Aufgabensammlung zur Vorlesung Analysis II

Dr. Katja Ihsberner[1] und Prof. Dr. habil. Jochen Merker[2]

zuletzt aktualisiert am 19. August 2016

[1]Universität Rostock, Institut für Mathematik, Ulmenstr. 69, Haus 3
[2]HTWK Leipzig, Fakultät Informatik, Mathematik u. Naturwissenschaften, Gustav-Freytag-Str. 42A

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Konvergenz und Stetigkeit in normierten und metrischen Räumen

1.1 Normierte Vektorräume

. . . . (Eigenschaften/Beispiele von Normen)

A 1.1.1 Zeigen Sie, dass die Nichtnegativität einer Norm bzw. einer Metrik nicht explizit gefordert werden muss, sondern sich aus den übrigen Eigenschaften einer Norm bzw. Metrik ergibt.

A 1.1.2 Geben Sie alle Normen auf $\mathbb{R}$ an und beweisen Sie, dass Sie wirklich alle gefunden haben.

A 1.1.3 Wie lassen sich die Begriffe der Konvergenz von Folgen in bzw. Stetigkeit von Funktionen zwischen metrischen Räumen aus den aus der Analysis I bekannten Begriffen übertragen ?

A 1.1.4 Gegeben seien $w := (1, 4)$, $x := (-3, 2)$ und $y = (-2, 2, 1)$, $z = (0, 1, 0)$.

(a) Bestimmen Sie die Vektoren $w + 2x$ und $3z - y$ rechnerisch und zeichnerisch.

(b) Geben Sie jeweils die Normen $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ und $\|.\|_\infty$ für die Vektoren $w, x \in \mathbb{R}^2$ und $y, z \in \mathbb{R}^3$ an.

A 1.1.5 Sei $(Y, \|.\|_Y)$ ein normierter Raum, X ein Vektorraum und $A\colon X \to Y$ eine injektive lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass durch $\|x\|_X := \|Ax\|_Y$ eine Norm auf X definiert wird.

A 1.1.6 Beweisen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $p \in]1, \infty[$ die sogenannte **Minkowski-Ungleichung**

$$\|x + y\|_p \;\le\; \|x\|_p \;+\; \|y\|_p \;.$$

Hinweis: Beweisen Sie zunächst $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k y_k| \;\le\; \|x\|_p \|y\|_q$ für q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Alternative Formulierung:

Für $p \in \,]1, \infty[$ sei $\|.\|_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

(a) Sei $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Zeigen Sie: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n\colon \; \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k y_k| \;\le\; \|x\|_p \|y\|_q$. **(Hölder-Ungleichung)**

(b) Zeigen Sie: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n\colon \|x + y\|_p \;\le\; \|x\|_p \;+\; \|y\|_p$. **(Minkowski-Ungleichung)**

A 1.1.7 Entscheiden Sie, ob folgende Abbildungen Normen auf dem $\mathbb{R}^3$ sind: (1+1+3 P)

(a) $N_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left|\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right|$,

(b) $N_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$,

(c) $N_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2}$.

.... (Beispiele unendlich-dimensionaler normierter Räume)

A 1.1.8 Zeigen Sie, dass $\|f\|_\infty := \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ tatsächlich eine Norm auf $C([a, b])$ ist.

A 1.1.9 Zeigen Sie: $\|f\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle_{C([a,b])}}$ ist eine Norm, es gilt

$$\forall f \in C([a, b])\colon \|f\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle_{C([a,b])}} \ \leq\ \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_\infty \ . \tag{1.1}$$

A 1.1.10 (a) Zeigen Sie, dass durch $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\, dx$ eine Norm auf dem Vektorraum $C([0, 1])$ der stetigen Funktionen $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert wird.

(b) Zeigen Sie, dass es ein $c > 0$ gibt, für dass $\quad \forall f \in C([0, 1])\colon \|f\|_1 \ \leq\ c \cdot \|f\|_\infty$.

A 1.1.11 Zeigen Sie: Die Menge c_0 der reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die für $n \to \infty$ gegen 0 konvergieren, bildet mit der komponentenweisen Addition und skalaren Multiplikation einen linearen Raum, welcher mit

$$\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \tag{1.2}$$

für $x = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu einem normierten Raum wird.

.... (Skalarprodukt/Euklidische Vektorräume)

A 1.1.12 Wir betrachten das Skalarprodukt, definiert durch (4+2 P)

$$\langle f, g\rangle \ :=\ \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) dx \ , \tag{1.3}$$

auf der Menge $\prod_2 := \left\{a_2x^2 + a_1x + a_0 \ \middle|\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}$ der Polynome von höchstens zweitem Grad.

(a) Zeigen Sie, dass die Polynome $P_0(x) = x + 1$, $P_1(x) = 3x - 1$ und $P_2(x) = 3x^2 - 1$ bezüglich (1.3) ein Orthogonalsystem bilden (d.h., das Skalarprodukt von P_i und P_j ist Null für $i \neq j$, $i, j = 0, 1, 2$) und berechnen Sie $\|P_i\| := \sqrt{\langle P_i, P_i\rangle}, i = 0, 1, 2$.

(b) Stellen Sie das Polynom $P(x) = x^2 + 4x + 1$ als Linearkombination von $P_i, i = 0, 1, 2$ dar. Die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 sind mit Hilfe des Skalarproduktes zu bestimmen.

A 1.1.13 Auf der Menge $\prod_2 := \left\{a_2x^2 + a_1x + a_0 \ \middle|\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}$ der Polynome von höchstens zweitem Grad betrachten wir das Skalarprodukt $\langle f, g\rangle \ :=\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) dx$. Berechnen Sie $\langle p_k, p_j\rangle$, $j, k = 0, 1, 2$, für $p_0(x) = x^2 - 1$, $p_1(x) = x$ und $p_2(x) = 2$.

Konstruieren Sie ein ONS aus $\{p_j \mid j = 0, 1, 2\}$ mit dem Verfahren von Schmidt.

A 1.1.14 Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x, y \in X$ gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung** $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.

(b) Für alle $x, y \in X$ gilt die gilt die **Parallelogramm-Gleichung**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \tag{1.4}$$

(c) Für alle $x, y \in X$ gilt die gilt die **Polarisationsgleichung**

$$\langle x, y\rangle \ = \ \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \ . \tag{1.5}$$

Erweiterte Formulierung (Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ möglich) für (b):

Für alle $x, y \in X$ eines Euklidischen $\mathbb{K}$-Vektorraumes $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt die sogenannte **Parallelogrammgleichung** $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.

Alternative erweiterte Formulierung für (c):

In einem Euklidischen $\mathbb{R}$-Vektorraum $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt die sogenannte **Polarisationsgleichung**

$$\forall x, y \in X\colon \langle x, y\rangle \ = \ \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \ . \tag{1.6}$$

................................(Vorbereitung Fourier-Theorie – siehe auch Abschnitt 3.7)

A 1.1.15 Beweisen Sie, dass mit der vom Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle \ := \ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)\,dx$$

induzierten (Halb-)Norm $\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ die sogenannte **Parallelogrammgleichung**

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right) \tag{1.7}$$

für beliebige 2π-periodische Riemann-integrierbare Funktionen f, g gilt.

Alternative Formulierung:

Beweisen Sie, dass mit der von der (hermiteschen) Sesquilinearform (3.14) induzierten Halbnorm $\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ die sogenannte **Parallelogrammgleichung**

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right) \tag{1.8}$$

für beliebige über $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbare 2π-periodische Funktionen f, g gilt.

A 1.1.16 Zeigen Sie, dass für ungerades $N \in \mathbb{N}$ das Skalarprodukt $\langle u, v\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{u}v\,dx$ der Funktionen $u(x) := \sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ und $v(x) := \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ verschwindet. (s.a. 3.7)

. . . . (Weitere Skalarprodukte auf dem $\mathbb{R}^n$)

A 1.1.17 Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ sei $\langle x, y\rangle := x^T y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ das übliche Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär, so definiert $\langle x, y\rangle_A := \langle Ax, Ay\rangle$ ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ auf dem $\mathbb{R}^n$.

A 1.1.18 Es bezeichne $\langle x, y\rangle_{\text{Euklid}} := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ das EUKLIDische Skalarprodukt von Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\langle x, y\rangle_A := \langle Ax, Ay\rangle_{Euklid}$ ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

(b) Skizzieren Sie die Einheitskugeln im $\mathbb{R}^2$ bzgl. der vom Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ induzierten Norm für die durch $A_1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$ gegebenen Matrizen A.

(c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von A eine Konstante $C > 0$, mit der $\|x\|_A \leq C\|x\|_{Euklid}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

A 1.1.19 Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $\|(x, y)\| := \sqrt{x^2 - xy + y^2}$, ist eine Norm.

(b) Für Normen auf dem $\mathbb{R}^2$ gilt i.A. nicht die Ungleichung $\|(x, y)\| \;\leq\; \|(|x|, |y|)\|$.

. . . . (Produkträume)

A 1.1.20 Beweisen Sie, dass das Produkt $X\times Y$ zweier Euklidischer Vektorräume $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle (x, y), (x', y')\rangle_{X\times Y} \;:=\; \langle x, x'\rangle_X + \langle y, y'\rangle_Y$$

selbst wieder ein Euklidischer Vektorraum ist. Wie lautet die zugehörige Norm auf $X \times Y$?

A 1.1.21 Zeigen Sie, dass das Produkt $X \times Y$ normierter Vektorräume $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ mit der Produktmetrik (siehe Skript) wieder ein normierter Vektorraum ist (und nicht nur ein metrischer Raum).

A 1.1.22 Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Norm $\|(x, y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$ auf dem Produkt $X\times Y$ zweier Euklidischer Vektorräume im Allgemeinen **nicht** die Parallelogrammgleichung erfüllt.

. . . . (Teilmengen normierter Räume/Einheitskugeln)

A 1.1.23 Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$:

$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < y^2 + 1\}$, $\qquad C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1\,,\ -2 < y < 4\}$

$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 < 1\}$, $\qquad D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 < x+y < 3\,,\ -1 < x-y < 1\}$

Bonus: Welche von Ihnen sind Einheitskugeln einer Norm auf $\mathbb{R}^2$, welche nicht?

A 1.1.24 Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \left\{ x = (\xi_k)_{n\in\mathbb{N}} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \right\}$ der lineare Raum aller reellen Zahlenfolgen.

- **Beispiel F.1**: Der Folgenraum $(\ell^p, \|.\|_p)$ ist ein Banach-Raum, wobei $p \in [1, \infty[$ sowie

$$\ell^p \ := \ \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \ < \ \infty \right\} \quad \text{und} \quad \|x\|_p \ := \ \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} . \tag{1.9}$$

- **Beispiel F.2**: Der Folgenraum $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ ist ein Banach-Raum, wobei

$$\ell^\infty \ := \ \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k| < \infty \right\} \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty \ := \ \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k| \ . \tag{1.10}$$

(a) Finden Sie Beispielfolgen $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit
(i) $x \in \ell^2 \setminus \ell^1$ (ii) $x \in \ell^\infty \setminus \ell^1$ (iii) $x \notin \ell^\infty$.

(b) Ist in $\left(\ell^1, \|.\|_1\right)$ die Teilmenge $M := \{x \in \ell^1 \mid \forall k \in \mathbb{N} \colon |x(k)| \leq 1\}$ abgeschlossen ?

(c) Zeigen Sie: (i) $p \in [1, \infty[\ \Longrightarrow \ \ell^p \subset \ell^\infty$. (ii) $p, q \in [1, \infty[\ \wedge \ p < q \ \Longrightarrow \ \ell^p \subset \ell^q$.

A 1.1.25 Sei $k \in \mathbb{N}$. Überprüfen Sie in $\left(C([a,b], \mathbb{R}), \|.\|_\infty\right)$ die Abgeschlossenheit der Teilmenge

$$\mathbb{P}_k := \left\{ x \in C([a,b], \mathbb{R}) \mid x(t) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i t^i \text{ mit } \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ und } \alpha_k \neq 0 \right\} .$$

1.2 Metrische Räume

. . . . (Topologie/Hausdorff-Räume/diskrete Metrik)

A 1.2.1 Geben Sie alle Topologien von $M = \{a, b\}$ an.

A 1.2.2 Bestimmen Sie alle Topologien einer drei-elementigen Menge $M = \{a, b, c\}$.
Bonusfrage: Welche von den angegebenen Topologien sind Hausdorffsch ?

A 1.2.3 Auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ betrachten wir das Mengensystem $\mathcal{T}$, welches neben $\emptyset$ und $\mathbb{N}$ genau die Teilmengen $U \subset \mathbb{N}$ enthält, deren Komplement $\mathbb{N} \setminus U$ endlich ist. Zeigen Sie:

(a) $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ ist ein topologischer Raum.

(b) Das Hausdorffsche Trennungsaxiom gilt nicht in $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$.

A 1.2.4 Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum mit $|M| = n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:
Die Topologie ist genau dann von einer Metrik induziert, wenn $\mathcal{T} = \mathcal{P}(M)$ gilt.

A 1.2.5 Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $d_{\text{disk}} \colon M \times M \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto \begin{cases} 0 & u = v \ , \\ 1 & u \neq v \ . \end{cases}$

(a) Zeigen Sie, dass d_{disk} eine Metrik auf M ist. Diese wird **diskrete Metrik** genannt.

(b) Wie sieht die von der diskreten Metrik erzeugte (sog. **diskrete**) Topologie $T_{d_{\text{disk}}}$ aus ?

(c) Für welche M stimmt die diskrete Topologie $T_{d_{\text{disk}}}$ mit der indiskreten Topologie $\{\emptyset, M\}$ überein?

A 1.2.6 Zeigen Sie, dass jeder metrische Raum (M, d) Hausdorffsch ist.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie, dass jeder metrische Raum (M, d) das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt.

A 1.2.7 Finden Sie einen topologischen Raum, der nicht Hausdorffsch ist.

Konkretisierung (1):

Zeigen Sie, dass $\{\emptyset, \{u\}, X\}$ eine nicht-Hausdorffsche Topologie auf $X := \{u, v, w\}$ definiert.

Konkretisierung (2):

Zeigen Sie: Der topologische Raum $(X, \mathcal{T}) = (\{1, 2\}, \{\emptyset, \{1\}, X\})$ ist nicht Hausdorffsch.

. . . . (Äquivalente Metriken)

A 1.2.8 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f \colon [0, \infty[\to [0, \infty[$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion mit $f(0) = 0$, die zusätzlich $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ für alle $x, y \geq 0$ erfüllt.

(a) Überprüfen Sie, ob dann auch $\tilde{d}(x, y) := f(d(x, y))$ eine Metrik auf X ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Topologien von (X, d) und $(X, \tilde{d})$ identisch sind.

A 1.2.9 (a) Zeigen Sie, dass durch
$$d(x, y) := \arctan(|x - y|)$$
eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird.

(b) Ist die Metrik d aus (a) äquivalent zur Euklidischen Metrik $d_{\text{Euklid}}(x,y) := |x-y|$?

A 1.2.10 Zeigen Sie, dass für einen metrischen Raum (X,d) durch $d'(x,y) := \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ eine zu d äquivalente Metrik d' mit $d'(x,y) < 1$ für alle $x,y \in X$ definiert wird.

A 1.2.11 Sei (X,d) ein metrischer Raum und T_d die zugehörige Topologie. Zeigen Sie, dass durch

$$\delta := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

ebenfalls eine Metrik auf X mit $T_\delta = T_d$ definiert ist. Ist der in $(\mathbb{R},d)$, $d(x,y) := |x-y|$, gültige Satz von Heine-Borel, dass eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist, auch in $(\mathbb{R},\delta)$ gültig ?

....(Beispiele für metrische Räume)

A 1.2.12 Zeigen Sie, dass $d(x,y) := |x-y|$ auf $M := \mathbb{R}$ eine Metrik definiert.

A 1.2.13 Wie sieht $B_1^{d_*}\big((0,0)\big)$ in $\mathbb{R}^2$ bzgl. der Metrik $d_*(x,y) := \|x-y\|_*$ für $* \in \{1,2,\infty\}$ aus ?

Alternative Formulierung:

Wie sieht die offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt bzgl. folgender Metriken aus?

(a) $d(x,y) = \max(|x_1-y_1|, |x_2-y_2|)$

(b) $d(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$

(c) $d(x,y) = (|x_1-y_1|^2 + |x_2-y_2|^2)^{\frac{1}{2}}$

A 1.2.14 Sei $M := \{0,1\}^n$ die Menge der binären Codes der Länge $n \in \mathbb{N}$. Der Hamming-Abstand $d(a,b)$ zweier binärer Codes $a,b \in M$ sei definiert als die Anzahl der Indizes, in denen sich beide Codes unterscheiden. Beweisen Sie, dass (M,d) ein metrischer Raum ist.

A 1.2.15 Ist die Abbildung $d(x,y) = |x^3 - y^3|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$?

A 1.2.16 Zeigen Sie: Die Einheitskreislinie $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ wird mit der Abbildung $d\colon S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}$, definiert durch $d(z,w) = |\varphi|$, falls $\frac{z}{w} = \mathrm{e}^{\varphi \mathrm{i}}$ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$, zu einem metrischen Raum (S^1, d).

A 1.2.17 Sei $\mathbb{M} := \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^n,\ \mathbf{y} = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die durch (6 P)

(a) $d_{\mathbb{M}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_i - y_i|$ (Manhattan-**Metrik** oder **Taxi-Metrik**)

(b) $d_{\mathbb{M}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \displaystyle\max_{k=1,\dots,n} |x_i - y_i|$ (**Maximum-Metrik**)

(c) $d_{\mathbb{M}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \begin{cases} 0, & \forall i = 1,\dots,n \ : \ x_i = y_i, \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$ (**Diskrete Metrik**)

für beliebige $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ definierte Abbildung $d_{\mathbb{M}}\colon \mathbb{M} \times \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ eine Metrik auf $\mathbb{M}$ ist

A 1.2.18 Seien (M,d_1) und (M,d_2) metrische Räume. Beweisen oder widerlegen Sie: Mit $d_3 := d_1 + d_2$ und $d_4 := \max(d_1,d_2)$ sind auch (M,d_3) und (M,d_4) metrische Räume.

A 1.2.19 (a) Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume. Durch welche der folgenden drei Abbildungen $d_1, d_2, d_3\colon (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$ wird eine Metrik auf $X \times Y$ definiert:

(i) $d_1\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$,

(ii) $d_2\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := d_X(x_1, x_2) \cdot d_Y(y_1, y_2)$,

(iii) $d_3\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2) + d_X(x_1, x_2) \cdot d_Y(y_1, y_2)$?

(b) Gegeben sei ein metrischer Raum (X, d_X). Zeigen Sie, dass die Abbildung $\delta\colon X \times X \to \mathbb{R}$, definiert durch $\delta(x, y) := \min\{d_X(x, y), 1\}$, ebenfalls eine Metrik auf X ist.

A 1.2.20 Bezeichne $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\big\}$ die Menge aller (nicht notwendigerweise konvergenten) reellen Zahlenfolgen. Zeigen Sie, dass für beliebige $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Zahl

$$d\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|}$$

endlich ist und auf diese Weise eine Metrik d auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiert wird.

A 1.2.21 **(Metrik der französischen Eisenbahn)** (5 P)
Sei $M := \mathbb{R}^2$, $0 \in \mathbb{R}^2$ das Nullelement von $\mathbb{R}^2$ und bezeichne d die Euklidische Metrik auf dem $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die durch

$$d'(x, y) := \begin{cases} d(x, y), & \exists \alpha \in \mathbb{R} \ : \ x = \alpha y, \\ d(x, 0) + d(0, y), & \text{sonst,} \end{cases} \tag{1.11}$$

definierte Abbildung $d'\colon M \times M \to \mathbb{R}$ eine Metrik ist.

Tipp: Diese Metrik wird „Metrik der französischen Eisenbahn" oder „Moskau-Metrik" genannt.

A 1.2.22 Welche der Abbildungen $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ definieren eine Metrik auf X?

(a) $d(x, y) := |S(x) - S(y)|$ mit $S(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ auf $X = \mathbb{R}$

(b) $d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 + \dfrac{1}{x + y} & \text{für } x \neq y \end{cases}$ auf $X = \mathbb{N}$

.... (Beispiele für nicht metrische Räume)

A 1.2.23 Ist $d(f, g) := |f(0) - g(0)|$ eine Metrik auf $C([0, 1], \mathbb{R}) = \{f\colon [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig }\}$?

A 1.2.24 Welche der Abbildungen $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ definieren eine Metrik auf X?

(a) $d(x, y) := \mathrm{e}^{x-y} - 1$ auf $X = \mathbb{R}$ (b) $d(x, y) := \sin(\|x - y\|_2)$ auf $X = \mathbb{R}^2$

.... (Eigenschaften von Teilmengen metrischer Räumen)

A 1.2.25 Sei (M, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie, dass eine Menge $A \subset M$ genau dann Komplement einer offenen Menge ist, wenn sie all ihre Berührpunkte enthält.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie: Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raums (X, d) ist genau dann abgeschlossen, wenn sie das Komplement $A = X \setminus U$ einer offenen Menge in X ist.

A 1.2.26 Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Zeigen Sie: $\forall x \in X\colon \{x\}$ ist abgeschlossen.

A 1.2.27 Sei A eine Teilmenge eines metrischen Raumes (M, d). Zeigen Sie:

(a) Das Innere A^o ist genau die Vereinigung aller in A enthaltenen offenen Teilmengen.

(b) Der Abschluss $\bar{A}$ ist genau der Durchschnitt aller A enthaltenden abgeschlossenen Teilmengen.

A 1.2.28 Zeigen Sie, dass in einem metrischen Raum X die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist.

Gilt dies auch für abzählbar viele Mengen?

A 1.2.29 Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ und geben Sie jeweils das Innere sowie den Abschluss an:

(i) $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 \geq 1\}$ (ii) $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 1 < y \leq 2\}$

(iii) $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < y^2\}$ (iv) $E := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, \sin\left(\frac{1}{x}\right) = y\right\}$ (v) $\mathbb{Q}^2$

A 1.2.30 Welche der folgenden Mengen sind offen oder abgeschlossen im euklidischen $\mathbb{R}^2$?

(a) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon x_1 + x_2 < 1, x_1 > 0, x_2 > 0\}$, (1 P)

(b) $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon 2x_1^2 + 3x_2^2 \geq 1\}$, (1 P)

(c) $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon 0 < x_1 < 1, 1 < x_2 \leq 2\}$. (1 P)

Alternative Formulierung (inklusive Abwandlung in (b)):

Welche der folgenden Mengen sind offen bzw. abgeschlossen in $\left(\mathbb{R}, d_{\|\cdot\|_2}\right)$?

(a) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 1, x > 0, y > 0\}$

(b) $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x)^2 + (3y)^2 \geq 4\}$

(c) $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 1 < y \leq 2\}$ **(vgl. auch (ii) in Aufgabe -1)**

A 1.2.31 Ist B abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d), so gilt: $d(x, B) = 0 \iff x \in B$.

A 1.2.32 Welche der folgenden Mengen im Euklidischen $\mathbb{R}^2$ sind offen/abgeschlossen ?
Welchen Rand haben die Mengen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $A := \{(x_1, x_2) \mid 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4\}$ (ii) $B := \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}$

(c) $C := [0, 1] \times \left\{x \in [0, 1] \;\middle|\; x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 3^{-n}, x_n \in \{0, 2\}\right\}$

Erweiterte alternative Formulierung von (b):

Ist die Menge $D := \left\{\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{\ell}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \mid k, \ell, m, n \in \mathbb{N}\right\}$ in $(\mathbb{R}^4, \|.\|_1)$ abgeschlossen?

Bestimmen Sie sowohl das Innere als auch den Rand von D.

A 1.2.33 Sei (X,d) metrisch und $Y,Z \subset X$. Zeigen Sie: (i) Y offen $\iff \partial Y \cap Y = \emptyset \iff Y = Y^o$

(ii) Y abgeschlossen $\iff \partial Y \subset Y \iff Y = \overline{Y}$ (iii) $\overline{Y \cup Z} = \overline{Y} \cup \overline{Z}$ (iv) $\overline{Y \cap Z} \subset \overline{Y} \cap \overline{Z}$

Alternative Formulierung für (i) und (ii):

Beweisen Sie:
Eine Teilmenge Y eines metrischen Raumes X ist

(a) genau dann offen, wenn $Y \cap \partial Y = \emptyset$, und

(b) genau dann abgeschlossen, wenn $\partial Y \subset Y$,

wobei $\partial Y = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0\ \exists y \in B_\varepsilon(x) \cap Y, \exists z \in B_\varepsilon(x) \setminus Y\}$.

A 1.2.34 Sei (X,d) ein metrischer Raum und $Y,Z \subset X$.

(a) Zeigen Sie $X \setminus Y^o \;=\; \overline{X \setminus Y}$ und $X \setminus \overline{Y} \;=\; (X \setminus Y)^o$

(b) Finden Sie ein Beispiel, so dass $\overline{Y \cap Z} \neq \overline{Y} \cap \overline{Z}$ gilt.

. . . . (ohne Lsg)

A 1.2.35 Gegeben sei die Menge

$$M \;:=\; \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}\colon x = \frac{1}{n} \right\} \;\cup\; \{0\}\ . \tag{1.12}$$

(a) Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist (etwa indem sie zeigen, dass $\mathbb{R} \setminus M$ offen ist).

(b) Zeigen Sie, dass M nicht offen ist.

A 1.2.36 Wie sieht die Kugel um $B_1(0)$ nach der französischen Eisenbahnmetrik aus?

A 1.2.37 Geben Sie eine translationsinvariante, homogene Metrik auf einem Vektorraum an.

1.3 Konvergenz in normierten Vektorräumen

....(Äquivalenz von Normen)

A 1.3.1 Sei X ein Vektorraum. Beweisen Sie, dass Äquivalenz von Normen eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf X ist.

A 1.3.2 Seien $\|.\|$ und $\|.\|'$ zwei Normen auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum X. Zeigen Sie: Eine Menge $B \subset X$ ist genau dann bezüglich $\|.\|$ beschränkt, wenn sie es auch bezüglich $\|.\|'$ ist.

A 1.3.3 Finden Sie die optimalen Konstanten $c, C > 0$ mit $c\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

A 1.3.4 Finden Sie die optimalen Konstanten $c, C > 0$ mit $c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

A 1.3.5 Finden Sie die optimalen Konstanten $c, C > 0$ mit $c\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

A 1.3.6 Geben Sie die optimalen Konstanten $c, C > 0$ an, mit denen die Ungleichungen

$$c\|x\|_1 \;\leq\; \|x\|_2 \;\leq\; C\|x\|_1 \qquad \text{bzw.} \qquad c\|x\|_\infty \;\leq\; \|x\|_2 \;\leq\; C\|x\|_\infty$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gelten.

A 1.3.7 (a) Zeigen Sie: Zu jeder festen Konstanten $C \in]0, \infty[$ können wir eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ finden, so dass für jede Folge x_k im $\mathbb{R}^n$ mit $\|x_k\|_{\text{Euklid}} \leq \frac{1}{k}$ schon $\|x_k\| \leq \frac{1}{Ck}$ gilt.

(b) Kann es eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ geben mit der Eigenschaft, dass für jede Folge x_k im $\mathbb{R}^n$ mit $\|x_k\|_{\text{Euklid}} \leq \frac{1}{k}$ schon $\|x_k\| \leq \frac{1}{k^2}$ gilt ?

(c) Bestimmen Sie die kleinste Konstante $C < \infty$ mit $\|x\|_{\text{Euklid}} \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^4 \right)^{\frac{1}{4}}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

A 1.3.8 Sei $[a, b]$ ein reelles Intervall, $n \in \mathbb{N}$ und $C^n([a, b])$ der Raum der (mindestens) n-mal stetig differenzierbaren Funktionen. Wie üblich seien $f^{(0)} := f$ und $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned} \|f\|_{(1)} &:= \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_\infty \quad , \\ \|f\|_{(2)} &:= \max\left(\|f\|_\infty, \|f^{(n)}\|_\infty\right) \end{aligned}$$

auf $C^n([a, b])$ zwei Normen definiert sind und dass $\|.\|_{(1)} \sim \|.\|_{(2)}$ gilt.

....(Negativbeispiel)

A 1.3.9 Konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch $x_n(t) := t^n - t^{3n}$, in $(C[0, 1], \|.\|_\infty)$?

. . . . (Konvergenz in endlichdimensionalen normierten Räumen)

A 1.3.10 Konvergieren die angegebenen Folgen im (normierten) $\mathbb{R}^n$? Bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

(a) $x^{(k)} = \left(\frac{1}{k}\sin(k), \frac{1}{k+1}\cos(k+1)\right) \in \mathbb{R}^2$

(b) $y^{(k)} = \left(\left(\frac{4}{7k}-1\right)^k, \frac{k^2-13}{k^2+3}, \cos(5\pi)\right) \in \mathbb{R}^3$ **Tipp:** $\forall x \in \mathbb{R} : \lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^k = \mathrm{e}^x$.

(c) $z^{(k)} = \left(\ln\left(\frac{3k}{k+1}\right), \mathrm{e}^{-k}\cdot s^{567k}\right) \in \mathbb{R}^2$ mit $s > 0$

A 1.3.11 Welche der angegebenen Folgen konvergieren im (normierten) $\mathbb{R}^n$?

(a) $x^{(k)} = \left(\frac{1}{k}\cos(k), \frac{1}{k+1}\sin(k)\right) \in \mathbb{R}^2$ (b) $y^{(k)} = \left(\left(\frac{4}{3k}-1\right)^k, \frac{k^2+7}{k^2-1}, \cos(2k)\right) \in \mathbb{R}^3$

(c) $z^{(k)} = \left(\ln\left(\frac{4k}{k+1}\right), \mathrm{e}^{-k}\cdot s^{123k}\right) \in \mathbb{R}^2$ mit $s > 0$

Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. **Tipp**: $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^k = \mathrm{e}^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Alternative & platzsparende Formulierung:

Welche der angegebenen Folgen von Punkten im $\mathbb{R}^n$ konvergieren?

(a) $x^{(k)} = \left(\frac{1}{k}\cos(k), \frac{1}{1+k}\sin(k)\right) \in \mathbb{R}^2$ (ii) $y^{(k)} = \left(\left(\frac{4}{3k}-1\right)^k, \frac{k^2+7}{k^2-1}, \cos(2k)\right) \in \mathbb{R}^3$

(c) $z^{(k)} = \left(\ln\left(\frac{4k}{k+1}\right), \mathrm{e}^{-k}\cdot s^{123k}\right) \in \mathbb{R}^2$ mit $s > 0$

Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Hinweis: $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^k = \mathrm{e}^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

A 1.3.12 Zeigen Sie, dass die für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ durch $\|x\| := 2|x_1| + \frac{1}{2}|x_2|$ definierte Abbildung $\|.\|\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^2$ ist und skizzieren Sie die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R}^2\colon \|x\| \le 1\}\ .$$

Sei nun $\|.\|_2$ die Euklidische Norm und $\|.\|$ die obige Norm. Bestimmen Sie Konstanten $a, b > 0$, so dass $\forall x \in \mathbb{R}^2\colon a\,\|x\|_2 \le \|x\| \le b\,\|x\|_2$ gilt. Sind $\|.\|_2$ und $\|.\|$ äquivalent ?

. . . . (ohne Lsg)

A 1.3.13 Sei $\|.\|_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Euklidische Norm, $\|.\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine weitere Norm. Zeigen Sie:

(a) $\|x\| \le C\|x\|_2$ mit $C = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\|e_k\|^2}$. Dabei bezeichne e_k den k-ten Einheitsvektor.

Hinweis: CSU.

(b) $\inf\{\|x\| \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\} > 0$ (iii) $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_2$ sind äquivalent.

(d) Alle Normen auf einem endlich dimensionalen reellen Vektorraum sind äquivalent.

1.4 Konvergenz in metrischen Räumen

A 1.4.1 Zeigen Sie, dass konstante Folgen in jedem beliebigen metrischen Raum (M, d) konvergieren.

A 1.4.2 Welche Folgen konvergieren in (M, d_{disk}) mit $d_{\text{disk}}(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{bei } x \neq y, \\ 0 & \text{bei } x = y \end{cases}$?

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie, dass im mit der diskreten Metrik, definiert durch

$$d_{\text{diskret}}(x, y) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}, \tag{1.13}$$

versehenen $\mathbb{R}^n$ eine Folge x_k genau dann gegen x konvergiert, wenn sie ab einem gewissen Index K konstant gleich x ist, d.h. wenn $\exists K \in \mathbb{N} \,:\, \forall k \geq K \,:\, x_k = x$.

A 1.4.3 Geben Sie eine Folge an, die in $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ konvergiert, jedoch in $(\mathbb{R}, d_{\text{diskret}})$ nicht einmal eine Cauchy-Folge ist.

A 1.4.4 Auf dem Quader $M := [0,1] \times [0,1]$ in $\mathbb{R}^2$ seien durch $\delta_1(x, y) \;=\; \|x - y\|_2$ bzw.

$$\delta_2(x, y) \;=\; \begin{cases} 2, & x_2 \neq y_2, \\ |x_1 - y_1|, & x_2 = y_2, \end{cases} \qquad \left(\text{mit} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

Metriken $\delta_1, \delta_2 \colon M \times M \to \mathbb{R}$ definiert (muss nicht gezeigt werden). Konvergiert die Folge $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right) := \left(\frac{n-1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3^n}\right)$ in den metrischen Räumen (M, δ_1) bzw. (M, δ_2) ?

A 1.4.5 Der $\mathbb{R}^2$ sei versehen mit der Metrik

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \begin{cases} 1 & x_2 \neq y_2 \\ \frac{1}{\pi} \arctan |x_1 - y_1| & x_2 = y_2 \end{cases}$$

(ohne Beweis). Existiert $\lim\limits_{n \to \infty} z_n$ für

(a) $z_n = (0, \frac{1}{n})$ bzw.

(b) $z_n = (\frac{1}{n}, 1)$?

Wenn der Grenzwert existiert, dann berechnen Sie ihn. Beschreiben Sie außerdem mit Worten, wann eine Folge $(z_n) = ((x_n, y_n)) \subset \mathbb{R}^2$ einen Grenzwert (bzgl. d) besitzt.

.... (Konvergenz in Funktionenräumen)

A 1.4.6 Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall sowie $X = C([a, b], \mathbb{R})$ und $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ für $f, g \in X$ definiert durch $d(f, g) := \sup\limits_{x \in [a,b]} \{|f(x) - g(x)|\}$.

(a) Zeigen Sie, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

(b) Konvergiert die Folge durch $f_n(x) := \dfrac{\sin(x)}{n}$ definierte Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (X, d)?
Was sagt dies über die punktweise und gleichmäßige Konvergenz der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

A 1.4.7 Sei $X = C_b([0,\infty[,\mathbb{R})$ der Vektorraum aller stetigen und beschränkten Funktionen auf $[0,\infty[$ und die Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ durch $d(f,g) := \sup\limits_{x\in[0,\infty[} \mathrm{e}^{-x}|f(x)-g(x)|$ definiert.

(a) Zeigen Sie, dass (X,d) ein metrischer Raum ist.

(b) Konvergiert die durch $f_k : [0,\infty[\to \mathbb{R}$,
$$f_k(x) := \begin{cases} 0 & \text{bei } 0 \le x < k, \\ x-k & \text{bei } k \le x < k+1, \\ 1 & \text{bei } x \ge k+1, \end{cases}$$
definierte Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum (X,d)?

(c) Konvergiert $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im Raum $(X,\tilde{d})$ mit der Metrik $\tilde{d}(f,g) := \sup\limits_{x\in[0,\infty[} |f(x)-g(x)|$?

(d) Was lässt sich über die punktweise und gleichmäßige Konvergenz von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sagen ?

(e) Sind d und $\tilde{d}$ äquivalente Metriken auf X ?

A 1.4.8 Sei $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Zeigen Sie: (1+2+1 P)

(a) Mit $d(f,g) := \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$ wird $C([a,b],\mathbb{R})$ zu einem metrischen Raum.

(b) Gegeben sei der metrische Raum $\big(C([a,b],\mathbb{R}),\tilde{d}\big)$ mit der durch $\tilde{d}(f,g) := \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$ definierten Metrik. Jede offene Menge in $\big(C([a,b],\mathbb{R}),d\big)$ ist offen in $\big(C([a,b],\mathbb{R}),\tilde{d}\big)$.

(c) Zu jedem $\varepsilon > 0$ und $C > 0$ existiert eine Funktion $g \in C([a,b],\mathbb{R})$ mit $\tilde{d}(0,g) > C$ und $d(0,g) < \varepsilon$. Insbesondere gilt die Umkehrung von (b) nicht.

Bemerkung: Der lineare Raum $C([a,b],\mathbb{R}) := \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig } \}$ wird sowohl mit der Abbildung $\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx$ als auch mit $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ zu einem normierten Raum.

1.5 Vollständigkeit

. . . . (Beispiele für vollständige metrische Räume)

A 1.5.1 Sei $M \neq \emptyset$ mit der diskreten Metrik d_{disk} aus (1.13) versehen. Ist (M, d_{disk}) vollständig ?

A 1.5.2 Auf der Menge $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sei $g\colon \bar{\mathbb{R}} \to [-1,1]$ definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} x & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \operatorname{sign}(x) - \frac{1}{4x} & |x| \geq \frac{1}{2} \\ \pm 1 & x = \pm\infty \end{cases} . \tag{1.14}$$

Alternative Formulierung:

Sei $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Wir definieren $d\colon \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ durch $d(x,y) := |g(x) - g(y)|$ mit

$$g\colon \bar{\mathbb{R}} \to [-1,1],\ x \mapsto \begin{cases} x & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \operatorname{sign}(x) - \frac{1}{4x} & |x| \geq \frac{1}{2} \\ 1 & x = \infty \\ -1 & x = -\infty. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\bar{\mathbb{R}}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\bar{\mathbb{R}}$ mit $d_{\bar{\mathbb{R}}}\colon \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, $d_{\bar{\mathbb{R}}}(x,y) := |g(x) - g(y)|$, zu einem vollständigen metrischen Raum wird.

(c) Konvergieren in $(\bar{\mathbb{R}}, d_{\bar{\mathbb{R}}})$ die Folgen

$$\text{(i) } x_n := \mathrm{e}^n \qquad \text{(ii) } y_n := \mathrm{e}^{-n} \qquad \text{(iii) } z_n := \begin{cases} n^2 & n \text{ gerade} \\ \infty & n \text{ ungerade} \end{cases} ?$$

Alternative Formulierung:

Existiert für die angegebenen Folgen (x_n) der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ in $(\bar{\mathbb{R}}, d_{\bar{\mathbb{R}}})$?

$$x_n = \mathrm{e}^n\ ; \qquad x_n = \mathrm{e}^{-n}\ ; \qquad x_n = \begin{cases} n^2 & n \text{ gerade;} \\ \infty & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

(d) Geben Sie ein Beispiel einer Folge an, die in $\bar{\mathbb{R}}$ nicht konvergiert.

Für ein ähnliches Beispiel s. „Vollständigkeit und abgeschlossene Unterräume“

. . . . (Beispiele für unvollständige metrische Räume)

A 1.5.3 Ist $(X, \|.\|)$ vollständig und $U \neq \emptyset, X$ offen in $(X, \|.\|)$, so ist $(U, d_{\|.\|})$ nicht vollständig.[1]

A 1.5.4 Auf der Menge $\mathbb{N}$ sei durch $d_{\mathbb{N}}(m,n) := \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$ eine Abbildung $d\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, d_{\mathbb{N}})$ ein metrischer Raum ist.

(b) Zeigen Sie, dass durch $a_n := n$ eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{N}, d_{\mathbb{N}})$ gegeben ist.

[1] Sie dürfen hierbei schon verwenden, dass $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen in $(X, \|.\|)$ sind, d.h., insbesondere sind $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen von X, deren Rand leer ist.

(c) Ist der Raum $(\mathbb{N}, d_{\mathbb{N}})$ ein vollständiger metrischer Raum ?

A 1.5.5 (a) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ injektiv. Zeigen Sie, dass durch $d_f(x,y) := \|f(x) - f(y)\|_{\text{Euklid}}$ eine Metrik d_f auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

(b) Betrachte auf dem $\mathbb{R}^n$ die zu $f(x) := (\mathrm{e}^{x_1}, \ldots, \mathrm{e}^{x_n})$ gehörige Metrik d_f.
Ist die Folge $x^{(k)} := \left(\ln\left(\frac{1}{k}\right), \ldots, \ln\left(\frac{1}{k}\right)\right)$ eine Cauchy-Folge bezüglich d_f? Konvergiert $x^{(k)}$ in $(\mathbb{R}^n, d_f)$?

.... (Beispiele für unvollständige Funktionenräume)

A 1.5.6 Für $k \geq 1$ seien die Funktionen $f_k\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ durch $f_k(x) := |x|^{1+\frac{1}{k}}$ definiert. Zeigen Sie, dass jedes f_k Element des Raumes $C^1([-1,1])$, die Folge (f_k) gleichmäßig konvergiert, ihr Grenzwert jedoch nicht mehr in $C^1([-1,1])$, sondern nur noch in $C([-1,1])$ liegt (d.h. insbesondere, dass $\left(C^1([-1,1]), \|\,.\,\|_\infty\right)$ kein Banach-Raum ist).

A 1.5.7 Zeigen Sie, dass die Folge von Funktionen

$$f_n := \begin{cases} -1 & x \leq -\frac{1}{n} \\ nx & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

in $C([-1,1])$ für jedes $1 \leq p < \infty$ eine Cauchy-Folge bzgl. der Norm $\|f\|_p := \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$ ist, aber nicht gegen ein $f \in C([-1,1])$ konvergiert. Ist der Raum $(C([-1,1]), \|\cdot\|_p)$ vollständig?

Spezialfall $p = 1$ und allgemeiner Definitionsbereich

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und $C([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig }\}$. Ist $C([a,b],\mathbb{R})$ vollständig mit

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|dx \;?$$

.... (Beispiele für unendlichdimensionale Banach-Räume)

A 1.5.8 Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und $C([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig }\}$. Ist $C([a,b],\mathbb{R})$ vollständig mit

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \;?$$

A 1.5.9 Zeigen Sie: Der Vektorraum $C^1([0,1],\mathbb{R})$ der einmal stetig differenzierbaren Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ist vollständig bezüglich der Norm

$$\|\ f\ \| \quad := \quad \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x)| + |f'(x)|\} \;.$$

Leichte Variation im Definitionsbereich:

Seien $a < b$ reell. Zeigen Sie die Vollständigkeit des Raumes $\left(C^1([a,b]), \|\,.\,\|\right)$ mit

$$\|\ f\ \| \quad := \quad \sup_{x\in[a,b]} \{|f(x)| + |f'(x)|\} \;.$$

A 1.5.10 Zeigen Sie, dass für $1 < p < \infty$ der Vektorraum ℓ^p der reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, für die $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ konvergiert, versehen mit der Norm $\|a\|_p := \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, vollständig ist.

