq 0$ und $\langle x,x\rangle_H = 0 \iff x = 0$ (positiv definit)

besitzt. Insbesondere liefert $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x,x\rangle_H}$ eine Norm auf $\mathbb{C}^n$. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ nun ein Eigenwert der reellen symmetrischen $n \times n$-Matrix A und $x \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor mit $\|x\|_2^2 = \langle x,x\rangle_H = 1$, dann gilt wie behauptet $\lambda \in \mathbb{R}$ aufgrund von $A = A^T$ (Symmetrie), $\bar{A} = A$ (Reellwertigkeit) und daher

$$\lambda = \lambda\langle x,x\rangle_H \overset{(i)}{=} \langle \lambda x,x\rangle_H = \langle Ax,x\rangle_H = \bar{x}^T Ax = \bar{x}^T \bar{A}^T x = \overline{Ax}^T x = \langle x,Ax\rangle_H = \langle x,\lambda x\rangle_H \overset{(i),(ii)}{=} \overline{\lambda\langle x,x\rangle_H} = \bar{\lambda}.$$

(b) Für ein $f \in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ gilt nach dem Satz von Schwarz (Satz 2.39) an jedem Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ und somit für die Hesse-Matrix

$$(\operatorname{Hess} f(a))^T = \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^n\right)^T = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)\right)_{i,j=1}^n = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^n = \operatorname{Hess} f(a).$$

(c) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_3)$ erhalten wir aus $\det(A - \lambda I_3) = 0$. Entsprechend

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 2\\ 0 & 2-\lambda & 1\\ 2 & 1 & -\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2-\lambda & 1\end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) - (1-\lambda) - 4(2-\lambda)$$

$$= (\lambda^2 - \lambda)(2-\lambda) + 5\lambda - 9 = 3\lambda^2 - \lambda^3 + 3\lambda - 9 = (\lambda - 3)(-\lambda^2 + 3)$$

ergeben sich nun für die Eigenwerte von A unmittelbar $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{3}$.

(d) Wegen $df(x,y,z) = (x + 2z, z + 2y, 2x + y + 9)$ ist $P = (-4,-1,2)$ einziger stationärer Punkt von f. Da $\operatorname{Hess} f(x,y,z) = A$ in diesem Fall konstant und – nach (c) – indefinit ist, besitzt f in P nur einen Sattelpunkt. Nach Satz 2.22 kann f somit keine lokalen Extrema besitzen, da es keine weiteren stationären Punkte gibt.

(e) Nach (8.4) ergeben sich als das Taylor-Polynom zweiten Grades jeweils

$$\begin{aligned}
T_2 f((x,y,z);(0,0,0)) &= f(0,0,0) + \langle \operatorname{grad} f(0,0,0),(x,y,z)^T\rangle + \frac{1}{2}\left\langle A(x,y,z)^T,(x,y,z)^T\right\rangle\\
&= 3 + 9z + \frac{1}{2}\left(x^2 + 2y^2 + 4xz + 2yz\right) = f(x,y,z)\\
T_2 f((x,y,z);(-4,-1,2)) &= f(-4,-1,2) + 0 + \frac{1}{2}\left\langle A(x+4,y+1,z-2)^T,(x+4,y+1,z-2)^T\right\rangle\\
&= 12 + \frac{1}{2}\left((x+4)^2 + 2(y+1)^2 + 4(x+4)(z-2) + 2(y+1)(z-2)\right) = f(x,y,z).
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 8.4:

(a) Untersuchen Sie die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y):=\begin{cases}\frac{(xy)^n}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $(n\in\mathbb{N})$ auf Stetigkeit, partielle Differenzierbarkeit, Differenzierbarkeit, stetige Differenzierbarkeit.

(b) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ g(x,y):=x^4-8x^2+y^2+16$.

(c) Untersuchen Sie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)\ =\ 6x^2y^2-4x^3-6y^2$ auf lokale Extrema sowie Sattelpunkte.

(d) Bestimmen Sie für $f:(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x,y):=\frac{x-y}{x+y}$ das Taylorpolynom 2. Grades im Punkt $(1,1)$.

(e) Beweisen Sie (8.3) per Induktion für ein $f\in C^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.4:

(a) Die Stetigkeit der Funktion f in allen Punkten $(x,y)\neq(0,0)$ ist offensichtlich. Im Ursprung folgt diese hingegen für $n\geq 2$ aus den Abschätzungen

$$|f(x,y)-f(0,0)| \ = \ \left|\frac{(xy)^n}{x^2+y^2}\right| \ \leq\ \frac{|x|^n|y|^n}{x^2+y^2} \ =\ |x|^{n-2}|y|^n\frac{|x|^2}{x^2+y^2} \ \leq\ |x|^{n-2}|y|^n\ ,$$
$$|f(x,y)-f(0,0)| \ = \ \left|\frac{(xy)^n}{x^2+y^2}\right| \ \leq\ \frac{|x|^n|y|^n}{x^2+y^2} \ =\ |x|^{n}|y|^{n-2}\frac{|y|^2}{x^2+y^2} \ \leq\ |x|^{n}|y|^{n-2}\ ,$$

welche $f(x,y)\to 0=f(0,0)$ für $(x,y)\to(0,0)$ implizieren. Für $n=1$ ist f im Ursprung unstetig, denn zum Beispiel für die Nullfolge $\{(\frac{1}{m},\frac{1}{m})\}_{m\in\mathbb{N}}$ gilt $\left|f\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)-f(0,0)\right| \ = \ \frac{\frac{1}{m^2}}{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2}} \ = \ \frac{1}{2}$ für alle $m\in\mathbb{N}$. Weiter besitzt f für $(x,y)\neq(0,0)$ in Koordinaten-Richtungen die stetigen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{ny(xy)^{n-1}}{x^2+y^2}-\frac{2x(xy)^n}{(x^2+y^2)^2}\qquad\text{beziehungsweise}\qquad\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{nx(xy)^{n-1}}{x^2+y^2}-\frac{2y(xy)^n}{(x^2+y^2)^2},$$

und ist somit nach Korollar 2.34 in Punkten $(x,y)\neq(0,0)$ bei beliebigen $n\in\mathbb{N}$ stetig differenzierbar. In dem Punkt $(x,y)=(0,0)$ ist f hingegen für $n=1$ nicht partiell differenzierbar, da zum Beispiel mit der Nullfolge $\{(\frac{1}{m},\frac{1}{m})\}_{m\in\mathbb{N}}$ der zugehörige Differenzenquotient gemäß

$$\left|\frac{f\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)-0}{\frac{1}{m}}\right|=\frac{\frac{1}{m^2}}{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2}\right)}=\frac{m}{2}$$

für $m\to\infty$ divergiert. Ist aber $n>1$, so ist f im Ursprung differenzierbar, und zwar mit $df(0,0)=(0,0)$. Sei nämlich $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$ mit $\|h\|_2$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\|h\|_2}{|f(h)-f(0)-(0,0)\cdot h^T|} \ &= \ \frac{\|h\|_2}{|f(h)|} \ = \ \frac{\|h\|_2^3}{(h_1h_2)^n} \ = \left(\frac{h_1^2+h_2^2}{h_1^{\frac{2n}{3}}h_2^{\frac{2n}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{h_1^2}{h_1^{\frac{2n}{3}}h_2^{\frac{2n}{3}}}+\frac{h_2^2}{h_1^{\frac{2n}{3}}h_2^{\frac{2n}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}\\ &= \ \left(\frac{1}{h_1^{\frac{2n}{3}-2}h_2^{\frac{2n}{3}}}+\frac{1}{h_1^{\frac{2n}{3}}h_2^{\frac{2n}{3}-2}}\right)^{\frac{3}{2}} \ \geq \ \left(\frac{2}{(\max\{|h_1|,|h_2|\})^{\frac{4n}{3}-2}}\right)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Ist nun $\frac{4n}{3}-2>0$ (dies ist für $n>1$ mit $n\in\mathbb{N}$ der Fall), dann divergiert die rechte Seite für $(h_1,h_2)\to 0$ gegen ∞, woraus sich die Differenzierbarkeit von f in $(0,0)$ ergibt. Aus

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}\right| \ &= \ \left|\frac{ny(xy)^{n-1}}{x^2+y^2}-\frac{2x(xy)^n}{(x^2+y^2)^2}\right| \ = \ \left|\frac{(n-2)x^{n+1}y^n+nx^{n-1}y^{n+2}}{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}\right|\\ &\leq \ \left|\frac{(n-2)x^{n+1}y^n}{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}\right|+\left|\frac{nx^{n-1}y^{n+2}}{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}\right| \ \leq \ (n-2)|x|^{n-1}|y|^{n-2}+n|x|^{n-1}y^{n-2}\to 0\end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}\right| \ &= \ \left|\frac{nx(xy)^{n-1}}{x^2+y^2}-\frac{2y(xy)^n}{(x^2+y^2)^2}\right| \ = \ \left|\frac{(n-2)y^{n+1}x^n+ny^{n-1}x^{n+2}}{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}\right|\\ &\leq \ \left|\frac{(n-2)y^{n+1}x^n}{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}\right|+\left|\frac{ny^{n-1}x^{n+2}}{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}\right| \ \leq \ (n-2)|y|^{n-1}|x|^{n-2}+n|y|^{n-1}x^{n-2}\to 0\end{aligned}$$

für $(x,y)\to(0,0)$ folgt wiederum nach Korollar 2.34 sogar, dass f im Ursprung stetig differenzierbar ist.

(b) Die Funktion $g(x,y) := x^4 - 8x^2 + y^2 + 16$ besitzt die Ableitung $dg(x,y) = (4x^3 - 16x, 2y)$ und somit die stationären Punkte $(0,0)$, $(2,0)$ und $(-2,0)$. Aufgrund von

$$\operatorname{Hess} g(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

besitzt $\operatorname{Hess} g(0,0)$ die Eigenwerte -16 und 2, so dass bei $(0,0)$ ein Sattelpunkt von g vorliegt, während für $(\pm 2, 0)$ die Hesse-Matrix die Eigenwerte 32 und 2 besitzt und f somit in $(\pm 2,0)$ nach Satz 2.47 lokale Minima besitzt. Die lokalen sind auch die globalen Minima, da der Wert im Sattelpunkt $g(0,0) = 16$ größer als der Wert $g(\pm 2, 0) = 0$ ist und $g(x,y) \to +\infty$ für $\|(x,y)\| \to +\infty$ wegen $g(x,y) = (x^2-4)^2 + y^2$ gilt.

(c) Der Funktion besitzt die Ableitung $df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x(y^2 - x) & 12y(x^2-1) \end{pmatrix}$. Stationäre Punkte erfüllen somit die Gleichungen $x(y^2 - x) = 0$ und $y(x^2-1) = 0$.

(i) Für $y = 0$ folgt mit der ersten Gleichung auch $x = 0$, so dass $(x_1, y_1) = (0,0)$ ein stationärer Punkt ist.

(ii) Für $x^2 = 1$ (also insbesondere $x \neq 0$) folgt mit der ersten Gleichung $y^2 = x > 0$. Damit ergeben sich die beiden weiteren stationären Punkte $(x_2, y_2) = (1,1)$ und $(x_3, y_3) = (1,-1)$.

Die Hesse-Matrix ergibt sich zu $(\operatorname{Hess} f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12(y^2 - 2x) & 24xy \\ 24xy & 12(x^2-1) \end{pmatrix}$.

Zur Charakterisierung betrachten wir die Hesse-Matrizen an den stationären Punkten. Die Eigenwerte von

$$(\operatorname{Hess} f)(1,1) = \begin{pmatrix} -12 & 24 \\ 24 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\operatorname{Hess} f)(1,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}$$

sind jeweils $-6(1 \pm \sqrt{17})$, wonach diese indefinit sind und wir $(x_2,y_2) = (1,1)$ und $(x_3,y_3) = (1,-1)$ als Sattelpunkte festhalten können. Für $(x_1,y_1) = (0,0)$ ist die Hesse-Matrix

$$(\operatorname{Hess} f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

jedoch negativ semidefinit. Betrachten wir die Funktion $f(x,0) = -4x^3$, so besitzt sie bei $x = 0$ einen Wendepunkt, wohingegen die Funktion $f(0,y) = -6y^2 \leq f(0,0)$ bei $y = 0$ ein lokales isoliertes Maximum besitzt. Somit liegt auch bei $(x_1,y_1) = (0,0)$ ein Sattelpunkt vor.

(d) Wir berechnen zunächst sämtliche partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \tfrac{2y}{(x+y)^2}, & \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \tfrac{-4y}{(x+y)^3}, & \tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \tfrac{2(x-y)}{(x+y)^3}, \\
\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \tfrac{-2x}{(x+y)^2}, & \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \tfrac{4x}{(x+y)^3}, & \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \tfrac{2(x-y)}{(x+y)^3}.
\end{aligned}$$

Im Punkt $(x,y) = (1,1)$ erhalten wir für das Taylorpolynom zweiten Grades von f im Punkt $(1,1)$ somit

$$\begin{aligned}
T_2 f((x,y);(1,1)) &= f(1,1) + \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle + \tfrac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= 0 + \tfrac{x-y}{2} + \tfrac{(y-1)^2 - (x-1)^2}{4} = x - y + \tfrac{y^2 - x^2}{4}.
\end{aligned}$$

(e) Sei $h \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Der Induktionsanfang folgt aus der Linearität der Gâteaux-Ableitung und Satz 2.24 über

$$df(x)h \overset{\text{Satz 2.24}}{=} \partial_h f(x) \overset{\text{Linearitaet}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i \tag{8.5}$$

Angenommen (8.3) gelte für ein $k \geq 1$. Dann folgt mit dem Satz von Schwarz (Satz 2.39) analog

$$\begin{aligned}
d^{k+1} f(x) h^{k+1} \overset{(\star)}{=} d\left(d^k f(x) h^k\right) h &\overset{\text{(IV)}}{=} d\left(\sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(x)\, h_{i_1} \ldots h_{i_k} \right) h \\
&\overset{(8.5)}{=} \sum_{i_{k+1}=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}} \left(\sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(x)\, h_{i_1} \ldots h_{i_k} \right) h_{i_{k+1}} \\
&\overset{\substack{\text{Satz 2.39} \\ \text{Linearitaet}}}{=} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \sum_{i_{k+1}=1}^n \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}}(x)\, h_{i_1} \ldots h_{i_k} h_{i_{k+1}},
\end{aligned}$$

wobei wir $d^k f(x) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, L(\ldots, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \ldots)))$, also dass $d^k f(x)$ eine k-lineare stetige Abbildung $\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist, an der Stelle $(\star)$ verwendet haben (vergleiche Bemerkung nach Definition 2.38).

Alle Übungsaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

Zusatzmaterial zur Analysis II – Übung zu Serie 9

Diffeomorphismen, Satz über lokale Umkehrbarkeit

- (Definition 2.53) Seien X, Y Banach, $U \subset X$, $V \subset Y$ offen. Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt **C^k-Diffeomorphismus** von U auf V, wenn $f \in C^k(U, V)$ bijektiv ist und zusätzlich $f^{-1} \in C^k(V, U)$ gilt.
- (Definition 2.54) Seien X, Y Banach, $U \subset X$ offen. Eine Abbildung $f : U \to Y$ heißt **lokal C^k-invertierbar bei** $x \in U$, wenn es offene Umgebungen $U' \subset U$ von x und $V' \subset Y$ von $f(x)$ gibt, so dass $f : U' \to V'$ ein C^k-Diffeomorphismus ist.
- (Lemma 2.55) Seien X, Y Banach, $U \subset X$ offen. Ist $f : U \to Y$ lokal C^k-invertierbar bei $x \in U$, so ist die stetige lineare Abbildung $df(x) \in L(X, Y)$ invertierbar[1] mit Inversem $df^{-1}(f(x)) \in L(Y, X)$.
- (Satz 2.57 – **Satz über lokale Umkehrbarkeit**) Seien X, Y Banach, $U \subset X$ offen. Genau dann ist eine Abbildung $f \in C^k(U, Y)$ lokal C^k-invertierbar bei $x \in U$, wenn $df(x) \in L(X, Y)$ invertierbar ist.
- (Korollar 2.58) Seien X, Y Banach, $U \subset X$ offen. Weiter besitze ein $f \in C^1(U, Y)$ die Eigenschaft, dass die Ableitung $df(x)$ in jedem Punkt $x \in U$ invertierbar ist. Dann ist $f(U)$ offen. Falls f zusätzlich injektiv ist, dann ist f sogar ein Diffeomorphismus von U auf $f(U)$.

Implizite Funktionen, Untermannigfaltigkeiten, Extrema unter NB (Lagrange-Multiplikator)

- (Satz 2.61 – **Satz über implizite Funktionen/lokale Auflösbarkeit**) Seien X, Y, Z Banach, $W \subset X \times Y$ offen und $f \in C^k(W, Z)$. Löst zu vorgegebenem $z^* \in Z$ der Punkt $(x^*, y^*) \in W$ die Gleichung $f(x^*, y^*) = z^*$ und ist die Einschränkung $df(x^*, y^*)|_Y =: d_Y f(x^*, y^*) \in L(Y, Z)$ invertierbar, dann gibt es offene Umgebungen U^* von x^* und V^* von y^* sowie ein $g \in C^k(U^*, V^*)$ mit $f(x, y) = z^* \iff y = g(x)$ für alle $(x, y) \in U^* \times V^*$.
- (Definition 2.65) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt **regulärer Punkt von** f, wenn $df(x)$ surjektiv ist (insbesondere muss dann $n \geq m$ sein). Ein Wert $z^* \in \mathbb{R}^m$ heißt **regulärer Wert von** f, wenn jedes x mit $f(x) = z^*$ ein regulärer Punkt ist, d.h., wenn das Urbild $f^{-1}(\{z^*\})$ nur aus regulären Punkten besteht.
- (Satz 2.66 – Äquivalente Charakterisierungen einer UM) Für eine nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:
  (a) Lokal ist M C^k-diffeomorph zum $\mathbb{R}^d$, d.h. für jedes $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und einen C^k-Diffeomorphismus $\phi : U \to V$ auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ mit $\phi(M \cap U) = \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d} \cap V$ („ϕ biegt die d-dimensionale Fläche M gerade“).
  (b) Lokal ist M Urbild eines regulären Wertes einer C^k-Funktion vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^{n-d}$, d.h. für jedes $x \in M$ existiert eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$, eine C^k-Funktion $f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ und ein regulärer Wert $z^* \in \mathbb{R}^{n-d}$ von f mit $M \cap U = f^{-1}(\{z^*\})$.
  (c) Lokal ist M der Graph einer C^k-Funktion auf dem $\mathbb{R}^d$, d.h. für jeden Punkt $a \in M$ gibt es eine Zerlegung $\mathbb{R}^n \cong X \times Y$ in einen d-dimensionalen linearen Unterraum X und einen $(n-d)$-dimensionalen linearen Unterraum Y von $\mathbb{R}^n$ sowie bei $a = (x^*, y^*)$ offene Umgebungen $U^* \subset X$ von x^*, $V^* \subset Y$ von y^* und eine C^k-Abbildung $g : U^* \to V^*$ mit $M \cap (U^* \times V^*) = \mathrm{Graph}(g)$, wobei $\mathrm{Graph}(g) := \{(x, g(x)) | x \in U^*\}$ den Graphen von g bezeichnet.
- (Definition 2.67) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$, die eine (und somit jede) der Eigenschaften aus Satz 2.66 besitzt, heißt **d-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$**.
- (Definition 2.72) Sei M eine d-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Der d-dimensionale Unterraum $T_a M$ des $\mathbb{R}^n$, welcher aus allen möglichen Ableitungen $\dot{c}(0)$ von parametrisierten stetig differenzierbaren Kurven $c : I \to M$ besteht, die innerhalb von M durch den Punkt $c(0) = a$ verlaufen (wobei $0 \in I$ angenommen wurde) heißt **Tangentialraum von M im Punkt a**.
- (Satz 2.73) Ist die d-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^n$ lokal bei $a \in M$ das Urbild eines regulären Wertes $z^* \in \mathbb{R}^{n-d}$ unter der C^k-Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$, dann gilt $T_a M = \mathrm{Kern}(df(a))$.

[1] Insbesondere gilt bei $X = \mathbb{R}^m$ und $Y = \mathbb{R}^n$ auch $m = n$.

- (Satz 2.76 – **Lagrange'sche Multiplikator-Regel**) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g = (g_1, \ldots, g_k) \in C^1(U, \mathbb{R}^k)$. Liegt in x^* ein lokales Extremum von f unter den Nebenbedingungen $g = 0$ und ist $dg(x^*) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ surjektiv, d.h. sind die Gradienten $\operatorname{grad} g_1(x^*), \ldots, \operatorname{grad} g_k(x^*)$ linear unabhängig, dann gibt es einen Vektor $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ mit $\operatorname{grad} f(x^*) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \operatorname{grad} g_i(x^*)$.

Zusatzaufgabe 9.1: (Lineare Ausgleichsrechnung)

(a) (Beispiel 2.49) Sei $m > n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit maximalem Rang (also $= n$) und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ F(x) = \|Ax - b\|_2^2$ genau einen stationären Punkt besitzt, an welchem $F(x)$ minimal wird. Zeigen Sie, dass dort die sogenannten **Normalengleichungen** $A^T Ax - A^T b = 0$ erfüllt sind.

(b) Wenden Sie die lineare Regression auf die folgende Messreihe an. Bestimmen Sie das Gewicht zur Größe 180 cm.

