

Aufgabe 14.1: (Uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit, Lemma von Fatou) (3+2 P)

- (a) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{\cos(x)}{x} \mathbf{1}_{] \pi, \infty[}(x)$, einerseits auf (uneigentliche) Riemann-Integrierbarkeit und andererseits auf Lebesgue-Integrierbarkeit.
- (b) Gegeben sei der Lebesguesche Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{R}), \lambda_1)$. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$, definiert durch $f_k := -\mathbf{1}_{[k, k+1]}$, eine Folge λ_1 -integrierbarer Funktionen ist, aber dennoch

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \, d\mu > \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \, d\mu \quad (1.1)$$

gilt. Wieso ist dies kein Widerspruch zum **Lemma von Fatou** ?

Aufgabe 14.2: (Wiederholung Diffeomorphismus) (3+1+1 P)

- (a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminanten der folgenden Abbildungen
- (i) $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch $(a, b) \mapsto (x, y)$ mit $x = 10a + 2b$, $y = 5a - 7b$.
 - (ii) $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch $(u, v) \mapsto (x, y)$ mit $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$, $y = 3uv$.
 - (iii) $\Upsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch $(\eta, \xi) \mapsto (x, y)$ mit $x = \cosh(\eta) \cos(\xi)$, $y = \sinh(\eta) \sin(\xi)$
(elliptische Koordinaten)
- (b) Geben Sie an, in welchen Punkten die Abbildungen aus (a) lokal C^∞ -invertierbar sind ?
- (c) Ist einer der Abbildungen aus (a) ein (globaler) Diffeomorphismus ?

Aufgabe 14.3: (Anwendung des Transformationssatzes) (2+3 P)

- (a) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade (d.h., es gelte $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$) Lebesgue-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass das Lebesgue-Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda_n$ verschwindet.
- (b) Für $p = (2, 2)$ und $q = (1, 2)$ sei die Menge $E = \{sp + tq \mid s, t \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2$ gegeben. Skizzieren Sie E und bestimmen Sie das Integral $\int_E xy \, d\lambda_2(x, y)$ mit Hilfe der Transformation $(x, y) = \Phi(u, v)$, gegeben durch

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} u - v \\ 2u - v \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Aufgabe 14.4: (Anwendung des Transformationssatzes auf Zylinderkoordinaten) (3+2 P)

- (a) Sei $(\mathbb{R}^3, \mathcal{M}(\mathbb{R}^3), \lambda_3)$ der Lebesguesche Maßraum. Zeigen Sie die Lebesgue-Messbarkeit und bestimmen Sie das Maß der Menge

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \ y \geq 0, \ -6 \leq z \leq 0 \right\}. \quad (4.1)$$

- (b) Bestimmen Sie das Lebesgue-Integral $\int_E f \, d\lambda_3$ mit E aus (a) und mit der Funktion

$$f(x, y, z) := \frac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{x^2 + y^2}\right). \quad (4.2)$$