Alternative Formulierung:

Für $1 < p < \infty$ sei ℓ^p der Vektorraum der reellen Zahlenfolgen $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ konvergiert. Zeigen Sie die Vollständigkeit des normierten Raumes $(\ell_p, \|.\|_p)$ mit der Norm

$$\|a\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

....(Äquivalenz von Metriken)

A 1.5.11 (a) Zeigen Sie, dass für jedes $1 \leq p < \infty$ die Menge l^p aller reellen Zahlenfolgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, für die $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ konvergiert, einen linearen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bildet und

$$\|\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

darauf jeweils eine Norm definiert.

(b) Zeigen Sie, dass $l^p \subset l^q$ für $p < q$ gilt. Sind die Normen $\|\cdot\|_q$ und $\|\cdot\|_p$ auf l^p äquivalent?

A 1.5.12 Gegeben sei $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \begin{cases} |x_1 - x_2| & \text{für } y_1 = y_2 , \\ |x_1 - x_2| + 1 & \text{für } y_1 \neq y_2 . \end{cases}$ (1+2+2 P)

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, d)$ ein metrischer Raum ist.

(b) Ist die Metrik d auf $\mathbb{R}^2$ äquivalent zur Metrik $d_{\text{Euklid}}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|_{\text{Euklid}}$?

(c) Ist $(\mathbb{R}^2, d)$ ein vollständiger metrischer Raum ?

A 1.5.13 Beweisen Sie das Schachtelungsprinzip: Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen mit $A_{n+1} \subset A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$. Dann gibt es genau einen Punkt, der allen A_n gemeinsam ist.

A 1.5.14 Zeigen Sie: Jede abgeschlossene Teilmenge $M \subset X$ eines vollständigen metrischen Raumes (X, d) ist mit der eingeschränkten Metrik $d|_{M\times M}$ wieder vollständig. Insbesondere ist jeder abgeschlossene lineare Unterraum eines Banach-Raumes erneut selbst (versehen mit der ursprünglichen Norm) ein Banach-Raum.

Formulierungsalternativen der Umkehrung:

- Beweisen Sie:
  Ist eine Teilmenge $M \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) mit der eingeschränkten Metrik $d|_{M\times M}$ vollständig, so ist M abgeschlossen.
- Ist $A \subset M$ mit der eingeschränkten Metrik $d_A := d\big|_{A\times A}$ ein vollständiger metrischer Raum (A, d_A), dann ist A abgeschlossen in (M, d).
- Ist (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ derart, dass (M, d_M) $(d_M := d\big|_{M\times M})$ zu einem vollständigen metrischen Raum wird, dann ist M eine abgeschlossene Teilmenge von X.

Zusammenfassende Formulierung:

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subseteq X$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$(A, d_{|A}) \text{ ist vollständig} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ ist abgeschlossen in } (X, d).$$

Konkretes Beispiel dazu:

A 1.5.15 Auf der Menge $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sei $f\colon \bar{\mathbb{R}} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ definiert durch

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} \arctan(x) & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\pi}{2} & x = \infty, \\ -\frac{\pi}{2} & x = -\infty. \end{cases} \tag{1.15}$$

Zeigen Sie:

(a) Mit $\bar{d}(x, y) = |f(x) - f(y)|$ erhalten wir den metrischen Raum $\left(\bar{\mathbb{R}}, \bar{d}\right)$.
(Ist dieser Raum vollständig?)

(b) Welche Ihnen bekannten Konvergenzbegriffe umfasst die Konvergenz in $\left(\bar{\mathbb{R}}, \bar{d}\right)$?

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ mit der Einschränkung $\bar{d}_{|\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ unvollständig ist.
(Ist $\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{R}}$ abgeschlossen in $\left(\bar{\mathbb{R}}, \bar{d}\right)$?)

A 1.5.16 Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie: (1+2+2 P)

(a) Für beliebige $u, v, x, y \in M$ gilt die **Vierecksungleichung** $|d(u, v) - d(x, y)| \leq d(u, x) + d(v, y)$.

(b) Mit $\operatorname{diam}(A) := \sup\limits_{x,y\in A} d(x, y)$ für beliebiges $\emptyset \neq A \subset M$ gilt $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$.

A 1.5.17 Jeder metrische Raum kann isometrisch in einem vollständigen metrischen Raum eingebettet werden. Genauer gesagt existiert zu jedem metrischen Raum (X, d) ein vollständiger metrischer Raum $(\tilde{X}, \tilde{d})$ und eine Abbildung $\iota\colon X \to \tilde{X}$, so dass $\iota(X)$ dicht in $\tilde{X}$ liegt, d.h. $\overline{\iota(X)} = \tilde{X}$, und $\tilde{d}(\iota(x), \iota(y)) = d(x, y)$ gilt.

Alternative Formulierung:

Beweisen Sie:
Die Vervollständigung eines metrischen Raumes ist bis auf Isometrie eindeutig bestimmt.

A 1.5.18 **(Vervollständigung metrischer Räume)**
Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Wie gelangen wir zu einem vollständigen Raum ? Auf der Menge $\mathbb{M} := \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy-Folge in } X \text{ bezüglich } d\}$ betrachten wir die Äquivalenzrelation

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \lim_{n\to\infty} d\left(x_n, y_n\right) = 0.$$

Bezüglich dieser Äquivalenzrelation bilden wir den Faktor-Raum $\hat{X} := (M/\sim, d_{\hat{X}})$ mit der Metrik

$$d_{\hat{X}}\left(\mathbf{x}, \mathbf{y}\right) := \lim_{n\to\infty} d\left(x_n, y_n\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ wirklich eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{M}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $d_{\hat{X}}$ auf $\hat{X}$ wirklich eine Metrik (d.h. insbesondere wohldefiniert) ist.

(c) Zeigen Sie, dass der Raum $\hat{X}$ einer Vervollständigung von X entspricht.

1.6 Der Banachsche Fixpunktsatz

....(Ausloten von Grenzen)

A 1.6.1 Geben Sie eine stetige Selbstabbildung auf einer (geeignet zu wählenden) kompakten nichtleeren Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ an, welche keinen Fixpunkt besitzt.

A 1.6.2 Finden Sie ein Beispiel dafür, dass nicht jede stetige Selbstabbildung einen Fixpunkt besitzt.

A 1.6.3 Finden Sie ein Beispiel dafür, dass die Bedingung $x \neq y \implies |f(x) - f(y)| < |x - y|$ nicht ausreicht, um die Existenz eines Fixpunktes zu garantieren.

A 1.6.4 Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass die Aussage von Satz 1.32 i.A. nicht gilt,

(a) falls die Kontraktionsbedingung ersatzlos weggelassen wird.

(b) falls die Kontraktionsbedingung durch $x \neq y \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ ersetzt wird.

A 1.6.5 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \ln(1 + \mathrm{e}^x)$ definiert.

(a) Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ gilt $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, aber f besitzt keinen Fixpunkt. Warum widerspricht dies nicht dem Banachschen Fixpunktsatz ?

(b) Konvergiert die durch $x_{k+1} = f(x_k)$ zu einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ definierte Folge?

....(Beispiele in einer Dimension)

A 1.6.6 Betrachten Sie die Iteration $x_{n+1} := f(x_n)$ mit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := ax + b$.

(a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist f eine Selbstabbildung des Intervalls $[0, 1]$?

(b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist f eine Kontraktion ?

(c) Was besagt der Banachsche Fixpunktsatz für f auf $[0, 1]$?

A 1.6.7 Welches ist das maximale (beschränkte) Intervall, auf dem $f(x) := x^2$ eine Selbstabbildung ist? Für welche $b > 0$ ist $f\colon [0, b] \to [0, b]$ eine Kontraktion?

A 1.6.8 Sei f stetig differenzierbar und x^* ein Fixpunkt von f. Zeigen Sie mittels Fixpunktsatz, dass es bei $|f'(x^*)| < 1$ eine Umgebung U von x^* gibt, für welche die Iterationsfolge $x_{n+1} = f(x_n)$ zu jedem Startwert $x_0 \in U$ gegen x^* konvergiert. Solche Fixpunkte x^* nennt man stabil.

A 1.6.9 Ein einfaches Modell für die zeitliche Entwicklung einer Population (z.B. von Insekten) in einem Ökosystem ist die Iteration $x_{n+1} = f(x_n)$ mit der logistischen Abbildung $f(x) = a(1 - x)x$, wobei $a \geq 0$ ein fester Parameter ist.

(a) Zeigen Sie, dass das Modell für Parameter $a \in [0, 4]$ insoweit Sinn macht, als dass mit $x_n \in [0, 1]$ auch $x_{n+1} \in [0, 1]$ gilt.

(b) Führen Sie drei Schritte der Iteration bei $a = \frac{1}{2}, 1, 2$ und dem Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$ durch.

(c) Für welche $0 < a < a_0$ garantiert der Banachsche Fixpunktsatz die Existenz genau eines Fixpunktes in $[0, 1]$?

(d) Zeigen Sie, dass es für $a_0 < a$ genau einen weiteren Fixpunkt $0 \neq x_a \in [0, 1]$ gibt, und dass dieser Fixpunkt für $a < 3$ stabil ist.

(e) Bestimmen Sie die Fixpunkte $\notin \{0, x_a\}$ der Doppel-Iteration $x_{n+1} = f(f(x_n))$. Was bedeuten diese für die Einfach-Iteration?

.... (Newtonverfahren und seine Anwendung)

A 1.6.10 Das Newton-Verfahren kann man als Iterationsverfahren zur Auffindung eines Fixpunktes von $F(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ interpretieren. Welche Bedingung an f für die Konvergenz des Newton-Verfahrens liefert die Anwendung des Fixpunktsatzes auf F?

A 1.6.11 (Newton-Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung einer Nullstelle) (5 P)

Sei f auf dem Intervall $D = [a - r, a + r]$ zweimal stetig differenzierbar mit $f' \neq 0$. Weiterhin gelte $\max\limits_{x \in D} \frac{|f(x)f''(x)|}{(f'(x))^2} =: L < 1$ und $|\frac{f(a)}{f'(a)}| \leq (1 - L)r$. Zeigen Sie, dass dann f in D genau eine Nullstelle besitzt und dass das sogenannte Newton-Verfahren über die Iteration

$$x_{k+1} \; = \; x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

zu jedem beliebigen Startwert $x_0 \in D$ diese Nullstelle von $f(x)$ liefert.

Tipp: Verwenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz (Satz 1.32), um zu zeigen, dass die Abbildung $F(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ einen eindeutigen Fixpunkt x^* in D besitzt. Bestimmen Sie $f(x^*)$.

A 1.6.12 Sei f auf dem Intervall $D = [x_0 - r, x_0 + r]$ zweimal stetig differenzierbar mit $f' \neq 0$. Es gelte $\max\limits_{x \in D} \frac{|f(x)f''(x)|}{f'(x)^2} =: L < 1$ und $|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}| \leq (1 - L)r$. Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Abbildung $F(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ einen eindeutigen Fixpunkt x^* in D besitzt. Bestimmen Sie $f(x^*)$.

A 1.6.13 Führen Sie für die folgenden Funktionen und Startwerte drei Schritte des Newton-Verfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle durch, und prüfen Sie jeweils, ob das Newton-Verfahren wirklich gegen eine Nullstelle konvergiert:

(a) $4x^2 - 1$ für $x_0 = 1$ sowie $x_0 = 0$ (b) $x^5 - x - \dfrac{1}{5}$ für $x_0 = 0$ sowie $x_0 = 1$

A 1.6.14 Führen Sie die Newton-Iteration für $f(x) = x^2 - 1$ sowie die Startwerte $-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 2$ durch und begründen Sie, ob das Newton-Verfahren gegebenenfalls konvergiert.

A 1.6.15 Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$2x - \sin(x) \; = \; \frac{1}{2}$$

genau eine Lösung im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ besitzt. Bestimmen Sie sie auf 4 Stellen genau.

A 1.6.16 Es seien die Abbildungen $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, f(x) = \frac{1}{x+2}$ und $g\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ gegeben. Zeigen Sie, dass es jeweils einen Fixpunkt gibt und geben Sie den Fixpunkt von f explizit an. Ermitteln Sie auch die ersten 20 Glieder der Iterationsfolge $x_n := f(x_{n-1})$ zu den Startwerten $x_0 = 0$ und $x_0 = 1$ (im Falle der Konvergenz nennt man diese Folge einen **Kettenbruch**). **Hinweis**: Betrachten Sie für g das Intervall $[0.1, -\ln(0.1)]$.

A 1.6.17 Beweisen Sie Satz 1.32 und Korollar 1.33.

- **Satz 1.32**: Ist $f\colon M \to M$ eine Kontraktion auf einem vollständigen metrischen Raum (M,d), d.h., existiert ein $L<1$, so dass für alle $x,y\in M$ die Ungleichung $d(f(x),f(y)) \le L\cdot d(x,y)$ erfüllt wird, dann gibt es genau einen Punkt $x^*\in M$ mit $f(x^*)=x^*$, welcher **Fixpunkt** von f genannt wird. Darüber hinaus konvergiert zu jedem Startwert $x_0\in M$ jeweils die rekursiv durch $x_{k+1}=f(x_k)$ definierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ in (M,d) gegen den Fixpunkt x^* von f.
- **Korollar 1.33**: Ist $D\subset\mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge in $(\mathbb{R}^n,\|.\|)$ und $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ eine kontrahierende Selbstabbildung von D, d.h., es gilt $f(D)\subset D$ und es gibt ein $L<1$ mit $\|f(x)-f(y)\|\le L\|x-y\|$ für alle $x,y\in D$, so existiert ein eindeutiger Fixpunkt $x^*\in D$ von f.

....(Weitere Beispiele)

A 1.6.18 Zeigen Sie: Auf dem Euklidischen $\mathbb{R}^2$ besitzt die durch $f\,(x,y) \;:=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(x+y)^2 \\ \frac{1}{4}\sin(x)+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ definierte Abbildung $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ im Quadrat $[0,1]^2$ genau einen Fixpunkt.

A 1.6.19 (a) Sei $b\in\mathbb{R}^2$ gegeben und $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x):=Ax+b$ mit

$$\text{(i)}\qquad A:=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\,, \qquad\qquad \text{(ii)}\qquad A:=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\,.$$

Zeigen Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass die Iterationsfolge $x_n:=f(x_{n-1})$ für beliebiges $x_0\in\mathbb{R}^2$ gegen einen eindeutig bestimmten Fixpunkt in $\mathbb{R}^2$ konvergiert.

(b) Bestimmen Sie den Fixpunkt aus (a) in Abhängigkeit von A und b.

A 1.6.20 Gegeben seien die Matrix $A:=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$ und der Vektor $b:=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$. (2+3 P)

(a) Zeigen Sie: Für alle $x\in\mathbb{R}^2$ ist die Ungleichung $\|Ax\|_2 \;\le\; 2\|x\|_2$ erfüllt.

(b) Zeigen Sie unter Verwendung von **Korollar 1.33**, dass die durch $f(x):=\frac{1}{4}(Ax+b)$ auf der Teilmenge $D:=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2+x_2^2\le 1\}$ der Euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_2)$ definierte Abbildung $f\colon D\to\mathbb{R}$ einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.

A 1.6.21 Sei $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r>0$ und $\varphi\in\,]-\pi,\pi[$ und $f\colon\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-\to\mathbb{C}$ diejenige Abbildung mit $z\mapsto\log(r)+i\varphi$. Zeigen Sie: Die Abbildung f besitzt einen eindeutigen Fixpunkt in

$$D:=\left\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\;\middle|\;1.2\le r\le 1.59,\;1.2\le\varphi\le 1.5\right\}\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz und numerische Hilfsmittel.

1.7 Stetigkeit

Homöomorphismen

Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit

Grenzwerte von Abbildungen

. . . . (Teilmengen metrischer Räume)

A 1.7.1 Welche der folgenden Mengen im Euklidischen $\mathbb{R}^2$ sind offen/abgeschlossen?

(a) $A := \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right) \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N} \right\}$ (b) $B := \left\{ (x_1, x_2) \;\middle|\; 1 < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 4 \right\}$

A 1.7.2 Wir betrachten den metrischen Raum $(\mathbb{R}^2, d_{\|\cdot\|_2})$. Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen

(a) $A_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^3 = 0\}$ (b) $A_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > 4 - y^2\}$

(c) $A_3 := A_1 \cup A_2$ (d) $A_4 := A_1 \cap A_2$ (e) $A_5 := A_4 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 5\}$

und geben Sie an, welche offen, welche abgeschlossen sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

A 1.7.3 Sei (X, d) ein metrischer Raum, und $f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass für jede endliche Familie von Punkten $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\bigcup_{i=1}^{m} \{x \in X |\; f(x) = c_i\}$$

abgeschlossen ist.

Variation/Umformulierung:

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig und $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie die Offenheit von

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \{x \in X \mid f(x) = c_i\} \ . \tag{1.16}$$

A 1.7.4 Der Rand einer offenen Kugel in einem metrischen Raum (X, d) ist abgeschlossen.

A 1.7.5 Der Rand einer offenen Kugel um 0 in $(X, \|.\|)$ ist abgeschlossen.

A 1.7.6 Gegeben sei das Polynom in zwei Variablen

$$p(x, y) \;=\; x^4 + 2y^2 + 2xy + 4x - y \ .$$

Ist die Menge aller (x, y), für die $p(x, y) > 0$ gilt

(i) offen (ii) abgeschlossen (iii) weder abgeschlossen noch offen

Begründen Sie Ihre Wahl. **Tipp:** Es ist nur eine der Aussagen richtig.

. . . . (Pathologische Beispiele)

A 1.7.7 Zeigen Sie, dass die auf $D := \mathbb{R}^2 \setminus (\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\})$ definierte Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x+y) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{y}\right)$, im Nullpunkt $(0,0)$ stetig fortsetzbar ist, obwohl die iterierten Grenzwerte

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} f(x,y)\ , \qquad \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x,y)$$

nicht existieren.

A 1.7.8 Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x,y) \ := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}\ , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Zeigen Sie, dass f partiell (d.h. in jedem Argument) stetig ist, die iterierten Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$, $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ existieren, jedoch f in $(0,0)$ **nicht** stetig ist.

. . . . (Stetigkeit in normierten Räumen)

A 1.7.9 Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass in X die Addition, die Multiplikation mit Skalaren und die Norm stetig sind, d.h., aus $x_n \to x$, $y_n \to y$ und $\alpha_n \to \alpha$ folgt

$$x_n + y_n \to x + y, \qquad \alpha_n x_n \to \alpha x, \qquad \|x_n\| \to \|x\|.$$

A 1.7.10 Zeigen Sie, dass es für eine stetige Funktion $f\colon (\mathbb{R}^n, \|.\|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ mit $|f(a)| < 1$ eine abgeschlossene Umgebung U von a gibt, auf der $\sup\limits_{x\in U} |f(x)| < 1$ gilt.

. . . . (Stetigkeit/ Stetige Fortsetzbarkeit stückweise definierter Funktionen)

A 1.7.11 Sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} f(t, at)$ und $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} f(t, at^2)$ für die Funktion

$$f(x,y) \ := \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\ , & (x,y) \neq (0,0), \\ 0\ , & (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{1.17}$$

Ist die Funktion f in $(0,0)$ stetig? Ist sie in $(0,0)$ stetig abänderbar?

Kurzfassung:

Existieren $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} f(t, at)$ und $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} f(t, at^2)$ für $f(x,y) \ := \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\ , & (x,y) \neq (0,0), \\ 0\ , & (x,y) = (0,0), \end{cases}$
und beliebiges $a \in \mathbb{R}$? Ist die Funktion f in $(0,0)$ stetig oder ggf. stetig abänderbar?

A 1.7.12 Überprüfen Sie die Stetigkeit der Funktion $\qquad f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

A 1.7.13 Ist die durch $f(x,y) := \dfrac{xy}{|x| + |y|}$ bei $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) := 0$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig im Nullpunkt?

A 1.7.14 Ist die durch $g(x,y) := \dfrac{x}{|x|+|y|}$ bei $(x,y) \neq (0,0)$ und $g(0,0) := 0$ definierte Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig im Nullpunkt?

A 1.7.15 Untersuchen Sie die Stetigkeit von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2|y|^3}{x^2 - xy + y^2}, & (x,y) \neq (0,0)\ , \\ 0\ , & (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$

A 1.7.16 Wird durch $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2 - xy + y^2}, & (x,y) \neq (0,0)\ , \\ 0\ , & (x,y) = (0,0)\ , \end{cases}$ eine stetige Funktion definiert ?

A 1.7.17 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit

(a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0\ , & \text{für } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

(b) $$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{y^2+x^4}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0\ , & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

A 1.7.18 Gegeben sei die Abbildung $h\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

(a) Ist die Abbildung h stetig von $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, d_{\|.\|_\infty})$ nach $(\mathbb{R}, d_{|.|})$?

(b) Existiert eine stetige Fortsetzung von h in den Nullpunkt $(0,0)$?

A 1.7.19 Untersuchen Sie die Grenzwerte auf Existenz

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ (ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ (iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

Leichte Variation/Erweiterung von (ii):

Ist die durch
$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0\ , & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
definierte Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig im Nullpunkt?

A 1.7.20 Sind die folgenden Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf dem normierten $\mathbb{R}^2$ stetig ?

$$f(x,y) := \frac{\sin(y)}{|xy|+1}\quad, \quad g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4 - x^2y^2 + y^4} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

A 1.7.21 Ist die Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, definiert durch $h(x,y) := \dfrac{\sin(x^2)}{x^2+y^2}$, beschränkt ?

Kann man h bzgl. der Euklidischen Norm in den Punkt $(0,0)$ stetig fortsetzen ?

A 1.7.22 Untersuchen Sie die Stetigkeit der Funktion $f(x,y) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0 \\ y, & x = 0 \end{cases}.$

Leichte Variation (Vertauschung der Rollen von x und y):

Untersuchen Sie die folgende Funktion auf Stetigkeit

$$g(x,y) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{y} & \text{für } y \neq 0 \\ x & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

A 1.7.23 Sei $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^6 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und jedes $c \in \mathbb{R}$ die Folge $f(x_n, c \cdot x_n)$ konvergiert, d.h. dass der Limes der Funktion existiert, wenn man sich dem Nullpunkt auf einer Geraden nähert.

(b) Finden Sie eine Nullfolge $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$ nicht existiert.

Alternative Formulierung:

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $\quad f(x,y) \;=\; \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^6 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Zeigen Sie, dass für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und jedes $c \in \mathbb{R}$ die Folge $f(x_n, c\cdot x_n)$ konvergiert, d.h. dass im Nullpunkt der Grenzwert der Funktion entlang einer beliebigen Geraden existiert. Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$ für jede beliebige Nullfolge $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Ist f in $(0,0)$ stetig?

A 1.7.24 Untersuchen Sie die Stetigkeit der Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

(a) $f(x,y,z) \;:=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\sin(x)}{|yz|+1} \\ x + y\exp(z) \end{pmatrix}$, $\qquad$ (b) $g(x,y) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Leichte Variation:

Die Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien durch

$$f(x,y,z) \;:=\; \begin{pmatrix} \exp(x)\cdot y + z \\ \dfrac{\sin(y)}{|xz|+1} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g(x,y) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0\,, & (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

gegeben. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Die Abbildung f ist auf ganz $\mathbb{R}^3$ stetig. (b) Die Abbildung g ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.

Alternative Formulierung für (b):

Zeigen Sie, dass die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases}$
nicht stetig ist, indem Sie eine Nullfolge (x_n, y_n) angeben, für die $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) \neq f(0,0)$ ist.

Minimale Abänderung und alternative Formulierung für (b):

Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
zwar stetig auf jeder horizontalen und jeder vertikalen Geraden ist (d.h., die Funktionen $x \mapsto f(x,y)$ sind für festes $y \in \mathbb{R}$ und die Funktionen $y \mapsto f(x,y)$ sind für festes $x \in \mathbb{R}$ stetig), jedoch besitzt f dennoch im Punkt $(0,0)$ eine Unstetigkeit.

A 1.7.25 Untersuchen Sie, ob für die Funktionen $f_k\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $k = 1,2,3$, definiert durch

$$f_1(x,y) := \frac{x^2+y^2}{x^2+(x-y)^2}\,, \qquad f_2(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2}\,, \qquad f_3(x,y) := \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f_k(x,y), \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f_k(x,y) \qquad \text{sowie} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_k(x,y)$$

existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

Bonus: In welchen Punkten sind die Funktionen stetig bzw. stetig fortsetzbar?

. . . . (ohne Lsg)

A 1.7.26 Untersuchen Sie die folgende Funktion auf Stetigkeit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(\mathrm{e}^y - 1)}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

A 1.7.27 Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie mit Hilfe der Vierecksungleichung: Die Abbildung $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ ist stetig, d.h., aus $x_n \to x$, $y_n \to y$ folgt $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

A 1.7.28 Sei (X, d_X) ein metrischer Raum und seien $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion

$$h\colon x \mapsto \begin{cases} \dfrac{(f(x))^2}{\sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}} & , (f(x), g(x)) \neq (0,0) \\ 0 & , (f(x), g(x)) = (0,0) \end{cases}$$

ist stetig von (X, d_X) nach $(\mathbb{R}, d_{|.|})$.

(b) Die Funktion $\quad x \mapsto \max(f(x), g(x)) \quad$ ist stetig von (X, d_X) nach $(\mathbb{R}, d_{|.|})$.

Alternative Formulierung zu (b):

Sei (M, d) ein metrischer Raum und seien $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch durch $h\colon x \mapsto \max(f(x), g(x))$ eine stetige Funktion von (M, d) nach $(\mathbb{R}, d_{|.|})$ gegeben ist.

Alternative & erweiterte Formulierung zu (b):

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} \max(f,g)\colon M \to \mathbb{R} \quad & \text{definiert durch} \quad \max(f,g)(x) := \max(f(x), g(x)) \ , \\ \min(f,g)\colon M \to \mathbb{R} \quad & \text{definiert durch} \quad \min(f,g)(x) := \min(f(x), g(x)) \end{aligned}$$

stetig sind. **Hinweis**: Offenbar ist $\max(f(x), g(x)) = \frac{1}{2}|f(x) - g(x)| + \frac{1}{2}(f(x) + g(x))$.

A 1.7.29 Sei (M, d) ein metrischer Raum und seien $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch durch $h\colon x \mapsto \min(f(x), g(x))$ eine stetige Funktion von (M, d) nach $(\mathbb{R}, d_{|.|})$ gegeben ist.

Alternative Formulierung: Siehe vorige Aufgabe, unter erweiterte Formulierung zu (b)

Leichte Variation:

Zeigen Sie: Für stetige Funktionen $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ auf einem metrischen Raum (X, d) ist auch die Funktion $x \mapsto \min(f(x), 3g(x))$ von X nach $\mathbb{R}$ stetig.

A 1.7.30 Sei G die Menge der (nicht senkrechten) Geraden in der Ebene. Jede Gerade ist eindeutig durch ihre Steigung $m \in \mathbb{R}$ und den Achsenabstand $b \in \mathbb{R}$, das heißt durch das Tupel (m, b), gekennzeichnet. Auf G definiert

$$d((m_1, b_1), (m_2, b_2)) := \begin{cases} 1 & b_1 \neq b_2 \\ \frac{1}{\pi} \arctan |m_1 - m_2| & b_1 = b_2 \end{cases}$$

eine Metrik (ohne Beweis). Welche der folgenden Funktionen $f\colon]0,1[\to G$ sind stetig?

(a) $f(t)$ ist die Gerade, die durch $(0,0)$ und $(1, 1+4t)$ geht.

(b) $f(t)$ ist die Gerade, die durch $(\frac{1}{10}(t^3 + 2t^2 + 3), 1)$ und $(\frac{1}{t}, 1)$ geht.

A 1.7.31 Sei G die Menge der Geraden durch den Nullpunkt im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$, d.h., die Elemente von G haben die Form $\mathbb{R}u$ mit einem (nur bis auf Vielfache bestimmten) Vektor $0 \neq u \in \mathbb{R}^3$. Weiter sei G versehen mit der Metrik

$$d(\mathbb{R}u, \mathbb{R}v) := \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{| < u, v > |}{\|u\| \|v\|}\right) \quad .$$

(a) Konvergiert die Folge $a_n := \mathbb{R}(n^2, 2n^2 + n, 2n^2 + n + 1)$ in G ?

(b) Prüfen Sie, ob die stetige Funktion $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to G$, $f(t) := \mathbb{R}\left(\frac{3}{t}, \frac{1}{t^2}, 2\right)$ stetig nach $t = 0$ fortgesetzt werden kann.

A 1.7.32 Auf der Menge $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sei $g \colon \bar{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ wie in (1.14) definiert.

(a) Kann man die Funktion $f(x) := \frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ zu einer stetigen Funktion $f \colon (\bar{\mathbb{R}}, d_{\bar{\mathbb{R}}}) \to (\bar{\mathbb{R}}, d_{\bar{\mathbb{R}}})$ fortsetzen? Wie ist es mit $|f|$?

Alternative Formulierung:

Kann die Funktion $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \bar{\mathbb{R}}$, definiert durch $f(x) = \frac{1}{x}$, zu einer (bzgl. d) stetigen Funktion $f \colon \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ fortgesetzt werden? Gilt dies auch für $|f|$?

A 1.7.33 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$, $f\colon M \to \mathbb{R}^k$, x_0 ein Häufungspunkt von M und $y \in \mathbb{R}^k$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M \setminus \{x_0\}\ :\ \Big(\|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - y\| < \varepsilon\Big)$.

(b) $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $M \setminus \{x_0\}\ :\ \Big((x_n) \overset{n\to\infty}{\to} x_0 \implies (f(x_n)) \overset{n\to\infty}{\to} y\Big)$.

(c) Stetig in x_0 ist die Funktion $\widetilde{f}\colon M \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}^k$, definiert durch

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{wenn } x \in M \setminus \{x_0\}, \\ y & \text{wenn } x = x_0. \end{cases} \tag{1.18}$$

A 1.7.34 Seien (M, d), (M', d') metrische Räume und $D \subset M$. Seien weiter $f : D \to M'$, x_0 ein Häufungspunkt von D und $y \in M'$. Zeigen Sie die Äquivalenz von

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D \setminus \{x_0\}\ :\ \Big(d(x, x_0) < \delta \implies d'(f(x), y) < \varepsilon\Big)$.

(b) $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $D \setminus \{x_0\}\ :\ \Big((x_n) \overset{d}{\to} x_0 \implies (f(x_n)) \overset{d'}{\to} y\Big)$.

(c) Die Funktion $\widetilde{f} :\ D \cup \{x_0\} \to M'$ definiert durch

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{wenn } x \in D \setminus \{x_0\}, \\ y & \text{wenn } x = x_0, \end{cases}$$

ist stetig in x_0.

A 1.7.35 Beweisen Sie: (5 P)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : M \to \mathbb{R}^k$, x_0 ein Häufungspunkt von M, $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ und $f_i := p_i \circ f$ für $i \in \{1, \dots, k\}$, d.h.

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x)), \quad x \in M.$$

Dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y \quad \iff \quad \forall\, i \in \{1, \dots, k\} : \lim_{x\to x_0} f_i(x) = y_i\ .$$

A 1.7.36 Ist (M, d_M) ein metrischer Raum und $A \subset M$ beliebig, so wird durch

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf_{y\in A} d_M(x, y)$$

eine auf M stetige Funktion $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ definiert.[2] Zeigen oder widerlegen Sie:

Sind $A_1, A_2 \subset M$ abgeschlossen in (M, d_M) mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, dann gilt $\operatorname{dist}(A_1, A_2) > 0$.

[2] vgl. Beispiel (3.5), Forster Analysis 2, §3

Gleichmäßige Konvergenz von Folgen von Abbildungen

A 1.7.1 Für $n \in \mathbb{N}$ sei jeweils $f_n(x,y,z) := \ln\left((xyz)^{\frac{1}{n}}\right)$.

(a) Überprüfen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Stetigkeit von $f_n\colon [1,\infty[^3 \to \mathbb{R}$.

(b) Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise/gleichmäßig auf $[1,\infty[^3$?

(c) Zeigen Sie, dass für jedes $c \in\,]1,\infty[$ die Folge $f_n\colon [1,c]^3 \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen die durch $f(x,y,z) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y,z)$ gegebene Grenzfunktion $f\colon [1,c]^3 \to \mathbb{R}$ konvergiert. Ist f stetig?

A 1.7.2 Für $n \in \mathbb{N}$ sei jeweils $f_n(x,y) := \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \\ \cos\left(\frac{y}{n}\right) \\ \exp\left(\frac{xy}{n}\right) \end{pmatrix}$ gegeben. (2+2+1 P)

(a) Überprüfen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Stetigkeit von $f_n\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

(b) Ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}^2$ gleichmäßig konvergent ?

(c) Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]^2$ gleichmäßig ?

Bonusfrage: Ist $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch $f(x,y) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y)$, stetig ? (+1 ZP)

1.8 Stetige lineare Abbildungen

A 1.8.1 Das Skalarprodukt auf einem Euklidischen Vektorraum ist stetig.

A 1.8.2 Beweisen Sie mit Sätzen aus der Vorlesung ausführlich: (5 P)

Satz. Seien $m, k \in \mathbb{N}$. Jede lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ ist stetig.

A 1.8.3 Seien X, Y normierte Räume, und sei $f\colon X \to Y$ eine lineare Abbildung, die offene Mengen in X auf offene Mengen in Y abbildet. Beweisen Sie, dass f surjektiv ist.

A 1.8.4 Gegeben seien $(X, \|.\|_X)$ und $S, T \in L(X, X)$. Zeigen Sie, dass dann $ST - TS \neq \mathrm{Id}$ gelten muss.

Tipp: Zeigen Sie zunächst $ST^{n+1} - T^{n+1}S = (n+1)T^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ unter der Annahme, dass $ST - TS = \mathrm{Id}$ gelte. Folgern Sie dann aus $\|S\|, \|T\| < \infty$, dass $\|T^n\| = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gelten muss. Verwenden Sie dies, um im Widerspruch zur Voraussetzung auf $T = 0$ zu schließen.

A 1.8.5 Zeigen Sie ohne Korollar 1.41, dass $L(X, Y)$ für $(X, \|.\|_X)$ und $(Y, \|.\|_Y)$ ein linearer Raum ist.

A 1.8.6 Seien $(E, \|.\|_E)$ und $(F, \|.\|_F)$ normierte lineare Räume. Weiterhin sei $(F, \|.\|_F)$ vollständig. Zeigen Sie, dass dann $(\mathcal{L}(E, F), \|.\|_{\mathcal{L}(E,F)})$ ein Banach-Raum ist.

....(Operatornormen im endlichdimensionalen Fall)

A 1.8.7 Für ein $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ sei $\|f\|_{\mathrm{F}} := \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}^2}$. Zeigen Sie: (4 P)

Auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ ist $\|.\|_{\mathrm{F}}$ eine Norm und für alle linearen Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ gilt

$$\|f\| \le \|f\|_{\mathrm{F}} \,.$$

Bemerkung: $\|.\|_{\mathrm{F}}$ heißt **Frobenius**-Norm.

A 1.8.8 Sei $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ gegeben. Zu festen Basen sei $B := (b_{jk})_{j,k=1}^{n,m}$ die zugehörige Matrix von $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie die Operatornorm von B als Abbildung von $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$ nach $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

A 1.8.9 Für $(X, \|.\|_X) = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$ und $(Y, \|.\|_Y) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ sei $\mathcal{B} \in L(X, Y)$ und zu festen Basen sei $B := (b_{jk})_{j,k=1}^{n,m}$ die zugehörige Matrix von $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie die Operatornorm $\|B\|_{L(X,Y)}$.

A 1.8.10 Auf $(X, \|.\|_X) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ sei $\mathcal{A} \in L(X, X)$ derart gegeben, dass zu festen Basen eine zugehörige symmetrische Matrix $A := (a_{jk})_{j,k=1}^{n}$ von $\mathcal{A}$ existiert. Bestimmen Sie die Operatornorm.[3]

Alternative Formulierung:

Sei A eine symmetrische $(m \times m)$-Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \cdots \lambda_m$. Beweisen Sie, dass bezüglich der Euklidischen Norm $\|A\|_{L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)} = \max\limits_{i=1,\ldots,m} |\lambda_i|$ gilt.

[3] Zur Erinnerung: Symmetrische Matrizen A (Matrizen mit $A^T = A$) besitzen nur reelle Eigenwerte. Weiterhin existiert eine orthogonale Matrix U (deren Spalten aus den paarweise orthogonalen Eigenvektoren von A bestehen), so dass $U^T AU$ eine Diagonalmatrix ist (Hauptachsentransformation), auf deren Diagonalen die Eigenwerte von A stehen.

A 1.8.11 Bestimmen Sie zu den linearen Abbildungen $f, g\colon X \to X$, die durch die Gleichungen

$$f(x_1, x_2) := (-x_1 + 4x_2, 4x_1 - x_2) \qquad \text{bzw.} \qquad g(x_1, x_2) := (-x_1 + 4x_2, -x_2)$$

gegeben sind, die Operatornormen für $X = (\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$, $X = (\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ und $X = (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$.

A 1.8.12 Seien $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $(X, \|.\|_X) = (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$ und $(Y, \|.\|_Y) = (\mathbb{R}^3, \|.\|_\infty)$. Bezüglich der Standardnormalbasen besitzen A, B die zugehörigen Matrizen $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 11 & 3 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Operatornormen $\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ und $\|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.

Welche Operatornormen ergäben sich für $(X, \|.\|_X) = (\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$, $(Y, \|.\|_Y) = (\mathbb{R}^3, \|.\|_1)$?

A 1.8.13 Zeigen Sie: Mit $A := \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^2$ die Ungleichung $\|Ax\|_2 \leq 2\|x\|_2$.

A 1.8.14 Berechnen Sie die Operatornorm von $A := \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ als lineare Abbildung auf $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, und die Operatornorm von $B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ als lineare Abbildung von $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$ nach $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

A 1.8.15 Bestimmen Sie die Operatornorm von $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{7} \\ \sqrt{7} & -4 \end{pmatrix}$ als Abbildung von $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ nach $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ und von $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & -12 \end{pmatrix}$ als Abbildung von $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$ nach $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$.

....(Bilineare Abbildungen)

A 1.8.16 Sei $B\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine **bilineare** Abbildung, d.h. für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ sowie beliebige $X, Y \in \mathbb{R}^n$ gelten

$$\begin{aligned} B(\lambda X, Y) &= \lambda B(X, Y) = B(X, \lambda Y), \\ B(X + X', Y) &= B(X, Y) + B(X', Y), \\ B(X, Y + Y') &= B(X, Y) + B(X, Y'). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C < \infty$ gibt, so dass für beliebige $X, Y \in \mathbb{R}^n$ stets die Ungleichung $|B(X, Y)| \leq C\|(X, Y)\|^2$ erfüllt bleibt.

A 1.8.17 Seien X_1, X_2 und Y Banach-Räume. Zeigen Sie, dass eine bilineare Abbildung $B\colon X_1 \times X_2 \to Y$ genau dann stetig ist, falls eine Konstante $0 < C < \infty$ mit

$$\|B(x_1, x_2)\|_Y \leq C\|x_1\|_{X_1}\|x_2\|_{X_2}$$

für alle $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ existiert.

A 1.8.18 Gegeben sei die Norm $\|\xi\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$ auf dem Raum der beschränkten reellen Zahlenfolgen

$$\ell^\infty := \left\{ \xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \colon \left(\forall n \in \mathbb{N}\ \xi_n \in \mathbb{R} \ \wedge \ \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n| < \infty \right) \right\} .$$

Auf $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ seien der **Shift-Operator** $S\colon \ell^\infty \to \ell^\infty$ durch $S(\xi_1, \xi_2, \dots) := (\xi_2, \xi_3, \dots)$ und der **Differenzoperator** $D\colon \ell^\infty \to \ell^\infty$ durch $D(\xi_1, \xi_2, \dots) := (\xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_2, \dots)$ definiert. Überprüfen Sie, ob $S, D \in L(\ell^\infty, \ell^\infty)$ gilt. Falls ja, berechnen Sie $\|S\|_{L(\ell^\infty,\ell^\infty)}$ und $\|D\|_{L(\ell^\infty,\ell^\infty)}$.

. . . . (Lineare Operatoren auf Funktionenräumen)

A 1.8.19 Sei $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine fest gewählte stetige Funktion und $A\colon L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ definiert durch $Af(x) = f(x)g(x)$. Zeigen Sie: $\|A\| = \|g\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |g(x)|$.

Erinnerung: Auf

$$L^2(0,1) := \left\{ f\colon]0,1[\to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

ist die Norm definiert durch $\|f\|_{L^2(0,1)} := \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

A 1.8.20 Auf dem durch $\|f\|_\infty := \max_{x\in[-1,1]} |f(x)|$ normierten Raum $X = (C([-1,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ der stetigen Funktionen $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ sei durch

$$(\Phi(f))(x) = \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t)\, dt$$

die lineare Abbildung $\Phi\colon X \to X$ definiert. Ist Φ stetig ?

Leichte Abwandlung/Erweiterung:

Sei $X = (C[-1,1], \|.\|_\infty)$ und $\Phi\colon X \to X$ definiert durch (5 P)

$$(\Phi(f))(x) = \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t) dt.$$

(a) Zeigen Sie: Φ ist stetig.

(b) Zeigen Sie: Φ ist beschränkt.

Verwenden Sie dabei nicht den **Satz:** A linear $\Longrightarrow$ (A stetig $\Longleftrightarrow$ A beschränkt).

A 1.8.21 Für $\big(C^1([-1,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty\big)$ und $\big(C([-1,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty\big)$ betrachten wir die durch

$$A(f) := f' , \qquad f \in C^1([-1,1]) ,$$

definierte lineare Abbildung $A\colon C^1([-1,1],\mathbb{R}) \to C([-1,1],\mathbb{R})$. Ist A stetig ?

Alternative Formulierung:

Für $X := \big(C^1([-1,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty\big)$ und $Y := \big(C([-1,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty\big)$ betrachten wir die durch

$$A(f) := f' , \qquad f \in C^1([-1,1]) ,$$

definierte lineare Abbildung $A\colon X \to Y$. Ist A stetig ?

A 1.8.22 Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung
$$A\colon f \mapsto \int_0^1 x f(x)dx$$
ist linear und stetig von $X := (C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ nach $Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, d.h., $A \in L\,(X, Y)$.
Bonusfrage: Welchen Wert hat $\|A\|_{L(X,Y)}$? (+1 ZP)

(b) Die Abbildung $D\colon f \mapsto f'$ ist stetig vom Raum $C^1([0,1],\mathbb{R})$ der stetig differenzierbaren Funktionen über $[0,1]$ versehen mit der Norm $\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ nach X aus (a).

A 1.8.23 Zeigen Sie, dass durch

(i) $A\colon f \mapsto \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} f(x)dx$ und (ii) $B\colon f \mapsto \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx$

stetige lineare Abbildungen von $\Big(C([-1,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty\Big)$ nach $(\mathbb{R}, |.|)$ gegeben sind.

Bestimmen Sie außerdem die Operatornormen $\|A\|$ und $\|B\|$.

Alternative Formulierung:
Zeigen Sie: Durch $A\colon f \mapsto \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} f(x)dx$ und $B\colon f \mapsto \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx$ sind stetige lineare Abbildungen von $\Big(C([-1,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty\Big)$ nach $(\mathbb{R}, |.|)$ gegeben. Bestimmen Sie $\|A\|$ und $\|B\|$.