Größe in cm	160	165	168	170	175	178	185	190	193
Gewicht in kg	60	61	70	72	73	74	81	83	87

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.1:

(a) Wir können $F = G \circ H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ G(x) = \|x\|_2^2$ und $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ H(x) = Ax + b$ ausdrücken. Wegen $dG(x) = 2x^T \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ und $dH(x) = A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (vergleiche Beispiel 2.25) folgt nun mit der Kettenregel

$$dF(x) \;=\; dG(H(x)) \cdot dH(x) \;=\; 2(Ax+b)^T A \;=\; 2(A^T(Ax+b))^T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \, .$$

Für stationäre Punkte muss also $A^T(Ax + b) = 0 \in \mathbb{R}^n$ gelten, d.h., die Normalengleichungen $A^T Ax = A^T b$ müssen erfüllt sein. Aufgrund des maximalen Ranges ist $A^T A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ sogar invertierbar, womit die Normalengleichungen die eindeutige Lösung $x^* = \big(A^T A\big) A^T b$ besitzen und damit für $F(x)$ in der Tat genau ein stationärer Punkt existiert. Wegen $2(A^T(Ax+b))^T = 2(A^T Ax + A^T b))^T = 2x^T(A^T A) + 2b^T A$ ist $dF : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wiederum affin-linear, so dass sie nach Beispiel 2.25 die konstante Ableitung $d^2F(x) = 2A^T A$ besitzt. Diese ist in der Tat positiv definit, denn einerseits gilt $x^T 2A^T Ax = 2\langle Ax, Ax\rangle = 2\|Ax\|_2^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und Gleichheit aufgrund der dem maximalen Rang geschuldeten Injektivität von A genau dann, wenn $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ ist. Nach Satz 2.47 liegt also in x^* ein lokales Minimum von $F(x)$. Dieses ist jedoch auch global das Minimum von F , wie folgende Argumentation zeigt. Auf der kompakten Menge $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\|_2 = 1\}$ nimmt die stetige Funktion $x \mapsto x^T(A^T A)x = \langle (A^T A)x, x\rangle$ sowohl ihr Minimum als auch ihr Maximum (nach Beispiel 2.78 genau bei den Eigenvektoren zum minimalen bzw. maximalen Eigenwert von $A^T A$). Aufgrund der Positiv-Definitheit von $A^T A$ existiert somit ein $\alpha > 0$, so dass $\|Ax\|_2^2 \geq \alpha\|x\|_2^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wegen

$$F(x) \;=\; \langle Ax-b, Ax-b\rangle \;=\; \langle Ax, Ax-b\rangle - \langle b, Ax-b\rangle \;=\; \langle Ax, Ax\rangle - \langle Ax, b\rangle - \langle b, Ax\rangle + \langle b, b\rangle$$

und da mittels Cauchy-Schwarz-Ungleichung die Abschätzung $|\langle Ax, b\rangle| \leq \|Ax\|_2\|b\|_2 \leq \|A\|_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\|x\|_2\|b\|_2$ folgt, ergibt sich für $\|x\|_2 > 0$ mit Dreiecksungleichung

$$\frac{|F(x)|}{\|x\|_2^2} \;\geq\; \alpha - \frac{2\|A\|_2\|b\|_2}{\|x\|_2} - \frac{\|b\|_2^2}{\|x\|_2^2} \;\overset{\|x\|_2 \to \infty}{\longrightarrow}\; \alpha \;>\; 0 \, ,$$

woraus wir $\lim\limits_{\|x\|_2 \to \infty} |F(x)| = \infty$ und wegen $F \geq 0$ dann insgesamt $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) = \infty$ schließen können. Aufgrund des Randverhaltens (für $\|x\|_2 \to \infty$ ist auch $F(x) \to \infty$) und wegen $F \geq 0$ existiert somit eine offene und beschränkte Umgebung $U \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \;=\; \inf_{x \in \bar{U}} F(x) \;=:\; a \in [0, \infty[.$$

Die Stetigkeit von $F(x)$ liefert die Existenz eines globalen Minimums auf der nach Satz 1.58 kompakten Menge $\bar{U}$, etwa im Punkt $x_a \in \bar{U}$. Da dieses gleichzeitig ein (lokales) Minimum von $F(x)$ auf $\mathbb{R}^n$ ist, muss nach der notwendigen Bedingung in Satz 2.47 der Gradient $dF(x_a)$ verschwinden. Damit haben wir jedoch $x_a = x^*$ wie behauptet.

(b) Um zu gegebenen Messpunkten $(x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, m$, die optimalen Parameter γ und δ im Sinne einer linearen Regression (d.h., wir suchen eine Gerade $y = f(x) = \gamma x + \delta$, welche durch die Punktewolke geht) zu finden, ist offenbar die Funktion $F(z) = \|Az - b\|_2^2$ mit $z = (\gamma, \delta)^T$, $b = (y_i)_{i=1}^m$ und $A^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ zu minimieren. Dazu benötigen wir die Lösung von $A^T Az = A^T b$ mit

$$A^T A \;=\; \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{m} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i & m \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, 1\rangle \\ \langle x, 1\rangle & m \end{pmatrix} \, , \qquad A^T b \;=\; \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m} y_i \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \langle x, y\rangle \\ \langle y, 1\rangle \end{pmatrix} \, .$$

Dabei bezeichne 1 hier den Vektor, der nur Einsen enthält. Wie leicht zu überprüfen ist die Matrix A^TA genau dann positiv definit, wenn es $x_i \neq x_k$ gibt. In diesem Fall ist die Lösung

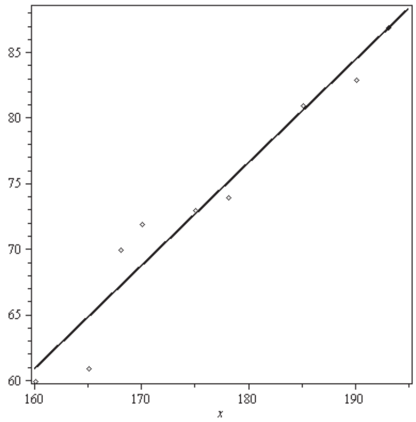
$$x \;=\; \frac{1}{m\langle x,x\rangle - (\langle x,1\rangle)^2}\begin{pmatrix} m & -\langle x,1\rangle \\ -\langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle x,y\rangle \\ \langle y,1\rangle\end{pmatrix},$$

denn die Inverse einer (2×2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ ist wegen

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{genau} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}.$$

Mit den Messwerten ergeben sich $m=9$, $\langle x,x\rangle = 279832$, $\langle x,1\rangle = 1584$, $\langle y,1\rangle = 661$, $\langle x,y\rangle = 117158$ und somit $m\langle x,x\rangle - (\langle x,1\rangle)^2 = 9432$. Wegen $m\langle x,y\rangle - \langle x,1\rangle\langle y,1\rangle = 7398$ für die erste Komponenten und $\langle x,x\rangle\langle y,1\rangle - \langle x,y\rangle\langle x,1\rangle = -609320$ erhalten wir die Lösung

$$(\gamma,\delta) \;=\; \left(\frac{7398}{9432}, \frac{-609320}{9432}\right) \;=\; \left(\frac{411}{524}, \frac{-76165}{1179}\right) \approx (0.784351, -64.601357).$$



Für die Körpergröße 180 cm erhalten wir somit das Gewicht 76.58 kg.

```
with(LinearAlgebra):
P:=160^2+165^2+168^2+170^2+175^2+178^2+185^2+190^2+193^2:
Q:=160+165+168+170+175+178+185+190+193:
R:=60+61+70+72+73+74+81+83+87:
S:=60*160+61*165+70*168+72*170+73*175+74*178+81*185+83*190+87*193
M:=<<P|Q>,<Q|9>>; V:=<S,R>; xv:= LinearSolve(M, V, method='QR'):
evalf(xv); MatrixVectorMultiply(M,xv);
with(plots):
A:=pointplot({[160,60],[165,61],[168,70],[170,72],[175,73],
[178,74],[185,81],[190,83],[193,87]},axes=boxed):
B:=plot(411/524*x-76165/1179, x=160..195, color=black, thickness=2): display([A,B]);
```

Zusatzaufgabe 9.2:

(a) Gegeben sei die Abbildung $\Phi : H \to \mathbb{R}^2$ mit $H = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, y>0\}$ und $\Phi(x,y) \;=\; \frac{1}{x^2+(1+y)^2}\begin{pmatrix} 1-x^2-y^2 \\ 2x\end{pmatrix}$

(i) Zeigen Sie, dass Φ lokal umkehrbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\Phi : H \to B_1(0)$ ein Diffeomorphismus ist und geben Sie die Umkehrabbildung an.

(b) Für $G \;=\; \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x+y+z \neq -1\}$ sei $\Phi : G \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\Phi(x,y,z) \;=\; \dfrac{1}{1+x+y+z}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}$.

(i) Zeigen Sie, dass Φ überall ein lokaler Diffeomorphismus ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\Phi : G \to \Phi(G)$ sogar global eine Umkehrabbildung besitzt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.2:

(a) (i) Wegen $d\Phi(x,y)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(x^2+(1+y)^2)^2}\begin{pmatrix} -2x(x^2+(1+y)^2) - 2x(1-x^2-y^2) & -2y(x^2+(1+y)^2) - (1-x^2-y^2)2(1+y) \\ 2(x^2+(1+y)^2) - 2x(2x) & -2x(2(1+y))\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(x^2+(1+y)^2)^2}\begin{pmatrix} -4x(1+y) & 2(x^2-(y+1)^2) \\ 2((1+y)^2-x^2) & -4x(1+y)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

verschwindet auf H (wegen $y>0$ und daher $y+1>1$) nirgends die Determinante

$$\det(d\Phi(x,y)) \;=\; \frac{16x^2(1+y)^2 + 4(x^2-(1+y)^2)^2}{(x^2+(1+y)^2)^4} \;=\; \frac{4(x^2+(1+y)^2)^2}{(x^2+(1+y)^2)^4} \;=\; \frac{4}{(x^2+(1+y)^2)^2},$$

so dass Φ auf H als stetig differenzierbare Funktion nach Satz 2.57 lokal umkehrbar ist.

(ii) Schauen wir uns jetzt die Komponenten $u = \varphi_1(x,y) = \frac{1-x^2-y^2}{x^2+(1+y)^2}$ und $v = \varphi_2(x,y) = \frac{2x}{x^2+(1+y)^2}$ des Bildes $\Phi(x,y) = (u,v)$ an, so erhalten wir für $\|\Phi(x,y)\|_2^2 = u^2+v^2$ die Abschätzung

$$\frac{(1-x^2-y^2)^2+4x^2}{(x^2+(1+y)^2)^2} = \frac{x^4-2x^2(1-y^2)+(1-y^2)^2+4x^2}{x^4+2x^2(1+y)^2+(1+y)^4} = \frac{x^4+2x^2(1+y^2)+(1+y)^2(1-y)^2}{x^4+2x^2(1+y)^2+(1+y)^4} < 1 ,$$

also $u^2+v^2 < 1$ wegen $(1-y)^2 < (1+y)^2$ auf H. Dies bedeutet jedoch $(u,v) \in B_1(0)$, woraus wir $\Phi(H) \subset B_1(0)$ schließen können. Um die Umkehrabbildung zu bestimmen, halten wir zunächst fest, dass

$$v^2+(u+1)^2 = \left(\frac{2x}{x^2+(1+y)^2}\right)^2+\left(\frac{1-y^2+(1+y)^2}{x^2+(1+y)^2}\right)^2 = \frac{4x^2+4(1+y)^2}{\left(x^2+(1+y)^2\right)^2} = \frac{4}{x^2+(1+y)^2} . \quad (9.1)$$

Aus $v = \frac{2x}{x^2+(1+y)^2}$ ergibt sich mit (9.1) zunächst $x = \frac{1}{2}v(x^2+(1+y)^2) = \frac{2v}{v^2+(u+1)^2}$, womit aus (9.1) anschließend

$$(1+y)^2 = \frac{4}{v^2+(u+1)^2} - x^2 = \frac{4}{v^2+(u+1)^2} - \left(\frac{2v}{v^2+(u+1)^2}\right)^2 = \frac{4(u+1)^2}{\left(v^2+(u+1)^2\right)^2} > 0$$

(wegen $\max\{|u|,|v|\} \leq \|(u,v)\|_2 < 1$ und daher $u+1>0$) folgt. Unter der Annahme $y>0$ erhalten wir dann ebenso

$$y = \frac{2(u+1)}{v^2+(u+1)^2} - 1 = \frac{2(u+1)-v^2-(u+1)^2}{v^2+(u+1)^2} = \frac{1-u^2-v^2}{v^2+(u+1)^2} .$$

Somit können wir durch

$$\Psi : B_1(0) \to H , \qquad \Psi(u,v) = \frac{1}{v^2+(u+1)^2}\begin{pmatrix} 2v \\ 1-u^2-v^2 \end{pmatrix}$$

eine (stetig) differenzierbare Umkehrabbildung für $\Phi : H \to B_1(0)$ angeben. Damit ist $\Phi : H \to B_1(0)$ in der Tat ein Diffeomorphismus.

(b) (i) Wiederum nach Satz 2.57 ist die auf G stetig differenzierbare Funktion Φ auf G lokal (C^1)-invertierbar (also ein lokaler Diffeomorphismus), denn die Ableitung

$$d\Phi(x,y,z) = \frac{1}{(1+x+y+z)^2}\begin{pmatrix} 1+y+z & -x & -x \\ -y & 1+x+z & -y \\ -z & -z & 1+x+y \end{pmatrix}$$

ist wegen

$$\begin{aligned}\det(d\Phi(x,y,z)) &= \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -y & 1+x+z & -y \\ -z & -z & 1+x+y \end{pmatrix}}{(1+x+y+z)^6} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -(1+y+z) & x & x \\ -z & -z & 1+x+y \end{pmatrix}}{(1+x+y+z)^6} \\ &= \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -(1+y+z) & x & 0 \\ -z & -z & 1+x+y+z \end{pmatrix}}{(1+x+y+z)^6} = \frac{1}{(1+x+y+z)^4} > 0\end{aligned}$$

für alle $(x,y,z) \in G$ invertierbar.

(ii) **Variante A:** Bezeichnen wir nun die Komponenten des Bildes $\Phi(x,y,z)$ mit

$$u = \frac{x}{1+x+y+z} , \quad v = \frac{y}{1+x+y+z} , \quad w = \frac{z}{1+x+y+z} ,$$

so erhalten wir $(1+x+y+z)(u+v+w) = (x+y+z)$, was für $(x,y,z) \in G$ (da $u+v+w \neq 1$ wegen $1+x+y+z \neq 0$ sein muss) zu $x+y+z = \frac{u+v+w}{1-(u+v+w)}$ äquivalent ist. Daraus folgt nun insbesondere $1+x+y+z = \frac{1}{1-(u+v+w)}$ und dass

$$\Psi : \tilde{G} \to \mathbb{R}^3 , \qquad \Psi(u,v,w) = \frac{1}{1-(u+v+w)}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

mit $\tilde{G} = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \ : \ u+v+w \neq 1\}$ wegen

$$\Psi(\Phi(x,y,z)) = \Psi\left(\frac{1}{1+x+y+z}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{1-\frac{x+y+z}{1+x+y+z}}\begin{pmatrix} \frac{x}{1+x+y+z} \\ \frac{y}{1+x+y+z} \\ \frac{z}{1+x+y+z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

für beliebiges $(x,y,z) \in G$ und

$$\Phi(\Psi(u,v,w)) = \Psi\left(\frac{1}{1-(u+v+w)}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{1+\frac{u+v+w}{1-(u+v+w)}}\begin{pmatrix} \frac{u}{1-(u+v+w)} \\ \frac{v}{1-(u+v+w)} \\ \frac{w}{1-(u+v+w)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

für beliebiges $(u,v,w) \in \tilde{G}$ (und damit $\Phi(G) = \tilde{G}$ sowie $\Psi(\tilde{G}) = G$) die (offenbar sogar beliebig oft) stetig differenzierbare Umkehrabbildung $\Psi : \tilde{G} \to G$ zu $\Phi : G \to \tilde{G}$ ist.
Variante B: Nach Korollar 2.58 wäre $\Phi(G)$ offen und $\Phi : G \to \Phi(G)$ sogar global ein Diffeomorphismus, wenn wir zusätzlich die Injektivität von Φ zeigen könnten. Dazu nehmen wir an, es gäbe $(x,y,z) \in G$ und $(a,b,c) \in G$, für die $\Phi(x,y,z) = \Phi(a,b,c)$ gelte. Dann schließen wir auf

$$\Phi(a,b,c) = \Phi(x,y,z) \iff \frac{1}{1+a+b+c}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{1+x+y+z}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mit $\lambda := \frac{1+a+b+c}{1+x+y+z} \in \mathbb{R}$. Addieren wir die in den einzelnen Komponenten resultierenden Gleichungen auf, so ergibt sich $a+b+c = \lambda\mu$ mit $\mu = x+y+z$. Insbesondere ist dann

$$\lambda = \frac{1+\lambda\mu}{1+\mu} \iff \lambda + \lambda\mu = 1 + \lambda\mu \iff \lambda = 1$$

und damit wie gewünscht $(x,y,z) = (a,b,c)$ und deshalb die Injektivität von $\Phi : G \to \Phi(G)$ gezeigt.

Zusatzaufgabe 9.3:

(a) Zeigen Sie, dass man für genügend nahe bei 1 liegende x, y, z das Gleichungssystem $\begin{cases} -2x^2+y^2+z^2 = 0 \\ x^2 + \mathrm{e}^{y-1} - 2y = 0 \end{cases}$ durch C^∞-Funktionen $y = \varphi(x),\ z = \psi(x)$ nach y und z auflösen kann.

(b) Seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x,y) := f(x,y,g(x,y))$ Drücken Sie die Ableitung von F durch die partiellen Ableitungen von f und g aus. Drücken Sie die partiellen Ableitungen von g durch die von f aus, für den Fall, dass $F = 0$ gelte.

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.3:

(a) Die beliebig oft stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) := (-2x^2+y^2+z^2, x^2+\exp(y-1)-2y)$ erfüllt $f(x,y,z) = 0 \in \mathbb{R}^2$ für $(x,y,z) = (1,1,1)$ und besitzt die Ableitung

$$df(x,y,z) = \begin{pmatrix} -4x & 2y & 2z \\ 2x & \exp(y-1)-2 & 0 \end{pmatrix} \implies df(1,1,1) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die zu den Variablen (y,z) gehörige quadratische Untermatrix $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist invertierbar. Also existieren nach dem Satz über implizite Funktionen (Satz 2.61) eine Umgebung U von $x = 1$, eine Umgebung V von $(y,z) = (1,1)$ und eine vektorwertige C^∞-Funktion $g = (\varphi, \psi) : U \to V$ mit $\varphi(1) = 1,\ \psi(1) = 1$ und $F(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0$ für alle $x \in U$.

(b) Zunächst gilt $F = f \circ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit einer Hilfsfunktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ h(x,y) = (x,y,g(x,y))$. Somit folgt nun nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} dF(x,y) &= df(h(x,y)) \cdot dh(x,y) \\ &= \left(\tfrac{\partial}{\partial x} f(x,y,g(x,y)) \quad \tfrac{\partial}{\partial y} f(x,y,g(x,y)) \quad \tfrac{\partial}{\partial z} f(x,y,g(x,y))\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} g(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \left(\tfrac{\partial}{\partial x} f(x,y,g(x,y)) + \tfrac{\partial}{\partial z} f(x,y,g(x,y)) \tfrac{\partial}{\partial x} g(x,y) \quad \tfrac{\partial}{\partial y} f(x,y,g(x,y)) + \tfrac{\partial}{\partial z} f(x,y,g(x,y)) \tfrac{\partial}{\partial y} g(x,y)\right). \end{aligned}$$

Für den Fall $F = 0$ ist somit auch die Ableitung $dF(x,y) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ die Nullabbildung, so dass nach Umstellen für die partiellen Ableitungen von g folgt, dass

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,g(x,y))}{\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,g(x,y))}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = -\frac{\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,g(x,y))}{\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,g(x,y))}.$$

Zusatzaufgabe 9.4:

(a) Sei $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + 4z^2 = 1\}$. Zeigen Sie, dass M eine zweidimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und bestimmen Sie in jedem Punkt $a \in M$ den zugehörigen Tangentialraum $T_a M$.

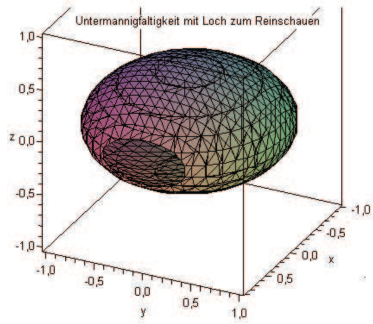
(b) Ist $M \subset \mathbb{R}^3$ aus (a) kompakt? Bestimmen Sie alle globalen Extrema für $f : M \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = xyz$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.4:

(a) Da $M = g^{-1}(\{1\})$ mit der als Polynom beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2$ und da außerdem $dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 8z \end{pmatrix}$ für alle $a \in M$ surjektiv (in diesem speziellen Fall ist hier maximaler Rang gleichbedeutend mit ungleich der Nullabbildung) und somit 1 ein regulärer Wert von g ist, besitzt M die Eigenschaft aus Satz 2.66 (b) und ist deshalb eine zweidimensionale C^∞ - Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Für den Tangentialraum gilt $T_a M = \operatorname{Kern}(dg(a)) = \operatorname{Kern}\big(\begin{pmatrix} 2x & 2y & 8z \end{pmatrix}\big)$ nach Satz 2.73. Es ist hier also jeweils der zum Vektor $\begin{pmatrix} x & y & 4z \end{pmatrix}$ orthogonale zweidimensionale Unterraum gesucht. Diesen können wir beispielsweise darstellen durch

$$T_a M \ = \ \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4z \\ -y \end{pmatrix} \right\} \quad \text{im Fall } x = 0\,, \qquad T_a M \ = \ \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4z \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \right\} \quad \text{im Fall } x \neq 0\,.$$

(b) Als Urbild einer einelementigen (und daher trivialerweise abgeschlossenen) Menge unter einer stetigen Funktion ist M desweiteren abgeschlossen (vgl. Satz 1.36). Darüber hinaus gilt $M \subset B_2(0) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \|(x,y,z)\|_2 < 2\}$, denn für $(x,y,z) \notin B_2(0)$ gilt schon $x^2 + y^2 + 4z^2 = \|(x,y,z)\|_2^2 + 3z^2 \geq 4 > 1$. Also ist M als abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des endlichdimensionalen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ nach Satz 1.58 auch kompakt.



