Aufgabe 15.1:

Lösen Sie mit Hilfe der Fourier-Transformation das (verallgemeinerte) Anfangswertproblem

$$\left.\begin{array}{lcll} u_{tt}(t,x) & = & c^2 u_{xx}(t,x) & (t,x) \in\ ]0,\infty[\ \times\ ]-\infty,\infty[\quad (c>0) \\ u(0,x) & = & 0 & \\ u_t(0,x) & = & \delta(x) & \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

Hinweis: Verwenden Sie $\mathcal{F}[\delta(x)](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ und Zusatzaufgabe 14.2 (b).

Aufgabe 15.2:

Lösen Sie mit Hilfe der Fourier-Transformation das (verallgemeinerte) Anfangswertproblem

$$\left.\begin{array}{lcll} u_{tt}(t,x) + u_{xx}(t,x) & = & 0 & (t,x) \in\ ]0,\infty[\ \times\ ]-\infty,\infty[\\ u(0,x) & = & \delta(x) & \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

Hinweis: Verwenden Sie $\mathcal{F}[\delta(x)](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ und vergleichen Sie mit $\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-a|x|}](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2a}{a^2+s^2}$.

Aufgabe 15.3:

Leiten Sie die Formel von d'Alembert für das Anfangswertproblem der Wellengleichung

$$u_{tt}(t,x) \;=\; u_{xx}(t,x)\ , \qquad u(0,x) \;=\; f(x)\ , \qquad u_t(0,x) \;=\; g(x) \tag{3.1}$$

mittels der Methode der Fourier-Transformation her. Dabei seien f, g und (vgl. Kausalitätsprinzip) ebenso $u(t,\cdot)$ mindestens aus $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ angenommen.

Hinweis: Verwenden Sie die Eulersche Formel und $\mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}as}F(s)\right](x) \;=\; f(x+a)$ sowie den Faltungssatz (vgl. Aufgabe 14.1 (b)) und Zusatzaufgabe 14.2 (b).

Aufgabe 15.4:

(a) Zeigen Sie für $f, g \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$:

$$g(x) = \overline{f(-x)} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{F}[g(x)](\omega) \;=\; \overline{\mathcal{F}[f(x)](\omega)}.$$

(b) Zeigen Sie analog zum Faltungssatz

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left[(F*G)(k)\right](x) \;=\; \mathcal{F}^{-1}\left[F(r)\right](x)\cdot\mathcal{F}^{-1}\left[G(s)\right](x)\ . \tag{4.1}$$

Alle Übungsaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/`