Alternative Formulierung:
Zeigen Sie, dass durch $A\colon f \mapsto \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} f(x)dx$ und $B\colon f \mapsto \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx$ stetige lineare Abbildungen von $\Big(C([-1,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty\Big)$ nach $(\mathbb{R}, |.|)$ gegeben sind. Bestimmen Sie $\|A\|$ und $\|B\|$.

A 1.8.24 (a) Gegeben seien die normierten Räume $(X, \|.\|_X) = (\Pi(\mathbb{R}), \|.\|_{\Pi(\mathbb{R})})$ und $(Y, \|.\|_Y) = (\mathbb{R}, |.|)$, wobei $\Pi(\mathbb{R})$ den linearen Raum aller reellwertigen Polynome bezeichne und die Norm $\|.\|_{\Pi(\mathbb{R})}$ für ein $p = p(t) = \sum\limits_{k=0}^n a_k t^k$ durch $\|p\|_{\Pi(\mathbb{R})} := \sum\limits_{k=0}^n |a_k|$ definiert sei. Desweiteren seien die Abbildungen

(i) $A_1\colon p \mapsto \displaystyle\int_0^1 p(t)dt$ (ii) $A_2\colon p \mapsto p'(0)$ (iii) $A_3\colon p \mapsto \displaystyle\int_0^t p(s)ds$

gegeben. Überprüfen Sie, ob $A_1 \in L(X,Y)$, $A_2 \in L(X,Y)$ und $A_3 \in L(X,X)$ gilt.

Bonus: Falls ja, bestimmen Sie jeweils die Operatornorm. (jeweils + 1ZP)

A 1.8.25 Die Menge $X = C([0,1],\mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sei versehen mit der Metrik $d(f,g) = \displaystyle\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$ (ohne Beweis). Ist die Abbildung $A\colon X \to \mathbb{R}, Af := f(0)$ stetig?

1.9 Kompaktheit

Stetige Abbildungen auf kompakten Räumen

. . . . (Eigenschaften kompakter Mengen)

A 1.9.1 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Zeigen Sie, dass A beschränkt und abgeschlossen ist.

A 1.9.2 Beweisen Sie das LEBESGUEsche Lemma:
Sei (M, d) ein kompakter metrischer Raum. Zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von M existiert ein $\lambda > 0$, so dass jede Teilmenge $A \subset M$ mit $\operatorname{diam}(A) < \lambda$ in einem U_i liegt.

A 1.9.3 Sei (M, d) ein metrischer Raum mit der Eigenschaft, dass jede Folge in M eine konvergente Teilfolge besitzt. Zeigen Sie:

(a) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_N$ mit $M \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i)$

(b) M ist (überdeckungs-)kompakt.

A 1.9.4 Zeigen Sie: Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

A 1.9.5 Zeigen Sie den **Satz von Dini**: Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum, $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ stetig und $f_{n+1} \leq f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: Falls die Folge (f_n) punktweise gegen 0 konvergiert, dann konvergiert (f_n) auch gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

. . . . (Beispiele kompakter Mengen)

A 1.9.6 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine Punktefolge, die gegen ein $a \in X$ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Menge $A := \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ kompakt ist.

Spezialfall:

Zeigen Sie die Kompaktheit der Menge $A = \left\{ \frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$ in $(\mathbb{R}, |.|)$.

A 1.9.7 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge von X. Zeigen Sie, dass eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset K$ kompakt ist.

A 1.9.8 Zeigen Sie: Die Vereinigung endlich vieler kompakter Teilmengen ist wieder kompakt.

A 1.9.9 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie: $K, L \subset X$ kompakt $\Longrightarrow K \cap L$ kompakt.

A 1.9.10 Sei $(X, \|.\|_X) = (\mathbb{R}^n, \|.\|)$ mit einer beliebigen Norm und $K, L \subset X$ kompakt. Zeigen Sie:

(i) $K \times L$ ist kompakt. (ii) $K + L = \{x + y \in X \mid x \in K, y \in L\} \subset X$ ist kompakt.

Alternative Formulierung von (i):

Zeigen Sie, dass aus der Kompaktheit der Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) die Kompaktheit von $(X \times Y, d_{X \times Y})$ folgt, wobei $d_{X \times Y}((x, y), (\tilde{x}, \tilde{y})) := d_X(x, \tilde{x}) + d_Y(y, \tilde{y})$ ist.

A 1.9.11 Es gibt (bis auf Isometrie) genau einen kompakten normierten Vektorraum.

Alternative Formulierung:

Geben Sie alle kompakten Vektorräume (bis auf Isomorphie) an.

A 1.9.12 Zeigen Sie: Für $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt sind ∂A und $\overline{A}$ kompakt.

A 1.9.13 Zeigen Sie, dass die n-Sphären $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ für $n \geq 1$ kompakt sind.

A 1.9.14 Zeigen Sie, dass die Menge $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = \mathrm{Id}\}$ der orthogonalen reellen $n \times n$-Matrizen im normierten Raum $\big(L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}\big)$ der stetigen linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ kompakt ist.

A 1.9.15 Sei A Teilmenge eines mit der diskreten Metrik versehenen metrischen Raumes (M, d_{diskret}). Zeigen Sie: A ist genau dann kompakt, wenn A nur endlich viele Elemente enthält.

....(Beispiele nicht-kompakter Mengen)

A 1.9.16 Zeigen Sie, dass $A := \left\{3 - \frac{5}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ in $(\mathbb{R}, |.|)$ nicht kompakt ist, (2+1+1 P)

(a) indem Sie direkt Definition 1.56 anwenden, d.h., indem Sie eine offene Überdeckung von A angeben, aus der keine endliche Teilüberdeckung ausgewählt werden kann;

(b) indem Sie Lemma 1.57 anwenden; (c) indem Sie Satz 1.58 (Heine-Borel) anwenden.

A 1.9.17 Mit der Metrik $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$, definiert durch $d(x,y) := |x-y|$, wird $X = \mathbb{R}$ zu einem metrischen Raum. Zeigen Sie: Die Menge $A := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\} \subset \mathbb{R}$ ist nicht kompakt.

Kurzfassung:

Zeigen Sie, dass die Menge $B = \left\{\dfrac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\}$ in $(\mathbb{R}, |.|)$ nicht kompakt ist.

A 1.9.18 Es sei $A := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$. Geben Sie eine offene Überdeckung von A an, die keine endliche Teilüberdeckung enthält.

A 1.9.19 Finden Sie eine nicht-kompakte Teilmenge von $(\mathbb{R}, |.|)$, die ein Minimum und ein Maximum besitzt.

A 1.9.20 Sei $\mathbb{R}$ versehen mit der Metrik $d(x,y) := \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Zeigen Sie, dass es beschränkte und abgeschlossene Mengen in $(\mathbb{R}, d)$ gibt, welche nicht kompakt sind.

A 1.9.21 Geben Sie (jeweils in $(\mathbb{R}, d_{|.|})$) offene Überdeckungen von $\mathbb{N}$ und von $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right]$ an, die keine endlichen Teilüberdeckungen enthalten.

A 1.9.22 Zeigen Sie, dass die Einheitssphäre in $(C([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ nicht kompakt ist.

A 1.9.23 Entscheiden Sie, ob die Menge $\mathbb{Q}$ in $(\mathbb{R}, d_{|.|})$ kompakt ist.

....(Anwendung des Satzes vom Minimum/Maximum)

A 1.9.24 Zeigen Sie, dass es auf dem Einheitskreis $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$ einen Punkt $(x_1, x_2) \in S^1$ gibt, so dass $(x_2)^4 - (y_2)^4 \leq (x_1)^4 - (y_1)^4$ für alle $(y_1, y_2) \in S^1$ gilt.

A 1.9.25 Gegeben sei die Menge $M := \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + yz + z^2 = 1\}$. (2+3 P)

(a) Überprüfen Sie, ob M eine kompakte Teilmenge in $(\mathbb{R}^3, \|.\|_2)$ ist.

(b) Untersuchen Sie die Funktion $f\colon M \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x^2y + y^2z^3$ auf gleichmäßige Stetigkeit und Beschränktheit. Nimmt f ihr Maximum an ?

A 1.9.26 Gegeben sei die Menge $M := \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + yz + z^2 = 1\}$.

(a) Überprüfen Sie, ob die Menge M eine kompakte Teilmenge im metrischen Raum $(\mathbb{R}^3, d_{\|.\|})$ ist.

(b) Ist die Funktion $f\colon M \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ mit M aus (a) beschränkt ? Falls ja, nimmt sie ihr Maximum an ?

A 1.9.27 Gegeben sei die Menge $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^4 + z^6 = 1\ ,\quad xy + yz + xz = 0\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x,y,z) := x^2 + y^3 + z^4$ beschränkt ist und dass sie ein Maximum und ein Minimum annimmt.

A 1.9.28 Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Raum, $K \subset V$ kompakt, $f\colon V \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(v) < 0$ für alle $v \in K$. Mittels Untersuchung von $f(K) \subset \mathbb{R}$ zeige man: $\exists r < 0\ \forall v \in K\colon f(v) < r$.

....(Homöomorphismen)

A 1.9.29 Zeigen Sie: Sind $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und X kompakt, dann ist jede bijektive stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ ein Homöomorphismus.

Alternative Formulierung:

Seien (X, d_X) sowie (Y, d_Y) metrische Räume und $f\colon X \to Y$ stetig und bijektiv. Zeigen Sie: Falls X kompakt, ist f^{-1} stetig.

A 1.9.30 Sei $r > 0$ eine reelle Zahl und $M \subset B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$ eine abgeschlossene konvexe Menge, so dass $0 \in \overset{\circ}{M}$ und $x \in M \iff -x \in M$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $x \neq 0$ existiert $\max\{\lambda \mid \lambda x \in M\} > 0$.

(b) Durch $\|x\|_M := \begin{cases} \dfrac{1}{\max\{\lambda \mid \lambda x \in M\}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$ wird eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

(c) Jede beliebige Norm auf $\mathbb{R}^2$ wird durch ein geeignetes M auf diese Weise induziert.

A 1.9.31 Zeigen Sie: Die offene Einheitskugel $B_1(0)$ in einem normierten Vektorraum $(X, \|.\|)$ ist homöomorph zu X.

A 1.9.32 (a) Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum mit $X \neq 0$ und zu beliebigem $\varepsilon > 0$ die in $(X, d_{\|\cdot\|})$ offene Kugel $B_\varepsilon(0) := \{x \in X \mid \|x\| < \varepsilon\}$ gegeben. Zeigen Sie, dass $B_\varepsilon(0)$ homöomorph zu X ist.

(b) Ist der metrische Raum $\big(B_\varepsilon(0), d_{\|\cdot\|}\big)$ kompakt?

A 1.9.33 Zeigen Sie:

(a) Die Menge $A := S^1 \cap H_+$ mit der Sphäre $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\|_2 = 1\}$ und dem Halbraum $H_+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ ist abgeschlossen in $\big(\mathbb{R}^2, d_{\|\cdot\|_2}\big)$.

(b) Die Menge $A := S^1 \cap H_+$ mit der Sphäre $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\|_2 = 1\}$ und dem Halbraum $H_+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ ist als Teilmenge des Euklidischen $\mathbb{R}^2$ kompakt.

(c) Die Abbildung $f\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \{(x,y) \in S^1 \mid x > 0\}, \quad t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, ist ein Homöomorphismus.

(d) Die Abbildung $f\colon [0,\pi] \to A, \quad t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, ist ein Homöomorphismus.

(e) Die Abbildung $f\colon [0, 2\pi[\to S^1, \quad t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, ist kein Homöomorphismus.

. . . . (ohne Lsg)

A 1.9.34 Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Beweisen Sie, dass f auf jedem kompakten Intervall $I \subset]a,b[$ Lipschitz-stetig ist.

Produkte mit kompaktem Faktor

1.10 Zusammenhang

Wegzusammenhang

A 1.10.1 Ist $A \subset X$ sowohl offen als auch abgeschlossen in $(X, \|.\|)$, so folgt $A = X$ oder $A = \emptyset$.

A 1.10.2 Beweisen Sie: Eine stetige reelle Funktion auf einem zusammenhängenden metrischen Raum nimmt jeden Wert zwischen zwei beliebigen Funktionswerten an.

A 1.10.3 Überprüfen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Jede konvexe Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend. Dabei heißt M konvex, wenn mit $x, y \in M$ auch die Verbindungsgerade $\{x + t(y-x) | t \in [0,1]\}$ vollständig in M enthalten ist.

(b) Es gibt nichtkonvexe zusammenhängende Mengen. Geben Sie ein Beispiel an.

(c) $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = -\operatorname{Id}\} = \emptyset$. **Alternativ:** $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = -\operatorname{Id}\}$ ist zshd.

(d) $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = 0\}$ ist zusammenhängend.

(e) Für $n \geq 1$ ist $GL(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) \neq 0\}$ offen und nicht zusammenhängend.

(f) Die n-Sphären $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ sind für $n \geq 1$ zusammenhängend.

(g) Die Menge

$$X := \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \mid x > 0 \right\} \cup \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2 \tag{1.19}$$

ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

(h) Ein metrischer Raum (M, d) mit der Eigenschaft, dass jede stetige Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ jeden Wert zwischen zwei Funktionswerten annimmt, ist zusammenhängend.

Erweiterung von (f):

Zeigen Sie, dass die n-Sphären $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ für $n \geq 1$ kompakt und wegzusammenhängend sind.

Hinweis: $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist wegzusammenhängend (vgl. Beispiel 1.73 im Skript).

A 1.10.4 Zeigen Sie, dass die Menge $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = E_n\}$ der orthogonalen $n\times n$-Matrizen nicht wegzusammenhängend ist. Dabei bezeichne E_n die Einheitsmatrix.

A 1.10.5 Zeigen Sie, dass ein metrischer Raum (M, d) mit nur endlich vielen Elementen genau dann zusammenhängend ist, wenn er einelementig ist.

Nur eine Richtung:

Zeigen Sie:
Metrische Räume (M, d) mit einelementiger Grundmenge $M = \{a\}$ sind zusammenhängend.

A 1.10.6 Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Gegeben seien die metrischen Räume (M, d_M) und $(\mathbb{R}, d_{|.|})$.
Ist $f\colon M \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ stetig und nicht konstant, dann ist M nicht zusammenhängend.

(b) Der Kreisring $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ ist wegzusammenhängend.

(c) Die Menge der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen ist wegzusammenhängend.

(d) Die Abbildung $\quad f\colon [0, 2\pi[\to S^1, \quad t \mapsto (\cos(t), \sin(t)),$ ist ein Homöomorphismus.

A 1.10.7 Zeigen Sie: Die Menge $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy = 1\}$ ist weder zusammenhängend noch kompakt.

A 1.10.8 Beweisen Sie, dass jedes Intervall in $\mathbb{R}$ zusammenhängend ist.

Kapitel 2

Differentialrechnung

2.1 Differenzierbare Kurven

Lineare Differentialgleichungen und die Exponentialabbildung

A 2.1.1 Zeigen Sie, dass für eine diagonalisierbare Matrix $A = SDS^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ die Gleichung

$$\exp(A) = S \exp(D) S^{-1}$$

gilt, und berechnen Sie $\exp(D)$.

A 2.1.2 Ermitteln Sie die Lösung des Systems

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

von linearen Differentialgleichungen zu den Anfangswerten $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

A 2.1.3 Bestimmen Sie die Lösung des Systems von linearen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) &= 2y(t) \end{aligned}$$

zu den Anfangswerten $x(0) = 1$, $y(0) = 3$, indem Sie $\exp\left(t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$ berechnen.

Injektiv immersierte Kurven

A 2.1.4 Geben Sie Beispiele für eine Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ an,

(a) welche singuläre Punkte enhält;
(b) welche keine singulären Punkte enthält (eine sogenannte immersierte Kurve), aber keine injektive Parametrisierung existiert;
(c) welche injektiv immersiert ist, jedoch mindestens einen Punkt besitzt, in deren Nähe die Kurve nicht homöomorph zu einem Intervall ist.[1]

[1] Ist die Parametrisierung $c\colon I \to C$ nicht nur eine injektive Immersion, sondern sogar ein Homöomorphismus auf ihr mit der Relativtopologie versehenes Bild $C \subset X$, so ist C ein Beispiel für eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von X. Die genaue Definition einer Untermannigfaltigkeit werden wir später kennenlernen.

Bogenlänge

. . . . (Eigenschaften parametrisierter Kurven)

A 2.1.5 Geben Sie Beispiele für eine Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ an,

(a) nicht immersiert; (b) immersiert, aber nicht injektiv immersiert;

(b) injektiv immersiert, aber nicht lokal homöomorph zu einem Intervall ist.

A 2.1.7 Zeigen Sie: Das Ableiten von parametrisierten Kurven ist linear.

A 2.1.8 Zeigen Sie: Für eine Parametrisierung $c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ einer gegebenen Kurve nach Bogenlänge ist die Länge der Kurve durch $L(c) = b - a$ gegeben.

A 2.1.9 Zeigen Sie: Jede Lipschitz-stetige Parametrisierung $c\colon [a, b] \to X$ ist rektifizierbar.

. . . . (Fehlende Gültigkeit des Mittelwertsatzes)

A 2.1.10 Es sei die Kurve $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ durch $c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ gegeben. Zeigen Sie, dass es $t \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$ gibt, so dass

$$c(t + h) - c(t) \neq dc(t + \theta h)h$$

für alle $\theta \in [0, 1]$ gilt.

A 2.1.11 Durch $c(t) := (2\cos(t) - \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t))$ wird eine parametrisierte Kurve c definiert. Zeigen Sie, dass es **kein** $t \in \,]0, 2\pi[$ gibt, so dass $\dfrac{c(2\pi) - c(0)}{2\pi} = \dot{c}(t)$ gilt.

Alternative/erweiterte Formulierung:

Zeigen Sie: Für die durch $c(t) := (2\cos(t) - \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t))^{\mathrm{T}}$ definierte parametrisierte Kurve c existiert kein $t \in \,]0, 2\pi[$, so dass $\dfrac{c(2\pi) - c(0)}{2\pi} = \dot{c}(t)$ gilt.

Widerspricht dies Satz 2.20 ?

A 2.1.12 **(ohne Lsg)** Sei $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(t) = (t^2, \log t)$. Gibt es dann für alle $h > 0$ einen Punkt $\xi \in (1, 1 + h)$ mit $f(1 + h) - f(1) = Df(\xi)h$? Begründen Sie Ihre Antwort.

. . . . (Überprüfung der Stetigkeit)

A 2.1.13 Zeigen Sie, dass die durch

$$c(0) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c(t) := \begin{pmatrix} \dfrac{\sin(t)}{t} \\ \dfrac{t}{t^2 + 1} \end{pmatrix}, \quad t \neq 0,$$

definierte parametrisierte Kurve $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ stetig ist und fertigen Sie eine Skizze an. Bestimmen Sie die Tangentialvektoren $\dot{c}(t)$ für die Parameterwerte $t \in \mathbb{R}$, in denen c differenzierbar ist.

A 2.1.14 Die **Kettenlinie** lässt sich beschreiben durch den Graphen der Funktion (1+2 P)

$$y(x) \;=\; a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad x \in (-\infty, \infty),\ a > 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass y auf $\mathbb{R}$ die gewöhnliche Differentialgleichung $y''(x) = \dfrac{y(x)}{a^2}$ erfüllt.

(b) Berechnen Sie die Tangentialvektoren und anschließend die Bogenlänge für die Parametrisierung $c(x) = (x, y(x))$ mit $x \in [0, b]$, wobei $b > 0$ sei.

Alternative Formulierung:

Die **Kettenlinie** lässt sich beschreiben durch den Graphen der Funktion

$$y \;=\; y(x) \;=\; \frac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right) \;=\; a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad x \in (-\infty, \infty),\ a > 0.$$

(a) Zeigen Sie: y erfüllt auf $\mathbb{R}$ die gewöhnliche Differentialgleichung $y''(x) = \dfrac{y(x)}{a^2}$.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge zur Parametrisierung $c(x) = (x, y(x))$, $x \in [0, b]$ mit $b > 0$.

Alternative Formulierung:

Die **Kettenlinie** lässt sich beschreiben durch den Graphen der Funktion

$$y \;=\; y(x) \;=\; \frac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right) \;=\; a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad x \in (-\infty, \infty),\ a > 0.$$

Zeigen Sie, dass y auf $\mathbb{R}$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y''(x) \;=\; \frac{y(x)}{a^2}$$

erfüllt. Berechnen Sie die Tangentialvektoren und anschließend die Bogenlänge für die Parametrisierung $c(x) = (x, y(x))$ mit $x \in [0, b]$, wobei $b > 0$ sei.

. . . . (Elliptische Integrale)

A 2.1.15 (a) Wie sieht die Polardarstellung der Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ aus?

(b) Wie berechnet man die Länge des Bogens $\widehat{P_1 P_2}$ mit $P_j = (x(\theta_j), y(\theta_j)), 0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$?

Bemerkung: Die Berechnung der Bogenlänge eines Ellipsenrandstückes führt auf ein elliptisches Integral 2. Gattung (vgl. auch Königsberger, Analysis 1, §11.6.III), welches im Allgemeinen nicht elementar zu berechnen ist (d.h., der Integrand besitzt im Allgemeinen keine in geschlossener Form darstellbare Stammfunktion).

. . . . (Bestimmung von Bogenlängen explizit gegebener Kurven)

A 2.1.16 Zeigen Sie: (2+2 P)

(a) Der Graph einer Funktion $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ besitzt keine singulären Punkte und ist rektifizierbar mit Bogenlänge

$$L \;=\; \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}dt\ . \tag{2.2}$$

(b) Eine nach Polarkoordinaten parametrisierte Kurve $c\colon \varphi \mapsto (r(\varphi)\cos(\varphi), r(\varphi)\sin(\varphi))$ mit einem $r \in C^1([\alpha,\beta],[0,\infty[)$ besitzt die Bogenlänge

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\varphi))^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}(\varphi)\right)^2}\, d\varphi\,. \tag{2.3}$$

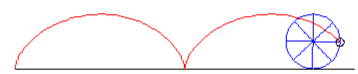
A 2.1.17 Bestimmen Sie für die folgenden Kurven jeweils den Tangentialvektor und die Bogenlänge:

(a) $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^k$, $t \mapsto (1-t)v + tw$ für $v, w \in \mathbb{R}^k$ fest gewählt.

(b) $c\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} x + r\cos(t) \\ y + r\sin(t) \end{pmatrix}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $r > 0$.

Welche Gebilde beschreiben die oben genannten Kurven?

A 2.1.18 Bestimmen Sie die Tangentialvektoren und Bogenlänge der …



(a) …**Zykloide** $c(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) …**Neilschen Parabel** $c(t) = (t^2, t^3)$ für $t \in [-1,1]$.

(c) …**Logarithmischen Spirale** $c(t) := \mathrm{e}^{\gamma t}(\cos t, \sin t)$ für $t \in [a,b]$ und $\gamma \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass die Kurve aus (c) für $\gamma > 0$ jeden Kreis um den Nullpunkt in genau einem Punkt schneidet. Berechnen Sie jeweils den Kosinus des Schnittwinkels.

Alternative Formulierungen/Erweiterungen:

zu (a): Die Kurve $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, heißt **Zykloide**. Bestimmen Sie die singulären Punkte der Kurve, d.h., die Punkte $c(t)$, an denen $c'(t) = (0,0)$ gilt, und die Länge $\int_0^{2\pi} \|c'(t)\|\, dt$ eines Zykloidenbogens.

zu (c): Seien reelle Zahlen $a < b$ und $k > 0$ vorgegeben. Skizzieren Sie die parametrisierte Kurve $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit $c(t) := \mathrm{e}^{kt} \cdot (\cos(t), \sin(t))$, und bestimmen Sie ihre Bogenlänge. Wie lang wird die Kurve bei $a \to -\infty$?

Zeigen Sie, dass die Kurve jeden Kreis um den Nullpunkt in genau einem Punkt schneidet. Berechnen Sie jeweils den Kosinus des Schnittwinkels.

zu (c): Eine parametrisierte Kurve sei für feste $a > 0$, $k > 0$ durch $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} a\mathrm{e}^{kt}\cos(t) \\ a\mathrm{e}^{kt}\sin(t) \end{pmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie die Bogenlänge von $c(t)$ zwischen zwei Parametern $t_1 < t_2$.

zu (c): Die logarithmische Spirale besitzt für $a > 0,\ k > 0$ und $t \in \mathbb{R}$ die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x = x(t) &= a \cdot \mathrm{e}^{kt} \cdot \cos t, \\ y = y(t) &= a \cdot \mathrm{e}^{kt} \cdot \sin t. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Länge des Bogens $\overline{P_1P_2}$ mit $P_j = (x(t_j), y(t_j))\,,\ t_1 < t_2$.

A 2.1.19 Bestimmen Sie die Bogenlänge von $c\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi \mapsto (\varphi^2\cos(\varphi), \varphi^2\sin(\varphi))$.

A 2.1.20 Berechnen Sie jeweils die Bogenlänge von $\quad r = \left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right)^3 \quad$ über die gesamte Kurve

A 2.1.21 Bestimmen Sie die Tangentialvektoren und Bogenlänge der Kurven (2+2+4 P)

(a) $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix}(\cos(t))^3\\(\sin(t))^3\end{pmatrix}$,

oder: $x = (\cos(t))^3,\ y = (\sin(t))^3 \quad (0 \ \le\ t\ \le\ 2\pi)$ **(Astroide)**

(b) $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix}3t\\3t^2\\2t^3\end{pmatrix}$,

(c) $r = \varphi$ mit $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ in Polarkoordinaten. **Bonus:** Skizzieren Sie die Kurven.

A 2.1.22 Mit Konstanten $R > 0,\ A > 0$ besitzt die **Schraubenlinie** die Parameterdarstellung

$$c(t) = \begin{pmatrix}R\cos(t)\\R\sin(t)\\At\end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die zugehörigen Tangentialvektoren $\dot{c}(t)$ und die Bogenlänge für $t \in [a, b]$.

A 2.1.23 Bestimmen Sie jeweils die Tangentialvektoren und die Bogenlänge der Kurven (6 P)

$c_1\colon [0,\alpha] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix}\mathrm{e}^t\sin(t)\\\mathrm{e}^t\cos(t)\\\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$, $c_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix}t\\t^2\end{pmatrix}$, $c_3\colon [0,\alpha] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\\\frac{t^2}{2}\end{pmatrix}$.

A 2.1.24 Berechnen Sie jeweils die Bogenlänge für die parametrisierten Kurven

(a) $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix}t\\t^2\\\frac{2t^3}{3}\end{pmatrix}$ (ii) $c\colon [0,b] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix}(\cosh(t))^2\\(\sinh(t))^2\\\sqrt{2}t\end{pmatrix}$ für ein $b > 0$.

....(Suche nach Parametrisierungen)

A 2.1.25 **(Evolvente des Kreises)**
Das Ende eines fest um den Einheitskreis aufgerollten Metalldrahtes beschreibt beim Abwickeln entgegen des Uhrzeigersinns eine Kurve im $\mathbb{R}^2$, welche die Evolvente des Einheitskreises genannt wird. Befindet sich der Drahtendpunkt zu Beginn des Abwickelns im Punkt $(1, 0)$, so befindet er sich nach einer Runde im Punkt $(1, -2\pi)$.

Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung $\gamma(t)$ der Evolvente und berechnen Sie deren Länge.

A 2.1.26 Parametrisieren Sie die Lösungsmenge der Gleichung $x^4 + y^2 = 1$ durch eine Kurve c, untersuchen Sie c auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Ableitung.

A 2.1.27 Die **Kardioide** besitzen in kartesischen Koordinaten die Darstellung

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2ax) - a^2y^2 = 0,\ a > 0 \quad \text{jeweils für ein } a > 0.$$

Finden Sie mit Hilfe der Polarkoordinaten eine geeignete Parameterdarstellung und berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve.

Alternative Formulierung:

Die Kardioide besitzen in kartesischen Koordinaten die Darstellung

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2ax) - a^2y^2 = 0, \ a > 0 \quad \text{für ein } a > 0.$$

(a) Finden Sie mit Hilfe der Polarkoordinaten eine geeignete Parameterdarstellung.

(b) Berechnen Sie die Kurvenlänge.

. . . .

Implizite Kurven

- Bestimmen Sie für die durch $f(x, y) = 0$ mit $f(x, y) := (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2$ implizit gegebene Kurve im $\mathbb{R}^2$, welche auch **Lemniskate** genannt wird, die singulären Punkte und stellen Sie fest, ob ein isolierter Punkt, ein Kreuzungspunkt oder ein Rückkehrpunkt vorliegt. Ermitteln Sie außerdem die Punkte mit horizontaler Tangente und skizzieren Sie die Kurve.

- Bestimmen Sie die singulären Punkte der implizit durch $f(x, y) = xy = 0$ sowie die singulären Punkte der implizit durch $g(x, y) = (x^2 + y^2)(x - 1) = 0$ gegebenen Kurve und klassifizieren Sie diese.

- Gegeben sei die Funktion $f(x, y) := 2x^3 + 3x^2 - 2y^2$. Bestimmen Sie jeweils die singulären Punkte der implizit durch $f(x, y) = 1$ und $f(x, y) = 0$ gegebenen Kurven. Existieren auch Punkte, an denen horizontale oder vertikale Tangenten vorliegen?

- Finden Sie die singulären Punkte des implizit durch $f(x, y) := x^2(x + 1) - y^2 = 0$ gegebenen **Newtonschen Knotens** und bestimmen Sie die Punkte der Kurve, an denen die Tangenten horizontal sind.

  Erweiterung der Aufgabenstellung:

  Ermitteln Sie für die folgenden Kurven Parametrisierungen, bestimmen Sie darüber hinaus die singulären Punkte und klassifizieren Sie diese. In welchen Punkten sind die Tangenten horizontal?

  (a) $f(x, y) := x^3 - y^2 = 0$ (**Neilsche Parabel**)

  (b) $g(x, y) := x^2(x + 1) - y^2 = 0$ (**Newtonscher Knoten**)

2.2 Partiell differenzierbare Abbildungen

Ableitungen höherer Ordnung siehe 2.3 – Rechenaufgaben höhere Ableitungen

Notwendiges Kriterium für lokale Extrema

A 2.2.1 Seien $(X, \|.\|_X)$ und $(Y, \|.\|_Y)$ Banach-Räume. Zeigen Sie:

(a) Sind $f, g\colon X \to Y$ im Punkt $a \in X$ partiell differenzierbar in Richtung h, dann ist auch jede Linearkombination $(\lambda f + \mu g)$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ im Punkt a partiell differenzierbar in Richtung h mit

$$\partial_h(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \partial_h f(a) + \mu \partial_h g(a). \tag{2.4}$$

(b) Ist $f\colon X \to Y$ im Punkt $a \in X$ in Richtung h partiell differenzierbar, so ist f im Punkt $a \in X$ auch für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ in Richtung λh partiell differenzierbar mit $\partial_{\lambda h} f(a) = \lambda \partial_h f(a)$.

A 2.2.2 Seien X, Y, Z Banach-Räume. Zeigen Sie: Eine Abbildung $f = (f_1, f_2)\colon X \to Y \times Z$ ist genau dann in $a \in X$ partiell differenzierbar in Richtung $h \in X$, wenn die Abbildungen f_1 und f_2 in a in Richtung h partiell differenzierbar sind. In diesem Falle gilt für die partiellen Ableitungen $\partial_h f(a) = (\partial_h f_1(a), \partial_h f_2(a))$.

A 2.2.3 Zeigen Sie:

(a) In keinem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_i = \|x\|_\infty = x_j$ für $i \neq j$ ist die Maximumnorm $\|.\|_\infty$ auf dem $\mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar.

Alternative Formulierung:

In keinem $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_i = \|x\|_\infty = x_j$ für $i \neq j$ ist $f(x) := \|x\|_\infty$ partiell differenzierbar.

(b) Die 1-Norm $\|x\|_1$ auf dem $\mathbb{R}^n$ ist in den Punkten e_i (dabei bezeichne e_i den i-ten Einheitsvektor) bei $i \neq j$ nicht in die Richtung e_j partiell differenzierbar.

Alternative Formulierung:

Bei $i \neq j$ ist $f(x) := \|x\|_1$ in den Punkten e_i nicht in die Richtung e_j partiell differenzierbar.[2]

(c) **(Mittelwertsatz)** Ist $U \subset X$ eine offene Teilmenge eines Banach-Raumes X, sind $x, \tilde{x} \in U$ Punkte, für welche die Strecke $C := \{x + t(\tilde{x} - x) \mid t \in [0, 1]\}$ in U enthalten ist und ist die Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt der Strecke C partiell differenzierbar in Richtung $\tilde{x} - x$, dann gibt es ein $\theta \in]0, 1[$ mit $f(\tilde{x}) - f(x) = \partial_{(\tilde{x}-x)} f(x + \theta(\tilde{x} - x))$.

(d) **(Notwendiges Kriterium für lokale Extrema)** Besitzt eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset X$ eines Banach-Raumes X in $x^* \in U$ ein lokales Extremum und ist f in x^* partiell differenzierbar in Richtung h, dann gilt $\partial_h f(x^*) = 0$.

(e) Ist $(X, \|.\|)$ ein Banach-Raum, $f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig im Nullpunkt und gilt $f(0) = 0$, so ist $\|x\| f(x)$ in $0 \in X$ nicht nur in alle Richtungen partiell differenzierbar, sondern auch Gâteaux-differenzierbar.

[2] Dabei bezeichnet e_i den i-ten Einheitsvektor.

(f) Ist $(X, \|.\|)$ ein Banach-Raum und $p > 1$, dann ist $x \mapsto \|x\|^p$ im Nullpunkt Gâteaux-differenzierbar.

....(Rechenaufgaben)

A 2.2.4 Sei $f(x,y) = x \cdot y$ das übliche Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar ist und bestimmen Sie die partiellen Ableitungen in die Koordinatenrichtungen.

A 2.2.5 Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\partial_h f(a) := \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+th) - f(a)}{t}$ für die Funktionen

(a) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $a = (1,1)$, $h = (3,-4)$; (ii) $f(x,y) = x^{y+1}$, $a = (2,2)$, $h = (1,1)$.

A 2.2.6 Sei $(X, \langle .,. \rangle)$ ein Hilbertraum und $f(x) := \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ die Abbildung, welche einem $x \in X$ seine Euklidische Norm zuordnet. Ist $f\colon X \to \mathbb{R}$ in Punkten $a \neq 0$ partiell differenzierbar in jede Richtung $h \in X$? Ist sie dort sogar Gâteaux-differenzierbar?

A 2.2.7 Zeigen Sie: Die durch

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\|x\|_2^{2n}} & \text{für } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist in Null für beliebiges $i = 1, \ldots, n$, in die Koordinatenrichtung e_i partiell differenzierbar, aber dort nicht stetig.

A 2.2.8 Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ (2+1+1 P)

(a) Ist die Funktion f in $(0,0)$ partiell differenzierbar in alle Richtungen $h \in \mathbb{R}^2$?

(b) Ist die Funktion f in $(0,0)$ stetig ? (c) Ist f in $(0,0)$ Gâteaux-differenzierbar ?

Bonus: Bestimmen Sie $\partial_h f(x,y)$ in allen $(x,y) \neq (0,0)$ für $h = (1,0)$ und $h = (0,1)$?

A 2.2.9 Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(0,0) := 0$ und $f(x,y) := \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ sonst definiert.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_h f$ von f im Punkt $(0,0)$ in jede Richtung $h \in \mathbb{R}^2$.

(b) Beweisen Sie, dass f in $(0,0)$ stetig ist. (c) Ist f Gâteaux-differenzierbar in $(0,0)$?

A 2.2.10 Untersuchen Sie, ob die durch $f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

auf $\mathbb{R}^2$ definierte reellwertige Funktion (a) stetig ist, ob (b) die partiellen Ableitungen in die Koordinatenrichtungen jeweils existieren und ob (c) Gâteaux-Differenzierbarkeit vorliegt.

A 2.2.11 Prüfen Sie die folgenden Funktionen auf Gâteaux-Differenzierbarkeit. (2+3+3 P)

(a) $f(x,y) = x^2 y$ (b) $f(x,y,z) = (x-y)\exp(z)$ (c) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \dfrac{x_1 x_2 x_3}{1 + x_4^2}$

.... (Mangel der partiellen Differenzierbarkeit)

A 2.2.12 Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

ist im Nullpunkt nicht stetig, besitzt aber im Nullpunkt partielle Ableitungen in jede Richtung, jedoch ist $h \mapsto \partial_h f(0)$ nicht linear und f somit in 0 nicht Gâteaux-differenzierbar.

A 2.2.13 Die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$g(x,y) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{2x\mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}}}{x^2+\mathrm{e}^{-\frac{2}{y^2}}}, & \text{für } y \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist im Nullpunkt Gâteaux-differenzierbar, aber dort trotzdem nicht stetig.

A 2.2.14 Gegeben sei eine Funktion von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $v \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $\partial_v f(0,0)$ existiert.
Kann man daraus schließen, dass f in $(0,0)$ stetig ist ? Begründen Sie Ihre Antwort.

. . . . (ohne Lsg)

A 2.2.15 In welchen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist $F(x,y) = |x-y|$ partiell differenzierbar ?

A 2.2.16 Bestimmen Sie die Richtungsableitungen $\partial_h f(x,y)$ für $h = (1,0)$ und $h = (0,1)$ sowie $h = (2,-3)$ für die Funktionen

(a) $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy} + x^8$ (ii) $f(x,y) = x(x+y)^{20}$

A 2.2.17 Bestimmen Sie die Richtungsableitungen $\partial_h f(x,y)$ für $h = (1,0)$ und $h = (0,1)$ sowie $h = (-1,2)$ für die Funktionen

(a) $f(x,y) = \sin(x) + y^2$ (ii) $f(x,y) = x + \mathrm{e}^{xy}$

A 2.2.18 Bestimmen Sie zu $f(x,y) = |y - \mathrm{e}^x|$ alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und alle Richtungen $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, so dass $\partial_v f(x,y)$ existiert.

A 2.2.19 Bestimmen Sie für die Hauptrichtungen die partiellen Ableitungen erster Ordnung von

$$f(x,y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10, \quad g(x,y,z) = \tfrac{x}{z}\mathrm{e}^y,$$

A 2.2.20 Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x,y) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{(\sin(xy))^2}{y}, & \text{für } y \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

(a) Berechnen Sie $f_x(x,0)$ und $f_y(x,0)$.

(b) Existiert die partielle Ableitung f_{yx} im Ursprung ?
Berechnen Sie gegebenenfalls deren Wert.

(c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ in Richtung $v = (1,1)^{\mathrm{T}}$.

A 2.2.21 Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x,y) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^3+y^9} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Untersuchen Sie, ob die partielle Ableitung $f_x(0,0)$ existiert und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(b) Untersuchen Sie, ob die partielle Ableitung $f_{xy}(0,0)$ existiert und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(c) Bestimmen Sie den Wert der Richtungsableitung von f im Punkt $(1,1)$ in Richtung $v = (1,0)^{\mathrm{T}}$.

(d) Zeigen Sie, dass f im Punkt $(0,0)$ nicht stetig ist.

2.3 Differenzierbare Abbildungen

........................(Anwendungsaufgaben/Lösungen spezieller Differentialgleichungen)

A 2.3.1 Sei U offene Teilmenge eines Hilbertraumes $(X, \langle ., . \rangle)$ und $f : U \to \mathbb{R}$ in $a \in U$ differenzierbar. Beweisen Sie:

(a) Ist $a \in U$ ein lokales Extremum von f, dann gilt $\operatorname{grad} f(a) = 0$.

(b) Gilt $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$, so wird $\partial_h f(a)$ unter allen Vektoren $h \in X$ mit $\|h\| = 1$ genau dann maximal, wenn h in die gleiche Richtung wie $\operatorname{grad} f(a)$ zeigt, d.h., $\operatorname{grad} f(a)$ ist die Richtung des steilsten Anstiegs von f.

Alternative Formulierung zu (b):

Zeigen Sie, dass der normierte Gradient die Richtung des steilsten Anstiegs ist.

Anwendungen von (b):

(c) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x, y) := x^2y^2$ definiert. Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs im Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$.

(d) Ein Wanderer steht im Punkt $(0, 0, 0)$ auf der durch $f(x, y) := \sin(xy)$ definierten Fläche. Er möchte auf direktem Wege (über der Geraden $y = x$) den Punkt $(1, 1, \sin(1))$ erreichen, kann jedoch nur maximal Steigungen von $45°$ bewältigen. Wird er sein Ziel erreichen?

Radeln statt Wandern:

Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sin(xy)$, sei als Hügellandschaft aufgefasst. Ein Radfahrer möchte auf direktem Weg (über der Geraden $y = x$) vom Punkt $(0, 0, 0)$ zum Punkt $(1, 1, f(1, 1))$ fahren, kann jedoch nur Steigungen von maximal $45°$ überwinden.
Erreicht er sein Ziel?

A 2.3.2 Zeigen Sie: Gilt für die stetig differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto u(t, x)$, die Gleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial x}$, so hängt die durch $w : (t, x) \mapsto u(t, x - ct)$ definierte Funktion nicht von t ab. Bezeichnet man die Funktion w mit $f = f(x)$, so gilt $u(t, x) = f(x + ct)$.

A 2.3.3 Zeigen Sie den **Eulerschen Satz für homogene Funktionen**:
Gegeben sei eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in U$ und alle $\lambda > 0$ auch $\lambda x \in U$ gelte. Desweiteren sei $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h., für $x \in U$ und $\lambda > 0$ gelte stets $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$. Dann gilt $df(x)x = \alpha f(x)$.

A 2.3.4 (a) Sei $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $r(x) := \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Welche Niveaumengen $N_r(c) = \{x \in \mathbb{R}^n : r(x) = c\}$ sind nicht leer?
Was beschreiben sie?

(b) Zeigen Sie, dass r in allen $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ partiell differenzierbar ist und berechnen Sie die partiellen Ableitungen. Was ist demzufolge der Gradient von $r(x)$?

(c) Fassen Sie den Gradienten von $r(x)$ als Vektorfeld $F\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ auf und berechnen Sie die Divergenz dieses Vektorfeldes. Berechnen Sie dazu vorher den Gradienten von $\dfrac{1}{r(x)}$.

(d) Sei $f \in C^2(]0,\infty[,\mathbb{R})$. Berechnen Sie Δg für $g := f \circ r\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.

(e) Zeigen Sie, dass $F(x) := \dfrac{1}{(r(x))^{n-2}}$ für $n \geq 3$ die Potentialgleichung $\quad \Delta F = 0 \quad$ löst.

A 2.3.5 Zeigen Sie, dass $F\colon (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$G(x,t) \;:=\; \frac{\cos(r-ct)}{r}\;, \qquad r(x) := \|x\|_2\;,$$

eine Lösung der Schwingungsgleichung (Wellengleichung) ist. **Tipp:** vorige Aufgabe (d)

A 2.3.6 Zeigen Sie, dass $G\colon \mathbb{R}^n\times\,]0,\infty[\to \mathbb{R}$, definiert durch

$$H(x,t) \;:=\; t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}\;, \qquad r(x) := \|x\|_2\;,$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (für $k=1$) ist.