Aufgrund der Stetigkeit muss $f(x,y,z) = xyz$ auf dem Kompaktum M demnach sowohl Minimum als auch Maximum annehmen. Wir betrachten nun die Funktion $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ F(x,y,z,\lambda) := f(x,y,z) - \lambda(g(x,y,z) - 1)$, welche die Ableitung

$$dF(x,y,z,\lambda)^T \ = \ \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) \\ -\left(g(x,y,z) - 1\right) \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} yz - \lambda 2x \\ xz - \lambda 2y \\ xy - \lambda 8z \\ -\left(x^2 + y^2 + 4z^2 - 1\right) \end{pmatrix}$$

besitzt. Nach Satz 2.76 gibt es für eine Extremalstelle (x^*, y^*, z^*) von $f(x,y,z)$ unter der Nebenbedingung $\tilde{g}(x) := g(x) - 1 = 0$ ein λ^* , so dass $(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)$ ein stationärer Punkt von $F(x,y,z,\lambda)$ ist, also $dF(x,y,z,\lambda)$ die Nullabbildung ist. Subtrahieren wir Zeile (2) von Zeile (1), erhalten wir $(z + 2\lambda)(y - x) = 0$ und daher folgende Fallunterscheidung

- $y = x = 0 \ \overset{(4),(3)}{\Longrightarrow} \ z \neq 0 \wedge \lambda = 0 \ \overset{(4)}{\Longrightarrow} \ z = \pm\frac{1}{2} \ \Longrightarrow \ P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- $y = x \neq 0 \ \overset{(3),(2)}{\overset{(4)}{\Longrightarrow}} \ z = 2\lambda \neq 0 \ \overset{(3),(4)}{\Longrightarrow} \ x = \pm 2z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \ \Longrightarrow \ P_{3,4} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \pm 1 \end{pmatrix},\ P_{5,6} = \frac{-1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$
- $z = -2\lambda = 0 \ \overset{(3),(4)}{\Longrightarrow} \ (x = 0 \wedge y = \pm 1) \vee (y = 0 \wedge x = \pm 1) \ \Longrightarrow \ P_{7,8} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_{9,10} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $z = -2\lambda \neq 0 \ \overset{(1),(3)}{\Longrightarrow} \ x = -y = \pm 2z \ \overset{(4)}{\Longrightarrow} \ x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \ \Longrightarrow \ P_{11,12} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ \pm 1 \end{pmatrix},\ P_{13,14} = \frac{-1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$

Demzufolge wird bei P_3, P_6, P_{12}, P_{13} das globale Maximum mit $f(P_3) = \frac{1}{6\sqrt{3}}$ und bei P_4, P_5, P_{11}, P_{14} das globale Minimum mit $f(P_4) = -\frac{1}{6\sqrt{3}}$ von $f(x,y,z) = xyz$ auf der Untermannigfaltigkeit M angenommen.

```
restart:with(plots):
implicitplot3d(x^2+y^2+4*z^2=1,x=-1..0.9,y=-1..1,z=-1..1,grid=[20,20,20], axes=boxed,
title="Untermannigfaltigkeit mit Loch zum Reinschauen");
```

Alle Übungsaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

Zusatzmaterial zur Analysis II – Übung zu Serie 10

Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema unter Nebenbedingungen

- **Satz 2.77:** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ und $g = (g_1, \ldots, g_k) : U \to \mathbb{R}^k$ $(k < n)$ jeweils zweimal stetig differenzierbar. Desweiteren sei $M = g^{-1}(\{0\})$. Besitzt $dg(x^*)$ für einen Punkt x^* maximalen Rang, gilt mit einem Vektor λ^* die Gleichung $dF(x^*, \lambda^*) = 0$ mit $F : U \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, durch $F(x, \lambda) := f(x) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x)$ definiert,[1] und ist die Einschränkung der Hesse-Matrix $\operatorname{Hess} F_{\lambda^*}(x^*)$ mit $F_{\lambda^*} : x \mapsto F(x, \lambda^*)$ (d.h., bei festem λ^* wird nur nach x abgeleitet) auf den Tangentialraum $T_{x^*}M = \operatorname{Ker}(dg(x^*))$ positiv bzw. negativ definit, so liegt in x^* ein lokales Minimum bzw. Maximum von f unter den Nebenbedingungen $g = 0$.

Singuläre Punkte, horizontale/vertikale Tangenten von implizit gegebenen Kurven

- Ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ einer implizit durch $f(x) = 0 \in \mathbb{R}$ gegebenen Kurve C mit $df(x) = 0$ heißt **singulär**. Singuläre Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ von C^2-glatten Kurven $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ f(x, y) = 0\}$ werden unter Anderem mit Hilfe der Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ der Hesse-Matrix $\operatorname{Hess} f(x, y)$ klassifiziert:
  - Haben $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gleiches Vorzeichen, dann heißt (x, y) ein **isolierter Punkt**.
  - Haben $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ verschiedene Vorzeichen, dann nennt man (x, y) einen **Kreuzungspunkt**.
  - Ist f sogar C^3 und genau einer der Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gleich Null und die dritte Ableitung von f in Richtung des zugehörigen Eigenvektors nicht Null, dann heißt (x, y) ein **Rückkehrpunkt**.[2]
- Ist $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ein regulärer Punkt einer C^2-glatten Kurve $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ f(x, y) = 0\}$ mit $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ (bzw. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$), so besitzt f in (x, y) eine **horizontale** (bzw. **vertikale**) Tangente.

Bezeichnungen, Rechenregeln für $\pm\infty$, Intervalle

- Falls X, Y, A, B Mengen mit $A \subset X$ und $B \subset Y$ und $f : X \to Y$, so bezeichnet $f[\![A]\!]$ das Bild von A unter f und $f^{-1}[\![B]\!]$ das Urbild von B unter f.
- In der Integrationstheorie arbeitet man mit den unendlichen Zahlen $-\infty$ und $\infty = +\infty$. Für alle $a \in \mathbb{R}$ gelten definitionsmäßig folgende Aussagen:

(1) $-\infty < a, \ a < \infty, \ -\infty < \infty$.

(2) $|-\infty| = |\infty| = \infty$.

(3) $-\infty + a = a - \infty = -\infty - \infty = -\infty$.

(4) $\infty + a = a + \infty = \infty + \infty = \infty$.

(5) Für $a > 0$ gilt $(-\infty) \cdot a = a \cdot (-\infty) = -\infty$ und $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$.

(6) Für $a < 0$ gilt $(-\infty) \cdot a = a \cdot (-\infty) = \infty$ und $\infty \cdot a = a \cdot \infty = -\infty$.

(7) $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty \cdot \infty = \infty, \ \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$.

(8) $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = (-\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = 0$.

- Beachte, dass für x, $y \in [-\infty, \infty]$, der Ausdruck $x + y$ genau dann nicht definiert ist, wenn ($x = -\infty$ und $y = \infty$) oder ($x = \infty$ und $y = -\infty$).
- Wir setzen: $x^+ = \max(x, 0)$ und $x^- = -\min(x, 0)$.
- Grenzwerte von Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus $[-\infty, \infty]$ gegen $x \in [-\infty, \infty]$ werden wie folgt definiert:

(a) Falls $x \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{k \to \infty} x_n = x \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \,]0, \infty[\ \exists N \in \mathbb{N} : \Big(\forall k \geq N : x_k \in \,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\Big)$

(b) Falls $x = -\infty$: $\lim\limits_{k \to \infty} x_n = x \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall M \in \,]0, \infty[\ \exists N \in \mathbb{N} : \Big(\forall k \geq N : x_k < -M\Big)$

(c) Falls $x = +\infty$: $\lim\limits_{k \to \infty} x_n = x \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall M \in \,]0, \infty[\ \exists N \in \mathbb{N} : \Big(\forall k \geq N : x_k > M\Big)$

- Sei (X, d) ein metrischer Raum. Der *Abstand von x zu B* für ein $x \in X$ ist definiert durch

$$d(x, B) \ = \ \begin{cases} \inf\limits_{y \in B} d(x, y), & \text{wenn } B \neq \emptyset \\ \infty, & \text{wenn } B = \emptyset. \end{cases}$$

[1] Aufgrund der Ableitung nach λ gilt dann insbesondere auch $g(x^*) = 0$, also $x^* \in M$.

[2] Zur Klassifikation weiterer Fälle werden höhere Ableitungen von f hinzugezogen, worauf wir jedoch hier nicht eingehen wollen.

- Sind j und k ganze Zahlen mit $j \le k$, so schreiben wir im Folgenden $[j\,..\,k] = [j,k] \cap \mathbb{Z}$.
- Ein **Intervall** I **in** $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge I der Gestalt $I = \bigtimes_{k=1}^{n} I_{(k)}$, wobei $I_{(k)}$ für jedes $k \in [1\,..\,n]$, ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit $b_k := \sup I_{(k)}$ und $a_k := \inf I_{(k)}$ ist. Wir definieren den **Inhalt** eines Intervalls $I \subset \mathbb{R}^n$ durch
$$\mathrm{Vol}(I) \; := \; \mathrm{Vol}_n(I) \; := \; \prod_{k=1}^{n} \mathrm{Laenge}(I_{(k)}) \qquad \text{mit} \qquad \mathrm{Laenge}(I_{(k)}) \; := \; b_k - a_k \; .$$

Zusatzaufgabe 10.1:

(a) Zeigen Sie, dass die Tangentialvektoren an eine implizit durch $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x,y) = 0\}$ mit stetig differenzierbarem $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegebene Kurve senkrecht auf $\operatorname{grad} f$ stehen.

(b) Begründen Sie, dass $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\; f(x,y) = 0\}$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in der Nähe von Punkten (x,y) mit $\operatorname{grad} f(x,y) \neq (0,0)$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

(c) Motivieren Sie die oben in Teilen eingeführte Klassifikation der singulären Punkte einer Kurve
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\; f(x,y) = 0\} \qquad\qquad (f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})).$$

(d) Finden Sie die singulären Punkte des implizit durch $f(x,y) := x^2(x+1) - y^2 = 0$ gegebenen Newtonschen Knotens und bestimmen Sie die Punkte der Kurve, an denen die Tangenten horizontal sind.

(e) Bestimmen Sie für die durch $f(x,y) = 0$ mit $f(x,y) := (x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2$ implizit gegebene Kurve im $\mathbb{R}^2$, welche auch Lemniskate genannt wird, die singulären Punkte und stellen Sie fest, ob ein isolierter Punkt, ein Kreuzungspunkt oder ein Rückkehrpunkt vorliegt. Ermitteln Sie außerdem die Punkte mit horizontaler Tangente und skizzieren Sie die Kurve.

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.1:

(a) Für jede Parametrisierung $\varphi : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^2$ einer implizit durch $f(x,y) = 0$ gegebenen Kurve im $\mathbb{R}^2$ gilt $(f \circ \varphi)(t) = 0$ und somit
$$df(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) \;=\; \langle \operatorname{grad} f(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t) \rangle \;=\; 0$$
für $t \in I$. Daher sind – wie behauptet – die Tangentialvektoren in einem Punkt $(x,y) \in C$ der Kurve C senkrecht zu $\operatorname{grad} f(x,y)$.

(b) Im Fall $\operatorname{grad} f(x,y) \neq (0,0)$ gilt auch auf einer genügend kleinen Umgebung von (x,y) die Ungleichung $\operatorname{grad} f \neq (0,0)$, so dass 0 einen regulären Wert von f bildet, denn $df(x',y')$ ist ungleich Null und somit surjektiv in allen Punkten (x',y') aus dieser Umgebung. Somit ist der Schnitt von C und dieser Umgebung eine eindimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

(c) Mit den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ von $\operatorname{Hess} f(x,y)$ hat die Gleichung $f(x,y) = 0$ an einem singulären Kurvenpunkt (x,y) nach der Taylorformel die Darstellung
$$\begin{aligned} f(x+h_1, y+h_2) &= f(x,y) + \left\langle \operatorname{grad} f(x,y), \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\rangle + (h_1,h_2) \operatorname{Hess} f(x,y) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(\|h\|^2) \\ &= (h_1,h_2) \operatorname{Hess} f(x,y) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(\|h\|^2) \end{aligned}$$
und nach einer Koordinatentransformation die Form
$$\lambda_1 h_1^2 + \lambda_2 h_2^2 + o(\|h\|^2) \;=\; 0$$
nahe (x,y). Nun können die verschiedenen Fälle untersucht werden:

- Besitzen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^2$ gleiches Vorzeichen, dann sieht die Gleichung lokal wie $h_1^2 + h_2^2 = 0$ aus. Daher liegt ein isolierter Punkt vor, denn die einzige Lösung ist offensichtlich $h_1 = 0 = h_2$.
- Haben $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^2$ verschiedene Vorzeichen, dann sieht die Gleichung lokal wie $h_1^2 - h_2^2 = (h_1 - h_2)(h_1 + h_2) = 0$ aus. Also liegt ein Kreuzungspunkt vor, denn man hat als Lösungen die zwei sich kreuzenden Geraden $h_2 = h_1$ und $h_2 = -h_1$.
- Ist einer der Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^2$ gleich Null und zugleich die dritte Ableitung von f in Richtung des Eigenvektors von 0 nicht Null, dann sieht die Gleichung lokal wie $h_1^2 + h_2^3 = 0$ aus (Neilsche Parabel). Daher liegt ein Rückkehrpunkt vor.

(d) Der einzige singuläre Punkt ist wegen $\operatorname{grad} f(x,y) = (3x^2+2x, -2y)$ und unter Berücksichtigung von $f\left(-\frac{2}{3}, 0\right) = \frac{4}{27} \neq 0$ der Punkt $(0,0)$. Laut

$$\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

liegt in $(0,0)$ ein Kreuzungspunkt des Newtonschen Knotens vor.[3] Um horizontale Tangenten zu finden muss die Lösung des Gleichungssystems bestehend aus den beiden Gleichungen $\partial_x f(x,y) = 3x^2 + 2x = 0$ und $f(x,y) = x^2(x+1) - y^2 = 0$ gelöst werden, wobei der singuläre Punkt $(0,0)$ hier keine Berücksichtigung findet. Daher sind die Punkte $(x,y) = \left(-\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ die einzigen mit einer horizontalen Tangente.

(e) Da $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2$ den Gradienten

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(2x^2+2y^2-1)x \\ 2(2x^2+2y^2+1)y \end{pmatrix}$$

hat und dieser offensichtlich nur in den Punkten $(0,0)$ sowie $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right)$ Null wird, die Punkte $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right)$ aber wegen $f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right) = -\frac{1}{4}$ gar nicht auf der Kurve liegen, hat f nur den singulären Punkte $(0,0)$. Wegen

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 4(x^2+y^2) + 8x^2 - 2 & 8yx \\ 8yx & 4(x^2+y^2) + 8y^2 + 2 \end{pmatrix}$$

ist die Hesse-Matrix in $(0,0)$ gerade

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und besitzt demnach die Eigenwerte 2 und -2. Also liegt im Ursprung ein Kreuzungspunkt vor. Horizontale Tangenten liegen in den regulären Punkte auf der Kurve mit $\partial_x f = 0$ vor, dies sind die Punkte mit $2x^2 + 2y^2 = 1$ und $f(x,y) = 0$, d.h. Lösungen von

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Addition dieser beiden Gleichungen liefert $2y^2 = \frac{1}{4}$, also $y = \pm\sqrt{\frac{1}{8}}$ und $x = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$. Somit sind in den vier Punkten $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{8}}, \pm\sqrt{\frac{1}{8}}\right)$ die Tangenten horizontal.

Zusatzaufgabe 10.2:

Sei $x(y,z)$ eine Funktion, welche die Gleichung $G(x,y,z) = x^2 y + \ln(yz)x = 0$ löst. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x}{\partial y}$ und $\frac{\partial x}{\partial z}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.2:

Die Ableitung der Gleichung $G(x(y,z),y,z) = 0$ nach y bzw. nach z liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(x(y,z),y,z)\frac{\partial x}{\partial y}(y,z) + \frac{\partial G}{\partial y}(x(y,z),y,z) &= 2xyx_y + \ln(yz)x_y + x^2 + \frac{x}{y} = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x(y,z),y,z)\frac{\partial x}{\partial z}(y,z) + \frac{\partial G}{\partial z}(x(y,z),y,z) &= 2xyx_z + \ln(yz)x_z + \frac{x}{z} = 0, \end{aligned}$$

d.h. also

$$\frac{\partial x}{\partial y}(y,z) = -x\frac{xy+1}{y\,(2xy + \ln(yz))} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial x}{\partial z}(y,z) = -\frac{x}{z\,(2xy+\ln(yz))}.$$

Hinweis: Wir haben verwendet, dass $F(y,z) = G(x(y,z),y,z)$ eine verkettete Funktion, nämlich $F = G \circ H$ mit einer Hilfsfunktion $H : (y,z) \mapsto (\varphi(y,z), y, z)$ ist. Demnach gilt nach Kettenregel

$$\begin{aligned} dF(y,z) &= dG(H(y,z)) \circ dH(y,z) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x}(\varphi(y,z),y,z) & \frac{\partial G}{\partial y}(\varphi(y,z),y,z) & \frac{\partial G}{\partial z}(\varphi(y,z),y,z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y,z) & \frac{\partial \varphi}{\partial z}(y,z) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x}(\varphi(y,z),y,z) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y,z) + \frac{\partial G}{\partial y}(\varphi(y,z),y,z) & \frac{\partial G}{\partial x}(\varphi(y,z),y,z) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}(y,z) + \frac{\partial G}{\partial z}(\varphi(y,z),y,z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[3] Dies kann auch mittels einer Parametrisierung explizit bestätigt werden. Verwenden wir nämlich für die Parametrisierung der y-Komponente den Ansatz $y(t) = h(t)x(t)$ mit einer Parametrisierung $x(t)$ der x-Komponente und setzen diesen Ansatz in die Gleichung ein, so erhalten wir zunächst $x^2(x+1) = h^2x^2$ und nach Division durch x^2 dann $x = h^2 - 1$. Wählen wir nun $h(t) = t$, so resultiert $x(t) = t^2 - 1$ und $y(t) = t^3 - t$, und somit die Parametrisierung $\varphi(t) = (t^2-1, t^3-t)$ des Newtonschen Knotens (vgl. Beispiel 2.9). Nun sehen wir, dass φ den Punkt $(0,0)$ in der Tat zweimal kreuzt, nämlich bei $t=-1$ mit Tangentialvektor $\dot\varphi(-1) = (-2,4)$, und bei $t=1$ mit Tangentialvektor $\dot\varphi(1) = (2,2)$.

Zusatzaufgabe 10.3: Gegeben sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^T Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $A^T = A$.

(a) Zeigen Sie, dass das Maximum von f unter der Nebenbedingung $\|x\|_2 = 1$ existiert und der größte Eigenwert von A ist.

(b) Sei $x = u$ eine Stelle, an der das Maximum aus (a) angenommen wird. Zeigen Sie für $n > 1$, dass $\mu := \max\{f(x) \;:\; \|x\|_2 = 1 \wedge \langle x, u\rangle = 0\}$ existiert und ebenfalls ein Eigenwert von A ist. Welche algebraische Vielfachheit muss der größte Eigenwert von A besitzen, falls μ gleich dem zweitgrößten Eigenwert von A ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.3:

(a) Da $K := \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; \|x\|_2 = 1\}$ kompakt ist, nimmt f auf K ihr Minimum und ihr Maximum an, d.h. f besitzt ein Maximum unter der Nebenbedingung $\|x\|_2 = 1$. Sei $g(x) = \|x\|_2^2 - 1$. Offensichtlich hat $Jg_x = 2(x_1, \dots, x_n)$ für alle $x \in K$ vollen Rang. Demnach wird das Maximum von f unter der Nebenbedingung $\|x\|_2^2 = 1$ an einem Punkt x angenommen, der Lösung des Gleichungssystems $df(x) = \lambda dg(x)$, $\|x\|_2 = 1$ ist. Wegen $df(x) = 2(Ax)^T$ und $dg(x) = 2x^T$ ist die erste Gleichung äquivalent zu $Ax = \lambda x$, so dass das Gleichungssystem von allen Eigenvektoren der Länge 1 gelöst wird. Für einen Eigenvektor x_λ von A der Länge 1 nimmt f aufgrund von

$$f(x_\lambda) = x_\lambda^T Ax_\lambda = x_\lambda^T \lambda x_\lambda = \lambda\|x_\lambda\|_2^2$$

jedoch genau den zugehörigen Eigenwert λ an. Somit ist das Maximum von f unter der Nebenbedingung $\|x\|_2^2 = 1$ gleich dem größten Eigenwert von A.