. . . . (Lsg zu (c) bisher zu umständlich)

A 2.3.7 (a) Schreiben Sie die Funktion $g(x,y) = x^2 - y^2$ in Polarkoordinaten um.

(b) Zeigen Sie, dass $g(x,y)$ die Laplace-Gleichung $g_{xx} + g_{yy} = 0$ löst, und dass $g(r,\varphi)$ die Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten $g_{rr} + \frac{1}{r} g_r + \frac{1}{r^2} g_{\varphi\varphi} = 0$ löst.

(c) Sei $P(r,\varphi) := \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}$ der Poisson-Kern. Bestätigen Sie, dass

$$g(r,\varphi) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\varphi-\psi) g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi})\, d\psi$$

mit g aus (a) gilt, also durch das Poisson-Integral die Laplace-Gleichung innerhalb des Kreises $B_1(0)$ zu den vorgegebenen Randwerten $g|_{\partial B_1(0)}$ gelöst wird.

Wichtiger Hinweis: Auch im allgemeinen Fall löst das Poisson-Integral die Laplace-Gleichung im Kreis zu den vorgegebenen Randwerten!

. . . . (Differenzierbarkeit & partielle Differenzierbarkeit)

A 2.3.8 Zeigen Sie: Besitzt $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein lokales Extremum in x, so gilt $df(x) = 0$.

. . . . (Anwendung der Definition)

A 2.3.9 Zeigen Sie, dass konstante Abbildungen die Ableitung 0 und lineare Abbildungen F in jedem Punkt x die Ableitung $dF(x)h = F(h)$ besitzen.

A 2.3.10 Zeigen Sie anhand der Definition, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$ die Ableitung $df(x,y)(h_1,h_2) = yh_1 + xh_2$ besitzt.

A 2.3.11 Zeigen Sie, dass jede bilineare Abbildung $B\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und die Ableitung $dB_{(X,Y)}(H,\tilde{H}) = B(H,Y) + B(X,\tilde{H})$ besitzt.

A 2.3.12 Seien $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y), (Z, \|.\|_Z)$ Banach-Räume und $B\colon X \times Y \to Z$ eine stetige bilineare (d.h., linear in jeder Komponente) Abbildung von $(X \times Y, \|.\|_{X\times Y})$ nach $(Z, \|.\|_Z)$. Zeigen Sie:

In jedem Punkt $(x, y) \in X \times Y$ ist B differenzierbar und für jede Richtung $(h, k) \in X \times Y$ gilt

$$dB(x, y)(h, k) = B(x, k) + B(h, y) \ . \tag{2.6}$$

A 2.3.13 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f\colon x \mapsto x^{\mathrm{T}} A x$ mit einer beliebigen reellen $(n \times n)$-Matrix A. Zeigen Sie, dass f differenzierbar mit Ableitung $df(x) = x^{\mathrm{T}}(A + A^{\mathrm{T}})$ ist.

A 2.3.14 Bestimmen Sie alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, in denen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto |xy|$ differenzierbar ist.

A 2.3.15 Bestimmen Sie alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, in denen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \cdot |xy|$, differenzierbar ist.

A 2.3.16 Bestimmen Sie alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, in denen $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x\sqrt{x^2 + y^4}$, differenzierbar ist.

A 2.3.17 Existieren für die durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{|x| + |y|}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die partiellen Ableitungen im Nullpunkt?

Ist f stetig im Nullpunkt? Ist f (total oder Fréchet-)-differenzierbar im Nullpunkt?

A 2.3.18 Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{(xy)^n}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

auf Stetigkeit, partielle Differenzierbarkeit, Differenzierbarkeit, stetige Differenzierbarkeit.

A 2.3.19 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ jeweils auf Stetigkeit, partielle Differenzierbarkeit, Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad g(x, y) = \begin{cases} x(x + y) \sin\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

A 2.3.20 Untersuchen Sie die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto \begin{cases} xy \sin\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{für } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$

auf Stetigkeit, partielle Differenzierbarkeit, Differenzierbarkeit, stetige Differenzierbarkeit.

............(Beispiel differenzierbarer Funktionen mit **unstetigen** partiellen Ableitungen)

A 2.3.21 Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) in $(0,0)$ differenzierbar ist. (ii) in $(0,0)$ unstetige partielle Ableitungen besitzt.

....(Beispiele nicht-differenzierbarer Funktionen)

A 2.3.22 Zeigen Sie, dass alle partiellen Ableitungen der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

definiert ist, im Punkt $(0,0)$ existieren und f dort stetig, aber nicht differenzierbar ist.

A 2.3.23 Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche durch $f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

definiert ist, in $(0,0)$ stetig? Ist f in $(0,0)$ differenzierbar?
Existieren die partiellen Ableitungen im Punkt $(0,0)$ in die Richtungen $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$?

A 2.3.24 Zeigen Sie die Stetigkeit der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Zeigen Sie weiterhin, dass die partiellen Ableitungen in die Koordinatenrichtungen existieren, die Funktion jedoch nicht differenzierbar ist.

A 2.3.25 Zeigen Sie: Die durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist weder total differenzierbar noch stetig im Nullpunkt, obwohl f partielle Ableitungen $\partial_h f(0,0)$ in jede Richtung $h \in \mathbb{R}^2$ besitzt.

A 2.3.26 Untersuchen Sie für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$

ob sie stetig ist, ob die partiellen Ableitungen in die Koordinatenrichtungen existieren, ob diese stetig sind, und ob f differenzierbar ist.

A 2.3.27 Überprüfen Sie die Differenzierbarkeit von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) , \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) . \end{cases}$.

Erweiterte detailliertere Formulierung:

Sei $f(x,y) := \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) := 0$.

(a) Bestimmen Sie die partielle Ableitung $\partial_h f$ von f im Punkt $(0,0)$ für jede Richtung $0 \neq h \in \mathbb{R}^2$.

(b) Beweisen Sie, dass f in $(0,0)$ stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass f nicht differenzierbar in $(0,0)$ ist.

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f (z.B. mit Hilfe eines Computerprogramms). Kann man diesem die Nicht-Differenzierbarkeit von f in $(0,0)$ ansehen ?

A 2.3.28 Existiert ein $c \in \mathbb{R}$ derart, dass $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{e^{x+y} - x - y - 1}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ c & \text{für } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$

(i) die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \partial_{(1,0)} f(0,0)$ besitzt ? (iii) stetig wird ?

(ii) die Richtungsableitung $\partial_h f(0,0)$ für $h = (-1,2)$ besitzt ? (iv) differenzierbar wird ?

....(Rechenaufgaben)

A 2.3.29 Gibt es eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $df(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 z & 2xyz & xy^2 + z^{23} \end{pmatrix}$?

A 2.3.30 Gegeben sei $y \in \mathbb{R}^m$. Bestimmen Sie die Ableitung von

(a) $f(x) = \langle x, y\rangle$ und $g(x) = (\langle x, y\rangle)^2$ für $x \in \mathbb{R}^m$, (ii) $h(x) = \dfrac{1}{\|x\|^2}$ für $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$

(c) $v(x_1,x_2,x_3) = x_1^{x_2+x_3}$ für $v\colon M \to \mathbb{R}$ mit $M := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 > 0\}$,

A 2.3.31 Bestimmen Sie die Fréchet-Ableitung der Abbildung $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(r,\theta,\varphi) := (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

A 2.3.32 Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen von (i) $h(x,y,z) = \begin{pmatrix} z\ln\left(1 + \dfrac{x^2 z^6}{1+y^2}\right) \\ (x^2+y^2+z^2)^{\frac{7}{4}} \end{pmatrix}$ und

(b) $q(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2z^3 e^{xy^2z^3} \\ x^2 e^y - \sin(x) \end{pmatrix}$ (iii) $w(x,y,z) = \arctan(\cos(x^2 y)) + e^z\cosh(x+y)$

A 2.3.33 Bestimmen Sie den Gradienten bzw. die Ableitung von

(i) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^5 + y^4 + 6$ (ii) $g(x,y,z) = xyz\sin(x+y+z)$

A 2.3.34 Berechnen Sie die Fréchet-Ableitung (den Gradienten) für folgende Funktionen

(i) $f(x,y,z) = (x+y)^z$ (ii) $g(x,y,z) = x^{y+z}$ (iii) $h(x,y,z) := \sin(x\cdot\sin(z))$

....(Produktregel und Anwendung)

A 2.3.35 Seien $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen. (2+2 P)

(a) Zeigen Sie: Sind $f, g\colon U \to Y$ differenzierbar in $a \in U$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Konstanten, dann ist auch $(\lambda f + \mu g) : U \to Y$ differenzierbar in a mit Ableitung

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda\, df(a) + \mu\, dg(a) \qquad \text{(Linearität).} \qquad (2.7)$$

(b) Zeigen Sie: Sind $f\colon U \to Y$ und die skalarwertige Funktion $\lambda\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $a \in U$, dann ist $(\lambda f)\colon U \to Y$ differenzierbar in a mit Ableitung

$$d(\lambda f)(a)h = d\lambda(a)h \cdot f(a) + \lambda(a)\cdot df(a)h \qquad \text{(Produktregel).} \qquad (2.8)$$

A 2.3.36 Gegeben seien die Funktionen $f\colon R^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 3x^2\sin(y)\mathrm{e}^{x+z-1}$ sowie $g\colon R^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = 4x^3\cos(y+2z)$. Berechnen Sie im Punkt $a = \left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ die Ableitung von $h = f\cdot g$ einerseits direkt und andererseits mittels Anwendung der Produktregel.

A 2.3.37 Bestimmen Sie die Ableitung $d(\lambda f)$ von $\lambda f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1x_3, x_2 - x_4)$ und $\lambda(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_4$ einmal direkt und einmal mittels Produktregel.

A 2.3.38 Sei $(X, \|.\|_X)$ ein Banach-Raum, $U \subset X$ offen und seien $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ in $a \in U$ differenzierbare Funktionen mit $g(a) \neq 0$. Beweisen Sie die Gültigkeit der Quotientenregel

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(a) \;=\; \frac{g(a)\cdot df(a) - f(a)\cdot dg(a)}{\left(g(a)\right)^2} \tag{2.9}$$

durch Anwendung von Produktregel und Kettenregel auf $h\circ g$ mit $h\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $h(y) := \frac{1}{y}$.

. . . . (Anwendung der Kettenregel)

A 2.3.39 Gegeben sei eine differenzierbare Kurve $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die Ableitung von $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \langle c(t), c(t)\rangle$ einerseits mittels der Kettenregel und andererseits direkt. Drücken Sie dabei die Ableitung mit Hilfe des Tangentialvektors $\dot{c}(t)$ aus.

A 2.3.40 Berechnen Sie die Fréchet-Ableitung von $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) := (xy^2 + xz^2, y^2 - z^2)$, und von $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $g(t) := (t, \cos(t), \sin(t))$. Bestimmen Sie anschließend die Fréchet-Ableitung von $f\circ g$ einerseits direkt und andererseits mit Hilfe der Kettenregel.

A 2.3.41 Die Funktionen $f\colon (0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $g\colon (0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien durch $f(x,y) := (x\mathrm{e}^{-y}, x^2)$ und $g(x,y) := \frac{y}{x}$ definiert. Bestimmen Sie die Ableitung von $h := g\circ f$ im Punkt $(1,0)$.

A 2.3.42 Bestimmen Sie für $g(t) = (\sin(t) + \cos(t), t - t^2)$ und $h(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ die Fréchet-Ableitung von $(h\circ g)(t)$ im Punkt $t = 0$ mittels Kettenregel.

A 2.3.43 Bestimmen Sie die Fréchet-Ableitung der Komposition $H := G\circ F$ von

$$F\colon (r,\varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \quad \text{und} \quad G\colon (x,y) \mapsto (x^2 + y, 2xy, x + y^2)$$

einerseits mittels Kettenregel und andererseits direkt durch Berechnung von $G\circ F$ sowie anschließendes Ableiten.

A 2.3.44 Berechnen Sie jeweils die Ableitung von $g\circ f$ direkt und mittels Kettenregel (8 P)

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ x+2y \end{pmatrix}$, und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(\xi,\mu) \mapsto \xi + \mathrm{e}^{\mu}$;

(b) $f\colon]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ \frac{\sqrt{x}}{y} \end{pmatrix}$, und $g\colon \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto \ln(u^2+v^2)$;

(c) $f\colon]0,\infty[\to]0,\infty[\times]0,\infty[$, $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$, und $g\colon]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^y$;

(d) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(r,s) \mapsto \begin{pmatrix} 3r+s \\ 3r-s \\ r^2s \end{pmatrix}$, und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^{xyz}$;

A 2.3.45 Sei $f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}^2$, $g\colon]0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t) = \left(\frac{1}{t}, \ln(t)\right)$ und $g(x,y) = x\exp\left(\frac{y}{x}\right)$. Bestimmen Sie mittels Kettenregel die Ableitung von $F := g\circ f$.

A 2.3.46 Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ G(r,\varphi) := (x(r,\varphi) + 2y(r,\varphi), x(r,\varphi) - 3y(r,\varphi)),$$

wobei $x(r,\varphi) = r\cos\varphi$, $y(r,\varphi) = r\sin\varphi$.

A 2.3.47 Die Funktionen $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $g\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ und $h\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f\colon x\mapsto \begin{pmatrix} x \\ \sin(x) \\ \cos(x)\end{pmatrix}, \qquad g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy^2 \\ -xz^2\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h\colon \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} \mapsto (x-y)^2 .$$

(a) Bestimmen Sie $u := h\circ g\circ f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ explizit (durch Einsetzen) und berechnen Sie u'.

(b) Berechnen Sie die Ableitungen von f, g, h sowie von $h\circ g\circ f$ nach der Kettenregel.

A 2.3.48 Gegeben sei die Funktion $\Phi := \Psi\circ\Upsilon\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ mit

$$\Psi\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ (x,y,z)\mapsto \begin{pmatrix} -xyz \\ \mathrm{e}^{z^2} - y\sin(x)\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Upsilon\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\ u\mapsto \begin{pmatrix} 3u \\ -u^2 \\ u\end{pmatrix} .$$

(a) Finden Sie eine explizite Darstellung von Φ.

(b) Bestimmen Sie die Ableitung $d\Phi\left(\frac{\pi}{3}\right)$ einmal direkt und einmal mittels Kettenregel.

A 2.3.49 Berechnen Sie sowohl direkt als auch unter Verwendung der Kettenregel die Ableitung von $\Theta := h\circ g\circ f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ für $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $g\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ und $h\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit

$$f\colon t\mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ \sin(t)\end{pmatrix}, \qquad g\colon (x,y,z)\mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ \cos(z)+x^2\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h\colon (u,v)\mapsto 1+u+2v .$$

A 2.3.50 Die Funktionen $g\colon R^2\to\mathbb{R}^3$, $g(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x \\ y^2\end{pmatrix}$ und $f\colon R^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)\mapsto \begin{pmatrix} x^2+2xy \\ y^2\mathrm{e}^x\end{pmatrix}$ seien gegeben. Berechnen Sie im Punkt $a = (1,2)$ die Ableitung $d(g\circ f)(a)$ einerseits direkt und andererseits unter Verwendung der Kettenregel.

A 2.3.51 Die Funktionen $F\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ und $G\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ seien definiert durch

$$F\colon \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{1+x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad G\colon \begin{pmatrix} \xi \\ \mu \\ \nu\end{pmatrix} \mapsto \left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \mu \\ \nu - \frac{1}{2}\end{pmatrix} \right\|_2 .$$

(a) Bestimmen Sie die Fréchet-Ableitungen $dF(x,y)$ und $dG(\xi,\mu,\nu)$.

(b) Ist die Komposition $H := G\circ F\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ differenzierbar ?
Falls ja, bestimmen Sie $dH(x,y)$ einmal direkt und einmal mittels Kettenregel.

A 2.3.52 Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. und $f(x,y) = g(x+2y)$. Beweisen Sie folgende Formel für die n-ten partiellen Ableitungen in die Koordinatenrichtungen von f:

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}} f(x,y) \; = \; 2^{\alpha_2} g^{(\alpha_1+\alpha_2)}(x+2y), \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}.$$

A 2.3.53 Seien $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbare Funktionen und $a, b \in \mathbb{R}$ Konstanten. Finden Sie eine Formel für alle partiellen Ableitungen von $(x,y) \mapsto f(x)g(y)h(ax+by)$.

A 2.3.54 Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen in die Hauptrichtungen von

(a) $f(x,y) = \sum\limits_{k,\ell=1}^{n,m} a_{k,\ell} x^k y^\ell$ bis zur Ordnung 2

(b) $g(x,y) = (xy)^{x+y}$ bis zur Ordnung 1

(c) $h(x,y) = \sin(xy)\cos(x-y)$ bis zur Ordnung 2

A 2.3.55 Bilden Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von den Funktionen

(a) $f(x,y) \; := \; \mathrm{e}^{(ax+by^2)}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$

(b) $g(x,y,z) \; := \; \sin(ax-by)\cos(cz), \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$

Welche partiellen Differentialgleichungen erfüllen die oben genannten Funktionen ?

A 2.3.56 Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen in Koordinatenrichtungen erster und zweiter Ordnung für $f(x,y) = \mathrm{e}^{(ax+by^2)}$

A 2.3.57 Von den nachfolgenden Funktionen sind alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in die Hauptrichtungen zu bilden:

(a) $f(x,y) = \sin(ax+by)$, (b) $g(u,v) = \cos(u^2-v^2)$,

(c) $h(m,n) = \arctan(\exp(mn))$.

A 2.3.58 Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen in die Koordinatenrichtungen von:

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$

(b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := \mathrm{e}^{xy}\sin(xz)$

(c) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) := (x\ln(1+y^2z^2), xyz)$

A 2.3.59 Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung von

$$f(x,y) \; = \; x^3 + 5x^2y + 3xy^2 + 2y^3 + x - y \; , \qquad \begin{aligned} g(x,y) &= \ln(xy) \; , \\ h(x,y) &= x\arctan(x^2+y^2) \; . \end{aligned}$$

A 2.3.60 Berechnen Sie für die folgenden Abbildungen die ersten und zweiten partiellen Ableitungen in die Koordinatenrichtungen.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^3 + 5x^2y + 3xy^2 + 2y^3 + x - y$

(b) $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x,y) := \ln(xy)$

(c) $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) := x\arctan(x^2+y^2)$

. . . . (ohne Lsg)

A 2.3.61 Gegeben sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $$g(x,y) := \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^4+y^8}{x^2+y^2}}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion in $(0,0)$ stetig ist.

(b) Bestimmen Sie alle Richtungsableitungen in $(0,0)$.

(c) Ist g auch total differenzierbar ?

A 2.3.62 Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto \|x\|_2 \cdot x$ überall differenzierbar ist. Berechnen Sie ihre Ableitung $df(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$

A 2.3.63 Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) \to yg(x)$. Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ genau dann differenzierbar ist, wenn g in 0 stetig ist.

A 2.3.64 Gegeben sei die Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \begin{cases} \operatorname{sign}(y) \cdot \|(x,y)\|_2, & \text{falls } y \neq 0\ , \\ x, & \text{falls } y = 0\ . \end{cases}$
Existiert $\partial_h F(0,0)$ für jedes $h \in \mathbb{R}^2$? Falls ja, ist F im Nullpunkt differenzierbar ?

A 2.3.65 Zeigen Sie (a) im Punkt $a = (0,0,0)$ sowie (b) im Punkt $a = (1,1,0)$ die Differenzierbarkeit der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz - y \\ x^2 + z \\ x + 2y \end{pmatrix}$ anhand der Definition.

A 2.3.66 Zeigen Sie anhand der Definition die Differenzierbarkeit der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x + 2xy + 2 \\ \sin(xy) - y + 1 \\ \cos(y) + x \end{pmatrix}$ im Punkt $a = (0,0)$.

. . . . (Kettenregel – ohne Lsg)

A 2.3.67 Berechnen Sie jeweils die Ableitung von $g \circ f$ direkt und mittels Kettenregel für

(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(\rho,\varphi,\theta) \mapsto \begin{pmatrix} \rho\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \rho\cos(\varphi) \end{pmatrix}$, und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$;

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \sin(t) \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$, und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto xy + yz$;

(c) $f\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \sin(y) \\ \tan(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(u,v,w) \mapsto w\mathrm{e}^v - \arctan(v)$.

2.4 Stetig differenzierbare Abbildungen

. . . . (Anwendung des Schrankensatzes)

A 2.4.1 Gegeben sei $f\colon \overline{B_1((0,0))} \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(x+\mathrm{e}^y+1) \\ \frac{1}{8}(x+y+1) \end{pmatrix}$. Zeigen Sie:

(a) Es ist $f\left(\overline{B_1((0,0))}\right) \subset \overline{B_1((0,0))}$. (b) f ist Lipschitz-stetig und besitzt genau einen Fixpunkt.

. . . . (Negativaussagen bzgl. Satz von Schwarz)

A 2.4.2 Geben Sie ein Beispiel für eine zweimal partiell differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, für die $\partial_k \partial_h f(a) \neq \partial_h \partial_k f(a)$ an (mindestens) einem Punkt $a \in \mathbb{R}^2$ gilt.

A 2.4.3 Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ (3+1 P)

(a) Zeigen Sie, dass $f \in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ und sogar $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ gilt.

(b) Gilt auch $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$?

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\ , \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\ , \end{cases}$
und die partiellen Ableitungen $(x,y) \mapsto \partial_x f(x,y)$, $(x,y) \mapsto \partial_y f(x,y)$ in $(0,0)$ stetig sind, die partiellen Ableitungen $(x,y) \mapsto \partial_{xy} f(x,y)$ und $(x,y) \mapsto \partial_{yx} f(x,y)$ zwar existieren, jedoch $\partial_{xy} f(0,0) \neq \partial_{yx} f(0,0)$ gilt. Warum ist der Satz von Schwarz nicht anwendbar ?

A 2.4.4 Existiert ein $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, so dass $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x-1)y = 0$ gilt ? Falls ja, geben Sie eine solche Funktion an.

. . . . (Satz von Schwarz/Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge)

A 2.4.5 Zeigen Sie, dass für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jeder Eigenwert reell ist.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie: Für ein $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^{\mathrm{T}} = A$ ist jeder Eigenwert reell.

A 2.4.6 Ist die Hesse-Matrix für ein $f \in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ an jedem Punkt symmetrisch?

A 2.4.7 Im Fall $f \in C^k(U,\mathbb{R})$ für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist die k-te Ableitung in Richtung h^k gegeben durch

$$\boxed{d^k f(x) h^k \ = \ \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(x)\, h_{i_1} \ldots h_{i_k}.} \tag{2.10}$$

Beweisen Sie (2.10) per Induktion für ein $f \in C^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

A 2.4.8 Ermitteln Sie die Hesse-Matrix von $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\mathrm{T}}Ax$ für eine beliebige feste $n \times n$-Matrix A und zeigen Sie, dass diese unabhängig vom Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist.

Wie lautet die Hesse-Matrix, falls A zusätzlich symmetrisch ist ?

A 2.4.9 Existiert ein $g \in C^2\big(]0, \frac{\pi}{2}[\times]0, \infty[, \mathbb{R}\big)$, so dass

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = \left(\frac{\tan(x)}{y}\right)^2 + y + \frac{1}{y^2} \text{ und } \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = -\frac{2\tan(x)}{y^3} + x$$

für alle $(x,y) \in]0, \frac{\pi}{2}[\times]0, \infty[$ gilt ? Falls ja, geben Sie eine solche Funktion an.

. . . .(Rechenaufgaben/Hessematrix inkl. Produkt- und Kettenregel)

A 2.4.10 Bestimmen Sie die Ableitung df und die Hesse-Matrix $\operatorname{Hess} f$ von $f(x,y) := x^3 + 2xy - y^2$.

A 2.4.11 Ermitteln Sie das Differential und die Hessematrix von

(i) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2 - y^3}$ (ii) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ g(x,y,z) = (x^2+y)^3 + (y^2+z)^4$.

A 2.4.12 Gegeben sei ein $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Berechnen Sie die Ableitung und die Hesse-Matrix von

(a) $g(x,y,z) = f(x^2+y^2+z^2)$ (ii) $h(x,y,z) = g(x, xy, xyz)$

A 2.4.13 Zu $f, g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei die Funktion $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $\Phi\colon (x,y) \mapsto f(x + g(y))$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_h \Phi(x,y)$ für $h = (1,0)$ und $h = (0,1)$.

(b) Sind die Funktionen $\Psi\colon (x,y) \mapsto \partial_h \Phi(x,y)$ aus (i) stetig ?

(c) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_h \Psi(x,y)$ für $h = (1,0)$ und $h = (0,1)$.

. . . .(Divergenz/Rotation/Laplace-Operator)

A 2.4.14 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie die Gültigkeit von

$$\Delta(fg) = f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle + g\Delta f \ .$$

A 2.4.15 Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $v\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig partiell differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie $\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$.

A 2.4.16 Berechnen Sie $\Delta z = z_{xx} + z_{yy}$ für $z(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ und $(x,y) \neq (0,0)$, wobei g eine zweimal differenzierbare Funktion einer Veränderlichen ist.

A 2.4.17 Zeigen Sie, dass die zu $g(t) = \ln(t)$ gehörige Funktion $z(x,y)$ eine Lösung der Potentialgleichung $\Delta z = 0$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist.

Taylor-Formeln

A 2.4.1 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in U$ ein Punkt. In einer Umgebung von x gelte

$$f(x+\xi) \;=\; \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha \xi^\alpha + \varphi(\xi) \qquad \text{sowie} \qquad f(x+\xi) \;=\; \sum_{|\alpha|\leq k} \tilde{c}_\alpha \xi^\alpha + \tilde{\varphi}(\xi)$$

mit $\varphi(\xi) = o(\|\ \xi\ \|^k)$ und $\tilde{\varphi}(\xi) = o(\|\ \xi\ \|^k)$. Zeigen Sie, dass $c_\alpha = \tilde{c}_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq k$. Dabei bedeuten

$$\alpha \;=\; (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \qquad |\alpha| \;=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \qquad \xi^\alpha \;=\; \xi_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{\alpha_n}.$$

.... (Taylorpolynome von Kurven)

A 2.4.19 Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_5 c\left(t; \frac{\pi}{2}\right)$ für die Kurve $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ t + 3t^2 + t^3 \end{pmatrix}$.

A 2.4.20 Wie sieht das Taylor-Polynom $T_3 c(t; 0)$ für $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2t + t^2 + 3t^3 + 2t^4 + t^{50} \end{pmatrix}$ aus?

.... (Beispiele von Taylorpolynomen in 2 Variablen)

A 2.4.21 Geben Sie die Taylor-Formel von $f(x, y) = x(1 - y)$ in einem beliebigen Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ an.

A 2.4.22 Bestimmen Sie $T_2 f((x, y); (0, 0))$ für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f\colon (x, y) \mapsto \mathrm{e}^y \sin(x + 2y)$.

A 2.4.23 Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3 f((x, y); (0, 0))$ von $f(x, y) = \sin(x^2 + 2y)$.

A 2.4.24 Bestimmen Sie im Punkt $(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ das Taylor-Polynom zweiter Ordnung für die Funktion

$$f(x, y) := \cos(x)\sin(y) - \sin(x)\cos(y) + \sin(x) - \sin(y),\;\; (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

alternativ:
Bestimmen Sie im Punkt $(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ das Taylorpolynom zweiten Grades von

$$f(x, y) := \sin(y - x) + \sin(x) - \sin(y),\;\; (x, y) \in \mathbb{R}^2\ .$$

A 2.4.25 Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_1 f((x, y), (0, \frac{1}{2}))$ für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x-1)^2 \cos(\pi y)$.

A 2.4.26 Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2 f((x, y); (-1, 1))$ für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \mathrm{e}^{x^2 - y^2}$.

A 2.4.27 Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3 f((x, y); (1, 1))$ für $f(x, y) = x^y$.

A 2.4.28 Bestimmen Sie $T_2 f\big((x, y); (1, 1)\big)$ für $f\colon\ ]0, \infty[\ \times\ ]0, \infty[\ \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \dfrac{x - y}{x + y}$.

A 2.4.29 Ermitteln Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der durch $g(x, y) := \dfrac{y}{x}$ definierten Funktion $g\colon (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zum Entwicklungspunkt $(1, 1)$.

A 2.4.30 Bestimmen Sie $T_3 g((x,y);(0,0))$ für $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2y + xy - y + 1$.

A 2.4.31 Bestimmen Sie von $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y}$ das Taylorpolynom 3. Grades im Entwicklungspunkt $(0,0)$.

A 2.4.32 Bestimmen Sie das k-te Taylorpolynom $T_k f((x,y);(0,0))$ der Funktion $f(x,y) := \dfrac{1}{1-x-y}$.

.... (Beispiele von Taylorpolynomen in 3 Variablen)

A 2.4.33 Bestimmen Sie $T_3 f((x,y,z);(0,0,0))$ von $f(x,y,z) = \sin(z\cos(y))$.

A 2.4.34 Bestimmen Sie $T_4 g((x,y,z);(0,0,0))$ von $g(x,y,z) = (xy+3)\cos(x+y)z$.

A 2.4.35 Bestimmen Sie die Taylor-Polynome $T_2 f((x,y,z);(0,0,0))$ und $T_2 f((x,y,z);(-4,-1,2))$ für

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + (2x+y+9)z + y^2 + 3\ .$$

A 2.4.36 Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_k f\big((x,y,z);(0,0,1)\big)$ zu der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^x y^2 + x^2 z^3$ für $k = 0,1,2,3,4$.

A 2.4.37 Auf der offenen Teilmenge $U := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > y, z > 0\}$ des $\mathbb{R}^3$ sei die Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ durch $f\colon (x,y,z) \mapsto \ln\left(\dfrac{x-y}{z}\right)$ gegeben. Wie lautet $T_3 f((x,y,z);(2,1,1))$?

A 2.4.38 Bestimmen Sie die Tangentialebene um den Punkt $(1,1,1)$ für $h(x,y,z) = \dfrac{x^y}{y^x}$ $(x,y>0)$.

.... (Beispiele von Taylorpolynomen in 4 Variablen)

A 2.4.39 Bestimmen Sie $T_2 g(2,1,1,2)$ von $g(x,y,z,w) = \sin(xy - zw) - \sin(xz - yw)$.

.... (Beispiele von Taylorpolynome zu $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

A 2.4.40 Bestimmen Sie $T_2 f((x,y,z);(1,0,0))$ für $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x) + z \\ x + y + \exp(z) \end{pmatrix}$.

A 2.4.41 Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2 f\ \big((x,y);\left(\frac{\pi}{2},0\right)\big)$ für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y\sin(x) \\ \exp(xy) \end{pmatrix}$.

.... (ohne Lsg)

A 2.4.42 Ermitteln Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung für

(a) $f(x,y) = xy\cosh(x+y)$ im Entwicklungspunkt $(1,-1)$.

(b) $g(x,y) = \dfrac{1}{1+\sin(x)+\sin(2y)}$ im Entwicklungspunkt $(0,0)$.

A 2.4.43 (a) Geben Sie das Taylor-Polynom $T_2 f((x,y),(1,1))$ für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y^3 + 3xy^2$ und geben Sie Formeln für das Restglied an, mit denen die Werte $f(0,0)$ und $f(2,1)$ berechnet werden können.

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3 f((x,y),(0,0))$ für $f(x,y) = \sinh(x)\sinh(y)$ ohne explizite Berechnung der partiellen Ableitungen.

Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema

A 2.4.42 Zeigen Sie Satz 10.9 aus der Vorlesung:

> Sei $\mathbb{M}$ offen und $f \in C^2(\mathbb{M})$. In $\mathbf{x}_0$ habe f ein lokales Minimum (lokales Maximum). Dann ist die Hesse-Form $Q(f, \mathbf{x}_0; \cdot)$ positiv (negativ) semidefinit.

A 2.4.43 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $Q(x) := \langle Ax, x \rangle$ die ihr zugeordnete quadratische Abbildung $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf dem Euklidischen $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass A durch Q eindeutig bestimmt ist.

A 2.4.44 Zeigen Sie, dass für eine symmetrische positiv definite $n \times n$-Matrix A alle Hauptabschnittsdeterminanten $\det A_i$, $i = 1, \ldots, n$, positiv sind, wobei A_i die aus den ersten i Spalten und Zeilen von A gebildete $i \times i$-Matrix bezeichnet.[3]

A 2.4.45 Beweisen Sie, dass die symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ genau dann positiv definit ist, wenn

$$a_{11} > 0 \qquad \text{und} \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

gilt. Im Fall $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ ist sie indefinit.

[3] **Hinweis:** Es gilt auch die Umkehrung: Sind alle Hauptabschnittsdeterminanten $\det A_i$ einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv, so ist A positiv definit.

. . . . (Pathologische Beispiele)

A 2.4.46 Zeigen Sie, dass das Polynom $f(x,y) = (x^2+y^2)(x^2-3x+y^2)+x^2$ entlang **jeder** Geraden durch den Ursprung ein lokales Minimum hat, aber dennoch in $(0,0)$ **kein** lokales Minimum besitzt.

A 2.4.47 Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := 2x^2 - 3xy^2 + y^4$. Zeigen Sie:

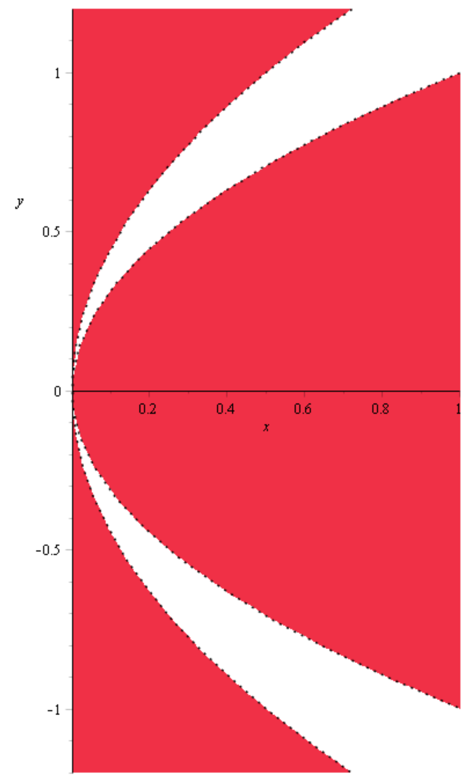
(a) Die Einschränkung $f\big|_G$ von f auf einer **beliebigen** Ursprungsgeraden G besitzt im Ursprung ein lokales Minimum.

(b) Die Funktion f selbst besitzt jedoch im Ursprung **kein** lokales Minimum, sondern einen Sattelpunkt. **Hinweis**: $f(x,y) = x(x-y^2) + (x-y^2)^2$.

Lösungsskizze zu (b):
Wir suchen zunächst den Bereich, auf dem f negative Werte annimmt. Wegen $f(x,y) < 0 = f(0,0) \iff x(x-y^2) < -(x-y^2)^2$ dürfen die Faktoren links nicht verschwinden und nicht dasselbe Vorzeichen besitzen. Somit bleibt nur $x < y^2$ als Möglichkeit. Da in diesem Fall $x - y^2 < 0$ gilt, ist obige Ungleichung äquivalent zu $x > -(x-y^2)$, also $2x > y^2$. Jede ε-Umgebung um den Nullpunkt hat nun aber nichtleeren Schnitt mit der unbeschränkten Menge

$$\begin{aligned} M &= f^{-1}(]-\infty,0[) \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x(x-y^2) < -(x-y^2)^2\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0 \ \wedge\ \sqrt{x} < |y| < \sqrt{2x}\right\}, \end{aligned}$$

denn ist o.B.d.A. $0 < \varepsilon < 1$ und wählen wir $0 < x < \dfrac{\varepsilon^2}{4}$ und $\sqrt{x} < y < \sqrt{2x}$, so gilt einerseits $(x,y) \in M$. Wegen $0 < x < 1$ gelten andererseits aber auch $x^2 < x < \dfrac{\varepsilon^2}{4}$ sowie $y^2 < 2x < \dfrac{\varepsilon^2}{2}$, also $(x,y) \in B_\varepsilon\big((0,0)\big)$ wegen $x^2 + y^2 < \dfrac{3\varepsilon^2}{4} < \varepsilon^2$.



. . . . (Lineare Ausgleichsrechnung)

A 2.4.48 Sei $m > n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\operatorname{rg}(A) = n$. Zeigen Sie, dass $A^{\mathrm{T}}A$ nur positive Eigenwerte besitzt.

A 2.4.49 Sei $m > n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix vollen Ranges und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:
Genau dann löst der Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax-b\|_2 \overset{!}{=} \min$, wenn er die sogenannten **Normalengleichungen** $A^TAx = A^Tb$ erfüllt.

Alternative Formulierung:

Sei $m > n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit maximalem Rang (also $= n$) und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:
Die Funktion $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(x) = \|Ax-b\|_2^2$ besitzt genau einen stationären Punkt, an welchem $F(x)$ minimal wird.
Insbesondere sind dort die sogenannten **Normalengleichungen** $A^TAx - A^Tb = 0$ erfüllt.

A 2.4.50 Es seien die Messpunkte (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, gegeben. Ermitteln Sie die optimalen Parameter γ und δ einer Ausgleichsgerade $g(x) = \gamma x + \delta$.

A 2.4.51 Wenden Sie die lineare Regression auf die folgende Messreihe an. Bestimmen Sie das Gewicht zur Größe 180cm.

Größe in cm	160	165	168	170	175	178	185	190	193
Gewicht in kg	60	61	70	72	73	74	81	83	87

A 2.4.52 Zu einer Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x+\beta}$ sollen die Parameter α und β so bestimmt werden, dass die entstehende Kurve möglichst gut die Punktwolke $\{(-1,6),(0,3),(1,1),(2,0.5)\}$ approximiert. Führen Sie dieses Problem durch Logarithmieren der Daten auf ein lineares Ausgleichsproblem zurück und lösen Sie dieses.

A 2.4.53 Zu einer Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x+\beta}$ sollen die Parameter α und β so bestimmt werden, dass die entstehende Kurve möglichst gut die Punktwolke $\{(-1,0.25),(0,1),(1,3),(2,4)\}$ approximiert. Führen Sie dieses Problem durch Logarithmieren der Daten auf ein lineares Ausgleichsproblem zurück und lösen Sie dieses.

A 2.4.54 Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate dasjenige Polynom $p(x)$ maximal zweiten Grades, welches die Punktewolke $\{(s, s^3) \; : \; s \in \{-2,-1,0,1,2\}\}$ am besten approximiert. Welchen Wert nimmt das Polynom an der Stelle $x = 5$ an?

A 2.4.55
(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate dasjenige Polynom maximal zweiten Grades, welches die Punktewolke $\{(s, s^4) \; : \; s \in \{-2,-1,0,1,2\}\}$ am besten approximiert. Welchen Wert nimmt das Polynom an der Stelle $x = 1$ an?
(b) Welches Polynom erhalten wir für die Punktewolke $\{(s, s^6) \; : \; s \in \{-2,-1,0,1,2\}\}$?

.... (Weitere Anwendungsaufgaben)

A 2.4.56 Bestimmen Sie zu $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ den Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, für den die Summe der Quadrate der Abweichungen $\|x - a_1\|, \ldots, \|x - a_k\|$ minimal ist (wobei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm bezeichnet).

A 2.4.57 Die Wirkung $W(x,t)$, die x Einheiten eines Medikamentes t Stunden nach der Einnahme auf einen Patienten haben, sei durch $W(x,t) := x^2(a-x)t^2\mathrm{e}^{-t}$ für $0 \le x \le a$, $t \ge 0$ gegeben. Bestimmen Sie die Dosis x und die Zeit t, so dass $W(x,t)$ maximal ist.

A 2.4.58 Bestimmen Sie mit Hilfe der Formel $F(a,b,c) := \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ von **Heron** für den Flächeninhalt F eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b, c und dem Umfang $2s$ zu fest vorgegebenem Umfang das Dreieck mit dem größten Flächeninhalt.

Hinweis: Beachten Sie die Gleichung $a + b + c = 2s$, es ist also nur ein Extremalproblem in zwei Variablen zu lösen.

A 2.4.59 Der orientierte Flächeninhalt $A(\alpha, \beta)$ eines dem Einheitskreis einbeschriebenen Dreiecks, dessen Ecken $(1,0)$, $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ und $(\cos(\beta), \sin(\beta))$ sind, lautet

$$A(\alpha,\beta) := \tfrac{1}{2} \det \begin{pmatrix} \cos(\alpha) - 1 & \sin(\alpha) \\ \cos(\beta) - 1 & \sin(\beta) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Winkelpaar (α, β) so, dass der Flächeninhalt $A(\alpha, \beta)$ maximal wird.

. . . . (lokale Extrema in **Kombination** mit Taylor)

A 2.4.60 Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - x - 2y + 3$.

(a) Bestimmen Sie Art und Lage der lokalen Extrema von f.

(b) Entwickeln Sie f in ein Taylorpolynom um ihr lokales Minimum.

A 2.4.61 Sei $f\colon\ ]0,\infty[^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) := \dfrac{x-y}{x+y}$ definiert.

(a) Bestimmen Sie für f das Taylorpolynom zweiten Grades im Entwicklungspunkt $(1,1)$.

(b) Besitzt f lokale oder globale Extrema?

A 2.4.62 Bestimmen Sie die Nullstellen von $\operatorname{charpol}(A) := \det(A - \lambda I)$ für $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Besitzt $f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + (2x+y+9)z + y^2 + 3$ lokale Extrema?
Bestimmen Sie $T_2 f((x,y,z);(0,0,0))$ und $T_2 f((x,y,z);(-4,-1,2))$

. . . . (Stationäre Punkte von Polynomen)

A 2.4.63 (a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f_k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f_k(x,y),\ k = 1,2,3$, auf kritische Punkte und charakterisieren Sie sie nach Maximum, Minimum und Sattelpunkt. Stellen Sie jeweils den Graphen

$$\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}$$

dar und diskutieren Sie die Unterschiede anhand der Hess-Matrizen.

$$\begin{array}{rrcl} \text{(i)} & f_1(x,y) & = & c + x^2 + y^2 \\ \text{(ii)} & f_2(x,y) & = & c - x^2 - y^2 \\ \text{(iii)} & f_3(x,y) & = & c + x^2 - y^2 \end{array}$$

(b) (Beispiel für semidefinite Hesse-Matrix)
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f_k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f_k(x,y),\ k = 1,2,3$, auf eventuelle Extrema und stellen Sie sie anschließend grafisch dar:

$$\begin{array}{rrcl} \text{(i)} & f_1(x,y) & = & x^2 + y^4 \\ \text{(ii)} & f_2(x,y) & = & x^2 \\ \text{(iii)} & f_3(x,y) & = & x^2 + y^3 \end{array}$$

A 2.4.64 Bestimmen Sie die lokalen Extrema und ggf. Sattelpunkte von

$$f(x,y) := x^2 + xy + y^2 + ax + by \qquad (a,b \in \mathbb{R})\ .$$

A 2.4.65 Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f(x,y) := x^2 + 4xy + y^2$.

A 2.4.66 Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $g(x,y) := y^2 + 2xy - x^2$.

A 2.4.67 Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) := x^4 - 8x^2 + y^2 + 16$.