(b) Da $K' := \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; \|x\|_2 = 1 \wedge \langle x, u\rangle = 0\}$ ebenfalls kompakt ist, nimmt f auch auf K' ihr Minimum und ihr Maximum an, d.h. f besitzt ein Maximum unter den Nebenbedingungen $\|x\|_2 = 1$ und $\langle x, u\rangle = 0$. Sei $g(x) = (g_1(x), g_2(x)) = (\|x\|_2^2 - 1, \langle x, u\rangle)$. Dann besitzt die Jacobi-Matrix

$$dg(x) \;=\; \begin{pmatrix} 2x & u \end{pmatrix}^T \;=\; \begin{pmatrix} 2x_1, \dots, 2x_n \\ u_1, \dots, u_2 \end{pmatrix}$$

für jedes $x \in K'$ vollen Rang. Demnach wird das gesuchte Maximum an einem Punkt x angenommen, der Lösung des Gleichungssystems $df(x) = \lambda_1 dg_1(x) + \lambda_2 dg_2(x)$, $\|x\|_2 = 1$ ist. Wegen $df(x) = 2(Ax)^T$, $dg_1(x) = 2x^T$ und $dg_2(x) = u^T$ ist die erste Gleichung äquivalent zu $Ax = \lambda_1 x + \frac{1}{2}\lambda_2 u$. Da u nach Voraussetzung ein normierter Eigenvektor ist, folgt mit $\langle x, u\rangle = 0$, $\langle u, u\rangle = 1$ und $\langle Ax, u\rangle = \langle x, Au\rangle$ (A ist symmetrisch)

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \lambda_2\langle u, u\rangle = \langle \lambda_2 u, u\rangle = \langle 2Ax - 2\lambda_1 x, u\rangle = \langle 2Ax, u\rangle - \langle 2\lambda_1 x, u\rangle \\ &= 2\langle Ax, u\rangle = 2\langle x, Au\rangle = 2\lambda\langle x, u\rangle = 0\,, \end{aligned}$$

also $Ax = \lambda_1 x$ und somit ist $\mu := \max\limits_{x\in K'} f(x)$ ebenfalls ein Eigenwert. Im Fall, dass 1 die algebraische (und aufgrund der Symmetrie von A auch geometrische) Vielfachheit des größten Eigenwertes λ von A ist, muss $\mu < \lambda$ der zweitgrößte Eigenwert von A sein, andernfalls folgt $\mu = \lambda$ (denn der Eigenraum zum Eigenwert λ ist dann mindestens zweidimensional und besitzt eine orthogonale Basis aus mindestens zwei Eigenvektoren).

Zusatzaufgabe 10.4: Zeigen Sie:

(a) **Lemma (3.)1.1:** Für x, $y \in [-\infty, \infty]$ gilt: $x^- = (-x)^+$, $|x| = x^+ + x^-$, $x = x^+ - x^-$, $(xy)^+ = x^+y^+ + x^-y^-$, $(xy)^- = x^-y^+ + x^+y^-$. Falls $x \le y$, so gilt $x^+ \le y^+$ und $x^- \ge y^-$. Falls $x + y$ definiert ist, so gilt auch $(x+y)^+ \le x^+ + y^+$, $(x+y)^- \le x^- + y^-$ sowie $(x+y)^+ + x^- + y^- = (x+y)^- + x^+ + y^+$.

(b) **Lemma (3.)1.2:** Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und x, $y \in [-\infty, \infty]$ mit $x + y$ definiert gilt: $x + y \le \alpha \iff y \le -x + \alpha$.

(c) Ist B abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d), dann gilt: $d(x, B) = 0 \iff x \in B$.

(d) **Lemma (3.)1.3:** Zu jeder offenen Menge U in $\mathbb{R}^n$ existiert eine aufsteigende Folge $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Mengen mit $U = \bigcup_{k=0}^\infty U_k$ und derart, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$, U_k offen, $\overline{U_k}$ kompakt und $\overline{U_k} \subset U$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.4:

(a) Fallunterscheidung sowie Rechenregeln (1)-(8) für $\pm\infty$ (ausführlich im Skript).

(b) Sind alle Zahlen reell, Anordnungsaxiome, ansonsten Rechenregeln (1)-(8) anwenden (ausführlich im Skript).

(c) „$\Leftarrow$“ ist trivial. „$\Rightarrow$“ Beweis durch Widerspruch: Angenommen, es gäbe $x \notin B$ mit $d(x, B) = 0$. Dann gibt es nach Definition vom Infimum eine Folge $x_k \in X$ mit $d(x, x_k) < \frac{1}{k}$, d.h. jedoch $x_k \xrightarrow{d} x$. Aufgrund der Abgeschlossenheit muss $x \in B$ gelten. Widerspruch.

(d) Für $U = \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$ sei $U_k = B_k(0)$ die offene Kugel um 0 mit Radius k. Für $U \ne \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$ sei U_k die Menge aller $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \in B_k(0)$ und $d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) > 2^{-k}$.

Alle Übungsaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

Zusatzmaterial zur Analysis II – Übung zu Serie 11

Intervalle im $\mathbb{R}^n$ und ihr (Elementar-)Inhalt

- Sind j und k ganze Zahlen mit $j \leq k$, so schreiben wir im Folgenden $[j\,.\,.\,k] = [j,k] \cap \mathbb{Z}$.
- Ein **Intervall** I **in** $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge I der Gestalt $I = \bigtimes_{k=1}^n I_{(k)}$, wobei $I_{(k)}$ für jedes $k \in [1\,.\,.\,n]$, ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit (eindeutig bestimmten) $b_k := \sup I_{(k)}$ und $a_k := \inf I_{(k)}$ ist. Wir definieren den **Inhalt** eines Intervalls $I \subset \mathbb{R}^n$ durch
$$\mathrm{Vol}(I) := \mathrm{Vol}_n(I) := \prod_{k=1}^n \mathrm{Laenge}(I_{(k)}) \qquad \text{mit} \qquad \mathrm{Laenge}(I_{(k)}) := b_k - a_k\,.$$
I heißt **nichtdegeneriert** genau dann, wenn $a_k < b_k$ für jedes $k \in [1\,.\,.\,n]$ gilt, andernfalls heißt I **degeneriert**. Offenbar gilt I nichtdegeneriert $\iff$ $\mathrm{Vol}(I) > 0$. I heißt ein **ganzes** (bzw. **rationales**) **Intervall** in $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $I_{(k)} = [a_k, b_k[$ mit $a_k < b_k$ und $a_k,\ b_k \in \mathbb{Z}$ (bzw. $a_k,\ b_k \in \mathbb{Q}$) für jedes $k \in [1\,.\,.\,n]$.
- **Lemma (3.)2.1:** Ist I ein ganzes Intervall in $\mathbb{R}^n$, so gilt $\mathrm{Vol}(I) = \#(\mathbb{Z}^n \cap I)$.
- **Lemma (3.)2.2:** Seien $m,\ p \in \mathbb{N}_0$ und I_k, $k \in [0\,.\,.\,m]$, paarweise disjunkte rationale Intervalle in $\mathbb{R}^n$. Weiter seien H_i, $i \in [1\,.\,.\,p]$, rationale Intervalle in $\mathbb{R}^n$ mit $\bigcup_{k=0}^m I_k \subset \bigcup_{i=0}^p H_i$. Dann gilt $\sum_{k=0}^m \mathrm{Vol}(I_k) \leq \sum_{i=0}^p \mathrm{Vol}(H_i)$.
- **Lemma (3.)2.3:** Zu jedem Intervall I in $\mathbb{R}^n$ und zu beliebigem $\varepsilon \in\,]0,\infty[$ existiert ein rationales Intervall H in $\mathbb{R}^n$ mit $I \subset \overline{I} \subset H^\circ \subset H$ und $0 < \mathrm{Vol}(H) - \mathrm{Vol}(I) < \varepsilon$. Ist I nichtdegeneriert, dann existiert auch ein rationales Intervall J in $\mathbb{R}^n$ mit $J \subset \overline{J} \subset I^\circ \subset I$ und $0 < \mathrm{Vol}(I) - \mathrm{Vol}(J) < \varepsilon$.
- **Satz (3.)2.4:** Sind I_k, $k \in \mathbb{N}_0$, beliebige paarweise disjunkte Intervalle in $\mathbb{R}^n$ und H_i, $i \in \mathbb{N}_0$, beliebige Intervalle in $\mathbb{R}^n$ mit $\bigcup_{k=0}^\infty I_k \subset \bigcup_{i=0}^\infty H_i$, dann gilt $\sum_{k=0}^\infty \mathrm{Vol}(I_k) \leq \sum_{i=0}^\infty \mathrm{Vol}(H_i)$.

Dyadische Ausschöpfung offener Intervalle/ Äußeres Lebesgue-Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mit Eigenschaften

- **Lemma (3.)3.1:** Für jedes $a \in \mathbb{Z}^n$ und $k \in \mathbb{N}_0$ sei $$I_k^a = \bigtimes_{i=1}^n (2^{-k}) \cdot [a_i, a_i + 1[\qquad \text{(dyadisches Intervall).}$$
Dann ist für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ die Familie $(I_k^a)_{a\in\mathbb{Z}^n}$ eine Überdeckung von $\mathbb{R}^n$ mit paarweise disjunkten rationalen Intervallen. Für $j,\ k \in \mathbb{N}_0$ und $a,\ b \in \mathbb{Z}^n$ beliebig mit $j \leq k$ sind I_k^a und I_j^b disjunkt oder es gilt $I_k^a \subset I_j^b$.
- **Bemerkung (3.)3.2:** Für $k \in \mathbb{N}_0,\ a \in \mathbb{Z}^n$ gelten
$$I_k^a = I_k^0 + (2^{-k}) \cdot a \qquad \text{und} \qquad I_k^0 = \bigtimes_{k=1}^n ([0, 2^{-k-1}[\,\dot\cup\,[2^{-k-1}, 2^{-k}[) = \dot{\bigcup_{c\in\{0,2^{-k-1}\}^n}} (I_{k+1}^0 + c)\,.$$
- **Satz (3.)3.3:** $\forall G \subset \mathbb{R}^n$ offen existiert eine Folge $(I_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ paarweise disjunkter Intervalle mit $G = \bigcup_{m=0}^\infty I_m$ und $\overline{I_m} \subset G$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Ist G nichtleer, können die Intervalle I_m, $m \in \mathbb{N}_0$, dyadisch gewählt werden.
- **Satz (3.)3.4:** Zu einer offenen Menge G in $\mathbb{R}^n$ sei $(I_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge paarweise disjunkter Intervalle mit $G = \bigcup_{k=0}^\infty I_k$. Dann ist die Zahl
$$\lambda(G) := \lambda_n(G) := \sum_{k=0}^\infty \mathrm{Vol}(I_k)$$
unabhängig von der Wahl der $(I_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und heißt das **(n-dimensionale) Lebesgue-Maß von** G**.** Falls G ein Intervall ist, dann gilt $\lambda(G) = \mathrm{Vol}(G)$. Insbesondere gilt $\lambda(\emptyset) = 0$.
- **Lemma (3.)3.6:**
  (a) Sind G_1 und G_2 offen in $\mathbb{R}^n$ mit $G_1 \subset G_2$, so gilt $\lambda(G_1) \leq \lambda(G_2)$.
  (b) Ist $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener Mengen in $\mathbb{R}^n$, so gilt die Ungleichung $$\lambda\left(\bigcup_{k=0}^\infty G_k\right) \leq \sum_{k=0}^\infty \lambda(G_k).$$
  Ist die Folge $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt, so gilt sogar die Gleichung $$\lambda\left(\bigcup_{k=0}^\infty G_k\right) = \sum_{k=0}^\infty \lambda(G_k).$$

- **Definition (3.)3.7 (Das äußere Lebesgue-Maß):** Die Funktion $\lambda^* = \lambda^*_n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$, $A \mapsto \lambda^*(A)$, welche für eine beliebige Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ durch $\lambda^*(A) := \lambda^*_n(A) := \inf\{\lambda(G) \mid A \subset G \text{ und } G \text{ offen in } \mathbb{R}^n\}$ definiert ist, heißt das **(n -dimensionale) äußere Lebesgue-Maß**.

- **Satz (3.)3.8:** Die Funktion λ^* besitzt die folgenden Eigenschaften:

  (a) Für A offen in $\mathbb{R}^n$ gilt $\lambda^*(A) = \lambda(A)$. Insbesondere ist $\lambda^*(\emptyset) = 0$. (b) $A \subset B \implies \lambda^*(A) \le \lambda^*(B)$.
  (c) Ist $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, dann gilt:

$$\lambda^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^*(A_k).$$

  (d) Ist I ein Intervall in $\mathbb{R}^n$, so gilt $\lambda^*(I) = \mathrm{Vol}(I)$.

- **Lemma (3.)3.9:** Sind $(A_k)_{k\in[0..p]}$ mit $p \in \mathbb{N}$, $p \ge 1$, paarweise disjunkte abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, so gilt $\lambda^*\left(\bigcup_{k=0}^{p} A_k\right) = \sum_{k=0}^{p} \lambda^*(A_k)$.

Lebesgue-messbaren Mengen/ Lebesgue-Maß auf $\mathfrak{L}$

- **Definition (3.)4.1 (Lebesgue-messbar):** $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **(n -)Lebesgue-messbar** genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon \in]0,\infty[$ eine in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossene Menge F und eine in $\mathbb{R}^n$ offene Menge G existieren, so dass $F \subset A \subset G$ und $\lambda(G \setminus F) < \varepsilon$. ($G \setminus F$ ist offen in $\mathbb{R}^n$ und somit ist $\lambda(G \setminus F)$ nach Satz (3.)3.4 wohldefiniert.) Sei $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_n$ die Menge aller (n -)Lebesgue-messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

- **Lemma (3.)4.2:** (a) $A \subset \mathbb{R}^n \wedge \lambda^*(A) = 0 \implies A \in \mathfrak{L}$. (b) Ist $I \subset \mathbb{R}^n$ ein Intervall, dann gilt $I \in \mathfrak{L}$.

- **Lemma (3.)4.3:** (a) $A \in \mathfrak{L} \implies \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathfrak{L}$, (b) $A_1, A_2 \in \mathfrak{L} \implies A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{L}$, (c) $A_1, A_2 \in \mathfrak{L} \implies A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{L} \wedge A_1 \setminus A_2 \in \mathfrak{L}$.

- **Lemma (3.)4.4:** Für eine paarweise disjunkte Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{L}$ gilt $\lambda^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^*(A_k)$.

- **Lemma (3.)4.5:** Für eine Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{L}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^*(A_k) < \infty$ gilt $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathfrak{L}$.

- **Lemma (3.)4.6:** Ist $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus $\mathfrak{L}$, dann gilt $A := \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathfrak{L}$.

- **Corollar (3.)4.7:** Offene und abgeschlossene Mengen liegen $\mathfrak{L}$. Der Durchschnitt einer Folge aus $\mathfrak{L}$ liegt in $\mathfrak{L}$.

- **Definition (3.)4.8 ($\mathcal{F}_\sigma$ -/ $\mathcal{G}_\delta$ -Menge):**

  - $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **$\mathcal{G}_\delta$ -Menge** $:\iff \exists$ Folge $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $G_k \subset \mathbb{R}^n$ offen für alle k und $A = \bigcap_{k=0}^{\infty} G_k$.
  - $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **$\mathcal{F}_\sigma$ -Menge** $:\iff \exists$ Folge $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $F_k \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen für alle k und $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} F_k$.

- **Definition (3.)4.10 (σ -Algebra auf Ω):** Sei Ω eine beliebige Menge und $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, so dass

  (a) $\Omega \in \mathfrak{A}$; (b) $\forall\, A \in \mathfrak{A}$ gilt: $\Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$; (c) $\forall$ Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{A}$ gilt: $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}$.

  Dann heißt $\mathfrak{A}$ eine **σ -Algebra auf Ω** und das Paar $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein **messbarer Raum** (bzw. kurz: **Messraum**).

- **Definition (3.)4.14:** Sei $\mathfrak{E}$ die Menge alle offenen Teilmengen von $\Omega = \mathbb{R}^n$. Dann heißt $\mathcal{B}_n := \sigma_\Omega(\mathfrak{E})$ die **σ -Algebra der Borelmengen auf $\mathbb{R}^n$**.

- **Bemerkung (3.)4.15:** Nach Corollar (3.)4.7 gilt $\mathcal{B}_n \subset \mathfrak{L}_n$. Man kann jedoch zeigen, dass $\mathcal{B}_n \ne \mathfrak{L}_n$ und ebenso $\mathfrak{L}_n \ne \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ gilt.

- **Definition (3.)4.16 (Maß/Maßraum):** Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum und $\mu : \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ eine Funktion, so dass

  (a) $\mu(\emptyset) = 0$; (b) für jede paarweise disjunkte Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{A}$ gilt: $\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$.

  Dann heißt μ ein **Maß auf** $(\Omega, \mathfrak{A})$ (bzw. kurz: **Maß auf** $\mathfrak{A}$). Das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ heißt dann ein **Maßraum**. Ist speziell $\mu(\Omega) = 1$, so heißt μ ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** und $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein **Wahrscheinlichkeitsraum**.

Zusatzaufgabe 11.1: Sei $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ eine beliebige Menge von σ-Algebren auf Ω. Zeigen Sie:

(a) Dann ist der Durchschnitt $\mathfrak{A}_0 = \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{A}$ selbst eine σ-Algebra auf Ω.

(b) Ist $\mathfrak{E}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathfrak{M}$ die Menge derjenigen σ-Algebren auf Ω, die $\mathfrak{E}$ als Teilmenge enthalten, so ist $\mathfrak{A}_0$ die kleinste (bzgl. der Mengeninklusion) σ-Algebra auf Ω, die $\mathfrak{E}$ als Teilmenge enthält. (Sie heißt *die von* $\mathfrak{E}$ *erzeugte* σ*-Algebra auf* Ω und wird mit $\sigma(\mathfrak{E}) = \sigma_\Omega(\mathfrak{E})$ bezeichnet.

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.1:

(a) Für $\bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{A}$ ist die Definition einer σ-Algebra auf Ω nachzuprüfen.

(i) Da alle $\mathfrak{A}$ selbst σ-Algebren sind, enthalten sie alle Ω. Somit muss auch $\Omega \in \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{A}$, also $\Omega \in \mathfrak{A}_0$ gelten.

(ii) Sei $A \in \mathfrak{A}_0$. Dann ist auch $A \in \mathfrak{A}$ für alle $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$. Da alle $\mathfrak{A}$ selbst σ-Algebren sind, muss auch $\Omega \backslash A \in \mathfrak{A}$ für alle $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$ gelten. Somit liegt $\Omega \setminus A$ auch im Schnitt, d.h. $\Omega \setminus A \in \mathfrak{A}_0$.

(iii) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Mengen $A_n \in \mathfrak{A}_0$. Dann liegt diese Folge komplett auch in jeder σ-Algebra $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$, so dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ in $\mathfrak{A}$ für jedes $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$ liegt (denn $\mathfrak{A}$ ist eine σ-Algebra). Somit liegt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ auch im Schnitt aller $\mathfrak{A}$, also $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}_0$.

(b) Für ein System $\mathfrak{E}$ von Teilmengen einer (nichtleeren) Menge Ω wissen wir nach (a), dass der Schnitt

$$\mathfrak{A}_0 := \bigcap_{\substack{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{E} \\ \mathfrak{A}\ \sigma-\text{Algebra in } \Omega}} \mathfrak{A}$$

wiederum eine σ-Algebra in Ω ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathfrak{A}_0 = \sigma(\mathfrak{E})$. Dies ist aber klar, denn angenommen es gäbe noch eine kleinere $\mathfrak{E}$ enthaltende σ-Algebra in Ω als $\mathfrak{A}_0$, müsste sie doch wieder zu der Menge der σ-Algebren gehören, über die geschnitten wurde. Wegen der allgemeinen mengentheoretischen Beziehung $A \cap B \subset A$ läge dann $\mathfrak{A}_0$ wieder in dieser σ-Algebra. Widerspruch. Folglich ist $\mathfrak{A}_0 = \sigma(\mathfrak{E})$.

Zusatzaufgabe 11.2:

(a) Sei $\Omega \neq \emptyset$. Bestimmen Sie die minimale und die maximale σ-Algebra in Ω.

(b) Zeigen Sie **Lemma (3.)4.13:** Ist $\mathfrak{A}$ eine σ-algebra auf einer Menge Ω und $E \subset \Omega$, dann ist

$$\mathfrak{A} \sqcap E : \; = \{ A \cap E \mid A \in \mathfrak{A} \}$$

eine σ-Algebra auf E (die **Spur-** σ**-Algebra**). Falls $E \in \mathfrak{A}$, so gilt $\mathfrak{A} \sqcap E = \{ A \mid A \in \mathfrak{A} \text{ und } A \subset E \}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.2:

(a) Die minimale σ-Algebra ist genau $\mathfrak{A}_{\min} = \{\emptyset, \Omega\}$ und die maximale $\mathfrak{A}_{\max} = \mathcal{P}(\Omega)$.

(b) Es ist zu zeigen, dass $\mathfrak{A} \sqcap E$ die drei Eigenschaften einer σ-Algebra auf E besitzt.

(i) Wegen $\Omega \in \mathfrak{A}$ und $\Omega \cap E = E$ gilt auch $E \in \mathfrak{A} \sqcap E$.

(ii) Sei $B \in \mathfrak{A} \sqcap E$. Dann existiert ein $A \in \mathfrak{A}$ mit $B = A \cap E$. Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf Ω ist, folgt auch $\Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$ und weiter $\Omega \setminus A \cap E \in \mathfrak{A} \sqcap E$. Mit $E \subset \Omega$ ist jedoch $\Omega \setminus A \cap E = (\Omega \cap E) \setminus (A \cap E) = E \setminus B$, also $E \setminus B \in \mathfrak{A} \sqcap E$.

(iii) Sei nun $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus $\mathfrak{A} \sqcap E$, dann gibt es (mindestens) eine entsprechende Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{A}$, so dass $B_k = A_k \cap E$. Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf Ω ist, liegt auch die Vereinigung $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ wieder in $\mathfrak{A}$ und somit folgt

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_k \cap E) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \cap E \in \mathfrak{A} \sqcap E .$$

Falls $E \in \mathfrak{A}$, dann liegen alle Schnitte $A \cap E$ für $A \in \mathfrak{A}$ selbst wieder in $\mathfrak{A}$, da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf Ω ist.

Zusatzaufgabe 11.3: Es sei $\Omega = \{\sin, \cos, \exp\} \subset \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

Überprüfen Sie bei folgenden Mengenfamilien, ob sich um σ-Algebren in Ω handelt:

(a) $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \{\cos, \exp, \sin\}, \{\cos, \sin\}, \{\cos, \exp\}, \{\sin, \exp\}, \{\cos\}, \{\exp\}, \{\sin\}\}$;

(b) $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \{\cos, \exp, \sin\}\}$;

(c) $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \{\cos, \exp, \sin\}, \{\cos, \sin\}, \{\exp\}\}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.3:

(a) Wegen $\mathfrak{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ handelt es sich offenbar um eine σ-Algebra in Ω.