A 2.4.68 Bestimmen Sie von der Funktion $f(x,y) = 6x^2y^2 - 4x^3 - 6y^2$ mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ den Gradienten und die allgemeine Hesse-Matrix. Untersuchen Sie weiterhin die kritischen Punkte, indem Sie sie nach der Art der lokalen Extrema oder nach Sattelpunkten unterscheiden.

A 2.4.69 Besitzt die Funktion $f(x,y) := x(x^2-3y^2),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$, lokale Extrema ? Stellen Sie die durch diese Funktion beschriebene Fläche $z=f(x,y)$ im Quader $(x,y)\in[-1,1]\times[-1,1]$ graphisch dar.

A 2.4.70 Bestimmen Sie alle lokalen Extrempunkte der Funktion $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$ und prüfen Sie auf die Art des Extremums.

A 2.4.71 Bestimmen Sie die stationären Punkte der folgenden Funktionen $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ und begründen Sie, ob in diesen Punkten ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

(a) $f(x,y)=x^2+y^2+xy-2x+3y+7$

(b) $f(x,y)=x^2-2xy-3y+\dfrac{1}{3}y^2$

(c) $f(x,y)=x^2y^2(3-x^2-y^2)$

(d) $f(x,y)=(x+y)^3-12xy$

A 2.4.72 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale Extrema und Sattelpunkte:

(a) $f(x,y,z)=(y-x^2)^2-x^2+y^2+(1-x)z^2$

(b) $u(x,y,z)=x^2(x+1)+y^2(3z+1)+z^2(z+1)$

(b) $g(x,y)=(x^2+y)^2+4xy-x$

(d) $v(x,y,z)=xy-z^4-2(x^2+y^2-z^2)$

A 2.4.74 Bestimmen Sie für die Funktion $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y):=x^3+6xy+3y^2$ alle lokalen Extrema und Sattelpunkte. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Art der Extrema.

A 2.4.75 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale Extrema:

(a) $f(x,y)=x^3+y^3+3xy$,

(b) $f(x,y)=x^2+y^6$.

A 2.4.76 Besitzt die Funktion $h\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ (x,y,z)\mapsto(x-y^2+1)^2+z(x-2)^2+x^2$ lokale Extrema?

.... (Lokale Extrema/Sattelpunkte)

A 2.4.77 Bestimmen Sie alle lokalen Extrema und Sattelpunkte der folgenden Funktionen $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

(a) $f(x,y):=x^2+xy+y^2$ (b) $f(x,y):=\cos(x)\cosh(y)$ (c) $f(x,y):=x^3-3xy^2-6y$

A 2.4.78 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale Extrema und Sattelpunkte:

(a) $f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2-y^2}$, (b) $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xyz$, (c) $h(x,y)=3xy+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$,

(d) $u(x,y)=x^2-y^4$, (e) $v(x,y,z)=(x-1)(y-2)^2(z-3)^3$, (f) $w(x,y)=\dfrac{x^2+4y^2}{2}+xy$,

(g) $\varphi(x,y)=(x^2+y^2)^2$, (h) $\psi(x,y,z)=(x-y^2+1)^2+z(x-2)^2+x^2$, (j) $\eta(x,y)=x(1-y)$.

.... (Stationäre Punkte allgemeiner Funktionen)

A 2.4.79 Die Funktion $f\colon D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2y^2>0\}$ sei definiert durch

$$f(x,y)=x\ln(x^2+y^2)-y\ .$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f sowie alle stationären Punkte. Ist hier das hinreichende Kriterium für lokale Extrema anwendbar?

A 2.4.80 Bestimmen Sie die stationären Punkte der auf $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < 1\}$ durch

$$f(x) = \langle a, x\rangle + \sqrt{1 - \|x\|_2^2}\ ,$$

definierten Funktion $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dabei sei $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ein vorgegebener von Null verschiedener Vektor. Begründen Sie, ob in den stationären Punkten ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

A 2.4.81 Untersuchen Sie $f(x, y) = \dfrac{x(y^2 - 1)}{x^2 + 1}$ auf lokale Exrema und geben Sie die Art der Extrema an.

A 2.4.82 Untersuchen Sie $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 8\ln(x^2 + 1) - 2x^2(y + 1) + y^2$ auf lokale Extrema.

A 2.4.83 Bestimmen Sie die lokalen Extrema, deren Art und die Sattelpunkte der Funktion

$$f\colon (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}\ , \qquad f(x, y) \ = \ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + x - 9y\ .$$

A 2.4.84 Untersuchen Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ , \quad f(x, y) = x^2y - 2xy + \frac{3}{4}\mathrm{e}^y$$

auf lokale Extrema und Sattelpunkte. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Art der Extrema.

A 2.4.85 Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) \ := \ (4x^2 + y^2)\mathrm{e}^{-x^2-4y^2}.$$

.... (lokale **und** globale Betrachtungen)

A 2.4.86 Bestimmen Sie alle lokalen Extrema und alle Sattelpunkte der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x, y) := \arctan(xy) - x^2$. Besitzt f ein globales Maximum?

A 2.4.87 Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := xy\mathrm{e}^{-(x+y)}$.
Besitzt f globale Extrema?

Alternative Formulierung:

Untersuchen Sie

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) := xy\mathrm{e}^{-(x+y)} \tag{2.11}$$

auf lokale und globale Extrema.

Bonus:
Bestimmen Sie die Länge des Weges $c\colon [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^3$, $c(t) := (t, -t, f(t, -t))$.

Alternative Formulierung:

Bestimmen Sie die Länge des Weges $c\colon [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^3$, der im Graphen der Funktion f aus (2.11) verläuft.

.... (ohne Lsg)

A 2.4.88 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C^2(M, \mathbb{R})$. Ein stationärer Punkt $\mathbf{x}_0$ von f heißt **nicht ausgeartet**, wenn $\det\left((\operatorname{Hess} f)(\mathbf{x}_0)\right) \neq 0$.

Zeigen Sie: Ist $\mathbf{x}_0$ ein nicht ausgearteter stationärer, dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass in $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ keine weiteren stationären Punkte existieren.

A 2.4.89 Untersuchen Sie

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^3 + y^3 + \frac{3}{2}x^2y^2$ (b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x^2 + 2y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$

auf lokale Extremstellen und bestimmen Sie jeweils die Art der Extrema.

A 2.4.90 Bestimmen Sie alle lokalen Extrema in $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > -1\}$ von

$$f(x, y, z) = 4x^2 - x^2y^2 + 7y^2 - 12yz + 12z^2.$$

Differentiation parameterabhängiger Integrale

A 2.4.90 Zeigen Sie: Ist $\rho\colon K \to \mathbb{R}$ auf dem Kompaktum $K := [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ eine stetige Funktion, so definiert

$$u(x,y) \ := \ \int_a^b \left(\int_c^d \rho(s,t) \ln \left(\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \right\|_2 \right) dt \right) ds \qquad (2.12)$$

eine harmonische Funktion u auf $\mathbb{R}^2 \setminus K$, das heißt, eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, welche Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta u(x,y) := \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$ ist.

Euler-Lagrange-Gleichungen

A 2.4.91 Seien X, Y Banach-Räume und $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Zeigen Sie, dass der Vektorraum $C^1(K,Y)$ der Abbildungen, die sich zu stetig differenzierbaren Abbildungen auf einer offenen Menge $U \supset A$ fortsetzen lassen, mit der Norm $\|u\| := \|u\|_\infty + \|du\|_\infty$ ein Banach-Raum ist.

A 2.4.92 **Bemerkung:** Satz 2.51 lässt sich wie folgt verallgemeinern:

Sei $L\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ (t, q_1, \ldots, q_n, v_1, \ldots, v_n)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Desweiteren sei das lineare Funktional $I\colon C^2([a,b], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$I(\varphi) \ := \ \int_a^b L(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t), \dot{\varphi}_1(t), \ldots, \dot{\varphi}_n(t)) dt \ .$$

Für ein $u \in C^2([a,b], \mathbb{R}^n)$ mit $I(u) = \inf\limits_{\varphi \in C^2([a,b],\mathbb{R}^n)} I(\varphi)$ gelten dann die **Euler-Lagrange-Gleichungen**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_k}(t, u(t), \dot{u}(t)) \ = \ \frac{\partial L}{\partial q_k}(t, u(t), \dot{u}(t)) \qquad (k = 1, \ldots, n) \ . \qquad (2.13)$$

(Hamiltonsches Prinzip kleinster Wirkung)
Der Zustand eines physikalischen Systems wird üblicherweise durch von der Zeit abhängige Größen $t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ beschrieben. Beispielsweise die Bewegung eines Massenpunktes sowie seine Geschwindigkeit zur Zeit t fassen wir im Allgemeinen als (genügend oft stetig differenzierbare) vektorwertige Funktionen $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3, \ t \mapsto x(t) := (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ und $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3, \ t \mapsto v(t) := \dot{x}(t)$ auf. Nun interessiert man sich für das Minimum des mit Hilfe der sogenannten Lagrange-Funktion $L(t, \varphi(t), \varphi'(t))$ gebildeten sogenannten Wirkungsintegrales $S(\varphi) = \int_a^b L(t, \varphi(t), \varphi'(t)) dt$. Kandidaten für Minimalpunkte sind – falls L nicht explizit von der Zeit abhängt – genau die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen (2.13).

(a) Geben Sie die Euler-Lagrange-Gleichung bezüglich des Funktionales $S(\varphi)$ für mechanische Systeme an, bei denen die Bewegung unter dem Einfluss der kinetischen Energie $T = \frac{1}{2} m \|v\|_2^2$ (mit Masse m) und eines vom Ort abhängigen Potentials $U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto U(x)$ betrachtet wird und bei denen für die Lagrange-Funktion $L = T - U$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass aus (a)die Konstanz der Gesamtenergie $E = T + U$ folgt.

A 2.4.93 Bestimmen Sie auf $C^1([-1,1], \mathbb{R})$ die Ableitung des Funktionales

$$J(y) := 2\pi \int_{-1}^{1} y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} \, dx \ .$$

A 2.4.94 Bestimmen Sie die Ableitung des Funktionales

$$I(u) := \frac{1}{4}\int_0^1 (u'(x))^4 + u(x)^4 \, dx$$

auf dem Banach-Raum $C^1([0,1],\mathbb{R})$. Welche Differentialgleichung muss eine C^2-Funktion u erfüllen, damit $dI(u)h = 0$ für alle $h \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ mit $h(0) = 0 = h(1)$ gelten kann?

Alternative Formulierung:

Gegeben sei das Funktional

$$I(u) := \frac{1}{4}\int_0^1 (u'(x))^4 + u(x)^4 \, dx \tag{2.14}$$

auf dem Banach-Raum $C^1([0,1],\mathbb{R})$. Desweiteren sei $u \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ derart, dass

$$I(u) \;=\; \inf_{v\in C^1([0,1],\mathbb{R})} I(v) \tag{2.15}$$

gelte. Welche Differentialgleichung muss dann u notwendigerweise erfüllen ?

Tipp: Wann kann nur $\partial_h I(u) = 0$ für alle $h \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ mit $h(0) = 0 = h(1)$ gelten?

2.5 Diffeomorphismen

.... (lokale Diffeomorphismen)

A 2.5.1 Zeigen Sie: $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x^2-y^2, 2xy)$, ist bei $(1,-1)$ ein lokaler Diffeomorphismus.

A 2.5.2 Bei welchen (x,y) ist die C^1-Abbildung $\Phi(x,y) := (x^2+y^2, x+y^2)$ ein lokaler Diffeomorphismus?

A 2.5.3 Seien $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen $U, V \subset \mathbb{R}^2$ des Nullpunktes gibt, für welche die Abbildung $\Phi\colon U \to V$, $\Phi(x,y) := (x + x^2 f(x,y), y + y^2 g(x,y))$ ein Diffeomorphismus ist.

.... (lokale Diffeomorphismen und Ableitung der Umkehrabbildung)

A 2.5.4 Bestimmen Sie die Punkte, an denen die Abbildungen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{1-x}\sin(y) \\ \mathrm{e}^{1-x}\cos(y) \end{pmatrix} , \qquad g(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} x+y^3 \\ \mathrm{e}^x \end{pmatrix} ,$$

lokal invertierbar sind. Berechnen Sie dort die Ableitung der lokalen Umkehrabbildung.

.... (lokale und globale Diffeomorphismen)

A 2.5.5 Gegeben sei die Abbildung $\Phi\colon H \to \mathbb{R}^2$ mit $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y > 0\}$ und

$$\Phi(x,y) \;=\; \frac{1}{x^2+(1+y)^2} \begin{pmatrix} 1-x^2-y^2 \\ 2x \end{pmatrix} . \tag{2.16}$$

(a) Zeigen Sie, dass Φ lokal umkehrbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\Phi\colon H \to B_1(0)$ ein Diffeomorphismus ist und geben Sie die Umkehrabbildung an.

A 2.5.6 Für $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x+y+z \neq -1\}$ sei $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(x,y,z) \;=\; \frac{1}{1+x+y+z} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \tag{2.17}$$

(a) Zeigen Sie, dass Φ überall ein lokaler Diffeomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\Phi\colon G \to \Phi(G)$ sogar global eine Umkehrabbildung besitzt.

A 2.5.7 Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$F(x,y) := (x(1-y), xy) \tag{2.18}$$

auf $\mathbb{R}^2$ in der Nähe jeden Punktes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$ eine differenzierbare Umkehrabbildung besitzt.
Beweisen Sie, dass F sogar ein Diffeomorphismus von $]0,\infty[\, \times\,]0,1[$ auf $]0,\infty[\, \times\,]0,\infty[$ ist.

A 2.5.8 Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \Phi(x,y) := ((x-y)^2, 2xy) \tag{2.19}$$

in der Nähe jedes Punktes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| \neq |y|$ eine differenzierbare Umkehrabbildung besitzt. Beweisen Sie, dass Φ ein Diffeomorphismus von $A := \{(x,y) \mid 0 < y < x\} \subset \mathbb{R}^2$ auf $B :=]0,\infty[^2$ ist.

A 2.5.9 Es sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch $F(x,y) := (x^2 - y^2, 2xy)$ definierte Abbildung. Berechnen Sie die Funktional-Matrix von F, und wo sie existiert, die Inverse. Zeigen Sie, dass F surjektiv ist und dass jeder Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$ genau zwei Urbildpunkte besitzt.

A 2.5.10 Zeigen Sie, dass $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x^3 + 3x\mathrm{e}^y \\ y - x^2 \end{pmatrix}$ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

A 2.5.11 (a) Zeigen Sie, dass die Polarkoordinaten-Abbildung $P_n(r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ in der Nähe jedes Punktes

$$(r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}\right)^{n-2}$$

ein lokaler C^1-Diffeomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie $\|P_n(r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})\|_2^2 = r^2$.

(c) Beweisen Sie durch die (rekursive) Angabe einer expliziten Umkehrabbildung, dass P_n ein C^1-Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2}$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, y_1 \leq 0, y_2 = 0\}$ ist.

A 2.5.12 Überprüfen Sie, ob die Abbildung $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}$ definiert durch

$$G(x,y,z) = \left(x\mathrm{e}^{yz}, \arctan y, z(2 + \sin(y))\right)$$

ein Diffeomorphismus ist.

........................(globale Diffeomorphismen und Ableitung der Umkehrabbildung)

A 2.5.13 Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y + e^x \\ x - e^y \end{pmatrix}$. (2+1 P)

(a) Zeigen Sie, dass f überall lokal C^1-invertierbar ist. (b) Wie lautet $d(f^{-1})(1,-1)$?

Bonusfrage: Ist f auch ein globaler Diffeomorphismus ? (+2 ZP)

A 2.5.14 Gegeben sei die Menge $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 < x,\ 0 < y < \frac{2\pi}{x},\ 0 < z\right\}$. (1+3+1 P)

(a) Zeigen Sie: Lokal ist $f\colon U \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (z\cos(xy), z\sin(xy), x)$ ein C^∞-Diffeomorphismus.

(b) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

(c) Sei $g\colon f(U) \to U$ die Umkehrabbildung von f. Berechnen Sie die Ableitung von g im Punkt $\left(-1, 0, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}, 2\pi, 1\right)$.

........................(Mix)

A 2.5.15 **(Wiederholung Diffeomorphismus)** (3+1+1 P)

(a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminanten der folgenden Abbildungen

(i) $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch $(a,b) \mapsto (x,y)$ mit $x = 10a + 2b,\ y = 5a - 7b$.

(ii) $\Psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch $(u,v) \mapsto (x,y)$ mit $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2),\ y = 3uv$.

(iii) $\Upsilon\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch $(\eta,\xi) \mapsto (x,y)$ mit $x = \cosh(\eta)\cos(\xi),\ y = \sinh(\eta)\sin(\xi)$

(elliptische Koordinaten)

(b) Geben Sie an, in welchen Punkten die Abbildungen aus (a) lokal C^∞-invertierbar sind.

(c) Ist einer der Abbildungen aus (a) ein (globaler) Diffeomorphismus ?

........................(bisher ohne vollständige Lsg)

A 2.5.16 Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei gegeben durch $f(x) = x + g(x)$, wobei

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2(x^{(2)}) \\ \vdots \\ g_n(x^{(n)}) \end{pmatrix} \text{ mit } g_1 \in \mathbb{R}\ , \quad x^{(j)} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \end{pmatrix} \ , \quad g_j \in C^1(\mathbb{R}^{j-1}, \mathbb{R}) \text{ für } 2 \le j \le n\ .$$

Beweisen Sie, dass f ein C^1-Diffeomorphismus ist und drücken Sie die partiellen Ableitungen der Umkehrfunktion f^{-1} durch die partiellen Ableitungen der g_j aus.

A 2.5.17 Sei $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $S := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| < 1$.

Zeigen Sie, dass $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x + f(y) \\ y + f(x) \end{pmatrix}$ surjektiv ist.

2.6 Implizit definierte Abbildungen

. . . . (Anwendungsaufgaben)

A 2.6.1 Für ein ideales Gas mit Druck P, Volumen V und absoluter Temperatur T gilt die Zustandsgleichung $PV = cT$ (c eine positive Konstante). Beweisen Sie für ein solches Gas die Beziehung

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V} \;=\; -1\,.$$

A 2.6.2 Werden n elektrische Widerstände parallel geschaltet, so wird der Gesamtwiderstand R des Systems durch die Gleichung

$$\frac{1}{R} \;=\; \frac{1}{R_1} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

bestimmt. Drücken Sie $\dfrac{\partial R}{\partial R_k}$ durch R und R_k aus.

Alternative Formulierung:

Werden n elektrische Widerstände parallel geschaltet, so wird der Gesamtwiderstand R des Systems durch die Gleichung

$$\frac{1}{R} \;=\; \frac{1}{R_1} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

bestimmt. Wandeln Sie die obige Gleichung derart um, dass Sie den Satz über implizite Funktionen anwenden können. Drücken Sie anschließend $\dfrac{\partial R}{\partial R_k}$ durch R und R_k aus.

. . . . (Auflösbarkeit nach einer Variablen $y = \varphi(x)$)

A 2.6.3 Überprüfen Sie, ob man die Gleichung $x^y - y^x \;=\; x - 1$ lokal in in der Nähe des Punktes $(x_0, y_0) := (1, 1)$ nach einer der beiden Variablen auflösen kann.

A 2.6.4 Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^3 \mathrm{e}^y + 2x\cos(xy)$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x, y) = 3$ in einer Umgebung des Punkte $(1, 0)$ lokal nach y auflösbar ist.

A 2.6.5 Zeigen Sie, dass für hinreichend kleine x, y, d.h., für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genügend nahe bei $(0, 0)$, die Gleichung $\exp(\sin(xy)) + x^2 - 2y - 1 = 0$ nach y aufgelöst werden kann.

A 2.6.6 Die Funktion $F\colon \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ sei durch $F(x, y) := xy\mathrm{e}^{-x-y}$ definiert. Untersuchen Sie, in welchen Rechtecken $I \times J \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ sich die Höhenlinien

$$\{(x, y) \in I \times J :\; F(x, y) = c\}$$

in der Form

$$\{(x, y) \in I \times J :\; y = \varphi(x)\} \tag{2.20}$$

bzw. in der Form

$$\{(x, y) \in I \times J :\; x = \psi(y)\} \tag{2.21}$$

mit differenzierbaren Funktionen $\varphi : I \to J$ bzw. $\psi\colon J \to I$ darstellen lassen.

. . . . (Auflösbarkeit nach einer Variablen $y = \varphi(x)$ inlusive Bestimmung von $\varphi'(x)$)

A 2.6.7 Sei $y(x)$ eine Funktion, die die Gleichung $F(x, y) = x^3 - y^2 = 0$ löst, d.h., $F(x, y(x)) = 0$ erfüllt. Zeigen Sie mittels der Kettenregel, dass $y'(x) = \dfrac{3x^2}{2y}$ gilt.

A 2.6.8 Sei $y(x)$ eine Funktion, welche die Gleichung $F(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$ löst, d.h. $F(x, y(x)) = 0$ erfüllt. Zeigen Sie mittels der Kettenregel, dass dann $y'(x) = -\frac{x}{y}$ gilt.

A 2.6.9 Sei y eine Funktion, welche die Gleichung $F(x, y) := x^5 - y^3 - 3 = 0$ löst, d.h. welche die Gleichung $F(x, y(x)) = 0$ erfüllt. Zeigen Sie mittels Kettenregel, dass $y' = \dfrac{5x^4}{3y^2}$ bei $y \neq 0$ gilt.

A 2.6.10 Bestimmen Sie $y'(1)$, falls $F(x, y) = 2 \ln \dfrac{x}{\sqrt{2x-1}} + y \tan(2y - x) - \ln \dfrac{4}{3} = 0$ gilt, und alle $y \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, für die $F(2, y) = 0$ gilt. Berechnen Sie in diesen Punkten die Ableitung $y'(2)$.

A 2.6.11 Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = \cos(x^2) + 2xy + \sin(y^2) - 4x - 1 + y$.
Zeigen Sie, dass $f(x, y) = 0$ lokal in $(0, 0)$ nach $y = g(x)$ auflösbar ist und dass $g(x)$ in einer Umgebung von $(0, 0)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Geben Sie $g'(0)$ und $g''(0)$ an.

. . . . (Auflösbarkeit nach einer Variablen $y = \varphi(x)$ – Taylor/Extrema)

A 2.6.12 Sei $y = y(x)$ eine durch $F(x, y(x)) = 0$ implizit gegebene Funktion, wobei $F(x, y)$ zweimal stetig differenzierbar mit $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ gelte. Beweisen Sie die Formel

$$y'' = \frac{1}{F_y^3} \det \begin{pmatrix} 0 & F_x & F_y \\ F_x & F_{xx} & F_{xy} \\ F_y & F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix} \qquad (2.22)$$

wobei alle Ableitungen in x_0 ausgewertet sind.

A 2.6.13 Sei $y = y(x)$ die Funktion, die $F(x, y) = x^2y + xy^2 - 2 = 0$ löst, mit $y(1) = 1$. Entwickeln Sie $y = y(x)$ in eine Taylorreihe bis einschließlich Termen 2. Ordnung in der Nähe von $x = 1$.

A 2.6.14 Untersuchen Sie die durch $F(x, y) := y e^{y^2} + x^3 - 3x + 2 = 0$ implizit gegebene Funktion $y = f(x)$ auf lokale Extrema.

A 2.6.15 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = ((x + 1)^2 + y^2)((x - 1)^2 + y^2)$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung sowie die stationären Punkte von f und charakterisieren Sie diese.

(b) An welchen Stellen ist die implizit gegebene Funktion $f(x, y) = C$ (lokal) nach y auflösbar?

(c) Skizzieren Sie die Urbilder der regulären Werte $\frac{1}{2}$ und 2. Zusatz: Skizzieren Sie das Urbild von 1.

. . . . (Auflösbarkeit nach einer Variablen $x = \varphi(y, z)$)

A 2.6.16 Zeigen Sie: Für hinreichend kleine x, y und genügend nahe bei -1 liegende z kann man die Gleichung $x^2 + y^2 + z + \cosh(xyz) = 0$ nach z auflösen.

. . . .(Auflösbarkeit nach einer Variablen $x = \varphi(y,z)$ inkl. Ableitungen/lok. Extrema)

A 2.6.17 Seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $F(x,y) := f(x,y,g(x,y))$ definiert. Drücken Sie die Ableitung von F durch die partiellen Ableitungen von f und g aus. Drücken Sie die partiellen Ableitungen von g durch die von f aus, für den Fall, dass $F = 0$ gelte.

A 2.6.18 Sei $x(y,z)$ eine Funktion, welche die Gleichung $G(x,y,z) := x^2y + \ln(yz)x = 0$ löst, d.h. welche die Gleichung $G(x(y,z),y,z) = 0$ erfüllt. Bestimmen Sie mittels Kettenregel $\frac{\partial x}{\partial y}$ und $\frac{\partial x}{\partial z}$.

A 2.6.19 Beweisen Sie: Es existiert eine nahe $(\pi, \frac{\pi}{2})$ definierte C^∞-Funktion $x = \xi(y,z)$ mit $\xi(\pi, \frac{\pi}{2}) = 1$, welche die Gleichung $F(x,y,z) := x^4 + 2x\cos(y) + \sin(z) = 0$ löst, d.h. $F(\xi(y,z),y,z) = 0$ erfüllt.

Berechnen Sie mittels Kettenregel die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ und $\frac{\partial \xi}{\partial z}$ in $(\pi, \frac{\pi}{2})$.

Alternative Auflösung nach anderer Variable:

Sei $z(x,y)$ eine Funktion, welche die Gleichung $G(x,y,z) := x^4 + 2x\cos(y) + \sin(z) = 0$ löst, d.h. $G(x,y,z(x,y)) = 0$ erfüllt. Berechnen Sie mittels der Kettenregel die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$.

A 2.6.20 Die Gleichung $z^3 + z + xy = 1$ besitzt für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Lösung $g(x,y)$. Zeigen Sie, dass $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Berechnen Sie anschließend $dg(1,1)$ und untersuchen Sie g auf stationäre Punkte. Besitzt g lokale Extrema ?

. . . .(Auflösbarkeit nach zwei Variablen $y = \varphi(x), z = \psi(x)$)

A 2.6.21 Für genügend nahe bei 1 liegende x, y, z kann das Gleichungssystem $\begin{cases} -2x^2 + y^2 + z^2 & = 0 \\ x^2 + \mathrm{e}^{y-1} - 2y & = 0 \end{cases}$ durch C^∞-Funktionen $y = \varphi(x),\ z = \psi(x)$ nach y und z aufgelöst werden.

A 2.6.22 Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x^4 + y^2 - z &= 0 \\ x^2 - 2xy + 1 - z &= 0 \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 3, 8)$ lokal nach (x,y) auflösbar ist.

Die auflösende Funktion $g(z) = (x(z), y(z))$ parametrisiert eine Kurve $\gamma(z) = (x(z), y(z), z)$. Berechnen Sie den Tangentialvektor $\gamma'(z)$ an die Kurve im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 3, 8)$.

A 2.6.23 . . . .(Auflösbarkeit nach zwei Variablen $u = \varphi(x,y),\ v = \psi(x,y)$)

A 2.6.24 In einer Umgebung des Punktes $(2,5)$ können wir das Gleichungssystem $\begin{cases} x^2 + uy + \mathrm{e}^v = 0 \\ 2x + u^2 - uv = 5 \end{cases}$ durch eine C^1-Abbildung $(x,y) \mapsto \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ mit $u(2,5) = -1$ und $v(2,5) = 0$ auflösen.

Berechnen Sie deren Ableitung in diesem Punkt.

A 2.6.25 Sei $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,u,v) \mapsto \begin{pmatrix} F_1(x,y,u,v) \\ F_2(x,y,u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \cos(uv) - vx - 1 \\ \sin(u) - y - v \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^2$ von $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $V \subset \mathbb{R}^2$ von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und eine differenzierbare Funktion $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : U \to V$ existieren, so dass $F(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) = 0$ für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U$ gilt. Berechnen Sie auch $df(0,-1)$.

.... (Auflösbarkeit nach drei Variablen $y = \varphi(x), z = \psi(x), v = \xi(x)$)

A 2.6.26 Nach welchen Variablen kann das folgende Gleichungssystem (lokal) aufgelöst werden?

$$\begin{aligned} 3x + y - z + u^2 &= 0 \\ x - y + 2z + u &= 0 \\ 2x + 2y - 3z + 24 &= 0. \end{aligned}$$

.... (ohne Lsg)

A 2.6.27 Es sei $p_y(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0(y)$ ein Polynom mit Koeffizienten $a_k \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $k = 0,\ldots,n-1$. Zu einem $y_0 \in \mathbb{R}$ sei $x_0 \in \mathbb{R}$ eine einfache Nullstelle von p_{y_0}, d.h., $p_{y_0}(x_0) = 0$, $p'_{y_0}(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es für y „nahe“ y_0 eine eindeutige Nullstelle $x(y)$ von p_y „nahe“ x_0 gibt und dass $x(y)$ stetig differenzierbar ist.
Bemerkung: Ein Spezialfall ist im Abschnitt 5.2 zu finden.

A 2.6.28 Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $a \in \mathbb{R}^n$ derart, dass

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \;:\; \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \neq 0\,.$$

Setze $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = f(a)\}$.
Zu $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ bezeichne $\hat{x}_i = (x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. den Punkt ohne die i-te Koordinate. Nach dem Satz über implizite Funktionen lässt sich jede Koordinate x_i von $x \in M$ in einer Umgebung U von a als differenzierbare Funktion φ_i der restlichen Koordinaten $\hat{x}_i$ darstellen, d.h., es gilt

$$x \in M \iff x_i = \varphi_i(\hat{x}_i)\,.$$

Zeigen Sie die Gültigkeit von

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1) \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}(\hat{x}_2) \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(\hat{x}_n) = (-1)^n\,.$$

A 2.6.29 Für

$$H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad (x,y) \mapsto (x+y^2)\mathrm{e}^{-x^2-4y^2} - \mathrm{e}^{-4}$$

und $\varepsilon > 0$ sei $g\colon]-\varepsilon,\varepsilon[\to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit $g(0) = 1$ und $H(x,g(x)) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \varepsilon$. Zeigen Sie, dass g differenzierbar ist, bestimmen Sie $g'(0)$.

2.7 Untermannigfaltigkeiten

. . . . (Charakterisierungen)

A 2.7.1 Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion der Klasse C^α ($\alpha \geq 1$, Definition siehe Serie 10). Zeigen Sie, dass für jedes $a \in U$ eine offene Umgebung $T \subset U$ existiert, so dass $\varphi(T)$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α und $\varphi_{|T}\colon T \to \varphi(T)$ ein Homöomorphismus ist.

A 2.7.2 Zeigen Sie (2.23), d.h.,

$$\left.\begin{array}{l}\text{Eine Teilmenge } M \subset \mathbb{R}^n \text{ ist genau dann } k\text{-dimensionale Untermannigfaltigkeit der}\\ \text{Klasse } C^\alpha\text{, falls zu jedem } a \in M \text{ ein } V \subset M \text{ offen relativ } M \text{ mit } a \in V\text{, eine offene}\\ \text{Teilmenge } T \subset \mathbb{R}^k \text{ und eine Immersion } \varphi\colon T \to \mathbb{R}^n \text{ der Klasse } C^\alpha \text{ existieren, so dass}\\ T \text{ unter } \varphi \text{ homöomorph auf } V \text{ abgebildet wird.}\end{array}\right\} \tag{2.23}$$

A 2.7.3 Zeigen Sie (2.24), d.h.,

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sei } M \subset \mathbb{R}^n \text{ eine } k\text{-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse } C^\alpha \text{ und seien}\\ \qquad\qquad \varphi_1 \;:\; T_1 \xrightarrow{\sim} V_1 \subset M \;, \qquad \varphi_2 \;:\; T_2 \xrightarrow{\sim} V_2 \subset M\\ \text{zwei sich überlappende Parameterdarstellungen der Klasse } C^\alpha\text{, d.h. } V := V_1 \cap V_2 \neq \emptyset.\\ \text{Dann ist } W_1 := \varphi_1^{-1}(V) \text{ offene Teilmenge von } T_1\text{, } W_2 := \varphi_2^{-1}(V) \text{ offene Teilmenge}\\ \text{von } T_2 \text{ und } \tau := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \;:\; W_1 \to W_2 \text{ ein } C^\alpha\text{-Diffeomorphismus.}\end{array}\right\} \tag{2.24}$$

A 2.7.4 Unter welchen Voraussetzungen an $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Teilmenge $M := g^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α ?

A 2.7.5 Begründen Sie, dass $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\; f(x, y) = 0\}$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in der Nähe von Punkten (x, y) mit grad $f(x, y) \neq (0, 0)$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

. . . . (Standardbeispiele)

A 2.7.6 Die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$S_{n-1} \;:=\; \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; \|x\|_2 = 1\} \;\subset \mathbb{R}^n \;. \tag{2.25}$$

Überprüfen Sie anhand der Definition einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α, ob es sich bei S_{n-1} um eine solche handelt. Bestimmen Sie dazu k und α.

Zeigen Sie, dass sich (2.25) lokal als Graph einer Funktion von k Variablen darstellen lässt.

A 2.7.7 Sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto F(x, y) = x^2 - y^2$. Zeigen Sie, dass für alle $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Menge $M(c) := F^{-1}(\{c\})$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

A 2.7.8 Sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x, y > 0, x^y = y^x\}$. Zeigen Sie, dass $M \setminus \{(\mathrm{e}, \mathrm{e})\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

. . . . (Gegenbeispiele)

A 2.7.9 Skizzieren Sie die Menge $N := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; xy = 0\}$ und zeigen Sie, dass es sich **nicht** um eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit handelt.

A 2.7.10 Skizzieren Sie die Menge

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 = 1,\ z^2 - xy = 1\}$$

und begründen Sie, warum es sich **nicht** um eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit handelt.

Tangentialräume

. . . . (Tangential- und Normalraum)

A 2.7.11 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $a \in M$. Zeigen Sie:

(a) $T_a(M)$ ist ein k-dimensionaler Vektorraum. Sei weiter $\varphi\colon T \to M \subset \mathbb{R}^n$ ein lokales Koordinatensystem von M in der Umgebung von a (vgl. (2.23)) und sei $t^* \in T \subset \mathbb{R}^k$ so, dass $\varphi(t^*) = a$. Dann ist $\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t^*), \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(t^*)\right\}$ eine Basis von $T_a(M)$.

(b) $N_a(M)$ ist ein $(n-k)$-dimensionaler Vektorraum. Seien weiter $f_1, \ldots, f_{n-k}\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen in einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a mit

$$M \cap U = \{x \in U \colon f_1(x) = \ldots = f_{n-k}(x) = 0\} \text{ und } \operatorname{Rang}\left(\frac{\partial(f_1,\ldots,f_{n-k})}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(a)\right) = n-k\,.$$

Dann ist $\{\nabla f_1(a), \ldots, \nabla f_{n-k}(a)\}$ eine Basis von $N_a(M)$.

A 2.7.12 Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $c \in \operatorname{Bild}(f)$, so dass für alle Urbilder

$$a \in M := f^{-1}(c)$$

der Gradient grad $f(a) \neq 0$ ist. Zeigen Sie: M ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und der Tangentialraum entspricht dem orthogonalen Komplement des Gradienten von f in a, d.h.

$$T_a(M) = \{v \in \mathbb{R}^n \colon \langle v, \operatorname{grad} f(a)\rangle = 0\}$$

. . . . (Weitere Beispiele inklusive Tangentialraum)

A 2.7.13 Sei $0 < r < R$. Betrachten Sie den Torus

$$T^2 = \left\{(x,y,z) \subseteq \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2\right\} \tag{2.26}$$

Beweisen Sie: T^2 ist eine zweidimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

Geben Sie darüber hinaus in jedem Punkt von T^2 den Tangentialraum an.

A 2.7.14 Beweisen Sie, dass $M := \{(x,y,z) \mid x^2+y^2-z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^∞ ist. Geben Sie den Tangentialraum T_aM im Punkt $a = (1,1,1)$ an.

A 2.7.15 Sei $S_2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \|x\|^2 = 1\}$. Bestimmen Sie in $a = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \in S_2$ den Tangentialraum $T_a(S_2)$.

A 2.7.16 Zeigen Sie, dass

$$M := \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + yz + z^2 = 1\} \tag{2.27}$$

eine zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

Bestimmen Sie den Tangentialraum T_aM. Ist M kompakt?

Komprimierte Formulierung:

Zeigen Sie, dass $M := \{(x, y, z) \,|\, x^2+y^2+yz+z^2 = 1\}$ eine zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Bestimmen Sie den Tangentialraum T_aM. Ist M kompakt?

Alternative Formulierung (ohne Tangentialraum):

Zeigen Sie, dass das Urbild $M := \{(x, y, z) \,|\, g(x, y, z) = 1\}$ des Wertes 1 unter der Funktion $g(x, y, z) := x^2 + y^2 + yz + z^2$ eine zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Ist M kompakt?

A 2.7.17 Zeigen Sie, dass $SL(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} |\, \det A = 1\}$ eine $(n^2 - 1)$-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit ist, und bestimmen Sie den Tangentialraum in der Einheitsmatrix E_n.

. . . . (ohne Lsg)

A 2.7.18 Für welche a, b, c sind die Kegelschnitte

$$K \;=\; \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 - z^2 = 0,\; ax + by = c\right\}$$

eindimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$? Beschreiben Sie diese als Vereinigung von Graphen und geben Sie eine Gleichung für ihre Tangentialräume an. Skizzieren Sie die Kegelschnitte für charakteristische Werte von a, b und c.

A 2.7.19 Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$ sind und geben Sie gegebenenfalls eine Gleichung für ihre Tangentialräume an:

(a) Ellipsoid $= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\right\}$

(b) einschaliges Hyperboloid $= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\right\}$

(c) zweischaliges Hyperboloid $= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = -1\right\}$

(d) Kegel $= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0\right\}$

A 2.7.20 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die durch $z = f(x, y)$ gegebene Fläche im Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ für

(a) $z = x^2 + y^2$ und $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

(b) $z = x^2 + 4xy - 2y^2$ mit $P_0 = (2, 1, z_0)$

(c) $z = \frac{1}{2}\sqrt{4-(x^2+y^2)}$ mit $P_0 = (1, \sqrt{2}, z_0)$

A 2.7.21 Für einen Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ bezeichne i_p die Abbildung

$$i_p \ : \ \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \ , \qquad x \mapsto p + 2\frac{x-p}{\|x-p\|_2^2} \ .$$

Seien $N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ und $S = (0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

(a) i_p ein Diffeomorphismus mit $i_p^{-1} = i_p$ ist und

(b) durch $\{(\mathbb{R}^n \setminus \{N\}, i_N), (\mathbb{R}^n \setminus \{S\}, i_S)\}$ ein differenzierbarer Atlas der Untermannigfaltigkeit $S^{n-1} \ := \ \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\|_2^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ gegeben ist.

A 2.7.22 Untersuchen Sie, ob folgende Mengen C^1-Untermannigfaltigkeiten sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die Dimension und den Tangentialraum in jedem Punkt.

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - (z-1)^3 = 2\} \ , \\ M_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 - y^2 - x^2 = \alpha\} \quad (\alpha \geq 0). \end{aligned}$$

.... (Inklusive Satz über implizite Funktionen)

A 2.7.23 Gegeben sei das Gleichungssystem $\mathrm{e}^x - y + x - z = -1, \ y\mathrm{e}^{-z} - \frac{1}{\mathrm{e}} = 0$.

(a) Sei (x_0, y_0, z_0) Lösung des obigen Gleichungssystems. Zeigen Sie: Es existieren eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ von x_0 und C^1-Funktionen $y, z : U \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = y_0$ und $z(x_0) = z_0$, so dass $(x, y(x), z(x))$ für alle $x \in U$ eine Lösung des obigen Gleichungssystems darstellen.

(b) Ist die Lösung des obigen Gleichungssystems eine eindimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Betrachten Sie zum Punkt $p = (0, 1, 1)$ die Funktionen y, z aus (a) und bestimmen Sie die Ableitungen $y'(0)$ und $z'(0)$.

2.8 Extrema unter Nebenbedingungen

A 2.8.1 Zeigen Sie, dass die Tangentialvektoren an eine implizit durch $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$ mit stetig differenzierbarem $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegebenen Kurve orthogonal auf grad $g(x, y)$ stehen.

.... (Minimierung auf nichtkompakten Untermannigfaltigkeiten)

A 2.8.2 Gegeben sei die Menge $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - xy = 1\}$. (3+3+1 P)

(a) Zeigen Sie, dass M eine zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, welche nicht kompakt ist. Geben Sie an jedem Punkt $a \in M$ den Tangentialraum T_aM an.
(b) Besitzt $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$ auf M lokale Extrema ? Falls ja, welcher Art.
(c) Welche Punkte der Menge M liegen dem Ursprung am nächsten (Begründung)?

A 2.8.3 Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f\colon M \to \mathbb{R},\ f(x, y) := 3x^2 + 7y^2$, auf der nichtkompakten Untermannigfaltigkeit $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy - y^2 = 55\}$.

.... (Bestimmung des größten Eigenwertes – Anwendung in der Numerik)

A 2.8.4 Gegeben sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $A^{\mathrm{T}} = A$.

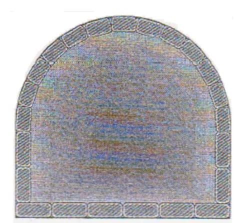
(a) Zeigen Sie, dass das Maximum von f unter der Nebenbedingung $\|x\|_2 = 1$ existiert und der größte Eigenwert von A ist.
(b) Sei $x = u$ eine Stelle, an der das Maximum aus (a) angenommen wird. Zeigen Sie für $n > 1$, dass $\mu := \max\{f(x)\colon \|x\|_2 = 1 \wedge \langle x, u\rangle = 0\}$ existiert und ebenfalls ein Eigenwert von A ist. Welche algebraische Vielfachheit muss der größte Eigenwert von A besitzen, falls μ gleich dem zweitgrößten Eigenwert von A ist.

.... (Anwendungsaufgaben)

A 2.8.5

Der Querschnitt eines unterirdischen Kanals ist ein Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis.

Wie sind Breite und Höhe des Rechteckes zu wählen, damit die Querschnittsfläche $8m^2$ beträgt und zur Ausmauerung des Kanals möglichst wenig Material benötigt wird?



A 2.8.6 Ein Juwelier möchte einen von Gold umrandeten Anhänger erstellen. Der Anhänger soll die Form eines Rechteck haben, an dessen untere Kante ein Halbkreis angefügt ist. Da nur eine feste Menge an Gold für die Beschichtung zur Verfügung steht, die Kunden aber möglichst große Schmuckstücke wünschen, soll die Gesamtfläche des Anhängers bei konstantem Umfang möglichst groß sein. Wie sieht nach diesen Kriterien der optimale Anhänger aus ?

A 2.8.7 Bestimmen Sie drei positive Zahlen a, b, c, deren Summe gleich 60 und deren Produkt maximal ist.

A 2.8.8 (a) Zeigen Sie, dass die Ellipse $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 16\}$ eine eindimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist. Ist M kompakt?

(b) Bestimmen Sie die Fläche des größten achsenparallelen Rechtecks innerhalb M aus (a).