(b) Wegen $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ handelt es sich offenbar um eine σ-Algebra in Ω.

(c) Da sowohl die leere Menge, die Komplemente als auch abzählbare Vereinigungen von Mengen aus $\mathfrak{A}$ wieder in $\mathfrak{A}$ liegen, handelt es sich um eine σ-Algebra in Ω.

Zusatzaufgabe 11.4:

(a) Zeigen Sie: Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und jede offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\lambda(G+x) = \lambda(G)$. (Translationsinvarianz)

(b) Zeigen Sie für jedes $\kappa \in \mathbb{R}$ und jede offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ die Identität $\lambda(\kappa G) = |\kappa|^n \lambda(G)$. (Homogenität)

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.4:

(a) Da nach Satz (3.)3.3 für jede offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ eine abzählbare Folge paarweise disjunkter Intervalle (I_k) mit $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ existiert und das Maß von G allein mit Hilfe des Volumens der I_k durch $\lambda(G) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(I_k)$ definiert wird (vgl. Satz (3.)3.4), genügt es $\mathrm{Vol}_n(I+x) = \mathrm{Vol}_n(I)$ zu zeigen. Besitzt das n-dimensionale Intervall I die Randpunkte $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$, dann besitzt $I+x$ die Randpunkte $a+x = (a_1+x_1, \ldots, a_n+x_n)$ und $b+x = (b_1+x_1, \ldots, b_n+x_n)$. Folglich gilt

$$\mathrm{Vol}_n(I+x) = \prod_{i=1}^{n}((b_i+x_i)-(a_i+x_i)) = \prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i) = \mathrm{Vol}_n(I).$$

(b) Wiederum genügt es, $\mathrm{Vol}_n(\kappa I) = |\kappa|^n \mathrm{Vol}_n(I)$ für ein Intervall I mit Randpunkten $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$ zu zeigen. Da das Intervall κI für $\kappa \geq 0$ dann die Randpunkte $\kappa a = (\kappa a_1, \ldots, \kappa a_n)$ und $\kappa b = (\kappa b_1, \ldots, \kappa b_n)$ besitzt, folgt

$$\mathrm{Vol}_n(\kappa I) = \prod_{i=1}^{n}(\kappa b_i - \kappa a_i) = \kappa^n \prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i) = \kappa^n \mathrm{Vol}_n(I) .$$

Ist andererseits $\kappa \leq 0$, dann besitzt κI die Randpunkte $\kappa b = (\kappa b_1, \ldots, \kappa b_n)$ und $\kappa a = (\kappa a_1, \ldots, \kappa a_n)$, so dass

$$\mathrm{Vol}_n(\kappa I) = \prod_{i=1}^{n}(\kappa a_i - \kappa b_i) = (-\kappa)^n \prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i) = (-\kappa)^n \mathrm{Vol}_n(I) .$$

Somit gilt insgesamt $\mathrm{Vol}_n(\kappa I) = |\kappa|^n \mathrm{Vol}_n(I)$.

Zusatzaufgabe 11.5: Zeigen Sie **Satz (3.)4.18:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum. Dann gelten:

(a) Sind A, $B \in \mathfrak{A}$ und $A \subset B$, so gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$. Falls noch $\mu(A) < \infty$, dann ist $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(b) Ist $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$ mit $A_k \subset A_{k+1}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$, so gilt: $\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$

(c) Ist $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ Folge aus $\mathfrak{A}$ mit $A_k \supset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $\mu(A_0) < \infty$, so gilt: $\mu\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.5:

(a) Wegen $A \cap B \setminus A = \emptyset$ gilt mit der σ-Additivität $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Da $\mu(B \setminus A) \geq 0$, folgt daraus $\mu(A) \leq \mu(B)$ und für $\mu(A) < \infty$ auch $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(b) Setze $B_0 = A_0$ und $B_{m+1} = A_{m+1} \setminus A_m$ für $m \in \mathbb{N}_0$. Die Mengen B_m, $m \in \mathbb{N}_0$, liegen in $\mathfrak{A}$, sind paarweise disjunkt und für jedes $k \in \mathbb{N}_0$: $A_k = \bigcup_{m=0}^{k} B_m$. Damit gilt $\mu(A_k) = \sum_{m=0}^{k} \mu(B_m)$ und somit

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu(B_m) = \mu\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} B_m\right) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right).$$

(c) Wenden wir (b) und (a) auf $B_k = A_0 \setminus A_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, an, so ergibt sich wegen $A_0 \supset A_k$, also $A_0 \supset B_k$, dann

$$\mu\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(A_0 \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\right) \overset{\text{(a)}}{=} \mu(A_0) - \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\right) \overset{\text{(b)}}{=} \mu(A_0) - \lim_{k\to\infty} \mu(B_k)$$

$$= \lim_{k\to\infty} (\mu(A_0) - \mu(B_k)) \overset{\text{(a)}}{=} \lim_{k\to\infty} \mu(A_0 \setminus (A_0 \setminus A_k)) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) .$$

Alle Übungsaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`

Zusatzmaterial zur Analysis II – Übung zu Serie 12

Numerische Funktionen, ($\mathfrak{A}$ -)messbare numerische Funktionen, ($\mathfrak{A}$ -)Elementarfunktionen

- **Definition (3.)5.1:** Sei X eine Menge. Eine Funktion $f : X \to [-\infty, \infty]$ heißt eine *numerische Funktion auf* X. Die Funktion $f^+ : X \to [0, \infty]$, $\omega \mapsto (f(\omega))^+$ heißt *der Positivteil von* f, die Funktion $f^- : X \to [0, \infty]$, $\omega \mapsto (f(\omega))^-$ heißt *der Negativteil von* f und die Funktion $|f| : X \to [0, \infty]$, $\omega \mapsto |f(\omega)|$ heißt *der Absolutbetrag von* f.

- **Satz (3.)5.2:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum, $E \in \mathfrak{A}$ und $f : E \to [-\infty, \infty]$. Dann sind äquivalent:

  (a) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{\, \omega \in E \mid f(\omega) \le \alpha \,\} \in \mathfrak{A}$.
  (b) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{\, \omega \in E \mid f(\omega) < \alpha \,\} \in \mathfrak{A}$.
  (c) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{\, \omega \in E \mid f(\omega) \ge \alpha \,\} \in \mathfrak{A}$.
  (d) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{\, \omega \in E \mid f(\omega) > \alpha \,\} \in \mathfrak{A}$.

- **Definition (3.)5.3:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum, $E \in \mathfrak{A}$. Eine numerische Funktion f auf E heißt genau dann **$\mathfrak{A}$-messbar**, wenn eine (und damit jede) der Aussagen (a) – (d) aus Satz (3.)5.2 gilt.

- **Satz (3.)5.4:** Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum und f, g numerische $\mathfrak{A}$-messbare Funktionen auf einem $E \in \mathfrak{A}$. Dann gelten

$$\begin{aligned} &\{\, \omega \in E \mid f(\omega) < g(\omega) \,\} \in \mathfrak{A}, \quad \{\, \omega \in E \mid f(\omega) \le g(\omega) \,\} \in \mathfrak{A}, \\ &\{\, \omega \in E \mid f(\omega) = g(\omega) \,\} \in \mathfrak{A}, \quad \{\, \omega \in E \mid f(\omega) \ne g(\omega) \,\} \in \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

- **Lemma (3.)5.5:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum, $E \in \mathfrak{A}$.

  (a) Auf E definierte konstante numerische Funktionen sind $\mathfrak{A}$-messbar.
  (b) Für $A \in \mathfrak{A}$ ist die Indikatorfunktion von A auf E, d.h. die Funktion $\mathbf{1}_A^E : E \to [-\infty, \infty]$, welche durch

$$\mathbf{1}_A^E(\omega) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{wenn } \omega \in A \\ 0, & \text{wenn } \omega \in E \setminus A, \end{cases}$$

  definiert wird, $\mathfrak{A}$-messbar.
  (c) Ist $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{L}_n$ die σ-Algebra der n-Lebesgue-messbaren Mengen, so ist jede auf E definierte stetige reellwertige Funktion $\mathfrak{A}$-messbar.

- **Satz (3.)5.6:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum, $E \in \mathfrak{A}$ sowie f, g, f_k, $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A}$-messbare numerische Funktionen auf E. Dann sind auch die folgenden Funktionen $\mathfrak{A}$-messbar:

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k, \quad \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \quad \limsup_{k \to \infty} f_k, \quad \liminf_{k \to \infty} f_k, \quad \lim_{k \to \infty} f_k \quad \text{(falls auf } E \text{ definiert)},$$

$$f \cdot g, \quad |f|, \quad f^+ := \max(f, 0), \quad f^- := -\min(f, 0) \;\text{ sowie }\; f + g \text{ und } f - g \quad \text{(falls auf } E \text{ definiert)}.$$

- **Definition (3.)5.7:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum, $E \in \mathfrak{A}$. Ist f eine auf E definierte $\mathfrak{A}$-messbare, nichtnegative, reellwertige Funktion mit endlichem Bild $f[\![E]\!]$, dann heißt f eine **$\mathfrak{A}$-Elementarfunktion (auf E)**. Sind α_j, $j = [0..k]$, die aufsteigend geordneten paarweise verschiedenen Elemente von $f[\![E]\!]$ und $A_j = f^{-1}[\![\{\alpha_j\}]\!]$, $j = [0..k]$, die entsprechenden Urbildmengen, so gilt

$$f \;=\; \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}^E \;, \tag{12.1}$$

  welche die **kanonische Darstellung von** f genannt wird. Beachte, dass $A_j \in \mathfrak{A} \setminus \{\emptyset\}$ für alle $j = [0..k]$.

- **Satz (3.)5.8:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum, $E \in \mathfrak{A}$. Ist f eine numerische, nichtnegative und $\mathfrak{A}$-messbare Funktion auf E, so existiert eine aufsteigende Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von $\mathfrak{A}$-Elementarfunktionen auf E mit $f_k \le f_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim_{k \to \infty} f_k = f$.

Integration von $\mathfrak{A}$-Elementarfunktionen, Satz v. Beppo Levi, Lemma v. Fatou, μ-Nullmengen

- **Definition (3.)6.1:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$. Für eine $\mathfrak{A}$-Elementarfunktion $f : E \to [0, \infty[$ mit kanonischer Darstellung (12.1) definieren wir das **Integral von f auf E bzgl.** μ, in Zeichen $\int_E f \, d\mu$, als

$$\int_E f \, d\mu \;:=\; \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \mu(A_j) \in [0, \infty] \,.$$

- **Satz (3.)6.2:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$, $\alpha \in [0, \infty[$ und f, g seien $\mathfrak{A}$-Elementarfunktionen auf E. Dann gelten: (a) αf und $f+g$ sind $\mathfrak{A}$-Elementarfunktionen auf E. (b) $\int_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu$.
  (c) $\int_E (f+g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$. (d) $f \leq g \implies \int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$.

- **Definition (3.)6.3:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$. Für eine beliebige nichtnegative $\mathfrak{A}$-messbare numerische Funktion f auf E definieren wir das **Integral von** f **auf** E **bzgl.** μ, in Zeichen $\int_E f \, d\mu$, als

$$\boxed{\int_E f \, d\mu \ := \ \sup\Big\{ \int_E e \, d\mu \ \Big| \ e : E \to [0, \infty[\text{ ist eine } \mathfrak{A}\text{-Elementarfunktion und } e \leq f \,. \Big\}} \tag{12.2}$$

- **Corollar (3.)6.4:** Sind f und g nichtnegative $\mathfrak{A}$-messbare numerische Funktionen auf E mit $f \leq g$ so gilt

$$\int_E f \, d\mu \ \leq \ \int_E g \, d\mu.$$

- **Satz (3.)6.5 (Beppo Levi – Satz von der monotonen Konvergenz):** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$. Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer $\mathfrak{A}$-messbarer numerischer Funktionen auf E, so dass $f_k \leq f_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und $f = \lim\limits_{k \to \infty} f_k = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} f_k$. Dann gilt

$$\int_E f \, d\mu \ = \ \lim_{k \to \infty} \int_E f_k \, d\mu \ = \ \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_E f_k \, d\mu.$$

- **Satz (3.)6.6:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$, $\alpha \in [0, \infty[$ und $f, g : E \to [0, \infty]$ seien $\mathfrak{A}$-messbar. Dann gelten: (a) αf und $f+g$ sind $\mathfrak{A}$-messbar. (b) $\int_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu$.
  (c) $\int_E (f+g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$. (d) Falls $f \leq g$, so gilt: $\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$.

- **Satz (3.)6.7:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$. Sei $(g_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer $\mathfrak{A}$-messbarer numerischer Funktionen auf E. Dann ist $g = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} g_\nu$ eine nichtnegative auf E definierte $\mathfrak{A}$-messbare numerische Funktion und es gilt

$$\int_E g \, d\mu \ = \ \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_E g_\nu \, d\mu.$$

- **Satz (3.)6.8 (Lemma von Fatou):** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$. Ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer $\mathfrak{A}$-messbarer numerischer Funktionen auf E, so gilt

$$\boxed{\int_E \liminf_{k \to \infty} f_k \, d\mu \ \leq \ \liminf_{k \to \infty} \int_E f_k \, d\mu \,.}$$

- **Definition (3.)6.9:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$. Ist f eine $\mathfrak{A}$-messbare numerische Funktion auf E und gelten sowohl $\int_E f^+ \, d\mu < \infty$ als auch $\int_E f^- \, d\mu < \infty$, so heißt f μ**-integrierbar (auf** E **)**. In diesem Fall definieren wir das **Integral von** f **auf** E **bzgl.** μ, in Zeichen $\int_E f \, d\mu$, als $\boxed{\int_E f \, d\mu := \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu \,.}$

- **Satz (3.)6.10:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ sowie f, g zwei μ-integrierbare numerische Funktionen auf E. Dann sind αf und (falls $f+g$ auf E definiert) $f+g$ ebenso μ-integrierbar und es gilt:

  (a) $\displaystyle\int_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu$. (b) $\displaystyle\int_E (f+g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$. (c) Für $f \leq g$ ist $\displaystyle\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$.

- **Bemerkung (3.)6.14:** Sei f eine numerische Funktion auf E und $A \subset E$, $A \in \mathfrak{A}$. Falls $f_{|A}$ nichtnegativ und $\mathfrak{A}$-messbar oder falls $f_{|A}$ μ-integrierbar ist, so setzen wir, wie üblich, $\int_A f \, d\mu \ := \ \int_A f_{|A} \, d\mu$.

- **Satz (3.)6.16:** Sei f eine numerische Funktion auf E. Weiter sei S eine abzählbare Indexmenge und $(A_k)_{k \in S}$ sei eine Familie aus $\mathfrak{A}$ mit $E = \bigcup_{k \in S} A_k$. Falls $f_{|A_k}$ für alle $k \in S$ $\mathfrak{A}$-messbar ist, so ist f $\mathfrak{A}$-messbar.

- **Definition (3.)6.18:** Eine Menge $A \subset \Omega$ heißt eine μ**-Nullmenge** genau dann, wenn $A \in \mathfrak{A}$ und $\mu(A) = 0$.

- **Definition (3.)6.19:** Sei P eine Eigenschaft, die Elemente von E haben können. Wir sagen, dass P μ**-fast überall (auf** E **) gilt** genau dann, wenn die (Ausnahme-)Menge A der Elemente von E, welche die Eigenschaft P nicht haben, Teilmenge einer μ-Nullmenge N ist.

- **Definition (3.)6.20:** Ein Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ heißt **vollständig** genau dann, wenn für alle N und $A \subset \Omega$ gilt: Ist N eine μ-Nullmenge und $A \subset N$, so gilt $A \in \mathfrak{A}$.

- **Satz (3.)6.21:** Der Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}_n, \lambda_n)$ ist vollständig, der Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \lambda_{n|\mathcal{B}_n})$ ist nicht vollständig.

- **Satz (3.)7.1:** Seien a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $I = [a, b]$. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

  (a) f ist Riemann-integrierbar $\iff$ Die Menge der Unstetigkeitsstellen von f ist eine λ_1-Nullmenge.

  (b) f R-integrierbar mit R-Integral $\int_a^b f(x) \, dx \implies f$ λ_1-integrierbar auf I und $\int_I f \, d\lambda_1 = \int_a^b f(x) \, dx$.

Zusatzaufgabe 12.1:

(a) Sei $\Omega = \{1,2,3,4\}$. Bestimmen Sie $\sigma(\mathfrak{E})$ für $\mathfrak{E} := \{\emptyset, \Omega, \{1,2\}\}$ und $\mathfrak{E} := \{\emptyset, \{1,2,4\}, \{3\}\}$.

(b) Zeigen Sie: Für $\Omega = \mathbb{Q}$ und $\mathfrak{E} := \{]a,b] \cap \mathbb{Q} \ : \ a,b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ ist $\sigma(\mathfrak{E}) = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.1:

(a)
- Es ist $\sigma(\{\emptyset, \Omega, \{1,2\}\}) = \{\emptyset, \Omega, \{1,2\}, \{3,4\}\}$, denn sie enthält die leere Menge, zu jedem Element auch das Komplement und alle abzählbaren Vereinigungen $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, denn diese sind hier in der Tat nur endliche Vereinigungen, d.h., es können nur die Fälle auftreten:
  - $A_{n_0} = \{1,2\}$ für ein n_0, also $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \begin{cases} \Omega & \text{falls } A_{n_0'} = \Omega \text{ oder } A_{n_0'} = \{3,4\} \text{ für ein } n_0', \\ \{1,2\} & \text{sonst;} \end{cases}$
  - $A_{n_0} = \{3,4\}$ für ein n_0, also $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \begin{cases} \Omega & \text{falls } A_{n_0'} = \Omega \text{ oder } A_{n_0'} = \{1,2\} \text{ für ein } n_0', \\ \{3,4\} & \text{sonst;} \end{cases}$
  - $A_n = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ oder $A_{n_0} = \Omega$ für ein n_0, also $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$.
- Analog ist $\sigma(\{\emptyset, \{1,2,4\}, \{3\}\}) = \{\emptyset, \Omega, \{1,2,4\}, \{3\}\}$, denn sie enthält die leere Menge, zu jedem Element auch das Komplement, und alle abzählbaren Vereinigungen $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(b) Es genügt zu zeigen, dass $\{q\} \in \sigma(\mathfrak{E})$ für alle $q \in \mathbb{Q}$, denn dann sind alle abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{Q}$ und somit jede Teilmenge von $\mathbb{Q}$ in $\sigma(\mathfrak{E})$ enthalten. Dies ist aber offensichtlich der Fall, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $]q - \frac{1}{n}, q] \cap \mathbb{Q} \in \mathfrak{E}$ und somit liegt deren abzählbarer Durchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left( ]q - \frac{1}{n}, q] \cap \mathbb{Q} \right) = \{q\}$ in der von $\mathfrak{E}$ erzeugten σ-Algebra.

Zusatzaufgabe 12.2: Zeigen Sie: (a) Jede einelementige Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist eine λ_n-Nullmenge.

(b) Jede abzählbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist eine λ_n-Nullmenge. (c) $\mathbb{Q}$ ist eine λ_1-Nullmenge.

(d) Skizzieren Sie $C_k := \left\{ x = 0.x_1x_2x_3\ldots \ \middle| \ \forall 1 \le l \le k \ : \ x_l \ne 7 \right\}$ für $k = 1,2$. Berechnen Sie $\lambda_1(C_2)$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.2:

(a) Sei $A = \{a\}$ mit $a \in \mathbb{R}^n$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ finden wir eine offene Menge $G := B_\delta(a) \supset A$ mit $\delta := \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$ ($B_\delta(a) :=]a-\delta, a+\delta[\times \ldots \times]a-\delta, a+\delta[$) und eine abgeschlossene Menge $F := \emptyset \subset A$, so dass

$$\mu(G \setminus F) \ = \ \mu(G) \ \le \ \min\left\{1, \frac{2^n \varepsilon^n}{3^n}\right\} \ < \ \varepsilon .$$

Somit ist jede einelementige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Offenbar gilt auch

$$\mu(A) \ := \ \inf_{\substack{A \subset G \subset \mathbb{R}^n \\ G \text{ offen}}} \mu(G) \ \le \ \inf_{B_\delta(a)} \mu(B_\delta(a)) \ = \ 0 .$$

Wegen der Isotonie von μ und $\mu(\emptyset) = 0$ folgt $\mu(A) = 0$.

(b) Jede abzählbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich als abzählbare Vereinigung von einelementigen Mengen $A_k \in \mathbb{R}^n$ darstellen. Aufgrund der σ-Additivität des Lebesgue-Maßes und (a) folgt somit

$$\mu(A) \ = \ \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \right) \ \le \ \sum_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\mu(A_k)}_{=0} \ = \ 0 .$$

(c) Da $\mathbb{Q}$ eine abzählbare Teilmenge des $\mathbb{R}$, folgt wiederum mit dem Diagonalargument die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}^n$. Die Behauptung folgt dann mit (b).

(d) Es ist $C_1 = [0, 0.7] \cup [0.8, 1]$ und $C_2 = \displaystyle\bigcup_{k\in[0..9]\setminus\{7\}} \big(([0, 0.07] \cup [0.08, 0.1]) + k \cdot 0.1\big)$, also $\lambda_1(C_2) = 0.81$.

Zusatzaufgabe 12.3: Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, f, g $\mathfrak{A}$-messbare numerische Funktionen auf Ω. Zeigen Sie:

(a) **(Satz (3.)6.11 (a)):** f μ-integrierbar $\Longrightarrow$ $|f|$ μ-integrierbar,

(b) $|f| \le g$ und g μ-integrierbar $\Longrightarrow$ f μ-integrierbar,

(c) f, g μ-integrierbar $\Longrightarrow$ $\max\{f,g\}$ und $\min\{f,g\}$ μ-integrierbar,

(d) **(Satz (3.)6.11 (b)):** f μ-integrierbar $\Longrightarrow$ $\left| \int_E f \, d\mu \right| \le \int_E |f| \, d\mu$.

(e) Das **Lemma von Fatou** gilt im Allgemeinen nicht für (nur) μ-integrierbare Funktionen (Gegenbeispiel).

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.3: Nach Satz (3.)5.6 sind $|f|$, f^+ und f^- $\mathfrak{A}$-messbar.

(a) Nach Definition (3.)6.9 ist eine $\mathfrak{A}$-messbar numerische Funktion f genau dann μ-integrierbar, wenn f^+ und f^- endliches μ-Integral besitzen. Aufgrund der Linearität des Integrals (und da $f^+f^- = 0$ nach Abschnitt 1, also die Summe überall definiert ist) besitzt dann auch die nichtnegative $\mathfrak{A}$-messbare Funktion $|f| = f^+ + f^-$ ein endliches μ-Integral und ist somit μ-integrierbar (wegen $|f|^- = 0$ und folglich $\int_\Omega |f|^- d\mu = 0 < \infty$).

(b) Da $|f| \leq g$, also $0 \leq f^+ + f^- \leq g$ gilt, besitzen f^+ und f^- wegen $0 \leq f^+ \leq g$ bzw. $0 \leq f^- \leq g$ und der Monotonie des Integrals ein endliches Integral, wonach f μ-integrierbar ist.

(c) Folgt aus (a) und (b) wegen $|\max\{f,g\}| \leq |f| + |g|$ und $|\min\{f,g\}| \leq |f| + |g|$.

(d) Da $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$ folgen $\int_E f\,d\mu \leq \int_E |f|\,d\mu$ und $-\int_E f\,d\mu \leq \int_E |f|\,d\mu$, also $\left|\int_E f\,d\mu\right| \leq \int_E |f|\,d\mu$.

(e) Auf dem Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ mit $\mu := \lambda_{1|\mathcal{B}}$ wird durch $f_k(x) := -\mathbf{1}^{\mathbb{R}}_{[k,k+1]}$ eine Folge $\mathcal{B}$-messbarer Funktionen mit $\int_\mathbb{R} f_k\,d\mu = -\int_\mathbb{R} f_k^- d\mu = -\mu([k,k+1]) = -1$ definiert, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert.

Insbesondere gilt $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k = \lim\limits_{k\to\infty} f_k = 0$ sowie $\liminf\limits_{k\to\infty} \int_\mathbb{R} f_k\,d\mu = \lim\limits_{k\to\infty} \int_\mathbb{R} f_k\,d\mu = \lim\limits_{k\to\infty}(-1) = -1$ und somit $\int_\mathbb{R} \liminf\limits_{k\to\infty} f_k\,d\mu = 0 > -1 = \liminf\limits_{k\to\infty} \int_\mathbb{R} f_k\,d\mu$.

Zusatzaufgabe 12.4:

(a) Zeigen Sie **Satz (3.)6.15**: Sei f eine numerische Funktion auf E und $A \subset E$, $A \in \mathfrak{A}$ ist beliebig. Dann gilt: Falls f $\mathfrak{A}$-messbar und nichtnegativ (bzw. μ-integrierbar) ist, so sind $f_{|A}$ und $f \cdot \mathbf{1}^E_A$ ebenso $\mathfrak{A}$-messbar und nichtnegativ (bzw. μ-integrierbar), und es gilt $\int_A f\,d\mu = \int_E f \cdot \mathbf{1}^E_A\,d\mu$.

(b) Zeigen Sie **Satz (3.)6.22**: Ist $f : E \to [-\infty, \infty]$ μ-integrierbar, so ist f μ-fast überall endlich auf E.

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.4:

(a) Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller $\mathfrak{A}$-messbaren Funktionen $f : E \to [0,\infty]$, für welche $f_{|A}$ und $f \cdot \mathbf{1}^E_A$ nichtnegativ, $\mathfrak{A}$-messbar sind und für die gilt, dass $\int_A f\,d\mu = \int_E f \cdot \mathbf{1}^E_A\,d\mu$. Ist $f = \mathbf{1}^E_B$ mit $B \in \mathfrak{A}$, $B \subset E$, dann gilt $f_{|A} = \mathbf{1}^A_{A\cap B}$ und $f \cdot \mathbf{1}^E_A = \mathbf{1}^E_{A\cap B}$, damit sind diese beiden Funktionen nichtnegativ und $\mathfrak{A}$-messbar und

$$\int_A f\,d\mu = \mu(A \cap B) = \int_E f \cdot \mathbf{1}^E_A\,d\mu.$$

Also liegt f in $\mathcal{C}$. Da aufgrund der Linearität des Integrals Linearkombinationen von Funktionen aus $\mathcal{C}$ mit nichtnegativen reellen Koeffizienten klarerweise in $\mathcal{C}$ liegen, enthält $\mathcal{C}$ alle $\mathfrak{A}$-Elementarfunktionen auf E. Da aufgrund des Satzes über monotone Konvergenz Grenzwerte monoton wachsender Folgen aus $\mathcal{C}$ selbst in $\mathcal{C}$ liegen, enthält $\mathcal{C}$ nach Satz (3.)5.8 alle nichtnegativen $\mathfrak{A}$-messbaren numerischen Funktionen auf E.

(Ist f μ-integrierbar, können wir $f = f^+ - f^-$ schreiben und das Bisherige auf f^+ und f^- anwenden.)

(b) Sei A die Menge aller $\omega \in E$ mit $|f(\omega)| = \infty$. Dann gilt $A \in \mathfrak{A}$ aufgrund der $\mathfrak{A}$-Messbarkeit von f (vgl. Satz (3).5.8). Wir müssen zeigen, dass $\mu(A) = 0$. Nun gilt aber $2^k \cdot \mathbf{1}^E_A \leq |f|$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, also auch $2^k\mu(A) = \int_E 2^k \cdot \mathbf{1}^E_A\,d\mu \leq \int_E |f|\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu + \int_E f^-\,d\mu =: C < \infty$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$. Mit $k \to \infty$ folgt daraus sofort $\mu(A) = 0$. Dies besagt genau, dass f außerhalb einer μ-Nullmenge endlich ist.

Zusatzaufgabe 12.5:

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{\cos(x)}{x}\mathbf{1}^{\mathbb{R}}_{]\pi,\infty[}(x)$, einerseits auf (uneigentliche) Riemann-Integrierbarkeit und andererseits auf Lebesgue-Integrierbarkeit.

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.5:

Einerseits existiert das (uneigentliche) Riemann-Integral, denn es gilt mit partieller Integration

$$\int f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(\left[\frac{\sin(x)}{x}\right]_\pi^b + \int_\pi^b \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx\right) = 0 + \lim_{b\to\infty}\int_\pi^b \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx,$$

wobei der Grenzwert wegen $\left|\frac{\sin(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ und $\lim\limits_{b\to\infty}\int_\pi^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_\pi^b = \frac{1}{\pi}$ existiert.

Andererseits gilt für $\delta \leq \frac{\pi}{4}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int |f(x)|\,d\lambda_1(x) &\geq \sum_{k=2}^\infty \int_{]k\pi-\delta,k\pi+\delta[} \frac{|\cos(x)|}{x}\,d\lambda_1(x) \geq 2\delta \sum_{k=2}^\infty \inf_{x\in]k\pi-\delta,k\pi+\delta[} \frac{|\cos(x)|}{x} \geq 2\delta \sum_{k=2}^\infty \frac{\cos(\delta)}{k\pi+\delta} \\ &\geq 2\delta\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=2}^\infty \frac{4}{4k\pi+\pi} \geq 2\delta\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=2}^\infty \frac{4}{4k\pi+4k\pi} \geq \frac{\delta}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k},\end{aligned}$$

wobei die letzte Reihe (bis auf den ersten Summanden) offenbar ein Vielfaches der als divergent bekannten harmonischen Reihe $\sum \frac{1}{k}$ ist. Somit kann f nach Satz (3.)6.11 nicht Lebesgue-integrierbar sein.

Zusatzmaterial zur Analysis II – Übung zu Serie 13

Satz von Lebesgue, μ-fast überall erfüllte Eigenschaften, Dichte

- **Satz (3.)6.12 (Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz):** Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge $\mathfrak{A}$-messbarer reellwertiger Funktionen auf E, $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ und es gebe eine μ-integrierbare reellwertige Funktion g auf E derart, dass $|f_k| \leq g$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dann sind die Funktionen f, f_k, $k \in \mathbb{N}$, jeweils μ-integrierbar auf E, die Integralfolge $(\int_E f_k\,d\mu)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k\,d\mu \;=\; \int_E f\,d\mu.$$

- **Satz (3.)6.17:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$. Sei weiter $A \subset E$, $A \in \mathfrak{A}$ und g sei eine numerische Funktion auf A. Definiere $f : E \to [-\infty, \infty]$ durch

$$f(\omega) \;=\; \begin{cases} g(\omega), & \text{wenn } \omega \in A \\ 0, & \text{wenn } \omega \in E \setminus A, \end{cases}$$

  (a) Falls g nichtnegativ und $\mathfrak{A}$-messbar ist, so ist f nichtnegativ und $\mathfrak{A}$-messbar und $\int_A g\,d\mu \;=\; \int_E f\,d\mu$.
  (b) Falls g μ-integrierbar ist, so ist f μ-integrierbar und $\int_A g\,d\mu \;=\; \int_E f\,d\mu$.

- **Satz (3.)6.23:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$. Sei weiter f eine nichtnegative und $\mathfrak{A}$-messbare Funktion auf E. Dann gilt $\displaystyle\int_E f\,d\mu = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ μ-fast überall.

- **Corollar (3.)6.24:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$. Ist $f : E \to [-\infty, \infty]$ eine $\mathfrak{A}$-messbare Funktion mit $\mu(E) = 0$, dann ist f sogar μ-integrierbar auf E und es gilt

$$\int_E f\,d\mu \;=\; 0.$$

- **Satz (3.)6.25:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$. Seien weiter f und g beliebige numerische $\mathfrak{A}$-messbare Funktionen auf E, derart, dass $f = g$ μ-fast überall auf E. Dann gilt:

  (a) Sind f und g nichtnegativ, dann gilt: $\displaystyle\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu$.
  (b) Ist f μ-integrierbar, so ist g μ-integrierbar und $\displaystyle\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu$.

- **Satz (3.)6.28:** Sei $f : \Omega \to [0, \infty]$ $\mathfrak{A}$-messbar. Für jedes $A \in \mathfrak{A}$ sei $\boxed{\nu(A) \;:=\; \int_A f\,d\mu.}$

  Dann ist ν ein Maß auf $\mathfrak{A}$ und $(\Omega, \mathfrak{A}, \nu)$ ein Maßraum. Wir sagen: ν besitzt die **Dichte f bezüglich** μ. Sei $E \in \mathfrak{A}$ und g eine numerische Funktion auf E. Falls g nichtnegativ und $\mathfrak{A}$-messbar ist (bzw. falls g ν-integrierbar ist), so ist $g \cdot (f_{|E})$ nichtnegativ und $\mathfrak{A}$-messbar (bzw. $g \cdot (f_{|E})$ ist μ-integrierbar) und

$$\int_E g\,d\nu \;=\; \int_E g \cdot (f_{|E})\,d\mu.$$

- **Corollar (3.)6.30:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$. Sei weiter $(g_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge $\mathfrak{A}$-messbarer numerischer Funktionen auf E derart, dass

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \int_E |g_\nu|\,d\mu < \infty.$$

  Dann ist für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ die Funktion g_ν μ-integrierbar. Außerdem ist die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu$ μ-fast überall auf E gegen eine μ-integrierbare Funktion g konvergent und

$$\int_E g\,d\mu \;=\; \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_E g_\nu\,d\mu.$$

Parameterabhängige Lebesgue-Integrale

- **Lemma (3.)6.31 (Stetigkeitslemma für parameterabhängige Integrale):** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$, (X, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $f : X \times E \to \mathbb{R}$, $(x, \omega) \mapsto f(x, \omega)$, eine Funktion, für die gilt: (a) $\omega \mapsto f(x, \omega)$ ist μ-integrierbar für jedes $x \in X$.

  (b) $x \mapsto f(x, \omega)$ ist stetig im Punkt x_0 für jedes $\omega \in E$.

  (c) Es gibt ein μ-integrierbares $h : E \to [0, \infty]$, so dass $|f(x, \omega)| \leq h(\omega)$ für alle $(x, \omega) \in X \times E$.

  Dann ist die Funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \int_E f(x, \omega)\, d\mu(\omega)$, stetig im Punkt x_0.

- **Lemma (3.)6.32 (Differentiationslemma für parameterabhängige Integrale):** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$, I ein nichtdegeneriertes Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : X \times E \to \mathbb{R}$, $(x, \omega) \mapsto f(x, \omega)$, eine Funktion, für die gilt: (a) $\omega \mapsto f(x, \omega)$ ist μ-integrierbar für jedes $x \in X$.

  (b) $x \mapsto f(x, \omega)$ ist differenzierbar auf I für jedes $\omega \in E$.

  (c) $\exists\, h : E \to [0, \infty]$ μ-integrierbar, so dass $|\partial_x f(x, \omega)| \leq h(\omega)$ für alle $(x, \omega) \in X \times E$.

  Dann ist die Funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$, definiert durch

  $$\varphi(x) = \int_E f(x, \omega)\, d\mu(\omega),$$

  differenzierbar auf I, die Funktion $\omega \mapsto \partial_x f(x, \omega)$ ist μ-integrierbar für jedes $x \in I$ und es gilt:

  $$\varphi'(x) = \int_E \partial_x f(x, \omega)\, d\mu(\omega) \quad \text{für jedes } x \in I.$$

Riemann- versus Lebesgue-Integrale

- **Satz (3.)7.1:** Seien a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $I = [a, b]$. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

  (a) f ist Riemann-integrierbar $\iff$ Die Menge der Unstetigkeitsstellen von f ist eine λ_1-Nullmenge.

  (b) f R-integrierbar mit R-Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ $\implies$ f λ_1-integrierbar auf I und $\int_I f\, d\lambda_1 = \int_a^b f(x)\, dx$.

- **Satz (3.)7.2:** Sei $a \in \mathbb{R}$ und f eine auf $[a, \infty[$ definierte numerische Funktion, die nichtnegativ und $\mathfrak{L}_1$-messbar oder aber λ_1-integrierbar ist. Dann gilt: $\boxed{\int_{[a,\infty[} f\, d\lambda_1 = \lim_{b\to\infty} \int_{[a,b]} f\, d\lambda_1 .}$

Substitutionsregel, Satz von Fubini/Tonelli

- **Satz (3.)7.5 (Translationsinvarianz):** Für jedes $A \in \mathfrak{L}_n, c \in \mathbb{R}^n$ gilt $A + c \in \mathfrak{L}_n$ und $\lambda_n(A + c) = \lambda_n(A)$.

- **Satz (3.)7.6:** Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear, bijektiv. Für $A \in \mathfrak{L}_n$ gilt $T[\![A]\!] \in \mathfrak{L}_n$ und $\lambda_n(T[\![A]\!]) = |\det T|\, \lambda_n(A)$.

- **Satz (3.)7.10 (Substitutionsregel):** Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen sowie $h : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann gilt $h[\![A]\!] \in \mathfrak{L}_n$ für jede Menge $A \subset U$ mit $A \in A_n$ und

  $$\lambda_n(h[\![A]\!]) = \int_A |\det(dh(x))|\, d\lambda_n(x). \tag{13.1}$$

  Für alle $E \subset U$ mit $E \in \mathfrak{L}_n$ und alle $\mathfrak{L}_n$-messbaren Funktionen $f : h[\![E]\!] \to [0, \infty]$ (bzw. alle λ_n-integrierbaren Funktionen $f : h[\![E]\!] \to [-\infty, \infty]$) gilt, dass die auf E definierte Funktion $x \mapsto (f \circ h)(x) \cdot |\det(dh(x))|$ $\mathfrak{L}_n$-messbar (bzw. $\mathfrak{L}_n$-integrierbar) ist und

  $$\int_{h[\![E]\!]} f\, d\lambda_n = \int_E (f \circ h)(x) \cdot |\det(dh(x))|\, d\lambda_n(x) . \tag{13.2}$$

- **Satz (3.)7.12:** Falls $E_1 \in \mathfrak{L}_{n_1}$ und $E_2 \in \mathfrak{L}_{n_2}$, so gilt $E = E_1 \times E_2 \in \mathfrak{L}_n$. (Die Umkehrung ist i.A. falsch.)

- Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$. Ist μ-f.ü. definiert und (außerhalb einer μ-Nullmenge N) $\mathfrak{A}$-messbar und nichtnegativ (bzw. μ-integrierbar), dann definieren wir $\int_E f d\mu := \int_{E\setminus N} f_{|E\setminus N} d\mu$.

- **Satz v. Fubini/Tonelli (μ-f. ü. Fassung):** Seien $n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_1, n_2 \geq 1$ und $n = n_1 + n_2$. Weiter seien $E_i \in \mathfrak{L}_{n_i}$, $i \in \{1, 2\}$ und $f : E_1 \times E_2 \to [-\infty, \infty]$ $\mathfrak{L}_n$-messbar und nichtnegativ (bzw. λ_n-integrierbar). Dann ist die partielle Funktion $f^{\omega_1} : E_2 \to [-\infty, \infty]$, $\omega_2 \mapsto f(\omega_1, \omega_2)$ für λ_1-fast alle $\omega_1 \in E_1$ $\mathfrak{L}_{n_2}$-messbar und nichtnegativ (bzw. λ_{n_2}-integrierbar), die Funktion $g : \omega_1 \mapsto \int_{E_2} f^{\omega_1}\, d\lambda_{n_2}$ λ_1-fast überall auf E_1 definiert, (außerhalb einer λ_1-Nullmenge) $\mathfrak{L}_{n_1}$-messbar und nichtnegativ (bzw. λ_{n_1}-integrierbar) und es gilt

  $$\int_{E_1\times E_2} f\, d\lambda_n = \int_{E_1} g\, d\lambda_{n_1}, \qquad \text{also} \qquad \int_{E_1\times E_2} f\, d\lambda_n = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(\omega_1, \omega_2)\, d\lambda_{n_2}(\omega_2) \right) d\lambda_{n_1}(\omega_1).$$

Zusatzaufgabe 13.1: Zeigen Sie **Satz (3.)6.28**.

Lösung zu Zusatzaufgabe 13.1:

Aufgrund von Satz 6.15 (vgl Zusatzaufgabe 12.4) gilt

$$\nu(A) \;=\; \int_\Omega f \cdot \mathbf{1}_A^\Omega \, d\mu$$

für alle $A \in \mathfrak{A}$ gilt. Somit folgt aus Corollar 6.24 und Satz 6.7, dass ν ein Maß auf $\mathfrak{A}$ ist.
Die zweite Behauptung des Satzes wird nacheinander bewiesen für Funktionen der Form $g = \mathbf{1}_A^E$, $A \subset E$, $A \in \mathfrak{A}$, für $\mathfrak{A}$-Elementarfunktionen auf E, für nichtnegative $\mathfrak{A}$-messbare numerische Funktionen und schließlich für μ-integrierbare Funktionen auf E.

Zusatzaufgabe 13.2: (Normalbereiche)

Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ wird als **Normalbereich im** $\mathbb{R}^2$ bezeichnet, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist: (a) $\exists\, \varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\big\}$.

(b) $\exists\, \psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig mit $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y),\ c \le y \le d\big\}$.

Der **Flächeninhalt** eines Normalbereiches $D \in \mathbb{R}^2$ ist dann beispielsweise

$$\lambda_2(D) \;:=\; \int_D 1 \; d\mu(x,y) \;=\; \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} 1 \; d\lambda_1(y) \right) \, d\lambda_1(x)$$

Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^3$ wird als **Normalbereich im** $\mathbb{R}^3$ bezeichnet, falls stetige Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\xi_1, \xi_2 : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$D \;=\; \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; a \le x \le b\,,\;\; \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\,,\;\; \xi_1(x,y) \le z \le \xi_2(x,y)\big\}$$

existieren (ggf. (x,y,z) permutiert). Das **Volumen** eines Normalbereiches $D \in \mathbb{R}^3$ ist

$$V(D) \;:=\; \int_D 1 \; d\lambda_3(x,y,z) \;=\; \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\xi_1(x,y)}^{\xi_2(x,y)} 1 \; d\lambda_1(z) \right) \, d\lambda_1(y) \right) \, d\lambda_1(x)\,.$$

(a) Es bezeichne B_1 die Euklidische Einheitskugel in $\mathbb{R}^2$ um $(x,y) = (0,0)$ und B_2 eine um den Punkt $(x,y) = (1,0)$. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Gebietes $B_1 \cap B_2$.

(b) Berechnen Sie für $A := [0,1] \times [0,2]$ das Integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} (x^2 - 3y + 1)\; \mathbf{1}_A^{\mathbb{R}^2}(x,y) \; d\lambda_2(x,y)$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 13.2:

(a) Aufgrund der Symmetrie ist klar, dass sich die Ränder der beiden Kugeln in den Punkten $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ schneiden. Daher genügt es, den Flächeninhalt eines Viertels von $B_1 \cap B_2$, etwa des durch

$$V \;:=\; \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le \tfrac{1}{2},\;\; 0 \le y \le \sqrt{1 - (x-1)^2}\right\}$$

definierten, zu berechnen. Damit folgt unter Anwendung des Satzes von Fubini

$$\frac{1}{4}\lambda_2(B_1 \cap B_2) = \;\lambda_2(V) \;=\; \int_V 1 \; d\lambda_2(x,y) \;=\; \int_{\left[0,\frac{1}{2}\right]} \int_{[0,\sqrt{1-(x-1)^2}]} 1 \; d\lambda_1(y) \; d\lambda_1(x) \;=\; \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - (x-1)^2} \; dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\;\cos(t)\; dt \;=\; \frac{1}{2}\big(\sin(t)\cos(t) + t\big)\Big|_{t=-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} \;=\; -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{6},$$

also insgesamt $\mu(B_1 \cap B_2) \;=\; -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}\pi$.