A 2.8.9 Bestimmen Sie den maximalen Flächeninhalt eines Rechtecks, dessen Ecken auf dem Rand eines Kreises vom Radius 1 liegen.

A 2.8.10 Bestimmen Sie den Radius der größtmöglichen Kugel, die innerhalb des Eikörpers (Ellipsoids) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ liegen kann. Begründen Sie Ihre Aussage.

A 2.8.11 Gegeben sei die Fläche $z = f(x, y) = x^2 - 5y^2$. In welchem Punkt hat die Fläche eine Tangentialebene parallel zur Ebene $x - 5y + z = 3$?

. . . . (Anwendung-Kombi)

A 2.8.12 In einem in kartesischen Koordinaten (x, y, z) vorliegenden dreidimensionalen Hologramm wird durch die Einheitskugel $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ein im Koordinatenursprung zentrierter georteter Himmelskörper dargestellt. Eine weitere Analyse ergibt, dass die an einem Punkt $(x, y, z) \in B$ vorliegende (skalierte) Konzentration eines auf der Erde selten vorkommenden und daher gefragten Erzes durch die Funktion $f(x, y, z) := \exp(x^2 - y^2 + z^2)$ gut beschrieben wird.

Bestimmen Sie, an welchen Punkten von B obige Konzentration f am höchsten bzw. am niedrigsten ist. Wo lohnt sich demnach der Abbau besonders ?

Tipp:
Betrachten Sie zunächst das unrestringierte Problem, d.h., bestimmen Sie zunächst die stationären Punkte von f, welche im Inneren von B liegen. Maximieren bzw. minimieren Sie f anschließend auf der zweidimensionalen C^∞-Untermannigfaltigkeit $M := \partial B$. Ist B kompakt? Durch welche implizit gegebene Gleichung wird der Äquator beschrieben?

. . . . (Abstandsaufgaben)

A 2.8.13 Finden Sie diejenigen Punkte auf der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, die vom Punkt $(4, -4, 2)$ den kleinsten bzw. den größten Abstand haben.

A 2.8.14 Bestimmen Sie die Punkte auf der Ellipse $x^2 + xy + y^2 = 3$, die den größten bzw. kleinsten Abstand vom Ursprung $(0, 0)$ haben.

A 2.8.15 Berechnen Sie $\mathrm{dist}(0, E)$ für die Menge $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x^2 + xy + 2y^2 = 1\}$.

A 2.8.16 Welcher Punkt der Fläche $z = x^2 + y^2$ ist dem Punkt $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$ am nächsten ?

A 2.8.17 Bestimmen Sie die Punkte auf der Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, die vom Punkt $(1, 1, 1)$ den größten bzw. den kleinsten Euklidischen Abstand besitzen.

. . . . (Kombi-Aufgaben)

A 2.8.18 Bestimmen Sie die globalen Extremstellen der Funktion $f(x, y) = x^2(y + 1)$ auf der Sphäre $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ auf zwei verschiedenen Wegen:

(a) Führen Sie f auf die Funktion $h \colon [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$ zurück und bestimmen Sie die globalen Extremstellen von h.

(b) Wenden Sie den Satz vom Minimum/Maximum an, um zu begründen, dass f auf S^1 seine globalen Extrema annimmt. Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ und begründen Sie dann mit Satz 2.76, warum sich unter diesen die gesuchten Extremstellen befinden.

A 2.8.19 Gegeben sei die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \mathrm{e}^y(y^2 - 2x^2)$. (5 P)

(a) Bestimmen Sie unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 2x^2 + y^2 = 6$ die globalen Extrema der Funktion f. Verwenden Sie dabei die Lagrangesche Multiplikator-Methode und beachten Sie, dass beim Lösen des auftretenden Gleichungssystems die Fallunterscheidung $x = 0$ und $x \neq 0$ hilfreich ist.

(b) Lösen Sie (a) erneut durch Umwandlung in ein Extremalproblem in einer Variablen. Beachten Sie dabei die Beschränkung des Definitionsbereiches.

(c) Bestimmen Sie die globalen Extrema von f auf der Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 \leq 6\}.$$

A 2.8.20 Sei $K = \{v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\|_2 \leq 1\}$ und $f \colon K \to \mathbb{R}$ durch $f \colon (x, y) \mapsto y^3 + xy - x^3$ definiert. Zeigen Sie, dass f im Inneren von K kein lokales Maximum besitzt. Nimmt f auf ∂K sein globales Maximum an ? **Bonus:** Bestimmen Sie dieses gegebenenfalls. (+4 ZP)

A 2.8.21 Gegeben sei die Kreisscheibe $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f \colon E \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 4x^2 - 3xy$.

Tipp:
Ermitteln Sie zunächst die lokalen Extrema von f im Inneren von E und dann auf dem Rand ∂E, d.h. unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$. Warum muss die Funktion f zwingend ihre Extrema annehmen?

A 2.8.22 Bestimmen Sie das Maximum und Minimum der Funktion $f(x, y) := x^4 + y^4$ auf der Menge $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^4 \leq 1\}$.

A 2.8.23 Untersuchen Sie die Funktion $f \colon B_2(0) \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := (x^2 + y^2)\mathrm{e}^{x^2 - y^2}$ auf globale Extrema. Hierbei ist $B_2(0)$ die abgeschlossene Kugel mit dem Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 2.

. . . . (Minimierung/Maximierung auf 1-dim. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^2$)

A 2.8.24 Bestimmen Sie das Maximum und Minimum der Funktion $\varphi(x, y) := -(x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2$ auf dem Einheitskreis $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

. . . . (Minimierung/Maximierung auf 1-dim. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$)

A 2.8.25 Begründen Sie, warum die Funktion $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ unter den Nebenbedingungen $x + y + z = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ globale Extremstellen besitzt und bestimmen Sie diese.

A 2.8.26 Ermitteln Sie die globalen Extrema der durch $f(x, y, z) = xyz$ definierten Funktion $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ unter den Nebenbedingungen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x + y + z = 1$. Geben Sie die Stellen an, in denen das Maximum bzw. das Minimum angenommen wird.

. . . . (Minimierung/Maximierung auf 2-dim. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$)

A 2.8.27 Bestimmen Sie auf dem Torus T^2 aus (2.26) mit $1 = r < R = \sqrt{2}$ lokale und globale Extrema der Höhenfunktion $h \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto y$. Skizzieren Sie die Höhenlinien von h auf T^2.

A 2.8.28 Bestimmen Sie auf M aus (2.27) die globalen Extrema von $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$.

A 2.8.29 Sei $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $g(x, y, z) := xy + yz + zx$ definiert und $M := g^{-1}(\{-1\})$.

(a) Zeigen Sie, dass man für $c \neq 0$ die Gleichung $g(x, y, z) = c$ lokal zumindest immer nach einer der Variablen x, y, z auflösen kann.

(b) Geben Sie einen Punkt aus M an, in dessen Nähe man M nicht als Graph $z = h(x, y)$ einer C^1-Funktion h über der (x, y)-Koordinatenebene schreiben kann.

(c) Ermitteln Sie das globale Minimum von $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$ auf M.

A 2.8.30 Finden Sie die Punkte, in denen lokale Extrema der Funktion $f(x, y, z) := x - y + z$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ vorliegen können.
Besitzt $f(x, y, z) := x - y + z$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ Extrema ?

.... (Minimierung/Maximierung auf $(n-1)$-dim. Untermannigfaltigkeiten)

A 2.8.31 Auf der Sphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ sei $f \colon S^{n-1} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \prod_{j=1}^{n} x_j^2$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\max_{x \in S^{n-1}} f(x) \;=\; n^{-n}$ gilt.

A 2.8.32 (a) Besitzt $F \colon (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^2$ unter der Nebenbedingung $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$ ein Maximum?

(b) Zeigen Sie für beliebige $a_1, \dots, a_n \geq 0$ die Ungleichung $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$ mittels (i).

A 2.8.33 Gegeben seien reelle Zahlen a_k, $k = 1, \dots, n$, so dass $a_k \neq 0$ für mindestens ein k gelte.
Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|_2^2$ unter der Nebenbedingung

$$g(x_1, \dots, x_n) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \;=\; 1 \,.$$

Hinweise:
Zur Bestimmung geeigneter Kandidaten verwende man die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren. Zur näheren Untersuchung ist die Cauchy-Schwarz-Ungleichung hilfreich.

.... (Gegenbeispiele)

A 2.8.34 Gegeben sei die Funktion $h \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $h(x, y, z) = x + y + z$. Untersuchen Sie, ob die Funktion h unter den beiden Nebenbedingungen $x^2 - y^2 = 1$ und $2x + z = 1$ Extrema besitzen.

. . . . (Kombi – ohne Lsg)

A 2.8.35 Sei $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 3\right\}$ und $f \colon D \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = x^2+2y^2-x+2y+3$. Untersuchen Sie f auf globale Extrema.

A 2.8.36 Sei $B_2(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$. Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema des Abstandes der Punkte in $B_2(0)$ vom Punkt $(1, 0)$.

. . . . (Anwendungsaufgaben – ohne Lsg)

A 2.8.37 Der funktionale Zusammenhang zwischen den Absatzquantitaten y_1, y_2 zweier Produkte P_1 und P_2 und ihren Preisen $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ sei durch die Absatzfunktionen f_1 und f_2 mit $y_1 = f_1(x_1, x_2) := 100 - 4x_1 - 2x_2$ bzw. mit $y_2 = f_2(x_1, x_2) := 180 - 3x_1 - 9x_2$ gegeben. Die (ökonomischen) Definitionsbereiche von f_1 bzw. f_2 seien

$$D_1 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \wedge f_1(x_1, x_2) > 0\right\}$$

bzw.

$$D_2 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \wedge f_2(x_1, x_2) > 0\right\}$$

Die Umsatzfunktion E sei gegeben durch $E(x_1, y_1, x_2, y_2) := x_1y_1 + x_2y_2$.

(a) Geben Sie die Umsatzfunktion nur als Funktion der Preise an.

(b) Bestimmen Sie das Maximum des Umsatzes und begründen Sie, warum ein Maximum vorliegt.

(c) Bestimmen Sie den Absatz bei maximalem Umsatz.

A 2.8.38 Eine Firma kauft jeden Tag 1000 RSE[4] Rohschokolade ein, um daraus ihre sehr beliebten Pralinen herzustellen, wozu ihr drei Maschinen zur Verfügung stehen. Die erste stellt aus jeder RSE Pralinen im Wert von 3200 PWE[5] her, verursacht jedoch pro Tag 500000 PWE Fixkosten. Die zweite Maschine hat Fixkosten von 200000 PWE und stellt aus x RSE Pralinen im Wert von $5600x - 4x^2$ PWE her, wobei der quadratische Term auf mit zunehmender Auslastung steigende Schokoladenverdunstung zurückzuführen ist. Die dritte Maschine stellt aus x RSE Pralinen im Wert von $8800x - 12x^2$ PWE her. Sie verursacht keine Fixkosten, jedoch zweigen die sie betreibenden Subunternehmer illegalerweise die Hälfte der Rohschokolade für eigene Zwecke ab. Wie müssen die 1000 RSE pro Tag auf die drei Maschinen aufgeteilt werden, damit der Erlös maximal wird?
Formulieren Sie das Problem als Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen und lösen Sie es mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren.

A 2.8.39 Das Potenzial V eines elektrischen Dipol, der in Richtung $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ausgerichtet ist, werde durch $V \colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\langle p,x\rangle}{\|x\|_2^3}$ beschrieben. Bestimmen Sie die Extrema dieses Potenzials auf der Einheitssphähre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

A 2.8.40 Ein Kleinkunstmitarbeiter (ehemaliger Mathematikstudent) vermietet Zelte für Flugveranstaltungen von Fledermäusen. Für den Bau der quaderförmigen Zelte stehen ihm für die 12 Kanten Stangen der Gesamtlänge $L > 0$ und für die 6 Seitenflächen (inklusive des Bodens) Planen der Gesamtfläche $S > 0$ zur Verfügung. Da er sein Studium bereits nach dem

[4] RSE = Rohschokoladeneinheit
[5] PWE = Pralinenwährungseinheit

ersten Semester abgebrochen hat, fragt er nun einen seiner ehemaligen Kommilitonen, ob die Seitenlängen $a > 0$, $b > 0$ und $c > 0$ so gewählt werden können, dass das Zeltvolumen maximal und gleichzeitig alles Material verbraucht wird. Für welche Parameter S und L ist dies überhaupt möglich ?

A 2.8.41 Sei $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots < \varepsilon_n$ ein n-Energieniveau-System. Bestimmen Sie das Maximum der Entropie $S\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$, $(p_1, \ldots, p_n) \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} p_k \ln(p_k)$, wobei die Besetzungswahrscheinlichkeiten p_k der Energieniveaus ε_k die Nebenbedingungen $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$ und $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k \varepsilon_k = E \in [\varepsilon_1, \varepsilon_n]$ erfüllen.

A 2.8.42 Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gelte $A^{\mathrm{T}} = A$. Zeigen Sie, dass jedes $v \in \partial B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$v^{\mathrm{T}} A v \;=\; \min_{x \in \partial B_1(0)} x^{\mathrm{T}} A x$$

ein Eigenvektor von A ist. Zeigen Sie weiter $A(\{v\}^{\mathrm{T}}) \subseteq \{v\}^{\mathrm{T}}$, wobei

$$\{v\}^{\mathrm{T}} \;=\; \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w\rangle = 0\}$$

das orthogonale Komplement von v ist, und schließen Sie induktiv, dass eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A existiert.
Hinweis: Verwenden Sie die Lagrange-Multiplikator-Methode.

A 2.8.43 Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ sein M_n die Menge aller in den Einheitskreis des $\mathbb{R}^2$ einbeschriebenen n-Ecke. Gibt es in M_n Elemente mit größtem Flächeninhalt ?

Tipp: Verwenden Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

. . . . (Lagrange n-dimensional – ohne Lsg)

A 2.8.44 Bestimmen Sie für gegebene $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ das Maximum von $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k$ unter der Nebenbedingung $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$

(a) durch Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung;

(b) durch Verwendung der Lagrange-Multiplikatormethode.

. . . . (Lagrange auf Kugeln/Kugelschnitten – ohne Lsg)

A 2.8.45 Berechnen Sie Minimum und Maximum von $f\colon \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto 2xy$.

A 2.8.46 Bestimmen Sie die Extrema von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $(x-2)^2 + y^2 = 9$ mittels Lagrange-Multiplikatormethode.
Die Art der Extrema ist dabei mit Hilfe einer Karte von f zu ermitteln, in die man die Nebenbedingung einzeichnet.

A 2.8.47 Begründen Sie, warum die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x + 3y - 2z$ auf der Kugeloberfläche $K \;=\; \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \;=\; 14\}$ ein globales Maximum und Minimum annehmen muss.
Berechnen Sie die Stellen, an denen das Maximum bzw. Minimum angenommen wird.

A 2.8.48 Berechnen Sie die Maxima und Minima von $U(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - (x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

A 2.8.49 Bestimmen Sie alle Extrema der folgenden Funktion $f_k\colon M_k \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, mit

$$\begin{aligned} M_1 &= \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\Big\}\,,\ f_1(x, y, z) = x + 2y - 3z, \\ M_2 &= \Big\{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4,\ w^2 + y^2 + z^2 = 2\Big\}\,,\ f_2(w, x, y, z) = w^2 + x^2. \end{aligned}$$

....(Abstandsaufgaben in $\mathbb{R}^2$ – ohne Lsg)

A 2.8.50 Welchen Abstand hat der Punkt $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ von der Neil-Parabel

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon y^2 = x^3\}\ ?$$

A 2.8.51 Begründen Sie kurz und knapp, warum es Elemente $a \in A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 6\}$ und $b \in B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 5\}$ mit $d(A, B) = \|a - b\|_2$ gibt. Bestimmen Sie diese.

....(Abstandsaufgaben in $\mathbb{R}^3$ – ohne Lsg)

A 2.8.52 Bestimmen Sie den Euklidischen Abstand des Punktes $(1, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$ zum Rotationshyperboloid $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.

A 2.8.53 Bestimmen Sie den minimalen Abstand des Punktes $(1, 0, 0)$ von der Ebene $x + y = z$.

....................................(Lagrange auf Zylinder/Zylinderschnitten – ohne Lsg)

A 2.8.54 Finden Sie auf dem Schnitt des Zylinders $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ und der Ebene $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$ die Punkte minimalen und maximalen Abstandes zum Nullpunkt.

A 2.8.55 Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto 3y + 4z$ auf der Schnittkurve des Zylinders $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ mit der Ebene $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$.

A 2.8.56 Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y, z) := 3y^2 - 2z$, eingeschränkt auf den Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$ mit dem Hyperboloid $x^2 + 4y^2 - z^2 = 3$, auf Extrema.

A 2.8.57 Begründen Sie, warum auf der Menge $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, y^2 + z^2 = 1\}$ die Funktionen (i) $\Phi(x, y, z) = x + y + z$ und (ii) $\Psi(x, y, z) = x + y^2 + z$ jeweils ihre globalen Extrema annehmen. Bestimmen Sie diese.

......................(Lagrange mit $\geq$ Bedingungen (ggf. KKT-Bedingungen) – ohne Lsg)

A 2.8.58 Berechnen Sie Minimum und Maximum der Funktion $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ unter den Nebenbedingungen $xyz = a$ (wobei $a > 0$) und $x, y, z \geq 0$.

A 2.8.59 Zeigen Sie: Für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \ \leq\ \sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}} \ \leq\ \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

A 2.8.60 Zeigen Sie $\max\limits_{\substack{x,y,z>0 \\ x+y+z=1}} xyz = \frac{1}{27}$.

....(ohne Lsg)

A 2.8.61 Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

(a) $f(x,y) = xy^2$ unter der Nebenbedingung $x + y = 1$

(b) $f(x,y) = x + y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$

(c) $f(x,y) = x^2y^2(3 - x^2 - y^2)$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$

(d) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y = 1$

(e) $f(x,y,z) = 5x + y - 3z$ unter den Nebenbedingungen $x + y + z = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

A 2.8.62 Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f(x,y,z) = xyz$ auf dem Durchschnitt der Ebenen

$$\begin{aligned} E_1 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ E_2 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \colon x + y - z = 0 \right\} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

(a) Vielleicht war das μ auch beim ersten Vektor ...

(b) E_2 enthält den Kern der linearen Abbildung $A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) E_2 lässt sich auch darstellen als

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(d) Die Hessesche Normalform für E_1 liefert die zweite Nebenbedingung.

A 2.8.63 Minimieren Sie $f(x,y,z) = 8 + y + 8z$ unter der Nebenbedingung $xyz = 1$.

A 2.8.64 Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $x - y^2 = -1$.

Kapitel 3

Integralrechnung

3.1 Iterierte Riemann-Integrale

Approximation von Quadern

Stetigkeit des Integrals

Integration von Banach-Raum-wertigen Funktionen

A 3.1.1 Welche der folgenden Funktionen auf dem $\mathbb{R}^2$ sind stetig und besitzen kompakten Träger? Skizzieren Sie die Graphen dieser Funktionen und berechnen Sie für die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger jeweils das Volumen unter den Graphen durch Integration über $\mathbb{R}^2$.

(a) $f(x,y) := \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2}, & x^2+y^2<1 \\ 0, & x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$ (ii) $g(x,y) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-y^2}, & x^2+y^2<1 \\ 0, & x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$

(c) $h(x,y) := \begin{cases} (1-x^2)(1-y^2), & \max(|x|,|y|)<1 \\ 0, & \max(|x|,|y|) \geq 1 \end{cases}$

A 3.1.2 Zeigen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nicht äquivalent sind, indem Sie jeweils eine Folge $f_k \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ angeben, die bezüglich $\|\cdot\|_1$ aber nicht bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ bzw. bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ aber nicht bezüglich $\|\cdot\|_1$ konvergiert.

A 3.1.3 Zeigen Sie, dass für das reell-wertige Integral $I\colon C_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ die Monotonie-Eigenschaft äquivalent zu $|I(f)| \leq I(|f|)$ ist.

A 3.1.4 Bestimmen Sie für den Fall der Massendichte $\rho(x,y) := \mathrm{e}^{x+y}$ den Schwerpunkt

$$S = \frac{1}{M}\int_Q \rho(x,y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} d(x,y)$$

des Quadrats $Q := [0,1]\times[0,1]$, wobei $M := \int_Q \rho(x,y)d(x,y)$ die Gesamtmasse von Q ist.

3.2 Maßtheorie

Inhalte auf Halbringen und Ringen

A 3.2.1 Ein Mengensystem $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ von Teilmengen einer Menge Ω heißt ein **Halbring**, falls

(a) $\emptyset \in \mathcal{H}$ ist,

(b) für $A, B \in \mathcal{H}$ auch $A \cap B \in \mathcal{H}$ gilt, und

(c) es für $A, B \in \mathcal{H}$ disjunkte $C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{H}$ mit $A \setminus B = \bigcup_{k=1}^m C_k$ gibt.

Warum ist der Durchschnitt aller einen Halbring $\mathcal{H}$ enthaltenden Ringe selbst wieder ein Ring?

A 3.2.2 Sei Ω eine beliebige Menge. Zeigen Sie, dass für jede Teilmenge $A \subset \Omega$, $A \neq \Omega$, das Mengensystem $\{\emptyset, A\}$ der kleinste Ring, der A enthält, und das Mengensystem $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ die kleinste Algebra, die A enthält, ist.

A 3.2.3 Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{R}$ aller endlichen Teilmengen von Ω ein Ring ist, und dass $\mathcal{R}$ genau dann eine Algebra ist, wenn Ω endlich ist.

A 3.2.4 (a) Zeigen Sie $A - B = S(A, A \cap B)$ und $A \cap B = S(A \cup B, S(A, B))$ für Teilmengen $A, B \subset \Omega$.

(b) Beweisen Sie, dass eine Menge $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ von Teilmengen von Ω genau dann eine Algebra ist, wenn $\Omega \in \mathcal{R}$ gilt und mit $A, B \in \mathcal{R}$ auch $A^c := \Omega - A \in \mathcal{R}$ und $A \cup B \in \mathcal{R}$ gilt.

A 3.2.5 Beweisen Sie die Formel $A \cup B = S(S(A, B), A \cap B)$ für Teilmengen $A, B \subset \Omega$.

A 3.2.6 Zeigen Sie: Der Durchschnitt aller einen Ring $\mathcal{R}$ enthaltenden σ-Ringe ist selbst wieder ein σ-Ring.

....(Inhalte)

A 3.2.7 Sei Ω abzählbar unendlich und bestehe $\mathcal{R}$ aus den Teilmengen von Ω, die entweder endlich sind oder deren Komplement endlich ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}$ ein Ring ist.

(b) Beweisen Sie, dass die durch $\mu(A) := 0$ für endliche A sowie $\mu(A) := \infty$ für die A, deren Komplement $\Omega \setminus A$ endlich ist, definierte Mengenfunktion $\mu\colon \mathcal{R} \to [0, \infty]$ additiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass μ nicht abzählbar additiv ist.

A 3.2.8 Ist $\mathcal{R}$ ein beliebiger Ring von Teilmengen von Ω, so wird durch $\mu\colon \mathcal{R} \to [0, \infty]$,

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases},$$

ein Inhalt (d.h. eine additive Mengenfunktion) auf $\mathcal{R}$ definiert.

A 3.2.9 Zeigen Sie: Für einen Inhalt $\mu\colon \mathcal{R} \to [0, \infty[$ auf einem Ring $\mathcal{R}$ wird durch

$$d(A, B) := \mu(S(A, B)) = \mu(A - B) + \mu(B - A) \tag{3.1}$$

eine Pseudometrik definiert (d.h., $d(A, A) = 0$, Symmetrie und Dreiecksungleichung gelten).

. . . . (Rechnen mit ∞/dyadische Intervalle)

A 3.2.10 Zeigen Sie **Lemma 1.1**: Für x, $y \in [-\infty, \infty]$ gilt: $x^- = (-x)^+$, $|x| = x^+ + x^-$, $x = x^+ - x^-$, $(xy)^+ = x^+y^+ + x^-y^-$, $(xy)^- = x^-y^+ + x^+y^-$. Falls $x \le y$, so gilt $x^+ \le y^+$ und $x^- \ge y^-$. Falls $x + y$ definiert ist, so gilt auch $(x + y)^+ \le x^+ + y^+$, $(x + y)^- \le x^- + y^-$ sowie $(x + y)^+ + x^- + y^- = (x + y)^- + x^+ + y^+$.

A 3.2.11 Zeigen Sie **Lemma 1.2**:
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x, y \in [-\infty, \infty]$ mit $x + y$ definiert gilt: $x + y \le \alpha \Longleftrightarrow y \le -x + \alpha$.

A 3.2.12 Für jedes $a \in \mathbb{Z}^n$ und $k \in \mathbb{N}_0$ sei $I_k^a = \bigtimes_{i=1}^{n} (2^{-k}) \cdot [a_i, a_i + 1[$. Zeigen Sie: (3 P)

Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ist die Familie $(I_k^a)_{a \in \mathbb{Z}^n}$ eine Überdeckung von $\mathbb{R}^n$ mit paarweise disjunkten rationalen Intervallen. Sind $j, k \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{Z}^n$ beliebig mit $j \le k$, so sind I_k^a und I_j^b disjunkt oder sonst $I_k^a \subset I_j^b$.

A 3.2.13 Zeigen Sie **Lemma 1.3**:
Zu jeder offenen Menge U in $\mathbb{R}^n$ existiert eine aufsteigende Folge $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Mengen mit $U = \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$ und derart, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$, U_k offen, $\overline{U_k}$ kompakt und $\overline{U_k} \subset U$.

. . . . (ohne Lsg)

A 3.2.14 Zeigen Sie: Jedes offene Intervall $\emptyset \ne I \subseteq \mathbb{R}^n$ kann in abzählbar viele offene, paarweise disjunkte Würfel W_k und eine Nullmenge N als

$$I \;=\; N \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k$$

zerlegt werden. Zeigen Sie weiter, dass $\mathrm{Vol}(I) \;=\; \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Vol}(W_k)$

Prämaße und σ-Algebren

A 3.2.15 Beweisen Sie, dass ein Inhalt μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ genau dann ein Prämaß ist, wenn μ in folgendem Sinne von unten stetig ist: Für jede aufsteigende Folge $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ von Mengen $A_k \in \mathcal{R}$, $k \in \mathbb{N}$, mit

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}$$

gilt

$$\lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

. . . . (σ-Algebren)

A 3.2.16 Jeder endliche Ring $\mathcal{R}$ (bzw. jede endliche Algebra $\mathcal{A}$) ist auch ein σ-Ring (bzw. eine σ-Algebra).

A 3.2.17 Finden wir zu jeder nichtleeren Menge Ω eine σ-Algebra ?

A 3.2.18 Geben Sie die maximale und die minimale σ-Algebra zu einer Menge $\Omega \neq \emptyset$ an.

Alternative Formulierung:

Sei $\Omega \neq \emptyset$. Bestimmen Sie die minimale und die maximale σ-Algebra in Ω.

A 3.2.19 Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein beliebiger Messraum. Zeigen Sie:

(a) Endliche Vereinigungen und endliche Durchschnitte messbarer Mengen sind messbar.

(b) Sind A und B messbar, dann ist auch $A \setminus B$ messbar.

(c) Abzählbare Durchschnitte messbarer Mengen sind wieder messbar.

A 3.2.20 Für welche Mengen Ω ist die Menge $\mathcal{A} := \{A \subset \Omega \,|\, A \text{ hat endlich viele Elemente}\}$ der endlichen Teilmengen von Ω eine σ-Algebra ?

A 3.2.21 (a) Zeigen Sie: Jeder Durchschnitt $\bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i$ einer Familie $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ von σ-Algebren in einer Menge $\Omega \neq \emptyset$ ist selbst wiederum eine σ-Algebra in Ω.

(b) Warum garantiert uns die Aussage (a) die Existenz von $\sigma(\mathfrak{E})$ zu einem Erzeuger $\mathfrak{E}$?

Alternative Formulierungen:

Sei $\underline{\mathfrak{M}} \neq \emptyset$ eine beliebige Menge von σ-Algebren auf Ω. Zeigen Sie:

(a) **Satz 4.12:** Dann ist der Durchschnitt $\mathfrak{A}_0 \;=\; \bigcap\limits_{\mathfrak{A} \in \underline{\mathfrak{M}}} \mathfrak{A}$ selbst eine σ-Algebra auf Ω.

(b) Ist $\mathfrak{E}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{P}(\Omega)$ und $\underline{\mathfrak{M}}$ die Menge derjenigen σ-Algebren auf Ω, die $\mathfrak{E}$ als Teilmenge enthalten, so ist $\mathfrak{A}_0$ die kleinste (bzgl. der Mengeninklusion) σ-Algebra auf Ω, die $\mathfrak{E}$ als Teilmenge enthält. (Sie heißt *die von* $\mathfrak{E}$ *erzeugte σ-Algebra auf* Ω und wird mit $\sigma(\mathfrak{E}) = \sigma_\Omega(\mathfrak{E})$ bezeichnet.

A 3.2.22 Zeigen Sie **Lemma 4.13:** Ist $\mathfrak{A}$ eine σ-algebra auf einer Menge Ω und $E \subset \Omega$, dann ist

$$\mathfrak{A} \sqcap E : \;=\; \{\, A \cap E \mid A \in \mathfrak{A} \,\} \qquad \text{(die } \textbf{Spur-}\boldsymbol{\sigma}\textbf{-Algebra}\text{)}$$

eine σ-Algebra auf E. Falls $E \in \mathfrak{A}$, so gilt $\mathfrak{A} \sqcap E \;=\; \{\, A \mid A \in \mathfrak{A} \text{ und } A \subset E \}$.

A 3.2.23 Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Bestimmen Sie $\sigma\left(\{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}\}\right)$ und $\sigma\left(\{\emptyset, \{1, 2, 4\}\}\right)$.

A 3.2.24 Zeigen Sie: Für $\Omega = \mathbb{Q}$ und $\mathfrak{E} := \{]a, b] \cap \mathbb{Q} \colon a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ ist $\sigma(\mathfrak{E}) \;=\; \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

A 3.2.25 Warum ist der Durchschnitt aller einen Halbring $\mathcal{H}$ von Teilmengen von Ω enthaltenden σ-Algebren selbst wieder eine σ-Algebra?

A 3.2.26 Gegeben sei der topologische Raum $X := (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ mit $\mathcal{T} := \mathcal{T}_{d_{|\cdot|}}$ und $\mathcal{B}(\mathcal{T}) := \sigma(\mathcal{T})$ die entsprechende Borel-σ-Algebra von X. Zeigen oder widerlegen Sie: $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ enthält

(a) alle abgeschlossenen Teilmengen von X.

(b) alle abzählbaren Durchschnitte von offenen Mengen (diese heißen G_δ-Mengen).

(c) alle abzählbaren Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen (diese heißen F_σ-Mengen).

(d) alle abzählbaren Vereinigungen von G_δ-Mengen.

(e) alle abzählbaren Durchschnitte von F_σ-Mengen.

Der Fortsetzungssatz von Carathéodory

Nullmengen

Translations- und Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes

. . . . (Eigenschaften des Lebesgue-Maßes)

A 3.2.27 Zeigen Sie: Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so gilt $K \in \mathfrak{L}_n$ und $\lambda_n(K) < \infty$.

A 3.2.28 Finden Sie ein Beispiel für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und eine Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{A}$ mit $A_k \supset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \neq \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) .$$

A 3.2.29 Das Lebesgue-Maß ist translationsinvariant, und jedes translationsinvariante Maß μ auf der Lebesgue-σ-Algebra mit $\mu((0,1]^n) = 1$ ist identisch mit dem Lebesgue-Maß.

A 3.2.30 (a) Zeigen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und jede offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ die Identität

$$\mu(G + x) = \mu(G) . \quad \text{(Translationsinvarianz)}$$

(b) Zeigen Sie für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und jede offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ die Identität

$$\mu(\lambda G) = |\lambda|^n \mu(G) .$$

(c) Zeigen Sie für jede invertierbare lineare Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und jede offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ die Identität

$$\mu(\Phi(G)) = |\det(\Phi)|\, \mu(G) .$$

Hinweis: Die Abbildung $G \mapsto \mu(\Phi(G))$ ist ein translationsinvariantes Maß (warum?) und somit ein Vielfaches des Lebesgue-Maßes. Verwenden Sie dies, um die letzte Identität zunächst für orthogonale Matrizen und für Diagonalmatrizen zu zeigen. Führen Sie anschließend den allgemeinen Fall mittels Hauptachsentransformation auf diese beiden Fälle zurück. Lsg: Die Abbildung $G \mapsto \lambda(\Phi(G))$ ist ein Maß, welches translationsinvariant ist, denn nach

A 3.2.31 Sei $M = [0,1] \setminus \{\frac{m}{2^n} \ : \ m, n \in \mathbb{N}\}$ und bezeichne μ das Lebesgue-Maß. Berechnen Sie

$$\sup_{\substack{F\subset M \\ F \text{ abgeschlossen}}} \mu(F) , \qquad \inf_{\substack{M\subset G \\ G \text{ offen}}} \mu(G) .$$

Ist M Lebesgue-messbar? Begründen Sie Ihre Antwort auch mit Hilfe der Eigenschaften einer σ-Algebra. Falls M Lebesgue-messbar, berechnen Sie auch $\mu(M)$.

. . . . (Spezielle Mengen in der Differenz von σ-Algebren)

A 3.2.32 Es gibt Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$ mit $M \notin \mathcal{M}$.

A 3.2.33 Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge C eine Menge enthält, die nicht Borel-messbar ist.

A 3.2.34 (a) Zeigen Sie: Die Vereinigung abzählbar vieler Lebesguescher Nullmengen ist wieder eine Lebesguesche Nullmenge.

(b) Sind $\mathbb{N}$,$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ Lebesgue-messbar ? Falls ja, bestimmen Sie jeweils das Lebesgue-Maß.

(c) Geben Sie eine Lebesguesche Nullmenge $M \subset \mathbb{R}$ an, deren Abschluss $\overline{M}$ keine Lebesguesche Nullmenge ist. Begründen Sie Ihre Wahl.

A 3.2.35 Zeigen Sie:

(a) Jede einelementige Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist eine LEBESGUEsche Nullmenge.

(b) Jede abzählbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist eine LEBESGUEsche Nullmenge

(c) $\mathbb{Q}^n$ ist eine LEBESGUEsche Nullmenge.

A 3.2.36 Gegeben sei der Lebesguesche Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{R}), \lambda_1)$. Finden Sie ein Beispiel für eine überabzählbare Vereinigung von λ_1-Nullmengen, welche Lebesgue-messbar, aber keine λ_1-Nullmenge ist.

A 3.2.37 Sind die folgenden Teilmengen des Einheitswürfels $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ Lebesgue-messbar?
Bestimmen Sie gegebenenfalls ihr Lebesgue-Maß.

(a) $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ mit den Mengen $A_k := \left]\frac{1}{k}, 1\right[\times \left]0, \frac{k-1}{k}\right]$

(b) $B := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ mit den Mengen $B_k := \left\{\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}\right\} \times \left]0, 1\right]$

A 3.2.38 Begründen Sie, dass die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ Lebesgue-messbar sind, und bestimmen Sie jeweils ihr Lebesgue-Maß.

(a) $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ mit den Mengen $A_k := \left]\frac{1}{k}, 3\right[\times \left]0, \frac{k-1}{2k}\right]$

(b) $B := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ mit den Mengen $B_k := \left\{\frac{k+1}{k}, \frac{k+2}{k}, \ldots, \frac{2k-1}{k}\right\} \times \left]0, 1\right]$

A 3.2.39 (a) Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge $C := \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C_k \times [0,1]$ eine Borel-messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist, wobei $C_k := \{x = 0.x_1x_2x_3 \ldots \mid \forall 1 \le l \le k :\ x_l \neq 5\}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge C aus (a) bzgl. des Lebesgue-Maßes eine Nullmenge ist.

A 3.2.40 Skizzieren Sie $C_k := \left\{\ x = 0.x_1x_2x_3 \ldots \ \middle|\ \forall 1 \le l \le k\colon x_l \neq 7\ \right\}$ für $k = 1, 2$. Was ist $\lambda_1(C_2)$?

A 3.2.41 Begründen Sie die Lebesgue-Messbarkeit der Cantor-Menge $C := \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C_k \times \left]0,1\right]$ mit den Mengen $C_k := \left\{\ x = 0.x_1x_2x_3 \ldots \ \middle|\ \forall 1 \le l \le k\colon x_l \neq 7\ \right\}$ und bestimmen Sie ihr Lebesgue-Maß.

A 3.2.42 Ist die Teilmenge $A := \displaystyle\bigcup_{k=0}^{\infty} \left[k, k + \frac{1}{2^k}\right[$ von $\mathbb{R}$ Lebesgue-messbar ?
Bestimmen Sie gegebenenfalls ihr Lebesgue-Maß.

A 3.2.43 Bestimmen Sie das Lebesgue-Maß von $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$ und $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left]n-\frac{1}{n}, n+\frac{1}{n}\right[$.

A 3.2.44 Sind die folgenden Teilmengen Lebesgue-messbar?

(a) $A := [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$

(b) $B := \bigcup_{k=1}^{\infty} \left]\frac{k-1}{k+1}, \frac{k}{k+2}\right] \times \left]\frac{1}{k}, 1\right] \subset \mathbb{R}^2$

(c) $C := \left\{x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} \,\middle|\, \forall k \in \mathbb{N} : a_k \in \{0,2\}\right\} \subset \mathbb{R}$

(d) $D := \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k} + \mathbb{Q}\right) \subset \mathbb{R}$

(e) $E := \bigcup_{k=1}^{\infty} \left]k, \frac{k^2+1}{k}\right] \times \left]0, 1\right] \subset \mathbb{R}^2$ Falls ja, besitzen sie ein endliches Lebesgue-Maß?

Auswahl von (d) und (e) sowie Variation von (c):

Überprüfen Sie die folgenden Mengen auf (Lebesgue-)Messbarbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls ihr Lebesgue-Maß.

(a) $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k} + \mathbb{Q}\right) \subset \mathbb{R}$,

(b) $B := \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[k, \frac{k^2+1}{k}\right] \times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$,

(c) $C := \left\{x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 5^{-k} \;\middle|\; \forall k \in \mathbb{N} : a_k \in \{0,1,2,4\}\right\} \subset \mathbb{R}$.

Äußere Maße

. . . . (Äußere Maße)

A 3.2.45 Eine Abbildung $\eta\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,+\infty]$ heißt ein **äußeres Maß** auf Ω, falls

(i) $\eta(\emptyset) = 0$

(ii) Für alle $A \subset B \subset \Omega$ gilt $\eta(A) \le \eta(B)$. (**Isotonie**)

(iii) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{P}(\Omega)$ gilt: $\eta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \eta(A_n)$. (**$\sigma$-Subadditivität**)

(a) Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Sind die folgenden Funktionen, definiert auf $\mathcal{P}(\Omega)$, äußere Maße?

$$\eta_1(A) := \begin{cases} 0\,, & A \text{ endlich} \\ 1\,, & A \text{ unendlich} \end{cases} \quad , \qquad \eta_2(A) := \begin{cases} 0\,, & A \text{ abzählbar} \\ 1\,, & A \text{ überabzählbar} \end{cases} \quad .$$

(b) Zeigen Sie: Endliche oder abzählbar unendliche Summen äußerer Maße sind wieder äußere Maße.

.... (Eigenschaften von Maßen)

A 3.2.46 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum. Zeigen Sie:

(a) μ ist additiv, d.h., für paarweise disjunkte $A_k \in \mathcal{A},\ k = 1, \ldots, n$ gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)\ .$$

(b) μ ist isoton, d.h., $\forall A, B \in \mathcal{A}\ :\ \ (A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B))$

(c) Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ endlich, dann besitzt jede messbare Menge endliches Maß.

Hinweis: Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **endlich**, falls $\mu(\Omega) < \infty$ gilt.

A 3.2.47 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A_k \in \mathcal{A}$ für $k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: (2+2 P)

(a) Für $\liminf\limits_{k\to\infty} A_k \ := \bigcup\limits_{\ell\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{k=\ell}^{\infty} A_k$ gilt: $\mu\Big(\liminf\limits_{k\to\infty} A_k\Big) \ \leq\ \liminf\limits_{k\to\infty} \mu(A_k).$

(b) Für $\limsup\limits_{k\to\infty} A_k \ := \bigcap\limits_{\ell\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{k=\ell}^{\infty} A_k$ und $\mu(\Omega) < \infty$ gilt: $\mu\Big(\limsup\limits_{k\to\infty} A_k\Big) \ \geq\ \limsup\limits_{k\to\infty} \mu(A_k).$

.... (Beispiele spezieller Maßräume/vollständige Maßräume)

A 3.2.48 (a) Sei $\mathcal{A}$ die Menge derjenigen Teilmengen von $\mathbb{R}$, die abzählbar sind oder ein abzählbares Komplement in $\mathbb{R}$ besitzen. Zeigen Sie, dass $\big(\mathbb{R}, \mathcal{A}\big)$ ein Messraum ist.

Alternative Formulierung:

Sei $\mathcal{A}$ die Menge derjenigen Teilmengen von $\mathbb{R}$, die abzählbar sind oder ein abzählbares Komplement in $\mathbb{R}$ besitzen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

(b) Auf $\mathcal{A}$ aus (a) sei eine Abbildung μ durch $\mu(A) \ := \begin{cases} 0\ , & \text{falls } A \text{ abzählbar}\ , \\ 1\ , & \text{falls } \mathbb{R}\setminus A \text{ abzählbar}\ , \end{cases}$

definiert. Ist $\big(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu\big)$ ein Maßraum ?

Alternative Formulierung:

Auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$ aus (b) sei eine Abbildung μ durch

$$\mu(A) \ := \begin{cases} 0\ , & \text{falls } A \text{ abzählbar}\ , \\ 1\ , & \text{falls } \mathbb{R}\setminus A \text{ abzählbar}\ , \end{cases}$$

definiert. Ist μ ein Maß ?

A 3.2.49 Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ einer beliebigen Menge Ω wird durch $\mu\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$,

$$\mu(A) := \begin{cases} \#(A), & A \text{ endliche Teilmenge von } \Omega \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Maß (d.h. eine abzählbar additive Mengenfunktion) definiert, das sogenannte Zählmaß.

A 3.2.50 Gegeben sei der Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\Omega \neq \emptyset$ beliebig und mit der σ-Algebra $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$. Desweiteren sei $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\nu(A) := \begin{cases} \#A\,, & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ ein vollständiger Maßraum ist. ν heißt das **Zählmaß**.

(b) Geben Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung für Ω an, damit $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ zu einem (i) σ-endlichen bzw. (ii) endlichen Maßraum wird.

A 3.2.51 Entscheiden Sie (mit Begründung), ob der Lebesguesche Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{R}), \lambda_1)$

(i) vollständig (ii) σ-endlich ist.

A 3.2.52 Zeigen Sie, dass der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\Omega = \mathbb{R},\ \mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}\},\ \mu \equiv 0$ nicht vollständig ist. Was ist seine Vervollständigung?

A 3.2.53 Seien $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\}$ gegeben. Auf der σ-Algebra $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ sei ν ein Maß, so dass $\nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = 0$ und $\nu(\{3\}) = \nu(\{4\}) = 1$ gelte. Zeigen Sie:

(a) Mit $\mu = \nu|_{\mathcal{A}}$ ist der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ nicht vollständig.