(b) Nach dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\int (x^2 - 3y + 1)\; \mathbf{1}_A^{\mathbb{R}^2}(x,y) \; d\lambda_2(x,y) \;=\; \int_{[0,2]} \left(\int_{[0,1]} (x^2 - 3y + 1) \; d\lambda_1(x) \right) d\lambda_1(y)$$

$$= \int_{[0,2]} \left[\frac{x^3}{3} - 3xy + x \right]_{x=0}^{x=1} d\lambda_1(y) \;=\; \int_{[0,2]} \left(\frac{4}{3} - 3y \right) d\lambda_1(y) \;=\; \left[\frac{4y}{3} - \frac{3y^2}{2} \right]_0^2 \;=\; \frac{8}{3} - 6 \;=\; -\frac{10}{3}\,.$$

Zusatzaufgabe 13.3: (Substitutionsregel/Transformationssatz)

(a) Seien $[a,b],[\alpha,\beta]$ beschränkte nichtdegenerierte Intervalle in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $t:[a,b]\to[\alpha,\beta]$ eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung, und $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion, dann sind f und $f\circ t$ auch λ_1-integrierbar und es gilt

$$\int_{[a,b]} f(t(x))\cdot|t'(x)|\,d\lambda_1(x) \;=\; \int_{[\alpha,\beta]} f(y)\,d\lambda_1(y)\,.$$

(b) Berechnen Sie $df(r,\varphi)$ und $\det(df(r,\varphi))$ für die Polarkoordinaten-Abbildung $f(r,\varphi):=(r\cos(\varphi),r\sin(\varphi))$.

(c) Berechnen Sie die Fläche des Kreissektors $\Omega:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,1<x^2+y^2<4\,,\,x,y>0\}$, indem Sie den Transformationssatz auf die Polarkoordinaten-Abbildung und anschließend Satz von Fubini anwenden.

(d) Zeigen Sie, dass die Abbildung $F(x,y):=(x(1-y),xy)$ in der Nähe jedes Punktes $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $x\neq 0$ eine differenzierbare Umkehrabbildung besitzt. Beweisen Sie, dass F sogar ein Diffeomorphismus von $]0,\infty[\,\times\,]0,1[$ auf $]0,\infty[\,\times\,]0,\infty[$ ist.

(e) Berechnen Sie das Integral $\int_{]0,\infty[\,\times\,]0,\infty[} \mathrm{e}^{-(u+v)^2}\,d\lambda_2(u,v)$, indem Sie den Transformationssatz auf F anwenden.

Lösung zu Zusatzaufgabe 13.3:

(a) Nach Satz 7.1(b) ist f als R-integrierbare Funktion λ_1-integrierbar auf $[\alpha,\beta]$ mit $\int_{[\alpha,\beta]} f(y)\,d\lambda_1(y) = \int_\alpha^\beta f(y)\,dy$.

Da t bijektiv, muss $t([a,b])=[\alpha,\beta]$ gelten, so dass wegen der (aus der Injektivität und Stetigkeit folgenden) strengen Monotonie die folgenden Fälle unterschieden werden müssen:

- Es gilt $t(a)=\beta$ und $t(b)=\alpha$ und $t'\leq 0$ (streng monoton fallend).
- Es gilt $t(a)=\alpha$ und $t(b)=\beta$ und $t'\geq 0$ (streng monoton wachsend).

Nach der Substitutionsregel aus der Analysis I (vgl. Forster I, Satz 4, §19) folgt im ersten Fall

$$\int_{[a,b]} (f\circ t)(x)\cdot|t'(x)|\,d\lambda_1(x) \;=\; -\int_a^b f(t(x))\cdot t'(x)dx \;=\; -\int_\beta^\alpha f(y)\,dy \;=\; \int_\alpha^\beta f(y)\,dy \;=\; \int_{[\alpha,\beta]} f(y)\,d\lambda_1(y)$$

und im zweiten Fall $\int_{[a,b]} (f\circ t)(x)\cdot|t'(x)|\,d\lambda_1(x) \;=\; \int_a^b f(t(x))\cdot t'(x)dx \;=\; \int_\alpha^\beta f(y)\,dy \;=\; \int_{[\alpha,\beta]} f(y)\,d\lambda_1(y)$.

(b) Es gilt $df(r,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi)\end{pmatrix}$, insbesondere also $\det(df(r,\varphi))=r$.

(c) Mit dem Transformationssatz und Polarkoordinaten sowie anschließender Anwendung vom Satz von Fubini gilt

$$\lambda_2(\Omega) \;=\; \int_\Omega 1\,d\lambda_2(x,y) \;=\; \int_{]1,2[\,\times\,]0,\frac{\pi}{2}[} r d\lambda_2(r,\varphi) \;\overset{\text{Satz 7.1}}{=}\; \int_1^2\left(\int_0^{\pi/2} r\,d\varphi\right)dr \;=\; \frac{\pi}{2}\int_1^2 r\,dr \;=\; \frac{\pi}{4}r^2\Big|_{r=1}^{r=2} \;=\; \frac{3\pi}{4}\,.$$

(d) Es gilt $dF(x,y)=\begin{pmatrix}(1-y) & -x\\ y & x\end{pmatrix}$, und daher ist wegen $\det\begin{pmatrix}(1-y) & -x\\ y & x\end{pmatrix}=x$ die Ableitung $dF(x,y)$ in jedem Punkt $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $x\neq 0$ invertierbar. Nach dem Satz über lokale Umkehrbarkeit besitzt F also in der Nähe solcher Punkte eine differenzierbare Umkehrabbildung.

Zur globalen Diffeomorphie: Zunächst einmal bildet F den Streifen $(0,\infty)\times(0,1)$ wirklich nach $(0,\infty)\times(0,\infty)$ ab, denn $x(1-y)$ und xy sind positiv für $x\in(0,\infty)$, $y\in(0,1)$.

Für $F(x,y)=(u,v)$ gilt $x=u+v$ sowie $y=\frac{v}{u+v}$, wobei y bei $u,v>0$ auch wirklich wohldefiniert ist und in $(0,1)$ liegt. Also ist $F:(0,\infty)\times(0,1)\to(0,\infty)\times(0,\infty)$ bijektiv, die Umkehrabbildung ist explizit durch $F^{-1}(u,v)=(u+v,\frac{v}{u+v})$ gegeben. Bijektivität und lokale Diffeomorphie implizieren aber globale Diffeomorphie.

(e) Mit $g(u,v):=\mathrm{e}^{-(u+v)^2}$ und $(g\circ F)(x,y)=\mathrm{e}^{-x^2}$ gilt wegen $\det(dF(x,y))=x$ nach dem Transformationssatz (aufgrund der Nichtnegativität existiert das (ggf. unendliche) λ_2-Integral in jedem Fall) und Satz von Fubini

$$\int_{]0,\infty[\,\times\,]0,\infty[} \mathrm{e}^{-(u+v)^2}\,d\lambda_2(u,v) \;=\; \int_{]0,\infty[\,\times\,]0,1[} \mathrm{e}^{-x^2}x\,d\lambda_2(x,y) \;=\; \int_{]0,1[}\Big(\int_{]0,\infty[} \mathrm{e}^{-x^2}x\,d\lambda_1(x)\Big)\,d\lambda_1(y)$$

Mit Satz (3.)7.2 und $z=x^2$, $x\,dx=\frac{1}{2}\,dz$ erhält man $\int \mathrm{e}^{-x^2}x\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-z}\,dz \;=\; -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}$ und somit

$$\int_{]0,\infty[\,\times\,]0,\infty[} \mathrm{e}^{-(u+v)^2}\,d\lambda_2(u,v) \;=\; \int_{]0,\infty[} \mathrm{e}^{-x^2}x\,d\lambda_1(x) \;=\; \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}\,dz \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

Zusatzmaterial zur Analysis II – Übung zu Serie 14

Zusatzaufgabe 14.1:

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung von

$$f(x,y) \;=\; x^3+5x^2y+3xy^2+2y^3+x-y\;, \qquad g(x,y) \;=\; \ln(xy)\;, \qquad h(x,y) \;=\; x\arctan(x^2+y^2)\;.$$

(b) Seien $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbare Funktionen und $a,b\in\mathbb{R}$ Konstanten. Finden Sie eine Formel für alle partiellen Ableitungen von $(x,y)\mapsto f(x)g(y)h(ax+by)$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 14.1:

(a) Es gelten

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2+10xy+3y^2+1\;,\\ f_y &= 5x^2+6xy+6y^2-1\;,\\ f_{xx} &= 6x+10y\;,\\ f_{xy} &= 10x+6y \;=\; f_{yx}\;,\\ f_{yy} &= 6x+12y \end{aligned}$$

sowie

$$g_x = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}\;,\qquad g_y = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}\;,$$

$$g_{xx} = -\frac{1}{x^2}\;,\quad g_{xy} = 0 = g_{yx}\;,\quad g_{yy} = -\frac{1}{y^2}$$

$$h_x = \arctan(x^2+y^2)+\frac{2x^2}{1+(x^2+y^2)^2}\;,\qquad h_y = \frac{2xy}{1+(x^2+y^2)^2}\;,$$

$$\begin{aligned} h_{xx} &= \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2}+\frac{(1+(x^2+y^2)^2)4x-8x^3(x^2+y^2)}{(1+(x^2+y^2)^2)^2}\;,\\ h_{xy} &= \frac{(1+(x^2+y^2)^2)2y-8x^2y(x^2+y^2)}{(1+(x^2+y^2)^2)^2} \;=\; h_{yx}\;,\\ h_{yy} &= \frac{(1+(x^2+y^2)^2)2x-8xy^2(x^2+y^2)}{(1+(x^2+y^2)^2)^2}\;. \end{aligned}$$

(b) Die Produktregel für höhere Ableitungen lautet $\quad (h_1(x)h_2(x))^{(n)} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}h_1^{(j)}(x)h_2^{(n-j)}(x).$

Daher gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\left(f(x)g(y)h(ax+by)\right) &= \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\left(f(x)\sum_{j=0}^{\beta}\binom{\beta}{j}g^{(j)}(y)b^{\beta-j}h^{(\beta-j)}(ax+by)\right)\\ &= \sum_{i=0}^{\alpha}\sum_{j=0}^{\beta}\binom{\alpha}{i}\binom{\beta}{j}a^{\alpha-i}b^{\beta-j}g^{(j)}(y)f^{(i)}(x)h^{(\alpha+\beta-(i+j))}(ax+by)\;. \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 14.2:

(a) Überprüfen Sie die Stetigkeit der Funktion $\quad f(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

(b) Berechnen Sie von der Funktion f aus (a) die partiellen Ableitungen erster Ordnung und überprüfen Sie diese ebenfalls auf ihre Stetigkeit.

(c) Wenden Sie den Satz über die Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge an, um zu zeigen, dass nicht alle Ableitungen zweiter Ordnung stetig sein können.

Lösung zu Zusatzaufgabe 14.2:

(a) Der einzige Punkt, wo die Stetigkeit möglicherweise nicht gegeben sein könnte, wäre $(x,y)=(0,0)$. Demnach betrachten wir für $(x,y)\neq(0,0)$ die Differenz

$$|f(x,y)-f(0,0)| \;=\; \left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0\right| \;\leq\; |x||y|\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) \;\leq\; 2|x||y|,$$

welche aber für $(x,y)\to(0,0)$ gegen 0 strebt. Somit ist die Funktion f tatsächlich in $(x,y)=(0,0)$ stetig.

(b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist die Funktion f definiert durch $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$ und somit erhalten wir für alle $(x,y) \neq (0,0)$ als erste partielle Ableitungen

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= \frac{(x^2+y^2)(3x^2y-y^3)-2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(3x^2-y^2)}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\
\partial_y f(x,y) &= \frac{(x^2+y^2)(x^3-3xy^2)-2y(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^2-3y^2)}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

Wiederum ist die Stetigkeit nur für $(x,y) = (0,0)$ nachzuprüfen. Wegen $f(x,0) \equiv f(0,y) \equiv 0$ für $x \neq 0$ bzw. $y \neq 0$ folgen $\partial_x f(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-0}{x} = 0$ und $\partial_y f(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-0}{y} = 0$. Für $(x,y) \neq (0,0)$ haben wir

$$\begin{aligned}
|\partial_x f(x,y)| &\leq |y|\left(3\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}\right) + 2|y|\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}\right) \\
&\leq 8|y| \overset{(x,y)\,\to\,(0,0)}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
|\partial_y f(x,y)| &\leq |x|\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + 3\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) + 2|x|\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}\right) \\
&\leq 8|x| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

so dass sowohl $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) = 0$ als auch $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y) = 0$ gelten. Demzufolge sind die ersten partiellen Ableitungen ebenfalls stetig in $(x,y) = (0,0)$.

(c) Nach dem Satz über die Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge wäre die Stetigkeit aller partiellen Ableitungen bis zur Ordnung $r = 2$ ein Widerspruch zu

$$\partial_{yx} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_x f(0,t)-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t^3}{t^3} = -1 \neq 1 = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_y f(t,0)-0}{t} = \partial_{xy} f(0,0).$$

Zusatzaufgabe 14.3:

(a) Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ durch $f(t) = (\cos t, \sin t)$ gegeben. Zeigen Sie, dass es $t \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$ gibt, so dass

$$f(t+h) - f(t) \neq df(t+\theta h)h\,.$$

(b) Bestimmen Sie die Ableitung $dH(r,\varphi)$ der Komposition $H := G \circ F$ von

$$F(r,\varphi) := (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \qquad \text{und} \qquad G(x,y) := (x^2+y, 2xy, x+y^2)$$

einerseits mittels Kettenregel, andererseits direkt durch Ausrechnen von $G \circ F$ sowie anschließendes Ableiten.

(c) Berechnen Sie $T_1 f((x,y),(\mathrm{e},\mathrm{e}))$ für $f :]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^{y\ln(y)}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 14.3:

(a) Wählen wir für h ein (nicht verschwindendes) Vielfaches von 2π, so gilt

$$f(t+h) - f(t) = 0$$

aufgrund der 2π-Periodizität der Sinus- und Kosinusfunktion. Wegen $df(t) = (-\sin(t), \cos(t))^T$ können jedoch nicht beide Einträge von $df(t)$ gleichzeitig verschwinden. (Außerdem besitzt $df(t)$ – als Vektor aufgefasst – die euklidische Norm 1.) Somit gilt für $h \neq 0$ stets

$$df(t+\theta h)h \neq 0.$$

(b) Mit der Kettenregel ergibt sich $dH(r,\varphi) = dG(F(r,\varphi)) \cdot dF(r,\varphi)$, und daher wegen

$$dF(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

sowie

$$dG(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 2y & 2x \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$$

genau

$$dH(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 2r\cos(\varphi) & 1 \\ 2r\sin(\varphi) & 2r\cos(\varphi) \\ 1 & 2r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r\cos^2(\varphi)+\sin(\varphi) & -2r^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)+r\cos(\varphi) \\ 4r\cos(\varphi)\sin(\varphi) & 2r^2(\cos^2(\varphi)-\sin^2(\varphi)) \\ \cos(\varphi)+2r\sin^2(\varphi) & 2r^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)-r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Andererseits ergibt sich direkt

$$H(r,\varphi) \;=\; \big(r^2\cos^2(\varphi)+r\sin(\varphi), 2r^2\cos(\varphi)\sin(\varphi), r\cos(\varphi)+r^2\sin^2(\varphi)\big)$$

und somit

$$dH(r,\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} 2r\cos^2(\varphi)+\sin(\varphi) & -2r^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)+r\cos(\varphi) \\ 4r\cos(\varphi)\sin(\varphi) & 2r^2(\cos^2(\varphi)-\sin^2(\varphi)) \\ \cos(\varphi)+2r\sin^2(\varphi) & 2r^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)-r\sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

was natürlich die Kettenregel bestätigt.

(c) Wegen $x^{y\ln(y)} = \mathrm{e}^{y\ln(y)\ln(x)}$ besitzt $f(x,y)$ die Ableitung $df(x,y) \;=\; f(x,y)\cdot\Big(\tfrac{y\ln(y)}{x} \quad \ln(x)\,(\ln(y)+1)\Big)$, also folgt

$$T_1f((x,y),(\mathrm{e},\mathrm{e})) \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{e}} \;+\; \mathrm{e}^{\mathrm{e}}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\mathrm{e} \\ y-\mathrm{e} \end{pmatrix} \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{e}}\,(1+x+2y-3\mathrm{e})$$

Zusatzaufgabe 14.4:

(a) Zeigen Sie: $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, definiert durch $(x,y)\mapsto(x^2-y^2,2xy)$, ist bei $(1,-1)$ ein lokaler Diffeomorphismus.

(b) Nach welchen Variablen kann das folgende Gleichungssystem (lokal) aufgelöst werden?

$$\begin{aligned} 3x+y-z+u^2 &= 0 \\ x-y+2z+u &= 0 \\ 2x+2y-3z+24 &= 0. \end{aligned}$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 14.4:

(a) Wegen $d\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$ und $\det(d\Phi(x,y)) = 4(x^2+y^2)$ ist $\Phi\in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ nach Satz 2.57 bei allen Punkten $\neq(0,0)$ und damit insbesondere bei $(-1,1)$ ein lokaler (C^∞ -)Diffeomorphismus.

(b) Das Gleichungssystem schreibt sich als $F(x,y,z,u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ mit der Funktion $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$, definiert durch

$$F(x,y,z,u) \;=\; \begin{pmatrix} 3x+y-z+u^2 \\ x-y+2z+u \\ 2x+2y-3z+24 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen müssen wir lediglich die Kombinationen von jeweils drei Spalten der Jacobi-Matrix

$$dF(x,y,z,u) \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2u \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

finden, welche linear unabhängig sind. Dies überprüfen wir mittels der Determinanten

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial(x,y,z)}\right) \;=\; \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \;=\; (9+4-2)-(2+12-3) \;=\; 0\,,$$

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial(x,y,u)}\right) \;=\; \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2u \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \;=\; (0+2+4u)-(-4u+6+0) \;=\; 4(2u-1)\,,$$

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial(x,z,u)}\right) \;=\; \det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2u \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \;=\; (0-2-6u)-(8u-0-9) \;=\; 7(1-2u)\,,$$

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial(y,z,u)}\right) \;=\; \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2u \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \;=\; (0-2+6u)-(8u-3+0) \;=\; 1-2u\,.$$

Finden wir also ein $(x_0, y_0, z_0, u_0) \in \mathbb{R}^4$ mit $F(x_0, y_0, z_0, u_0) = 0$ und $u_0 \neq \frac{1}{2}$, dann existieren

- eine Umgebung U_x von x_0, eine Umgebung V_x von (y_0, z_0, u_0), eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U_x \to V_x$ mit $F(x, g(x))$ für alle $x \in U_x$, und falls $(x, y, z, u) \in U_x \times V_x$ ein Punkt mit $F(x, y, z, u) = 0$ ist, dann gilt
$$(y, z, u) = g(x) \ , \qquad \text{d.h.} \qquad y = g_1(x), z = g_2(x), u = g_3(x) \ ,$$
- oder (nach Umnummerierung der Variablen) eine Umgebung U_y von y_0, eine Umgebung V_y von (x_0, z_0, u_0), eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U_y \to V_y$ mit $F(y, g(y))$ für alle $y \in U_y$, und falls $(y, x, z, u) \in U_y \times V_y$ ein Punkt mit $F(y, x, z, u) = 0$ ist, dann gilt
$$(x, z, u) = g(y) \ , \qquad \text{d.h.} \qquad x = g_1(y), z = g_2(y), u = g_3(y) \ ,$$
- oder (nach Umnummerierung der Variablen) eine Umgebung U_z von z_0, eine Umgebung V_z von (x_0, y_0, u_0), eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U_z \to V_z$ mit $F(z, g(z))$ für alle $z \in U_z$, und falls $(z, x, y, u) \in U_z \times V_z$ ein Punkt mit $F(z, x, y, u) = 0$ ist, dann gilt
$$(x, y, u) = g(z) \ , \qquad \text{d.h.} \qquad x = g_1(z), y = g_2(z), u = g_3(z) \ .$$

Zusatzaufgabe 14.5:

(a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = ((x + 1)^2 + y^2)((x - 1)^2 + y^2)$.

(i) Bestimmen Sie die Ableitung sowie die stationären Punkte von f und charakterisieren Sie diese.

(ii) An welchen Stellen ist die implizit gegebene Funktion $f(x, y) = C$ (lokal) nach y auflösbar?

(iii) Skizzieren Sie die Urbilder der regulären Werte $\frac{1}{2}$ und 2. Zusatz: Skizzieren Sie das Urbild von 1.

(b) Durch $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 - xy - y^2 = 1\}$ ist eine (nichtkompakte) Untermannigfaltigkeit gegeben. Kann die durch $f(x, y) := x^2 - y^2$ definierte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ lokale Extrema besitzen?