(b) Finden Sie die kleinste σ-Algebra $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$, so dass $(\Omega, \mathcal{B}, \nu|_{\mathcal{B}})$ vollständig ist.

(c) Was ist die Vervollständigung von $(\Omega, \mathcal{A}, \nu|_{\mathcal{A}})$?

A 3.2.54 Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein beliebiger Messraum mit $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(\Omega)$. Geben Sie ein Beispiel für ein Maß μ an, so dass $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ endlich, aber nicht vollständig ist.

.... (endliche Maße & Wahrscheinlichkeitsräume)

A 3.2.55 Zeigen Sie: Sind μ und ν zwei endliche Maße auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ und a, b nichtnegative reelle Zahlen, dann ist auch $\lambda := a\mu + b\nu$ ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

Wann wird das Maß λ zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß?

A 3.2.56 Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein beliebiger Messraum und $\omega \in \Omega$ beliebig, jedoch fest gewählt. Zeigen Sie, dass $(\Omega, \mathcal{A}, \delta_\omega)$ mit $\delta_\omega \colon \mathcal{A} \mapsto \{0, 1\}$, definiert durch

$$\delta_\omega(A) := \begin{cases} 1\,, & \text{falls } \omega \in A\,, \\ 0\,, & \text{falls } \omega \notin A\,, \end{cases}$$

zu einem Wahrscheinlichkeitsraum wird. Das Maß δ_ω nennt man das **Dirac-Maß**.

A 3.2.57 Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \,]0, 1[$ beliebig sowie $q := 1 - p$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \beta_n^p)$ mit dem **Bernoulli-Maß** $\beta_n^p \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$, definiert durch

$$\beta_n^p := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_k$$

(wobei δ_k das Diracmaß bezeichnet), zu einem Wahrscheinlichkeitsraum wird. Geben Sie die bezüglich „$\subset$“ (Inklusion) maximale β_n^p-Nullmenge an.

3.3 Integration bzgl. eines Maßes

Elementare Eigenschaften des Integrals

Integrierbarkeit stetiger Funktionen

Messbare Abbildungen

. . . . (Messbare Abbildungen und Bildmaß)

A 3.3.1 Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum.

(a) Bestimmen Sie alle $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen für den Fall, dass $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

(b) Bestimmen Sie alle $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen für den Fall, dass $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$.

A 3.3.2 Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum. Zeigen Sie für $\mathcal{A}$-messbare numerische Funktionen f, g auf Ω:

$$\begin{array}{rlrl} \text{(i)} & \{x \in \Omega \;:\; f(x) < g(x)\} \in \mathcal{A}\,, & \text{(ii)} & \{x \in \Omega \;:\; f(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{A}\,, \\ \text{(iii)} & \{x \in \Omega \;:\; f(x) = g(x)\} \in \mathcal{A}\,, & \text{(iv)} & \{x \in \Omega \;:\; f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{A}\,. \end{array}$$

A 3.3.3 Seien $(\Omega, \mathcal{A}), (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ zwei Messräume, so dass $\Omega = \{u, v, w, x, y, z\}$ und $\tilde{\Omega} = \{a, b, c\}$. Durch $f(u) = f(v) = f(x) = f(z) = b$ und $f(w) = f(y) = a$ sei weiter eine Funktion $f : \Omega \to \tilde{\Omega}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie unter f die Urbilder der Elemente von $\tilde{\mathcal{A}}$, falls $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(\tilde{\Omega})$.

(b) Welches ist die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω, so dass $\forall B \in \tilde{\mathcal{A}} \;:\; f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ gilt.[1]

(c) Auf der Potenzmenge von Ω sei durch

$$\nu(\emptyset) \;=\; \nu(\{x\}) \;=\; \nu(\{w\}) \;=\; \nu(\{z\}) \;=\; 0\,, \qquad \nu(\{y\}) = 1\,,\;\; \nu(\{u\}) = 6\,,\;\; \nu(\{v\}) = 35\,,$$

eine Funktion definiert. Zeigen Sie, dass $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \nu)$ ein endlicher Maßraum ist.

(d) Geben Sie die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ an, für welche $(\Omega, \mathcal{A}, \nu|_{\mathcal{A}})$ mit ν aus (iii) vollständig wird.

(e) Geben Sie die Vervollständigung von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{x, w\}, \{y, z, u, v\}, \Omega\}$ und $\mu = \nu|_{\mathcal{A}}$ für ν aus (iii) an.

A 3.3.4 Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $A \subset \Omega$ beliebig. Unter welcher Bedingung ist die **charakteristische Funktion/Indikatorfunktion** $\mathbf{1}_A \colon \Omega \to \mathbb{R}$ von A messbar. Diese ist definiert durch

$$\mathbf{1}_A(\omega) \;:=\; \begin{cases} 1\,, \text{falls } \omega \in A\,, \\ 0\,, \text{sonst}\,. \end{cases}$$

A 3.3.5 Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ zwei Messräume und $f \colon \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung sowie $\mathfrak{E}'$ ein Erzeuger von $\mathfrak{A}'$. Zeigen Sie: $\quad \forall A' \in \mathfrak{A}' \colon f^{-1}[\![A']\!] \in \mathfrak{A} \iff \forall E' \in \mathfrak{E}' \colon f^{-1}[\![E']\!] \in \mathfrak{A}$.

A 3.3.6 **Def.**: Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ zwei Messräume und $f \colon \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung.
f ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$-**messbar** (kurz: **messbar**) $\;:\iff\; \forall A' \in \mathfrak{A}' \colon f^{-1}[\![A']\!] \in \mathfrak{A}$.

[1] Dies ist die allgemeine Definition einer $(\mathcal{A}, \tilde{\mathcal{A}})$-messbaren Funktion.

(a) Zeigen Sie: Jede stetige Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist $(\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m)$-messbar.

(b) Zeigen Sie: Die Komposition messbarer Abbildungen ist wieder messbar.

(c) Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein Messraum sowie $f\colon \Omega \to \Omega'$ eine $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$-messbare Abbildung. Zeigen Sie: Die durch

$$\mu'(A') \;:=\; \mu(f^{-1}[\![A']\!]) \qquad \text{für} \quad A' \in \mathfrak{A}'$$

definierte Abbildung $\mu'\colon \mathfrak{A}' \to [0, \infty]$ ist ein Maß auf $(\Omega', \mathfrak{A}')$.
Bem.: Das Maß μ' heißt das **Bildmaß von μ unter f** und wird mit $f(\mu)$ bezeichnet.

A 3.3.7 Zeigen Sie, dass das Urbild $f^{-1}(A)$ einer Borel-messbaren Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ unter einer stetigen Abbildung $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ wieder Borel-messbar ist.

. . . . (Eigenschaften des μ-Integrals)

A 3.3.8 Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f, g \colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ $\mathfrak{A}$-messbar. Zeigen Sie:

(a) **Satz 6.11 (a):** f μ-integrierbar $\iff$ $|f|$ μ-integrierbar,

(b) $|f| \leq g$ und g μ-integrierbar $\implies$ f μ-integrierbar,

(c) f, g μ-integrierbar $\implies$ $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ μ-integrierbar,

(d) **Satz 6.11 (b):** f μ-integrierbar $\implies$ $\left|\int_E f\, d\mu\right| \leq \int_E |f|\, d\mu$.

. . . . (Eigenschaften des Lebesgue-Integrals)

A 3.3.9 Beweisen Sie, dass für eine Lebesgue-integrierbare Funktion f und jedes $c > 0$ die Lebesgue-messbare Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| \geq c\}$ ein endliches Maß hat.

. . . . (Integration bezüglich des Dirac-Maßes)

A 3.3.10 (a) Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & x_0 \notin A \end{cases}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ definiert wird, das sogenannte Dirac-Maß.

(b) Beweisen Sie die Gültigkeit von $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\mu(x) = f(x_0)$ für das in (a) definierte Dirac-Maß μ und jede Funktion $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

. . . . (Integration bezüglich des Bernoulli-Maßes)

A 3.3.11 Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \,]0, 1[$ beliebig sowie $q := 1 - p$. Weiter sei $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \beta_n^p)$ mit dem **Bernoulli-Maß** $\beta_n^p : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$, definiert durch

$$\beta_n^p \;:=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_k$$

(wobei δ_k das in Aufgabe 11.2(a) angegebene Diracmaß bezeichnet), der Wahrscheinlichkeitsraum aus Aufgabe 11.2(b). Berechnen Sie die β_n^p-Integrale $\int\limits_{\mathbb{R}} x\; d\beta_n^p(x)$ und $\int\limits_{\mathbb{R}} x^2\; d\beta_n^p(x)$.

Alternative Formulierung:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und p eine reelle Zahl mit $0 \leq p \leq 1$ und sei $q := 1 - p$. Es bezeichne für ein festes $x \in \mathbb{R}$ weiter δ_x das in Aufgabe 11.2(a) definierte Dirac-Maß auf dem Messraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Berechnen Sie die β_n^p-Integrale $\int\limits_{\mathbb{R}} x\; d\beta_n^p(x)$ und $\int\limits_{\mathbb{R}} x^2\; d\beta_n^p(x)$ für das Bernoulli-Maß

$$\beta_n^p \;:=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_k \;.$$

Tipp: Welches ist die maximale Nullmenge bzgl. β_n^p? Welches Bernoulli-Maß besitzt $\mathbb{R}$?

3.4 Konvergenzsätze

Der Satz von Beppo-Levi über monotone Konvergenz

.... (Integration mittels Dichte-Funktion – 4 Fassungen)

A 3.4.1 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon \Omega \to [0, \infty]$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion. Zeigen Sie:

(a) Auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ wird durch $\nu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $\nu\colon A \mapsto \int\limits_A f\, d\mu$ ein Maß ν definiert (dieses wird als das **unbestimmte μ-Integral von f** bezeichnet).

(b) Für jede nichtnegative $\mathcal{A}$-messbare numerische oder ν-integrierbare Funktion g auf Ω gilt

$$\int g\, d\nu \;=\; \int gf\, d\mu$$

Alternative Formulierung:

Sei $(\Omega, \mathfrak{S})$ ein Messraum und f eine nichtnegative $\mathfrak{S}$-messbare numerische Funktion auf Ω. Zeigen Sie, dass durch

$$\nu(A) \;:=\; \int_A f\, d\mu \;:=\; \int f\chi_A d\mu \qquad (A \in \mathfrak{S})$$

auf $\mathfrak{S}$ ein Maß ν definiert wird (dieses wird als das **unbestimmte μ-Integral von f** bezeichnet) und dann für jede nichtnegative $\mathfrak{S}$-messbare numerische oder ν-integrierbare Funktion g auf Ω

$$\int g\, d\nu \;=\; \int gf\, d\mu$$

gilt.

Leichte Variation (alle Funktionen μ-integrierbar):

Sei μ ein σ-endliches Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$ von Teilmengen von Ω und f eine nichtnegative μ-integrierbare Funktion auf Ω. Zeigen Sie: Auf $\mathcal{A}$ wird durch

$$\nu(A) \;:=\; \int_A f\, d\mu \qquad \left(= \int_\Omega f(x) 1_A(x)\, d\mu \right) \qquad (A \in \mathcal{A})$$

ein Maß ν definiert und für das Integral einer ν-integrierbaren Funktion g gilt die Formel

$$\int_\Omega g\, d\nu \;=\; \int_\Omega gf\, d\mu\ .$$

Leichte Variation (Teil (b) nur für nichtnegative messbare g):

Sei μ ein Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{M}$ von Teilmengen von Ω und sei $f\colon \Omega \to [0, \infty[$ eine nichtnegative messbare Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass durch
$$\nu(A) := \int_A f\, d\mu \quad \left(= \int_\Omega f(x) 1_A(x)\, d\mu \right)$$
für $A \in \mathcal{M}$ ein Maß ν auf $\mathcal{M}$ definiert wird.

(b) Beweisen Sie für das Integral einer nichtnegativen messbaren Funktion g bzgl. des Maßes ν aus (a) die Gültigkeit von
$$\int_\Omega g\, d\nu \;=\; \int_\Omega gf\, d\mu\,.$$

Der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz

....(Lemma von Fatou und seine Grenzen)

A 3.4.2 Zeigen Sie **Satz 6.8: Das Lemma von Fatou**.
Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$. Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer $\mathfrak{A}$-messbarer numerischer Funktionen auf E, so gilt

$$\boxed{\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \, d\mu \;\leq\; \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k \, d\mu.}$$

A 3.4.3 Zeigen Sie:
Das **Lemma von Fatou** gilt für beliebige Folgen μ-integrierbarer Funktionen i.A. nicht.

Alternative Formulierung:

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, f, g $\mathcal{A}$-messbare numerische Funktionen auf Ω. Zeigen Sie, dass das **Lemma von Fatou** für beliebige Folgen μ-integrierbarer Funktionen im Allgemeinen nicht gilt, indem Sie ein Gegenbeispiel angeben.

Alternative konkretisierte Formulierung:

Gegeben sei der Lebesguesche Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{R}), \lambda_1)$. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, definiert durch $f_k := -\mathbf{1}_{[k,k+1]}$, eine Folge λ_1-integrierbarer Funktionen ist, aber dennoch

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{k\to\infty} f_k \; d\mu \;>\; \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \; d\mu \tag{3.2}$$

gilt. Wieso ist dies kein Widerspruch zum **Lemma von Fatou** ?

....(Anwendung von Konvergenzsätzen)

A 3.4.4 Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f\colon \Omega \to [0, \infty]$ eine $\mathcal{A}$-messbare numerische Funktion.
Konstruieren Sie eine Folge von $\mathcal{A}$-Elementarfunktionen $f_k\colon \Omega \to [0, \infty]$ derart, dass sowohl $f_k(\omega) \leq f_{k+1}(\omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ als auch $f_k(\omega) \to f(\omega)$ jeweils für alle $\omega \in \Omega$ gilt.

A 3.4.5 (a) Zeigen Sie, dass für eine Lebesgue-integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ die Menge der Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = \pm\infty$ eine Nullmenge ist.

(b) Zeigen Sie: Ist f_k eine Folge messbarer Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$, und gibt es eine Lebesgue-integrierbare Funktion g auf dem $\mathbb{R}^n$ mit $|f_k(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$, dann ist die Funktion $f(x) := \sup\limits_k f_k(x)$ Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\sup_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) \, d\mu(x) \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, d\mu(x)$$

A 3.4.6 Zeigen Sie, dass im Falle einer Cauchy-Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen zu Mengen endlichen Maßes, die fast überall punktweise gegen eine Funktion f konvergiert, auch $\{|f_k|\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine solche Cauchy-Folge ist und fast überall punktweise gegen $|f|$ konvergiert.

A 3.4.7 Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine μ-integrierbare Funktion auf dem Maßraum $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, und gelte $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ mit Mengen $A_k \in \mathcal{M}$ endlichen Maßes $\mu(A_k) < \infty$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge A endlichen Maßes mit $\left|\int_\Omega f(x) \, d\mu(x) - \int_A f(x) \, d\mu(x)\right| \leq \varepsilon$.

A 3.4.8 Zeigen Sie, dass für eine Folge $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ von nicht notwendigerweise disjunkten Lebesgue-meßbaren Mengen A_k endlichen Maßes mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \infty$$

die Lebesgue-meßbare Menge der Punkte, an denen die durch

$$f_n := \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}$$

definierte Folge von Treppenfunktionen divergiert, eine Lebesgue-Nullmenge ist.

A 3.4.9 Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x)|\, d\mu(x) \ < \ \infty. \tag{3.3}$$

Zeigen Sie: Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert fast überall punktweise gegen eine integrierbare Funktion f und mit dieser gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\mu(x) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\, d\mu(x) \ .$$

Riemann-Integral vs. Lebesgue-Integral im Eindimensionalen

....(Riemann vs. Lebesgue)

A 3.4.10 (a) Zeigen Sie: Ist $A_k \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge Lebesgue-messbarer Mengen mit $A_k \subset A_{k+1}$ und $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, dann gilt:

$$f\colon A \to \mathbb{R} \text{ Lebesgue-integrierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists M < \infty\ \forall k \in \mathbb{N} : \int_{A_k} |f(x)|\, d\mu(x) < M \ .$$

(b) Ist die Funktion $f\colon]0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, Lebesgue- bzw. uneigentlich Riemann-integrierbar?

A 3.4.11 Zeigen Sie, dass die durch $f(x) := |x|^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ und $f(0) := 0$ definierte Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine unbeschränkte und somit keinesfalls eigentlich Riemann-integrierbare Ableitung hat, aber f' über $[-1,1]$ Lebesgue-integrierbar ist.

A 3.4.12 Zeigen Sie, dass die durch $f(x) := x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ für $x \neq 0$ und $f(0) := 0$ definierte Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine unbeschränkte und somit keinesfalls eigentlich Riemann-integrierbare Ableitung hat, die aber auch nicht Lebesgue-integrierbar ist.

A 3.4.13 Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{\cos(x)}{x} \mathbf{1}^{\mathbb{R}}_{]\pi,\infty[}(x)$, einerseits auf (uneigentliche) Riemann-Integrierbarkeit und andererseits auf Lebesgue-Integrierbarkeit.

A 3.4.14 Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} \cdot \mathbf{1}_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[}(x)$ sowohl (uneigentlich) Riemann-integrierbar als auch Lebesgue-integrierbar ist. Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\lambda_1(x)$.

Alternative Formulierung inklusive Erweiterung:

Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)2^{-n}\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[}(x)$ Lebesgue-integrierbar? (Begründung!) Falls ja, berechnen Sie $\int f(x)\, d\mu(x)$. Bestimmen Sie weiter $\|f\|_{L^1}$ und $\|f\|_{L^\infty}$.

Welche Aussagen lassen sich für die Funktion $\tilde{f}(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)2^{-n}\chi_{]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}(x)$ treffen?

A 3.4.15 Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \cdot \mathbf{1}_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[}(x)$, einerseits auf (uneigentliche) Riemann-Integrierbarkeit und andererseits auf Lebesgue-Integrierbarkeit.

A 3.4.16 Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine beschränkte μ-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\int f d\mu \;=\; \sup_Z \mathrm{US}(Z,f) \;=\; \inf_Z \mathrm{OS}(Z,f)\ ,$$

wobei Z jeweils eine Menge $\{A_k \;:\; k = 1,\ldots,n\}$ paarweise disjunkter nichtleerer $\mathfrak{S}$-messbarer Mengen mit $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ und

$$\mathrm{US}(Z,f) := \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \inf_{x\in A_k} f(x)\ , \qquad \mathrm{OS}(Z,f) := \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \sup_{x\in A_k} f(x)\ .$$

A 3.4.17 Ist die Funktion $\quad f\colon \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}, \qquad f(x) := \begin{cases} \sin(\pi x)\chi_{[0,1]}(x), & x \notin \mathbb{Q} \\ \infty, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Lebesgue-integrierbar? Falls ja, berechnen Sie $\int f(x)\, d\mu(x)$ und die Normen $\|f\|_{L^1}$, $\|f\|_{L^\infty}$.

Parameterabhängige Lebesgue-Integrale

. . . . (Parameterabhängige Lebesgue-Integrale)

A 3.4.18 Zeigen Sie:
Für eine auf dem Rechteck $[a,b]\times[c,e]$ stetige Funktion $f(x,y)$ mit dort überall existierender partieller Ableitung $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ und für differenzierbare Kurven $\alpha\colon [c,e]\to[a,b]$ und $\beta\colon [c,e]\to[a,b]$ gilt die Gleichung

$$\frac{d}{dy}\left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\right) \;=\; f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y) + \int_{\alpha(y)}^{\alpha(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx\ . \quad (3.4)$$

Kurzfassung:

Zeigen Sie Gleichung (3.4) in der Situation des obigen Corollars.

A 3.4.19 Berechnen Sie $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x)$, $x\in\mathbb{R}$, für die folgenden Funktionen:

$$\text{(i)}\ \ F(x) \;:=\; \int\limits_{[1,2]} \frac{\mathrm{e}^{xy}}{y} d\lambda_1(y); \qquad\qquad \text{(ii)}\ \ F(x) \;:=\; \int\limits_{[0,x]} \mathrm{e}^{(x-y)^2} d\lambda_1(y).$$

A 3.4.20 Berechnen Sie $F(a) = \int_{]0,\infty[} \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-x}}{x} d\lambda_1(x)$, $a>0$, durch Differentiation von F nach a, $a>0$.

A 3.4.21 Sei $g\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ die Funktion
$$u(t,x) := \begin{cases} \dfrac{tx^3}{(x^2+t^2)^2}\ , & \text{falls } (t,x)\neq(0,0)\ , \\ 0\ , & \text{falls } (t,x)=(0,0)\ . \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Integrale $f(x) := \int_0^1 u(t,x)dt$ und $g(x) := \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}u(t,x)dt$ für jedes $x\in\mathbb{R}$ wohldefiniert sind, die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar ist, jedoch $f'(0)\neq g(0)$ gilt.

Alternative Formulierung:

Sei $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definiert durch
$$f(x,y) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{für}(x,y)\neq(0,0)\ , \\ 0 & \text{für}(x,y)\neq(0,0)\ . \end{cases}$$

Für $y\in\mathbb{R}$ betrachten wir die Funktionen

$$g(y) \;:=\; \int_0^1 f(x,y)dx \qquad \text{und} \qquad h(y) \;:=\; \int_0^1 \partial_y f(x,y)dx\ .$$

Zeigen Sie, dass $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar ist, aber $g'(0) \;=\; h(0)$ ist.

3.5 Der Satz von Fubini

A 3.5.1 Für $A := [1,2] \times [0,2]$ sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) := (x-2y+3)\chi_A(x,y)$ definiert.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{US}(Z,f)$ und $\mathrm{OS}(Z,f)$ zur äquidistanten Zerlegung

$$Z \;=\; \{I_{j,k} \;:\; j,k = 1,\dots,n\} \quad \text{mit} \quad I_{j,k} \;=\; \left[1+\frac{j-1}{n}, 1+\frac{j}{n}\right] \times \left[\frac{2(k-1)}{n}, \frac{2k}{n}\right] \;.$$

(b) Bestimmen Sie mit dem Satz von Fubini das Integral von f.

A 3.5.2 Berechnen Sie das Integral $$\int_{[0,\infty)} \left(\int_{[0,\infty)} y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2} \, d\lambda_1(y) \right) \, d\lambda_1(x).$$

Zeigen Sie dann mittels des Satzes von Fubini $$\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-x^2} \, d\lambda_1(x) \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

. . . . (Prinzip von Cavalieri)

A 3.5.3 Sei $A \cup \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ eine kompakte oder eine beschränkte offene Menge. Für $y \in \mathbb{R}$ bezeichne $A_y := \{(x_1,\dots,x_n) \in A \;:\; x_n = y\} \in \mathbb{R}^{n-1}$ die Schnittmenge. Dann gilt

$$\mu(A) = \int \mu(A_y) \, d\mu(y)$$

(wobei $\mu(A)$ das Lebesgue-Maß von A im $\mathbb{R}^n$, $\mu(A_y)$ das Lebesgue-Maß von A_y im $\mathbb{R}^{n-1}$).

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri:

(i) Das Volumen der Kugel $\overline{B_r(0)}$ im euklidischen $\mathbb{R}^3$.

(ii) Das n-dimensionale Volumen des Zylinders $Z := B \times [0,h] \subset \mathbb{R}^n$ mit Höhe $h > 0$ und mit Basis B, wobei $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine kompakte oder eine beschränkte offene Menge ist.

(iii) Das n-dimensionale Volumen des Kegels

$$K \;:=\; \left\{ (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_n \in [0,h] \;,\;\; (x_1,\dots,x_{n-1}) \in \left(1-\frac{x_n}{h}\right) B \right\}$$

mit Höhe $h > 0$ und mit Basis B, wobei $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt oder beschränkt und offen ist.

A 3.5.4 Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx \right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy \right) dx$$

gilt. Warum widerspricht dies nicht dem Satz von Fubini?

A 3.5.5 Berechnen Sie für $g\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{y^2} & \text{für } 0 < x < y < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{für } 0 < y < x < 1\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

die iterierten Integrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)\, dx \right) dy$ und $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)\, dy \right) dx$.
Gilt $g \in \mathcal{L}([0,1]^2)$?

A 3.5.6 (a) Berechnen Sie $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \arctan \dfrac{x}{y}$ und $\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x} \arctan \dfrac{x}{y}$ für $y \neq 0$.

(b) Die Funktion $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x,y) \ := \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,, & (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0\,, & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x,y)$ nicht λ_2-integrierbar sein kann

(i) mittels Definition der λ_2-Integrierbarkeit;

(ii) mit Hilfe des Satzes von Fubini.

Alternative Formulierung:

(a) Berechnen Sie $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \arctan \dfrac{x}{y}$ und $\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x} \arctan \dfrac{x}{y}$ für $y \neq 0$.

(b) Die Funktion $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x,y) \ := \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,, & (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0\,, & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

Überprüfen Sie, ob die beiden iterierten Integrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) d\mu(x) \right) d\mu(y) \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) d\mu(y) \right) d\mu(x)\ .$$

denselben Wert annehmen.

(c) Sind die Voraussetzungen des Satzes von Fubini erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort.

A 3.5.7 Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge der nachstehenden Integrale

$$\text{(a)} \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx\ ; \quad \text{(b)} \int_{-1}^1 \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y)\,dx\,dy\ ; \quad \text{(c)} \int_0^1 \int_{1-y^2}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\ dy\ .$$

A 3.5.8 Berechnen Sie: (2+2 P)

(a) $\displaystyle\int_B 2xy\,d\lambda_2(x,y)$, wobei B durch $x^2+y^2=2x$ und $y=x$ $(y \geq x)$ begrenzt wird;

(b) $\displaystyle\int_B \sqrt{xy-y^2}\,d\lambda_2(x,y)$, wobei B das Trapez mit den Ecken $(1,1)$, $(5,1)$, $(10,2)$ und $(2,2)$ ist.

Hinweis: Es bietet sich an, den Integrationsbereich als Normalbereich bzgl. y darzustellen.

A 3.5.9 Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^\pi \int_0^x \cos(x+2y)\ dy\ dx$ und skizzieren Sie das Gebiet, über welches integriert wird.
Geben Sie die beiden möglichen Darstellungen als Normalbereiche an.

A 3.5.10 Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Teilmenge $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x+y \leq 3\,,\ x^2 \leq y\}$.

Kurzfassung:

Bestimmen Sie $\lambda_2(A)$ von $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x+y \leq 3\,,\ x^2 \leq y\}$.

A 3.5.11 Berechnen Sie den Flächeninhalt $\lambda_2(B)$ der Teilmenge $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y \leq 2\,,\ x^2 \leq y\}$.

A 3.5.12 Sei $Q = [-1,1] \times [-3,3]$ und $G := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in Q \wedge 0 \leq z \leq 4 - x^3 - y\}$.
Berechnen Sie das Volumen von G.

A 3.5.13 Bestimmen Sie den Flächeninhalt (also das 2-dimensionale Lebesgue-Maß $\lambda_2(A)$) der Mengen $A := \{(x,y) \,|\, 0 \leq y \leq 1\,, y^2 \leq x \leq y\} \subset \mathbb{R}^2$ und $B := \{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq 1\,,\ 1-x \leq y \leq 1+x^2\}$.

A 3.5.14 Bestimmen Sie $\lambda_2(K)$ für die von den Kurven $y=4x$, $y=\frac{1}{x}$ und $y=x$ berandete Menge $K \subset [0,\infty[^2$.

A 3.5.15 Skizzieren Sie das Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^2$, welches von den durch $x^2+y^2=1$, $y=2x$ und $y=x^2$ gegebenen Kurven berandet wird und den Ursprung enthält. Berechnen Sie mittels des Satzes von FUBINI die Fläche $\mu_2(K)$.

A 3.5.16 Berechnen Sie für die Funktion $f\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x+y$, die iterierten Integrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx\ .$$

A 3.5.17 Berechnen Sie das Lebesgue-Integral $\displaystyle\int_\Omega f(x,y)\,d\lambda_2(x,y)$ von $f(x,y) := x+y$ über das Dreieck $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1\,,\ 0 \leq y \leq 1-x\}$.

A 3.5.18 (a) Beschreiben Sie die folgenden Mengen durch Normalbereiche

(i) Das durch die Punkte $(1,3)$, $(3,1)$ und $(5,5)$ beschriebene Dreieck D.

(ii) Die Raute $R := \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x\|_1 \leq 3\}$.

(b) Bestimmen Sie das Integral $\int_D x^2 \, d\lambda_2(x,y)$ mit obigem D.

A 3.5.19 Beschreiben Sie die folgenden Mengen durch Normalbereiche:

(a) Die Ellipse $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 1\}$.

(b) Den Körper $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq \frac{y}{2} \leq x - x^2,\ 0 \leq 4z \leq x + 2y\}$.

(c) Die von der Lemniskate $L := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0\}$ eingeschlossene Fläche.

Berechnen Sie das Volumen von K und das Integral $\int x\chi_K(x,y,z) \, d\mu(x,y,z)$.

Variation & Erweiterung von (b):

Skizzieren Sie den Körper

$$K := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leq y \leq x - x^2 \ ,\ 0 \leq z \leq x + 2y\right\} ,$$

und bestimmen Sie sein Lebesgue-Maß, indem Sie 1_K mittels des Satzes von Fubini integrieren. Bestimmen Sie außerdem seine Masse und seinen Schwerpunkt bezüglich der durch $\rho = 1$ innerhalb von K und $\rho = 0$ außerhalb von K gegebenen Massendichte.

A 3.5.20 Bestimmen Sie die Fläche des durch die Kurven $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{2}x$ und $y = \frac{1}{2}(3-x^2)$ berandeten Gebietes $K \subset \mathbb{R}^2$.

A 3.5.21 Bezeichne B_1 die Euklidische Einheitskugel in $\mathbb{R}^2$ um $(x,y) = (0,0)$ und B_2 eine um den Punkt $(x,y) = (1,0)$. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Gebietes $B_1 \cap B_2$.

A 3.5.22 **(Schwerpunkt)**

(a) Eine dünne Platte habe die Form des Bereiches zwischen der Parabel $y = -2x^2 + 18$ und der x-Achse. Ihre Flächendichte sei $\rho(x,y) = \mathrm{e}^x$. Berechnen Sie den Schwerpunkt der Platte.

(b) Sei B die von den Kurven $y = x$, $xy = 4$ sowie $x = 4$ eingeschlossene Fläche. Berechnen Sie den geometrischen Schwerpunkt von B.

Hinweis:

Die Koordinaten ξ_k des Schwerpunktes $S = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ einer messbaren Teilmenge A des „mit der Dichte $\rho(x_1, \ldots, x_n)$ gewichteten" $\mathbb{R}^n$ erhalten wir aus

$$\xi_k \ := \ \frac{1}{M_\rho} \int_A x_k \cdot \rho(x_1, \ldots, x_n) \, d\lambda_n(x_1, \ldots, x_n)$$

mit

$$M \ := \ \int_A \rho(x_1, \ldots, x_n) \, d\lambda_n(x_1, \ldots, x_n) \ .$$

Für den geometrischen Schwerpunkt ist $\rho \equiv 1$.

3.6 Der Transformationssatz

A 3.6.1 Seien $[a,b], [\alpha,\beta]$ beschränkte nichtdegenerierte Intervalle in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $t\colon [a,b] \to [\alpha,\beta]$ eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung, und $f\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion, dann sind f und $f \circ t$ auch λ_1-integrierbar und es gilt

$$\int\limits_{[a,b]} f(t(x)) \cdot |t'(x)| \; d\lambda_1(x) \;=\; \int\limits_{[\alpha,\beta]} f(y) \; d\lambda_1(y).$$

A 3.6.2 Seien $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega', \mathfrak{S}')$ ein Messraum und $T\colon \Omega \to \Omega'$ eine $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}')$-messbare Abbildung. Sei f' eine $\mathfrak{S}'$-messbare numerische Funktion auf Ω'. Zeigen Sie: Die Funktion f' ist genau dann $T(\mu)$-integrierbar, wenn $f' \circ T$ μ-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int f' \; dT(\mu) \;=\; \int f' \circ T \; d\mu \;.$$

. . . . (Lineare Transformationen & Schwerpunkt)

A 3.6.3 Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine ungerade (d.h., es gelte $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$) Lebesgue-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass das Lebesgue-Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f \; d\lambda_n$ verschwindet.

A 3.6.4 Zeigen Sie, dass die Diagonale $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ eine λ_2-Nullmenge ist.

Tipp: Transformieren Sie die Menge auf eine „Hyperebene“.

A 3.6.5 Für $p = (2,2)$ und $q = (1,2)$ sei die Menge $E = \{sp + tq \mid s,t \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$ gegeben. Skizzieren Sie E und bestimmen Sie das Integral $\int_E xy d\lambda_2(x,y)$ mit Hilfe der Transformation $(x,y) = \Phi(u,v)$, gegeben durch

$$\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \;, \qquad (u,v) \;\mapsto\; \begin{pmatrix} u - v \\ 2u - v \end{pmatrix} \;. \tag{3.5}$$

A 3.6.6 (a) Zeigen Sie: Ist $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $Tx = Ax + b$ eine affine Transformation mit invertierbarer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie $b \in \mathbb{R}^n$ und ist f über eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ λ_n-integrierbar, dann ist $f \circ T$ über das Urbild $T^{-1}(U)$ λ_n-integrierbar mit

$$\int_{T^{-1}(U)} f(Ax+b) \; d\lambda_n(x) \;=\; \frac{1}{|\det(A)|} \cdot \int_U f(y) \; d\lambda_n(y) \;.$$

(b) Zeigen Sie für U und T aus (a) mit Hilfe von (a), dass $\lambda_n(T(U)) = |\det(A)| \cdot \lambda_n(U)$ gilt.

(c) Zeigen Sie für T aus (a): Ist S der Schwerpunkt einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu(K) \neq 0$, so ist $T(S)$ der Schwerpunkt der Bildmenge $T(K)$.

. . . . (Simplices)

A 3.6.7 Wir definieren das **Standardsimplex** $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$ durch

$$\Delta^n \;:=\; \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon x_1, \ldots, x_n \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^n x_k \leq 1 \right\} \;. \tag{3.6}$$

(a) Stellen Sie Δ^n als Normalbereich im $\mathbb{R}^n$ dar. Was für Gebilde entstehen für $n = 1,2,3$?

(b) Berechnen Sie das Lebesgue-Maß von Δ^n.

(c) Wie lauten die Schwerpunkte von Δ^1, von Δ^2 und von Δ^3?

A 3.6.8 Das Simplex im $\mathbb{R}^n$ mit den Eckpunkten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ist die Menge

$$S \ := \ \left\{ x \ = \ \sum_{\nu=1}^{n} t_\nu (a_\nu - a_0) \ : \ (t_1, \ldots, t_n) \in \Delta^n \right\} .$$

Zeigen Sie, dass für sein Volumen $\mu(S) \ = \ \frac{1}{n!} \Big| \det(a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_n - a_0) \Big|$ gilt.

.... (Polar- und Zylinderkoordinaten)

Folgende Transformationen werden häufig gebraucht:

Polarkoordinaten:

$$\Phi \colon]0, \infty[\ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \ ,$$

Kugelkoordinaten/sphärische Koordinaten:

$$\Phi \colon]0, \infty[\ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(r,\varphi,\theta) \\ y(r,\varphi,\theta) \\ z(r,\varphi,\theta) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix} \ ,$$

Zylinderkoordinaten:

$$\Phi \colon]0, \infty[\ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(r,\varphi,z) \\ y(r,\varphi,z) \\ z(r,\varphi,z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \ .$$

A 3.6.9 Die Kegelschnitte lassen sich mit Polarkoordinaten in einheitlicher Weise durch die Formel

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\phi)}, \qquad (\varepsilon \geq 0, p > 0)$$

darstellen. Zeigen Sie (und berechnen Sie e, a, b):

(a) Für $\varepsilon = 0$ erhält man einen Kreis mit Radius p.

(b) Für $0 < \varepsilon < 1$ erhält man eine Ellipse mit der Darstellung $\dfrac{(x+e)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

(c) Für $\varepsilon = 1$ erhält man eine Parabel mit der Darstellung $y^2 + 2p\left(x - \dfrac{1}{2}p\right) = 0$.

(d) Für $\varepsilon > 1$ erhält man eine Hyperbel mit der Darstellung $\dfrac{(x-e)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

A 3.6.10 Berechnen Sie die Ableitung der Polarkoordinaten-Abbildung $f(r,\varphi) := (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ und deren Determinante.

Kürzere Formulierung:

Berechnen Sie $\det(df(r,\varphi))$ für die Polarkoordinaten-Abbildung $f(r,\varphi) := (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$.

Enthalten in:

Berechnen Sie die Fläche des Kreissektors $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\,,\; x, y \geq 0\}$, indem Sie den Transformationssatz auf die Polarkoordinaten-Abbildung anwenden.

A 3.6.11 Zeigen Sie, dass $\lambda_3(\mathcal{E}) = \frac{4}{3}\pi abc$ für das Ellipsoid $\mathcal{E} := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$ gilt.

Tipp: Verwenden Sie die Transformation der verallgemeinerten Kugelkoordinaten

$$\Phi\colon [0, \infty[\; \times\; [-\pi, \pi] \times \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3\;, \qquad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ar\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ br\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ cr\sin(\theta) \end{pmatrix}\;.$$

A 3.6.12 **(Transformation auf Polar- und Zylinderkoordinaten)** (2+3 P)

(a) Bestimmen Sie das Integral der Funktion $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$ über dem durch $x^2+y^2 = a^2$ begrenzten Bereich. **Hinweis:** Verwenden Sie hierbei Polarkoordinaten.

(b) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der Koordinatentransformation für die Zylinder-Koordinaten

$$x(r,\varphi,z) = r\cos\varphi, \qquad y(r,\varphi,z) = r\sin\varphi, \qquad z(r,\varphi,z) = z.$$

Bestimmen Sie anschließend das Integral der Funktion $f(x,y,z) = (z^2-6z+9)\mathrm{e}^{(z-3)\sqrt{x^2+y^2}}$ über dem Zylinder

$$Z := \left\{0 \le \frac{x^2+y^2}{4} \le 1,\ -3 \le z \le 0\right\}.$$

A 3.6.13 **(Anwendung des Transformationssatzes auf Zylinderkoordinaten)** (3+2 P)

(a) Sei $(\mathbb{R}^3, \mathcal{M}(\mathbb{R}^3), \lambda_3)$ der Lebesguesche Maßraum. Zeigen Sie die Lebesgue-Messbarkeit und bestimmen Sie das Maß der Menge

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 1 \le x^2+y^2 \le 4\,,\ y \ge 0\,,\ -6 \le z \le 0\right\}. \tag{3.7}$$

(b) Bestimmen Sie das Lebesgue-Integral $\int_E f d\lambda_3$ mit E aus (a) und mit der Funktion

$$f(x,y,z) := \frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right). \tag{3.8}$$

A 3.6.14 (a) Begründen Sie, warum der Zylinderabschnitt

$$\Omega := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2 \le r^2,\ 0 \le z \le R-y\right\}$$

für $0 < r \le R$ eine Lebesgue-messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Berechnen Sie für $0 < r \le R$ das Lebesgue-Maß des Zylinderabschnitts Ω aus (a).

....(Guldinsche Regel/Schwerpunkte)

A 3.6.15 Beweisen Sie für das Lebesgue-Maß des durch (4 P)

$$A := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 < (r(z))^2\,,\ z \in [a,b]\right\}$$

gegebenen Rotationskörpers mit stetigem Meridian $r\colon [a,b] \to (0,\infty)$, $a < b$, die Formel

$$\mu(A) = \pi \int_a^b (r(z))^2\, dz\ .$$

Hinweis: Verwenden Sie Zylinderkoordinaten.

A 3.6.16 Sei $r\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, positiv, $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a,b],\ x^2+y^2 \le (r(z))^2\}$ der Rotationskörper mit Meridiankurve r. Zeigen Sie:

(a) Der Rotationskörper A besitzt das Volumen $\mu(A) = \pi \int_a^b (r(z))^2\, d\mu(z)$.

(b) Ist (ξ,ζ) der Schwerpunkt der Fläche $F \subset \mathbb{R}^2$, $F := \{(x,z)\colon z \in [a,b],\ 0 \le x \le r(z)\}$, so gilt

$$\mu(A) = 2\pi\xi \cdot \mu(F) \qquad \text{(Guldinsche Regel).}$$

(c) Sei T der Volltorus, der durch Rotation der Kreisscheibe $\{(x,z)\colon (x-R)^2+z^2 \le r^2\}$, $0 < r < R$, um die z-Achse entsteht. Berechnen Sie das Volumen von T und verifizieren Sie hieran die Guldinsche Regel.

A 3.6.17 Zeigen Sie für eine nur von $x + y$ abhängige stetige Funktion f auf dem Dreieck D im $\mathbb{R}^2$ mit den Ecken $(0,0), (0,1)$ und $(1,0)$ die Gültigkeit von

$$\int_D f(x+y)\,d\mu(x,y) \;=\; \int_0^1 f(t)t\,dt$$

(a) einerseits mit Hilfe des Satzes von Fubini,

(b) andererseits mittels Transformationssatz.

A 3.6.18 Berechnen Sie das Integral $\int\limits_{]0,\infty[\ \times\ ]0,\infty[} \mathrm{e}^{-(u+v)^2}\,d\lambda_2(u,v)$, indem Sie den Transformationssatz auf F aus (2.18) anwenden.

Alternative Formulierung:

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{]0,\infty[\ \times\ ]0,\infty[} \mathrm{e}^{-(u+v)^2}\,d\lambda_2(u,v)$, indem Sie den Transformationssatz auf $F(x,y) := (x(1-y), xy)$ als Abbildung von $]0,\infty[\ \times\ ]0,1[$ auf $]0,\infty[\ \times\ ]0,\infty[$ anwenden.

A 3.6.19 Berechnen Sie das Lebesgue-Integral $\displaystyle\int_{\{(x,y)\,|\,0<y<x\}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(x^2-y^2)\,d\lambda_2(x,y)$, indem Sie den Transformationssatz auf Φ aus (2.19) und anschließend den Satz von Fubini anwenden.

A 3.6.20 (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Psi(\xi,r) := \left(r\xi, r\sqrt{1-\xi^2}\right)$ in der Nähe jedes Punktes $(\xi,r) \in \mathbb{R}^2$ mit $|\xi| < 1$ und $r \neq 0$ eine differenzierbare Umkehrabbildung besitzt. Beweisen Sie, dass Ψ ein Diffeomorphismus vom Halbstreifen $]-1,1[\ \times\ ]0,\infty[$ auf $\mathbb{R}\times\ ]0,\infty[$ ist.

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{]-1,1[\ \times\ ]0,\infty[} \frac{1}{(1+r^2\xi^2)\cdot(1+r\sqrt{1-\xi^2})^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\lambda_2(\xi,r)\,,$$

indem Sie den Transformationssatz auf Ψ und anschließend den Satz von Fubini anwenden.