(c) Bestimmen Sie mittels Satz 2.76 und Satz 2.77 die lokalen Extrema von $h : K \to \mathbb{R}$, $h(x, y) := x^2 + y^2$, auf der (kompakten) Untermannigfaltigkeit $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 - xy + y^2 = 1\}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 14.5:

(a) Die als Polynom beliebig oft differenzierbare Funktion $f(x, y) = ((x + 1)^2 + y^2)((x - 1)^2 + y^2)$ besitzt die stationären Punkte $(\pm 1, 0)$ und $(0, 0)$, denn sie besitzt die Ableitungen

$$df(x, y) = \begin{pmatrix} 4x(x^2 + y^2 - 1) & 4y(x^2 + y^2 + 1) \end{pmatrix} \ , \quad \text{Hess} \, f(x, y) = \begin{pmatrix} 4(3x^2 + y^2 - 1) & 8xy \\ 8xy & 4(x^2 + 3y^2 + 1) \end{pmatrix} \ ,$$

(i) An den stationären Punkten $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ ist die Hesse-Matrix positiv definit, also besitzt f dort (lokale) Minima. Wegen $f(x, y) \geq 0$ und $f(\pm 1, 0) = 0$ liegen bei $(\pm 1, 0)$ sogar globale Minima vor.
Am stationären Punkt $(0, 0)$ haben wir aufgrund der Indefinitheit der Hesse-Matrix einen Sattelpunkt. Dies sehen wir auch ohne die Hesse-Matrix, da einerseits $f(x, 0) = (x+1)^2(x-1)^2 = (x^2-1) < 1 = f(0, 0)$ für alle $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$ und andererseits $f(0, y) = (1 + y^2)^2 > 1 = f(0, 0)$ für alle $y \neq 0$ gilt.

(ii) Die Funktion ist wegen $4y(x^2 + y^2 + 1) = 0 \iff y = 0$ nach dem Satz über implizite Funktionen (Satz 2.61) an allen Kurvenpunkten $f(x, y) = C$ mit $y \neq 0$ (lokal) nach y auflösbar. Offenbar kann es nur (nichtentartete) Kurvenpunkte geben, falls $C > 0$ ist.
In diesem speziellen Fall können wir tatsächlich die (lokale) Auflösung angeben, denn es gilt

$$\begin{aligned} ((x + 1)^2 + y^2)((x - 1)^2 + y^2) = C > 0 \quad &\iff \quad y^4 + 2(x^2 + 1)y^2 + (x^2 - 1)^2 = C \\ &\iff \quad \left(y^2 + (x^2 + 1)\right)^2 = C + 4x^2 \end{aligned}$$

mit der (aufgrund der Nichtnegativität reeller Quadrate) einzigen Lösung $y^2 = -x^2 - 1 + \sqrt{C + 4x^2}$, so dass wir die Niveaulinien über die Funktionen

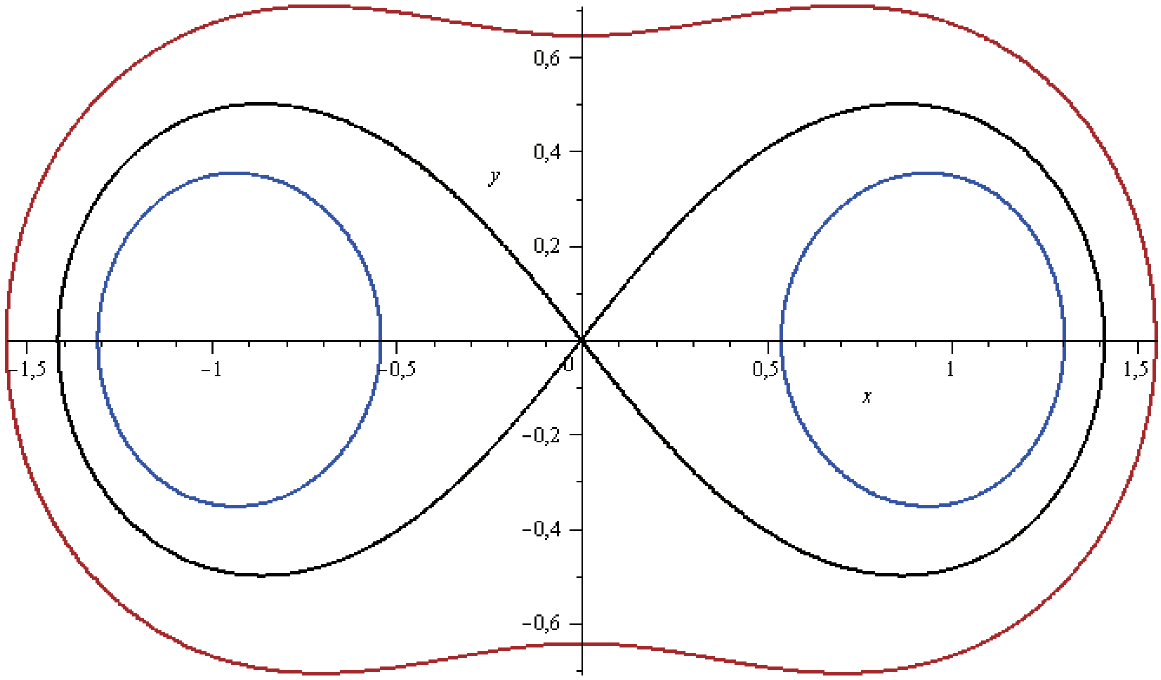
$$g_{C,\pm}(x) = \pm \sqrt{\sqrt{C + 4x^2} - x^2 - 1}$$

für alle

$$x \in U_C := \left\{ x \mid \sqrt{C + 4x^2} - x^2 - 1 > 0 \right\} = \{ x \mid C > (x^2 - 1)^2 \}$$

explizit darstellen können.

(iii)
```
restart: with(plots):
A:=implicitplot(((x+1)^2+y^2)*((x-1)^2+y^2)=0.5,x=-2..2,y=-1..1,grid=[500,500],color=blue):
B:=implicitplot(((x+1)^2+y^2)*((x-1)^2+y^2)=1,x=-2..2,y=-1..1,grid=[500,500],color=black):
C:=implicitplot(((x+1)^2+y^2)*((x-1)^2+y^2)=2,x=-2..2,y=-1..1,grid=[500,500],color=brown):
display(A,B,C);
```



(b) Zunächst bemerke man, dass M eine eindimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit ist, denn die Ableitung $dg(x,y) = \begin{pmatrix}2x-y & -x-2y\end{pmatrix}$ von $g(x,y) := x^2 - xy - y^2 - 1$ ist nur im Punkt $(0,0)$ nicht surjektiv, welcher jedoch nicht in M liegt. Somit sind nach Satz 2.76 die stationären Punkte von $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ Kandidaten für lokale Extrema von $f : M \to \mathbb{R}$. Da sich aus $dF(x,y,\lambda) = 0$ insbesondere das Gleichungssystem $2x = \lambda(2x-y)$, $2y = \lambda(x+2y)$ ergibt, welches auch als

$$\begin{pmatrix}2(1-\lambda) & \lambda \\ -\lambda & 2(1-\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

formuliert, welches jedoch wegen

$$\det\begin{pmatrix}2(1-\lambda) & \lambda \\ -\lambda & 2(1-\lambda)\end{pmatrix} = 4(1-\lambda)^2 + \lambda^2 = 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 5\left(\lambda - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} > 0$$

für keine Wahl von λ singulär werden kann (also für keine Wahl von λ eine Lösung ungleich $\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T \notin M$ besitzen kann), ist das notwendige Kriterium nirgends erfüllt. Also kann f nach Satz 2.76 auf der nichtkompakten Untermannigfaltigkeit M keine lokalen Extrema besitzen.

(c) Zunächst bemerke man, dass K eine eindimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit ist, denn die Ableitung $dg(x,y) = \begin{pmatrix}2x-y & -x+2y\end{pmatrix}$ von $\tilde{g}(x,y) := x^2 - xy + y^2 - 1$ ist nur im Punkt $(0,0)$ nicht surjektiv, welcher jedoch nicht in K liegt. Somit sind nach Satz 2.76 die stationären Punkte von $H(x,y,\lambda) = h(x,y) - \lambda\tilde{g}(x,y)$ Kandidaten für lokale Extrema von $h : K \to \mathbb{R}$. Da sich aus $dH(x,y,\lambda) = 0$ insbesondere das Gleichungssystem $2x = \lambda(2x-y)$, $2y = \lambda(-x+2y)$ ergibt, welches nur für $\lambda_1 = 2$ oder $\lambda_2 = \frac{2}{3}$ singulär ist (und damit eine Lösung $\neq (0,0)$ besitzen kann), ergibt sich im Fall $\lambda = 2$ die Lösungsmenge

$$\{(x,y) \in M : x = y\} = \{(1,1), (-1,-1)\}$$

und für $\lambda = \frac{2}{3}$ die Lösungsmenge

$$\{(x,y) \in M : x = -y\} = \left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\right\}$$

Die entsprechenden Tangentialräume sind

$$T_{(1,1)^T} = \operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\right) = \operatorname{Erzeugnis}\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}^T\right\} = \operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix}-1 & -1\end{pmatrix}\right) = T_{(-1,-1)^T}.$$

sowie

$$T_{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T} \;=\; \operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{3}\end{pmatrix}\right) \;=\; \text{Erzeugnis}\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T\right\} \;=\; \operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & \sqrt{3}\end{pmatrix}\right) \;=\; T_{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T}.$$

Die Einschränkung der sich für die Punkte $(1,1)$ und $(-1,-1)$ ergebenden Hesse-Matrix

$$\operatorname{Hess} H_2(x,y) \;=\; \operatorname{Hess} h(x,y) - 2\operatorname{Hess}\tilde{g}(x,y) \;=\; \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix} \;=\; 2\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

auf den Tangentialraum $T_{(1,1)^T} = T_{(-1,-1)^T}$ ist negativ definit, denn

$$\begin{pmatrix}c & -c\end{pmatrix} 2\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\ -c\end{pmatrix} \;=\; -8c^2 \;<\; 0$$

gilt für alle $c \neq 0$. Nach Satz 2.77 besitzt $h : K \to \mathbb{R}$ lokale Maxima bei $(1,1)$ und $(-1,-1)$. Die Einschränkung der sich für die übrigen beiden Punkte ergebenden Hesse-Matrix

$$\operatorname{Hess} H_{\frac{2}{3}}(x,y) \;=\; \operatorname{Hess} h(x,y) - \frac{2}{3}\operatorname{Hess}\tilde{g}(x,y) \;=\; \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix} \;=\; \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

auf den Tangentialraum $T_{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T} = T_{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T}$ ist an beiden Punkten positiv definit, denn

$$\begin{pmatrix}c & c\end{pmatrix}\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\ c\end{pmatrix} \;=\; \frac{2}{3}\left(c^2 + 2c^2 + c^2\right) \;=\; \frac{8}{3}c^2 \;>\; 0$$

gilt für alle $c \neq 0$. Nach Satz 2.77 besitzt $h : K \to \mathbb{R}$ lokale Minima bei den beiden übrigen Punkten.

Zusatzaufgabe 14.6: Beschreiben Sie die folgenden Mengen durch Normalbereiche:

(a) Das durch die Punkte $(1,3)$, $(3,1)$ und $(5,5)$ beschriebene Dreieck D.

(b) Die Ellipse $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 1\}$.

(c) Die Raute $R := \{x \in \mathbb{R}^2 \;:\; \|x\|_1 \leq 3\}$.

(d) Den Körper $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 \leq \frac{y}{2} \leq x - x^2,\; 0 \leq 4z \leq x + 2y\}$.
Berechnen Sie das Volumen von K und das Integral $\int x\mathbf{1}_K^{\mathbb{R}^3}(x,y,z)\, d\lambda_3(x,y,z)$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 14.6:

(a) Das Dreieck wird berandet durch die durch die Punkte verlaufenden Geraden

$$\begin{aligned}
(1,3),(3,1) &\;:\; g_1(x) \;=\; 4 - x\,,\\
(1,3),(5,5) &\;:\; g_2(x) \;=\; \frac{5+x}{2}\,,\\
(3,1),(5,5) &\;:\; g_3(x) \;=\; 2x - 5\,.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich als Normalbereich

$$D = \left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(1 \leq x \leq 3 \;\wedge\; 4 - x \leq y \leq \tfrac{5+x}{2}\right) \vee \left(3 \leq x \leq 5 \;\wedge\; 2x - 5 \leq y \leq \tfrac{5+x}{2}\right)\right\}.$$

(b) Für das durch $x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 1$ gegebene Ellipsoid ergibt sich als Normalbereich

$$E = \left\{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -1 \leq x \leq 1 \;\wedge\; -\tfrac{\sqrt{1-x^2}}{2} \leq y \leq \tfrac{\sqrt{1-x^2}}{2} \;\wedge\; -\tfrac{\sqrt{1-x^2-4y^2}}{3} \leq z \leq \tfrac{\sqrt{1-x^2-4y^2}}{3}\right\}.$$

(c) Wegen $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \leq 3$ ergibt sich nach Auflösen der Beträge als Normalbereich

$$R \;=\; \left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (-3 \leq x \leq 0 \;\wedge -x - 3 \leq y \leq x + 3) \vee (0 \leq x \leq 3 \;\wedge\; x - 3 \leq y \leq 3 - x)\right\}.$$

(d) Da sich die beiden Funktionen $y = 0$ und $y = 2(x - x^2) = 2x(1-x)$ bei $x = 0$ und $x = 1$ schneiden, erhalten wir demzufolge den Normalbereich

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 0 \le x \le 1 \ \wedge \ 0 \le y \le 2x(1-x) \ \wedge \ 0 \le z \le \tfrac{x+2y}{4} \right\} .$$

Demnach folgt für das Volumen nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} V(K) &= \int \mathbf{1}_K^{\mathbb{R}^3}(x,y,z)\, d\lambda_3(x,y,z) = \int_0^1 \left(\int_0^{2x(1-x)} \left(\int_0^{\frac{x+2y}{4}} 1\, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2x(1-x)} \frac{x+2y}{4}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{xy+y^2}{4} \right]_{y=0}^{y=2x(1-x)} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{2x^2(1-x) + (2x(1-x))^2}{4} \right) dx = \int_0^1 \frac{(1-x)\left(2x^2 + 4x^2 - 4x^3\right)}{4}\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x)\left(3x^2 - 2x^3\right)}{2}\, dx = \int_0^1 \frac{3x^2 - 5x^3 + 2x^4}{2}\, dx = \frac{1 - \frac{5}{4} + \frac{2}{5}}{2} = \frac{3}{40} \end{aligned}$$

und für das gesuchte Integral ebenso nach dem Satz von Fubini und wie zuvor

$$\begin{aligned} I &= \int x \mathbf{1}_K^{\mathbb{R}^3}(x,y,z)\, d\lambda_3(x,y,z) = \int_0^1 x \left(\int_0^{2x(1-x)} \left(\int_0^{\frac{x+2y}{4}} 1\, dz \right) dy \right) dx \\ &= \ldots = \int_0^1 x \cdot \frac{3x^2 - 5x^3 + 2x^4}{2}\, dx = \int_0^1 \frac{3x^3 - 5x^4 + 2x^5}{2}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{4}x^4 - x^5 + \frac{1}{3}x^6 \right]_0^1 = \frac{9 - 12 + 4}{24} = \frac{1}{24} = 0.041\overline{7} . \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 14.7: Bestimmen Sie mittels des Satzes von Fubini das Integral der Funktion

(a) $f(x,y) := x^2 + 2xy$ über dem in $\mathbb{R}^2$ liegende Dreieck mit Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,2)$;

(b) $f(x,y,z) := xy$ über die Menge $K := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ 0 \le x \le 2 , \ |y| \le x , \ 0 \le z \le 8 - x^2 - y^2 \right\}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 14.7:

(a) Die Funktion f ist über dem vorgegebenen Dreieck offensichtlich Lebesgue-integrierbar. Der Wert kann nach dem Satz von Fubini über die iterierten Integrale berechnet werden. Dazu beachte man, dass das Dreieck als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ explizit die Darstellung

$$D := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 2 - 2x \right\}$$

hat, so dass wir insgesamt

$$\begin{aligned} \int_D f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} x^2 + 2xy\, dy \right) dx &= \int_0^1 \left[x^2 y + xy^2 \right]_{y=0}^{y=2-2x} dy \\ &= \int_0^1 \left(2x^2 - 2x^3 + 4x + 4x^3 - 8x^2 \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(2x^3 - 6x^2 + 4x \right) dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 2x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

erhalten.

(b) Die Lebesgue-Integrierbarkeit der Funktion f über K folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass f eine stetige beschränkte Funktion ist und K offensichtlich endliches Maß besitzt. Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} \int_K f(x,y,z)\, d\lambda_3(x,y,z) &= \int_0^2 \int_{-x}^x \int_0^{8-x^2-y^2} xy\, dz\, dy\, dz = \int_0^2 \int_{-x}^x xyz \Big|_{z=0}^{z=8-x^2-y^2} dy\, dx \\ &= \int_0^2 \int_{-x}^x 8xy - x^3 y - xy^3\, dy\, dx = \int_0^2 \left[4xy^2 - \frac{1}{2}x^3 y^2 - \frac{1}{4}xy^4 \right]_{y=-x}^{y=x} dx = 0. \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 14.8: Gegeben sei die Menge $U = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; 0<x,\ 0<y<\frac{2\pi}{x},\ 0<z\right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $f:U\to\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=(z\cos(xy),z\sin(xy),x)$ lokal ein C^∞-Diffeomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

(c) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrabbildung $g:f(U)\to U$ von f im Punkt $\left(-1,0,\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2},2\pi,1\right)$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 14.8:

(a) Offenbar ist $f\in C^\infty(U,\mathbb{R}^3)$ mit

$$df(x,y,z) = \begin{pmatrix} -yz\sin(xy) & -xz\sin(xy) & \cos(xy)\\ yz\cos(xy) & xz\cos(xy) & \sin(xy)\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

und $\det(df(x,y,z)) = (-1)^{3+1}\cdot 1\cdot\left(-xz(\sin(xy))^2 - xz(\cos(xy))^2\right) = -xz$. Wegen $x,z>0$ verschwindet auf U diese Determinante nie, so dass die Jacobi-Matrix an jedem Punkt $(x,y,z)\in U$ regulär ist. Nach dem Satz über lokale Umkehrbarkeit (Satz 2.57) folgt, dass f lokal ein C^∞-Diffeomorphismus ist.

(b) Angenommen, es gäbe zwei Punkte $(x,y,z),(a,b,c)\in U$ mit $f(x,y,z)=f(a,b,c)$. Wir zeigen nun, dass dann $(x,y,z)=(a,b,c)$ gilt. Aus $f(x,y,z)=f(a,b,c)$ erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} z\cos(xy) &= c\cos(ab)\\ z\sin(xy) &= c\sin(ab)\\ x &= a\end{aligned}$$

und daher sofort $x=a>0$. Desweiteren wissen wir, dass $z>0$ und $c>0$ gilt.

- Angenommen es gelte $z\sin(xy)=0$. Dann muss wegen $z>0$ einerseits $\sin(xy)=0$ und wegen $0<x$, $0<y<\frac{2\pi}{x}$ und daher $0<xy<2\pi$ auch $xy=\pi$, also $y=\frac{\pi}{x}$ gelten. Weiterhin folgt dann auch $c\sin(ab)=0$ und mit analoger Argumentation sowie $x=a$ auch $b=\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{x}=y$. Da der Kosinus an den Nullstellen des Sinus nicht verschwindet, ergibt sich aus der ersten Bedingung wegen $\cos(xy)=\cos(ab)$ schließlich auch $c=z$, also insgesamt $(x,y,z)=(a,b,c)$, wie behauptet.
- Angenommen es gelte $z\cos(xy)=0$. Dann muss wegen $z>0$ einerseits $\cos(xy)=0$ und wegen $0<x$, $0<y<\frac{2\pi}{x}$ und daher $0<xy<2\pi$ entweder $xy=\frac{\pi}{2}$, also $y=\frac{\pi}{2x}$, oder $xy=\frac{3\pi}{2}$, also $y=\frac{3\pi}{2x}$ gelten. Weiterhin folgt dann auch $c\cos(ab)=0$ und mit analoger Argumentation, dass entweder $ab=\frac{\pi}{2}$, also $b=\frac{\pi}{2a}$, oder $ab=\frac{3\pi}{2}$, also $b=\frac{3\pi}{2a}$ gelten muss. Aus der zweiten Bedingung folgt darüber hinaus, dass wegen $c>0,z>0$ die Vorzeichen von $\sin(xy)$ und $\sin(ab)$ gleich sein müssen, so dass nun unter Verwendung von $a=x$ entweder

  $$xy=\frac{\pi}{2}=ab \quad\overset{a=x}{\Longleftrightarrow}\quad y=b=\frac{\pi}{2a}$$

  oder

  $$xy=\frac{3\pi}{2}=ab \quad\overset{a=x}{\Longleftrightarrow}\quad y=b=\frac{3\pi}{2a}$$

  und somit in jedem Fall $y=b$ folgt. Da der Sinus an den Nullstellen des Kosinus nicht verschwindet, ergibt sich aus der zweiten Bedingung wegen $\sin(xy)=\sin(ab)$ schließlich auch $c=z$, also insgesamt $(x,y,z)=(a,b,c)$, wie behauptet.
- Angenommen, es gelte $z\cos(xy) = c\cos(ab)\neq 0$ und $z\sin(xy) = c\sin(ab)\neq 0$, dann folgt auch $\tan(xy)=\tan(ab)$, also $xy=ab+k\pi$ aufgrund der π-Periodizität des Tangens. Aus der zweiten Bedingung folgt darüber hinaus, dass wegen $c>0,z>0$ die Vorzeichen von $\sin(xy)=\sin(ab+k\pi)$ und $\sin(ab)$ gleich sein müssen, also k wegen $\sin(x)=-\sin(x+\pi)$ gerade sein muss. Wegen $ab\in]0,2\pi[$ und $xy\in]0,2\pi[$ muss nun $k=0$, also $ab=xy$ und wegen $a=x>0$ auch $b=y$ gelten. Aus der ersten oder zweiten Bedingung ergibt sich wegen $\sin(xy)=\sin(ab)$ bzw. $\cos(xy)=\cos(ab)$ schließlich auch $c=z$, also insgesamt $(x,y,z)=(a,b,c)$, wie behauptet.

(c) Nach Lemma 2.55 ergibt sich

$$dg\left(-1,0,\frac{1}{2}\right) = \left(df\left(\frac{1}{2},2\pi,1\right)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ -2\pi & -\frac{1}{2} & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -4\pi\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$