A 3.6.21 Sei $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x\|_{\text{Euklid}} < 1\}$. Zeigen Sie: Durch $\Phi(r,x) := r(\sqrt{1-\|x\|^2_{\text{Euklid}}}, x)$ wird für $n \geq 2$ ein C^1-Diffeomorphismus $\Phi :]0,1[\times B_{n-1} \to \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, y_1 > 0\,,\ \|y\|_{\text{Euklid}} < 1\}$ mit $\det(d\Phi(r,x)) = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|x\|^2_{\text{Euklid}}}}$ definiert, und es gilt

$$\frac{1}{n}\int_{B_{n-1}} \frac{1}{\sqrt{1-\|x\|^2_{\text{Euklid}}}}\,d\lambda_{n-1}(x) = \frac{1}{2}\lambda_n(B_n)\,.$$

A 3.6.22 Berechnen Sie das Integral

$$\int_R \frac{1}{4x^2+y^2+2y+1} d\lambda_2(x,y)$$

mit $R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq 4x^2+y^2+2y+1 \leq 25,\ x \geq 0\}$ unter Verwendung der Koordinatentransformation $x = \frac{r}{2}\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi) - 1$.

A 3.6.23 (a) Zeigen Sie: Für eine Funktion f auf dem Intervall $[R_1, R_2] \subset [0, \infty)$ ist $y \mapsto f(\|y\|_2)$ genau dann über die Kugelschale $\{y \in \mathbb{R}^n \,|\, R_1 \leq \|y\|_2 \leq R_2\}$ Lebesgue-integrierbar, wenn die Funktion $f(r)r^{n-1}$ über $[R_1, R_2]$ Lebesgue-integrierbar ist, und dann gilt

$$\int_{K(R_1,R_2)} f(y)\, d\mu_n(y) \;=\; n\mu_n(B_1(0)) \int_{[R_1,R_2]} f(r)r^{n-1}\, d\mu_1(r)$$

mit dem Lebesgue-Maß $\mu_n(B_1(0))$ der n-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel $B_1(0)$.

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \|x\|_2^{-a}$, über die Euklidische Einheitskugel $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-integrierbar?

A 3.6.24 Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \ni x \longmapsto \frac{1}{\|x\|_2^a} \in \mathbb{R}$$

über den Außenraum $\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$ Lebesgue-integrierbar, wobei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ die Euklidische Einheitskugel bezeichnet?

A 3.6.25 Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto \|(x, y, z)\|_2^k \in \mathbb{R}$ über die Euklidische Einheitskugel $B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ Lebesgue-integrierbar?

A 3.6.26 Bestimmen Sie den Schwerpunkt einer Euklidischen Kugel $B_R(a) \subset \mathbb{R}^3$ mit rotationssymmetrischer Massedichte $\rho(x) = f(\|x - a\|_2)$ für eine fast überall stetige Funktion $f\colon [0, R] \to [0, \infty[$.

A 3.6.27 Zeigen Sie, dass für eine Lebesgue-integrierbare Funktion $\rho\colon K \to \mathbb{R}$ auf einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^2$ durch

$$u(x) := \int_K \rho(y) \ln(\|x - y\|_2)\, d\mu(y)$$

eine Funktion u auf $\mathbb{R}^2 \setminus K$ definiert wird, die auf jeder offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus K$ mit $\operatorname{dist}(\overline{U}, K) > 0$ zweimal stetig differenzierbar und die darüber hinaus eine Lösung der sogenannten Laplace-Gleichung

$$\Delta u(x) := \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} = 0$$

ist.

A 3.6.28 Zeigen Sie die Formeln

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\|x\|_2^2}\, d\mu_n(x) = \pi^{n/2}$$

und

$$\mu_n(B_1(0)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

für die n-dimensionale Euklidische Einheitskugel $B_1(0)$.

3.7 Integration über Untermannigfaltigkeiten

A 3.7.1 Bestimmen Sie die Oberfläche des Segmentes der Sphäre $S^2(R)$ im $\mathbb{R}^3$ mit Radius $R > 0$, welches in dem offenen Oktanten $]0,\infty[^3$ liegt.

Lösung: Als zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ lässt sich

$$M \;:=\; S^2(R) \cap]0,\infty[^3 \;=\; \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2+z^2 = R^2, x>0, y>0, z>0\right\}$$

durch die Polarkoordinatenabbildung

$$H\colon (\theta,\varphi) \mapsto (R\sin(\theta)\cos(\varphi), R\sin(\theta)\sin(\varphi), R\cos(\theta)) \tag{3.9}$$

auf der offenen Menge $U = \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \times \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ parametrisieren. Wir erhalten wegen

$$\begin{aligned}
&dH(\theta,\varphi)^{\mathrm{T}} dH(\theta,\varphi)\\
&= \begin{pmatrix} R\cos(\theta)\cos(\varphi) & R\cos(\theta)\sin(\varphi) & -R\sin(\theta) \\ -R\sin(\theta)\sin(\varphi) & R\sin(\theta)\cos(\varphi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R\cos(\theta)\cos(\varphi) & -R\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ R\cos(\theta)\sin(\varphi) & R\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ -R\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & (R\sin(\theta))^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und folglich $\sqrt{\det\left(dH(\theta,\varphi)^{\mathrm{T}} dH(\theta,\varphi)\right)} \;=\; R^2|\sin(\theta)|$ dann

$$\begin{aligned}
\int_M d\sigma \;&=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\sqrt{\det\left(dH(\theta,\varphi)^{\mathrm{T}} dH(\theta,\varphi)\right)} \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin(\theta)\; d\varphi\; d\theta\\
&=\; \frac{\pi R^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\; d\theta \;=\; \frac{\pi R^2}{2}\Big[-\cos(\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \;=\; \frac{\pi R^2}{2}\;.
\end{aligned}$$

A 3.7.2 Auf der Oberfläche der Kugel mit dem Radius R sei Masse mit der Dichte h verteilt. Berechnen Sie jeweils die Gesamtmasse des Kugeloberflächensegments, welches im Oktanten $]0,\infty[^3$ liegt.

(a) $h(x,y,z) = \max\{|x|,|y|\}$ (b) $h(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ (c) $h(x,y,z) = |x|+|y|$

Lösung: Ist $H\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine (globale und reguläre) Parametrisierung der k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit M, also $H(U) = M \subset \mathbb{R}^n$, so gilt für das Integral auf der Untermannigfaltigkeit

$$\int_M f d\sigma \;=\; \int_U (f\circ H)(x)\cdot\sqrt{\det\left(dH(x)^{\mathrm{T}} dH(x)\right)}\; d\lambda_k(x)\;. \tag{3.10}$$

Wir können wiederum die Parametrisierung (3.9) verwenden:

(a) Wegen $\int (\sin(\theta))^2\; d\theta \;=\; -\sin(\theta)\cos(\theta) + \int \left(1-(\sin(\theta))^2\right)\; d\theta$ folgt

$$\begin{aligned}
m \;&=\; \int_M f d\sigma \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\max\{\left|R\sin(\theta)\cos(\varphi)\right|, \left|R\sin(\theta)\sin(\varphi)\right|\}}_{=\begin{cases} R\sin(\theta)\cos(\varphi), & \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right] \\ R\sin(\theta)\sin(\varphi), & \varphi\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}} R^2\sin(\theta)\;\; d\theta\; d\varphi\\
&=\; 2R^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(\varphi)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(\theta))^2\; d\theta\; d\varphi \;=\; 2R^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(\varphi)\; d\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(\theta))^2\; d\theta\right)\\
&=\; \sqrt{2}R^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(\theta))^2\; d\theta\right) \;=\; \sqrt{2}R^3\left[\frac{\theta-\sin(\theta)\cos(\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \;=\; \frac{\sqrt{2}R^3\pi}{4}
\end{aligned}$$

(b) Wegen $h(x,y,z) = \sqrt{R^2 - z^2}$ und $R^2 - (R\cos(\theta))^2 = (R\sin(\theta))^2$ folgt analog (a)

$$\begin{aligned}
m &= \int_M f d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin(\theta) R^2 \sin(\theta)\ d\theta\ d\varphi \\
&= R^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ d\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\theta))^2\ d\theta\right) = \frac{\pi R^3}{2}\left[\frac{\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2 R^3}{8}
\end{aligned}$$

(c) Analog (b) und (c) sowie unter Ausnutzung der Symmetrie(n) folgen

$$\begin{aligned}
m &= \int_M f d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left|R\cos(\varphi)\sin(\theta)\right| + \left|R\sin(\varphi)\sin(\theta)\right|\right) R^2 \sin(\theta)\ d\theta\ d\varphi \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R(\cos(\varphi) + \sin(\varphi))\sin(\theta) R^2 \sin(\theta)\, d\theta d\varphi \\
&= 2R^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(\varphi) + \sin(\varphi))\ d\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\theta))^2\ d\theta\right) = 2R^3 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi R^3}{2}\ .
\end{aligned}$$

A 3.7.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt desjenigen Teils der Fläche $z = \sqrt{2xy}$, der über dem Rechteck $[0,a] \times [0,b]$, $(a, b > 0)$, liegt.

Lösung:

Allgemein erhalten wir mit der Parametrisierung $H(x,y) = (x, y, z(x,y))$ für die Oberfläche

$$\begin{aligned}
&\iint_{H([0,a]\times[0,b])} d\sigma = \iint_{[0,a]\times[0,b]} \sqrt{\det\left(dH(x,y)^{\mathrm{T}} dH(x,y)\right)}\ d(x,y) \\
&= \iint_{[0,a]\times[0,b]} \sqrt{\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z_x & z_y \end{pmatrix}\right)}\ d(x,y) \\
&= \iint_{[0,a]\times[0,b]} \sqrt{\det\left(\begin{pmatrix} 1 + z_x^2 & z_x z_y \\ z_x z_y & 1 + z_y^2 \end{pmatrix}\right)}\ d(x,y) = \int_0^a \left(\int_0^b \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\ dy\right)\ dx\ .
\end{aligned}$$

Für $x, y > 0$ sind hier $z_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{2xy}} \cdot 2y = \sqrt{\frac{y}{2x}}$ sowie $z_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{2xy}} \cdot 2x = \sqrt{\frac{x}{2y}}$.
Somit folgt

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{y}{2x} + \frac{x}{2y}} = \sqrt{\frac{2xy + y^2 + x^2}{2xy}} = \frac{x + y}{\sqrt{2xy}} = \sqrt{\frac{x}{2y}} + \sqrt{\frac{y}{2x}} = z_y + z_x\ .$$

Mit Hilfe des Satzes von Fubini erhalten wir aufgrund der Nichtnegativität des Integranden daher für die Oberfläche

$$\begin{aligned}
&\iint_{H([0,a]\times[0,b])} d\sigma = \int_0^a \left(\int_0^b \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\ dy\right)\ dx = \int_0^a \left(\int_0^b (z_y + z_x)\ dy\right)\ dx \\
&= \int_0^a \int_0^b z_y\ dy\ dx + \int_0^b \int_0^a z_x\ dx\ dy = \int_0^a \big(z(x,b) - z(x,0)\big) dx + \int_0^b \big(z(a,y) - z(0,y)\big) dy \\
&= \sqrt{2b}\int_0^a \sqrt{x}\ dx + \sqrt{2a}\int_0^b \sqrt{y}\ dy = \frac{2}{3}\sqrt{2ab}(a+b)
\end{aligned}$$

3.8 Fourier-Theorie

Der Hilbert-Raum L^2

Diskrete Fourier-Transformation

.... (Vorbereitung)

A 3.8.1 Zeigen Sie, dass man eine P-periodische Funktion durch Variablentransformation auf eine 2π-periodische Funktion zurückführen kann.

.... (Allgemeine theoretische Aussagen)

A 3.8.2 Zeigen Sie, dass für ungerades $N \in \mathbb{N}$ das Skalarprodukt $\langle u, v\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{u}v\,dx$ der Funktionen $u(x) := \sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ und $v(x) := \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ verschwindet.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt $\langle u, v\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{u}v\,dx$ der Funktionen $u(x) := \sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ und $v(x) := \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ für ungerades N verschwindet.

A 3.8.3 Beweisen Sie:

(a) Für die (komplexen) Fourier-Koeffizienten $c_k := \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, f(x)\rangle$ einer stückweise stetigen Funktion $f\colon\,]0, 2\pi[\, \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\left\| \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \right\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2. \tag{3.11}$$

(b) Für beliebige über $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbare 2π-periodische Funktionen f und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelten die Besselsche Gleichung

$$\|f - S_n f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \tag{3.12}$$

und die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx\ . \tag{3.13}$$

A 3.8.4 (a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\{1, \cos(kx), \sin(kx) \mid k \in \mathbb{N}\} \subset C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ bzgl. des (reellwertigen) Skalarproduktes $\langle f, g\rangle := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$ orthogonal zueinander sind.

(b) Konstruieren Sie mittels (a) ein Orthonormalsystem bezüglich

$$\langle f, g\rangle \;:=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)\,dx \tag{3.14}$$

(c) Zeigen Sie, dass die reelle FOURIER-Reihe einer geraden (bzw. ungeraden) 2π-periodischen Funktion f die Form $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$ (bzw. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$) besitzt.

(d) Zeigen Sie: Ist f eine reelle 2π-periodische Funktion, so erfüllen die Koeffizienten c_k der komplexen Fourierreihe die Gleichung $c_{-k} = \overline{c_k}$.

(e) Leiten Sie die Vollständigkeitsrelation

$$\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \tag{3.15}$$

für die reelle Fourier-Reihe aus

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx \tag{3.16}$$

her.

(f) Zeigen Sie: Aufgrund der 2π-Periodizität folgt aus (3.15) ebenso

$$\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx\ . \tag{3.17}$$

A 3.8.5 (a) Zeigen Sie: Besitzt die Fourierreihe einer stückweise stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktion f die Koeffizienten c_k, so besitzt die Fourierreihe von f' die Koeffizienten $\mathrm{i}kc_k$.

oder:

Beweisen Sie: Besitzt die komplexe Fourier-Reihe einer stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktion f die Koeffizienten c_k, so hat die Fourierreihe von f' die Koeffizienten $\mathrm{i}kc_k$.

(b) Zeigen Sie mittels (a): Die Fourierreihe von f'' einer stückweise zweimal stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktion f mit Fourier-Koeffizienten c_k besitzt die Gestalt

$$(Sf'')(x) \;=\; -\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\ .$$

A 3.8.6 **(Satz von Riemann-Lebesgue)**

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion mit $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0.$$

. . . . (Dirichlet-Kern)

A 3.8.7 (a) Zeigen Sie, dass das Fourierpolynom

$$(S_n f)(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{3.18}$$

mit den Koeffizienten $c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}\,dy$, einer 2π-periodischen Funktion f die Darstellung $(S_n f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-y)f(y)\,dy$ mit dem Dirichlet-Kern $D_n(x) := \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ besitzt.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie, dass das Fourierpolynom $(S_n f)(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$, $c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}\,dy$, einer 2π-periodischen Funktion f die Darstellung $(S_n f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-y)f(y)\,dy$ mit dem Dirichlet-Kern $D_n(x) := \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass der Dirichlet-Kern $D_n(x)$ aus Aufgabenteil (a) für jedes n eine gerade, 2π-periodische Funktion ist, welche $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1$ erfüllt.

(c) Beweisen Sie

$$D_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{falls } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{2n+1}{2\pi} & \text{falls } x \in 2\pi\mathbb{Z}\ . \end{cases}$$

(d) Begründen Sie jede einzelne Gleichung in

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_{-(2n+1)\frac{\pi}{2}}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(y)}{y}\,dy = \lim_{n\to\infty} \pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\frac{y}{2})}{\frac{y}{2}}\, D_n(y)\,dy = \pi.$$

(e) Beweisen Sie, dass $\int_0^{\pi} f(y)D_n(y)\,dy \to \frac{f(0+)}{2}$ für jede in 0 rechtsseitig differenzierbare Funktion f bei $n \to \infty$ gilt.

A 3.8.8 Auf dem Intervall $]0,\pi]$ sei die folgende Funktion gegeben: $f(x) := \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$

Setzen Sie diese Funktion auf das Intervall $[-\pi,0]$ so fort, dass f auf $[-\pi,\pi]$

(i) gerade u. stetig ist; (ii) ungerade u. stetig ist; (iii) eine π-periodische Funktion ist.

Skizzieren Sie jeweils den Funktionenverlauf.

A 3.8.9 Setzen Sie die Funktion $f(x) := x$, $x \in [0,\pi[$, auf ganz $\mathbb{R}$ zu einer

(a) ungeraden 2π-periodischen (b) geraden 2π-periodischen (c) π-periodischen

Funktion fort und bestimmen Sie jeweils die reelle Fourierreihe. Wogegen konvergiert sie ?

A 3.8.10 (a) Entwickeln Sie die 2π-periodische Funktion f mit $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ für $x \in [-\pi,\pi[$, $a \in \mathbb{R}$, in eine reelle Fourierreihe.

(b) Berechnen Sie unter Verwendung von (a) den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$.

Alternativer Integrationsbereich:

(a) Sei $0 \neq a \in \mathbb{R}$ gegeben. Entwickeln Sie die 2π-periodische Funktion f mit $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ für $x \in [0,2\pi[$ in eine reelle Fourierreihe.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^2+k^2}$ mittels Aufgabenteil (a).

A 3.8.11 (a) Seien $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $\beta \neq 0$. Bestimmen Sie jeweils die Fourier-Reihe der Funktionen

(i) $f(x) = \sin(\alpha x)$ (ii) $f(x) = |\sin(x)|$ (iii) $f(x) = \cosh(\beta x)$, $\beta \neq 0$.

(b) Finden Sie jeweils den Grenzwert der Reihen $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^2+\beta^2}$ und $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \frac{1}{k^2+\beta^2}$.

(c) Ermitteln Sie die Fourier-Reihen zu den 2π-periodischen Fortsetzungen von $f, g\colon [-\pi,\pi[\to \mathbb{R}$, definiert durch

(i) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } -\pi \le x \le 0, \\ x, & \text{für } 0 \le x < \pi, \end{cases}$ (ii) $g(x) = |x|$.

(d) Durch $f(x) = x^2$ für $-\pi \le x \le \pi$ sei eine 2π-periodische Funktion gegeben.

(i) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe $(Sf)(x)$.

(ii) Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert der Reihen $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^2}$ und $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2}$.

(iii) Finden Sie mittels (i) und Parsevalscher Gleichung den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^4}$.

A 3.8.12 (a) Ermitteln Sie die reelle Fourier-Reihe von $f(x) := 2(\cos(x))^2$.

(b) Zu vorgegebenen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sei die 2π-periodische Funktion g definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} c_1 & \text{für } -\pi < x \le 0\ , \\ c_2 & \text{für } 0 < x \le \pi\ . \end{cases}$$

Ermitteln Sie die reelle Fourier-Reihe von g und zeigen Sie mit Hilfe der (reellen) Parsevalschen Gleichung (bzw. Vollständigkeitsrelation) die Konvergenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad .$$

Alternative Formulierung:

Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten für diejenige 2π-periodische Funktion f, welche auf dem Intervall $]-\pi, \pi]$ die Werte

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & -\pi < x \leq 0 \\ c_2 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, besitzt. Beweisen Sie anschließend mit Hilfe der (reellen) Parsevalschen Gleichung für eine stückweise stetige Funktion $f(x)$ die Gültigkeit der Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

A 3.8.13 Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion f mit $f(x) = \pi^2 - x^2$ für $|x| \leq \pi$. Welchen Wert erhält man für die Reihen

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \ldots \quad \text{und} \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots \text{ ?}$$

A 3.8.14 Die 2π-periodische Funktion $f(x)$ sei im Intervall $[0, 2\pi]$ wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{\pi}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} - x & \text{für } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

(b) Geben Sie eine (integralfreie) Formel für die Fourier-Koeffizienten von $f(x)$ an !

(c) Wie lautet die Fourier-Summe $S_3 f(x)$?

Leichte Abwandlung – Verschiebung nach unten:

Die 2π-periodische Funktion $f(x)$ sei im Intervall $[-\pi, \pi]$ wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{für } 0 \leq |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

(b) Geben Sie eine (integralfreie) Formel für die Fourier-Koeffizienten von $f(x)$ an !

(c) Wie lautet die Fourier-Summe $S_3 f(x)$?

A 3.8.15 Bestimmen Sie die Fourier-Reihe für die 2π-periodische Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sinh(x) \,, \quad (-\pi < x \leq \pi).$$

A 3.8.16 Bestimmen Sie durch Fourieranalyse der ungerade ergänzten Funktion $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \\ 1, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$ am Punkt $x = \frac{\pi}{2}$ den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\left((2k+1)t\right) dt$.

A 3.8.17 Bestimmen Sie die Fourierreihe der 2π-period. Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -\frac{2}{\pi}(x-\pi), & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \\ \frac{2}{\pi}(x-2\pi), & \frac{3}{2}\pi \le x \le 2\pi. \end{cases}$
Zeigen Sie, dass $f(\pi - x) = -f(\pi + x)$ gilt und verwenden Sie diese Gleichung zur Berechnung der Fourierkoeffizienten.

.... (punktweise, gleichmäßige & Konvergenz im quadratischen Mittel)

A 3.8.18 (a) Was bedeutet die folgende Aussage für Funktionenfolgen aus $C([a,b],\mathbb{R})$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon\ (n \ge N \Longrightarrow \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon)\ ?$$

(b) Zeigen Sie:

(i) Gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.

(ii) Die Umkehrung von Aussage (i) ist i.A. falsch. (Gegenbeispiel)

(iii) Ist $K \subseteq \mathbb{C}$ sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon K \to \mathbb{C}$, welche gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon K \to \mathbb{C}$, dann ist f stetig.

(iv) Die Aussage aus (iii) ist i.A. falsch, falls nur punktweise Konvergenz vorliegt.

A 3.8.19 (a) Bestimmen Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ die Stammfunktion F_n von $f_n(x) := \dfrac{n}{n^2 + x^2}$ mit $F_n(0) = 0$.

(b) Konvergieren die Funktionenfolgen f_n und F_n (aus Aufgabenteil (a)) punktweise auf $\mathbb{R}$? Konvergieren f_n und F_n gleichmäßig auf $\mathbb{R}$?

A 3.8.20 (a) Konvergiert die Funktionenfolge $f_k\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) := \left(\dfrac{|x-\pi|}{\pi}\right)^k$, punktweise? Konvergiert f_k gleichmäßig?

(b) Konvergiert die 2π-periodische Fortsetzung der Folge (f_k) aus (a) im quadratischen Mittel?

A 3.8.21 Begründen Sie, warum die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge f_n aus $C([a,b],\mathbb{R})$ die Konvergenz im quadratischen Mittel nach sich zieht.

Tipp: Was besagt Ungleichung (1.1)

A 3.8.22 Finden Sie eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche im quadratischen Mittel aber nicht gleichmäßig konvergiert.

. . . . (Kombi)

A 3.8.23 Zeigen Sie:

(a) Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und

$$F(x) := \int_a^b f(t)\sin(xt)dt \ ,$$

so folgt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x) = 0$.

(b) Für alle $0 < x < 2\pi$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} \;=\; \frac{\pi - x}{2} \ . \tag{3.19}$$

Hinweis: $\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}\colon \ \sum\limits_{k=1}^{n} \cos(kt) \;=\; \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} - \dfrac{1}{2}$

(c) Für jedes $\delta \in]0,\pi[$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k}$ gleichmäßig auf dem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$.

(d) Verwenden Sie Sätze aus der Vorlesung sowie (b) und (c) zur Bestimmung des Grenzwertes der Funktionenreihe

$$T(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \ . \tag{3.20}$$

Bonus: **(+10 ZP)**

(i) Zeigen Sie die Gültigkeit von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \;=\; \dfrac{\pi^2}{6}$.

(ii) Berechnen Sie je den Grenzwert der Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n^4}$, $(x \in \mathbb{R})$.

. . . . (Mehrdimensionaler Fall)

A 3.8.24 Bestimmen Sie die diskrete Fouriertransformierte von $f(x,y) := \sin(5x)\cos(3y)$.

A 3.8.25 Bestimmen Sie für die 2π-periodische Funktion $f(x) := \prod\limits_{j=1}^{n} \cos(x_j)$ auf dem $\mathbb{R}^n$ die diskrete Fourier-Transformierte

$$\hat{f}(k) \;:=\; \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{(-\pi,\pi)^n} \left(\prod_{j=1}^{n} \cos(x_j) \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle k,x\rangle}\, d\mu_n(x) \qquad (k \in \mathbb{Z}^n).$$

Faltung

Kontinuierliche Fourier-Transformation

A 3.8.24 Bestimmen Sie die kontinuierliche Fouriertransformierte von $f(x,y) := (1-|x|)(1-|y|)$ für $\|(x,y)\|_\infty \leq 1$ und $f(x,y) := 0$ sonst.

A 3.8.25 Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) \ := \ \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|_2^2}{2}}$ auf dem $\mathbb{R}^n$ die kontinuierliche FOURIER-Transformierte

$$\hat{f}(\xi) \ := \ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|_2^2}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle \xi, x\rangle} \, d\mu_n(x) \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

L^2-Fourier-Theorie

Kapitel 4

Klausurvorbereitung – Fachwissen

4.1 Theoriefragen zu Kapitel 1

A 4.1.1 Warum ist jeder Innenproduktraum auch ein normierter Raum ?

A 4.1.2 Warum ist jeder normierte Raum auch ein metrischer Raum ?

A 4.1.3 Warum ist jeder metrische Raum ein topologischer Raum ?

. . . .

A 4.1.4 Welche Eigenschaften verlangt man von einer Metrik d auf einer nichtleeren Menge X ?

A 4.1.5 Welche Eigenschaften verlangt man von einer Norm $\|\cdot\|$ auf einem reellen Vektorraum X ?
oder: Welche Eigenschaften verlangt man von einer Norm auf einem reellen Vektorraum?

A 4.1.6 Wie ist die von einem Skalarprodukt auf einem Vektorraum induzierte Metrik d definiert?

A 4.1.7 Wie lautet die Cauchy-Schwarz-Ungleichung im Euklidischen $\mathbb{R}^n$?

A 4.1.8 Wie lautet die Hölder-Ungleichung ?

A 4.1.9 Wann heißt eine Folge von Punkten eines metrischen Raumes (X, d) konvergent?

A 4.1.10 Wann heißt eine Folge von Punkten im im Euklidischen $\mathbb{R}^n$ konvergent ?

A 4.1.11 Wie definiert man die Konvergenz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ einer Folge von Punkten x_n in einem normierten reellen Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ gegen einen Punkt x mathematisch präzise ?

A 4.1.12 Wie ist die zur Euklidischen Norm $\|\cdot\|_{\text{Euklid}}$ auf dem $\mathbb{R}^n$ gehörige Metrik d_{Euklid} definiert?
Wann nennt man eine Folge x_k in $\mathbb{R}^n$ eine CAUCHY-Folge bzgl. d_{Euklid}?

A 4.1.13 Wann heißt ein metrischer Raum (X, d) vollständig?

A 4.1.14 Wann heißt eine Folge in einem normierten reellen Vektorraum Cauchy-Folge?

A 4.1.15 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Was besagt der BANACHsche Fixpunktsatz ?
oder: Formulieren Sie den BANACHschen Fixpunktsatz.
oder: Wie lautet der BANACHsche Fixpunktsatz?

A 4.1.16 Wann heißt eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ auf einem metrischen Raum (X, d) stetig in $a \in X$?
oder: Wann heißt $f\colon X \to \mathbb{R}$ auf einem metrischen Raum (X, d) stetig im Punkt $x_0 \in X$?

A 4.1.17 Wann nennt man eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig in $(0, 0)$?

oder:

Wie definiert man die Stetigkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $(0, 0)$?

A 4.1.18 Ist Stetigkeit von f in $(0, 0)$ äquivalent zu $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)$?

A 4.1.19 Welche Eigenschaft haben stetige Funktionen $f\colon K \to \mathbb{R}$ auf kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^2$?

4.2 Theoriefragen zu Kapitel 2

A 4.2.1 Wie ist die partielle Ableitung $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ nach der i-ten Koordinate definiert ?

A 4.2.2 Wann heißt $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (total oder Fréchet-)differenzierbar im Punkt $a \in \mathbb{R}^2$?
oder:
Wann heißt eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Fréchet-differenzierbar im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$?
oder:
Wann heißt eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (total / Fréchet-)differenzierbar im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^m$?
oder:
Wann heißt $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (total oder Fréchet-)differenzierbar im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$?

A 4.2.3 Beweisen Sie: Ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (total oder Fréchet-)differenzierbar in $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist sie auch stetig in x.

A 4.2.4 Welche Beziehung besteht zwischen der Ableitung $df(a)$ einer in a differenzierbaren Funktion f und der partiellen Ableitung $\partial_h f(a)$ von f im Punkt a in Richtung $h \in \mathbb{R}^n$?

A 4.2.5 Wie lautet die Kettenregel ?
oder:
Formulieren Sie die Kettenregel für die Ableitung von $f \circ g$ für Funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.
oder:
Formulieren Sie die Kettenregel für die Ableitung von $u \circ g$, wobei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen sind.

A 4.2.6 Wie sieht das Taylor-Polynom zweiten Grades einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ aus ?

A 4.2.7 Definieren Sie eine Extremalstelle für eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

A 4.2.8 Beweisen Sie, dass der Gradient einer differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an einer Extremalstelle verschwindet.

A 4.2.9 Ist jeder kritische Punkt ein Extremalpunkt ?

A 4.2.10 Formulieren Sie ein hinreichendes Kriterium dafür, dass $a \in \mathbb{R}^n$ eine lokale Minimalstelle der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist.
oder:
Formulieren Sie ein hinreichendes Kriterium dafür, dass $x^* \in \mathbb{R}^n$ lokale Minimalstelle der Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist.

A 4.2.11 Formulieren Sie den Mittelwertsatz für eine partiell differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

A 4.2.12 Formulieren Sie den Satz über implizite Funktionen.
oder: Formulieren Sie den Satz über implizite Funktionen im $\mathbb{R}^2$.

A 4.2.13 Formulieren Sie den Satz über implizite Funktionen für die unbekannte Funktion $y(x)$ als Lösung der Gleichung $F(x, y) = 0$ für eine stetig differenzierbare Abbildung $F\colon U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ mit den offenen Teilmengen $U_1 \subseteq \mathbb{R}^k$, $U_2 \subseteq \mathbb{R}^m$.

Wie lautet die Kettenregel für diese Gleichung, aus der man die Jacobi-Matrix von $y(x)$ berechnen kann ?

A 4.2.14 Wie lautet der Satz über die lokale Umkehrbarkeit einer Abbildung $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$?
oder: Wie lautet der Satz über die lokale Umkehrbarkeit einer Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$?

A 4.2.15 Wann heißt eine Abbildung $\Phi\colon U \to V$ zwischen offenen $U, V \subset \mathbb{R}^2$ ein Diffeomorphismus?

A 4.2.16 Formulieren Sie die Multiplikatorregel von Lagrange, die ein notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Extremums unter Nebenbedingungen angibt.

A 4.2.17 Unter welchen Bedingungen an $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x, y) = 0\}$ eine eindimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$?
oder:
Unter welchen Voraussetzungen an $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Teilmenge $M := g^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α ?

4.3 Theoriefragen zu Kapitel 3

A 4.3.1 Wann nennt man eine Menge $\mathcal{M}$ von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ einen σ-Ring?

A 4.3.2 Wann nennt man eine Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ von Teilmengen einer Menge Ω eine σ-Algebra?
oder: Welche Eigenschaften verlangt man von einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf einer Menge Ω ?

A 4.3.3 Wann heißt eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$?
oder:
Welche Eigenschaften hat ein Maß μ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$?
oder:
Welche Eigenschaften verlangt man von einem Maß μ auf einer σ-Algebra?

A 4.3.4 Wie ist das äußere Lebesgue-Maß $\lambda_n^*(A)$ einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ definiert?
oder: Wie ist das äußere Lebesgue-Maß $\mu^*(A)$ einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ definiert?

A 4.3.5 Wann nennt man eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar?
oder: Welche Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ nennt man Lebesgue-messbar ?

A 4.3.6 Wann heißt eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-Nullmenge ?

. . . . (Integration)

A 4.3.7 Wie ist das Lebesgue-Integral einer Elementarfunktion definiert ?
oder:
Wie ist das Lebesgue-Integral der Indikatorfunktion (charakteristischen Funktion) 1_A einer Lebesgue-messbaren Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ definiert?

A 4.3.8 Welche Beziehung besteht zwischen dem Lebesgue-Integral $\int\limits_{\mathbb{R}^2} 1_K(x)\, d\lambda_2(x)$ der Elementarfunktion 1_K zu einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^2$ und dem Lebesgue-Maß$\lambda_2(K)$?

A 4.3.9 Was verstehen wir unter einem Normalbereich einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$?

A 4.3.10 Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Teilmenge und μ_n das n-dimensionale Lebesgue-Maß. Für welche Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt die Gleichung $\mu_n(A) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\mu_n(x)$?

A 4.3.11 Wie lautet der Transformationssatz ?
oder: Formulieren Sie die Substitutionsregel im $\mathbb{R}^n$ (bzw. den Transformationssatz).
oder: Formulieren Sie die Substitutionsregel (den Transformationssatz) im $\mathbb{R}^2$.

A 4.3.12 Formulieren Sie den Satz von Fubini.
oder: Wie lautet der Satz von Fubini?

. . . . (Fourier-Theorie)

A 4.3.13 Welche Eigenschaft muss eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllen, damit sie 2π-periodisch ist ?

A 4.3.14 Wie sind die Fourier-Koeffizienten einer 2π-periodischen Riemann-integrierbaren Funktion f definiert?

Kapitel 5

Klausurvorbereitung – Anwendung

5.1 Anwendungsaufgaben zu Kapitel 1

.... (Normen auf endlichdimensionalen Vektorräumen)

A 5.1.1 Zeigen Sie: Zu jedem $0 < C < \infty$ gibt es eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$, so dass für jede Folge x_k im $\mathbb{R}^n$ mit $\|x_k\|_{\text{Euklid}} \leq \frac{1}{k}$ schon $\|x_k\| \leq \frac{1}{Ck}$ gilt.

Gibt es auch eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$, so dass für jede Folge x_k im $\mathbb{R}^n$ mit $\|x_k\|_{\text{Euklid}} \leq \frac{1}{k}$ schon $\|x_k\| \leq \frac{1}{k^2}$ gilt ?

A 5.1.2 Bestimmen Sie die kleinste Konstante $C < \infty$ mit $\|x\|_{\text{Euklid}} \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^4 \right)^{\frac{1}{4}}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

A 5.1.3 Zeigen Sie, dass die für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ durch $\|x\| := 2|x_1| + \frac{1}{2}|x_2|$ definierte Abbildung $\|.\|\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^2$ ist und skizzieren Sie die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R}^2\colon \|x\| \leq 1\} .$$

Sei nun $\|.\|_2$ die Euklidische Norm und $\|.\|$ die obige Norm. Bestimmen Sie Konstanten $a, b > 0$, so dass $\forall x \in \mathbb{R}^2\colon a\ \|x\|_2 \leq \|x\| \leq b\ \|x\|_2$ gilt. Sind $\|.\|_2$ und $\|.\|$ äquivalent ?

A 5.1.4 Seien $1 < p, q < \infty$ vorgegeben und bezeichne $\|(x, y)\|_p := (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$ die p-Norm auf $\mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass durch $\|(x, y, z)\|_{p,q} := (\|(x, y)\|_p^q + |z|^q)^{1/q}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^3$ definiert wird.

Zeigen Sie, dass die Einheitssphäre $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\|_{p,q} = 1\}$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{p,q}$ eine kompakte Teilmenge des Euklidischen $\mathbb{R}^3$ ist.

A 5.1.5 Sei Π_N der Vektorraum aller reellen Polynome p vom Höchstgrad N.

Beweisen Sie, dass $\|p\| := \sum_{k=0}^{N} |p(k)|$ eine Norm auf Π_N definiert.

Konvergiert die Folge der Polynome $p_n(x) := \prod_{k=0}^{N-1} \left(x - k - \frac{1}{n}\right)$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|$ auf Π_N ?

A 5.1.6 Zeigen Sie, dass durch $\|f\| := \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx$ eine Norm auf dem Vektorraum $C([0,1])$ der stetigen Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert wird.

Zeigen Sie, dass die Folge $f_n(x) := \begin{cases} n & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{für } \frac{1}{n^2} < x \leq 1 \end{cases}$ eine Cauchy-Folge bzgl. der oben definierten Norm $\|\cdot\|$ auf $C([0,1])$ ist.

A 5.1.7 Bezeichne $\langle x, y\rangle_{\text{Euklid}} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ das Euklidische Skalarprodukt von Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite und symmetrische Matrix.

Zeigen Sie, dass durch $\langle x, y\rangle_A := \langle Ax, y\rangle_{\text{Euklid}}$ ein neues Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert wird, d.h., eine bilineare, positiv definite und symmetrische Abbildung $\langle \cdot, \cdot\rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Sind die von $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\text{Euklid}}$ und $\langle \cdot, \cdot\rangle_A$ induzierten Metriken d_{Euklid} und d_A auf dem $\mathbb{R}^n$ äquivalent?

Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Konstante $C > 0$, mit der $d_A(x, y) \le C d_{\text{Euklid}}(x, y)$ gilt.

A 5.1.8 Zeigen Sie, dass durch $d((x, y), (x', y')) := \sqrt{|x - x'|} + \sqrt{|y - y'|}$ eine Metrik d auf dem $\mathbb{R}^2$ definiert wird.

Verdeutlichen Sie anhand einer Skizze der Einheitskugel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, d((x, y), (0, 0)) \le 1\}$ um den Nullpunkt bzgl. der Metrik d, dass d zur Euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^2$ äquivalent ist, jedoch nicht von einer Norm induziert wird.

A 5.1.9 Zeigen Sie, dass durch $d(f, g) := \sup_{x\in[0,\infty[} \mathrm{e}^{-x}|f(x)-g(x)|$ eine Metrik auf der Menge $C_b([0, \infty[, \mathbb{R})$ aller stetigen und beschränkten Funktionen auf $[0, \infty[$ definiert wird.

Konvergiert bzgl. der Metrik d die Folge $f_k \in C_b([0, \infty[, \mathbb{R})$, definiert durch

$$f_k(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \le x < k, \\ x - k & \text{falls } k \le x < k + 1, \\ 1 & \text{falls } x \ge k + 1? \end{cases}$$

Konvergiert f_k bzgl. der Metrik $\tilde{d}(f, g) := \sup_{x\in[0,\infty[} |f(x) - g(x)|$ auf $C_b([0, \infty[, \mathbb{R})$?

Sind d und $\tilde{d}$ äquivalente Metriken auf $C_b([0, \infty[, \mathbb{R})$?

A 5.1.10 Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ injektiv. Zeigen Sie, dass durch $d_f(x, y) := \|f(x) - f(y)\|_{\text{Euklid}}$ eine Metrik d_f auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

Sei nun d_f die Metrik zu der speziellen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (\mathrm{e}^{x_1}, \mathrm{e}^{x_2})$. Zeigen Sie, dass die durch $x_k := \left(\ln\left(\frac{1}{k}\right), \ln\left(\frac{1}{k}\right)\right)$ definierte Folge in $(\mathbb{R}^2, d_f)$ eine Cauchy-Folge ist, die jedoch nicht konvergiert.

Ist $(\mathbb{R}^2, d_f)$ vollständig?
oder:
Ist $\mathbb{R}^n$ mit der zu $f(x) := (\mathrm{e}^{x_1}, \ldots, \mathrm{e}^{x_n})$ gehörigen Metrik d_f vollständig?

Hinweis: Betrachten Sie die Folge $\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right), \ldots, \ln\left(\frac{1}{k}\right)\right)$.

A 5.1.11 Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{R}^2$ durch

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \;:=\; \begin{cases} |x_1 - x_2| & \text{für } y_1 = y_2 \\ |x_1 - x_2| + 1 & \text{für } y_1 \ne y_2 \end{cases}$$

eine Metrik definiert wird.

Ist die Metrik d auf $\mathbb{R}^2$ äquivalent zur Euklidischen Metrik ?

Ist $(\mathbb{R}^2, d)$ ein vollständiger metrischer Raum ?

A 5.1.12 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \ln(1 + \mathrm{e}^x)$ definiert. Zeigen Sie, dass $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ gilt, aber f keinen Fixpunkt besitzt.

Warum widerspricht dies nicht dem Banachschen Fixpunktsatz ?

Konvergiert die durch $x_{k+1} = f(x_k)$ zu einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ definierte Folge ?

A 5.1.13 Bestimmen Sie die Operatornorm der durch die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ induzierten linearen Abbildung auf dem $\mathbb{R}^2$ bzgl. der Euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$.

oder:

Zeigen Sie, dass für die Operatornorm der durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

induzierten linearen Abbildung auf dem $\mathbb{R}^2$ bzgl. der Euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ die Gleichung $\|A\| \leq 2$ gilt, d.h., zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ die Ungleichung $\|Ax\|_2 \leq 2\|x\|_2$ gilt.

Beweisen Sie, dass die durch $f(x) := \frac{1}{4}(Ax + b)$ mittels der Matrix A und dem Vektor $b := (1, \sqrt{3})^T$ definierte Abbildung auf der Teilmenge $D := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ der Euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.

A 5.1.14 Zeigen Sie, dass die durch $f(x, y) := (\frac{1}{8}(x+y)^2, \frac{1}{4}\sin(x)+\frac{1}{2})$ definierte Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf dem Euklidischen $\mathbb{R}^2$ genau einen Fixpunkt im Quadrat $[0, 1]^2$ besitzt.

A 5.1.15 Sei $b \in \mathbb{R}^2$ gegeben und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x) := Ax + b$ mit

$$\text{(i)} \qquad A := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \qquad\qquad \text{(ii)} \qquad A := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass die Iterationsfolge $x_n := f(x_{n-1})$ für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}^2$ gegen einen eindeutig bestimmten Fixpunkt in $\mathbb{R}^2$ konvergiert.

Bestimmen Sie den Fixpunkt in Abhängigkeit von A und b.

....(Stetigkeit)

A 5.1.16 Betrachten Sie die Funktion $$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} f(t, at)$ und $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} f(t, at^2)$?

Ist die Funktion f in $(0, 0)$ stetig oder gegebenenfalls stetig abänderbar?

A 5.1.17 Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^6 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und jedes $c \in \mathbb{R}$ die Folge $f(x_n, c \cdot x_n)$ konvergiert, d.h. dass im Nullpunkt der Grenzwert der Funktion entlang einer beliebigen Geraden existiert. Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$ für jede beliebige Nullfolge $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Ist f in $(0, 0)$ stetig?

A 5.1.18 Bestimmen Sie die iterierten Grenzwerte $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ und $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ für die Funktion

$$f(x,y) \ := \ \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\ , \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

Ist f stetig in $(0,0)$?

A 5.1.19 Zeigen Sie, dass für die durch

$$f(x,y) \ := \ \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \text{ oder } y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion auf dem Euklidischen $\mathbb{R}^2$ zwar die Grenzwerte $\lim_{x\to 0} f(x,0)$ und $\lim_{y\to 0} f(0,y)$ existieren, der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ jedoch nicht existiert.

oder:

Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{x\to 0} f(x,0)$ und $\lim_{y\to 0} f(0,y)$ für die durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \text{ oder } y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \text{ und } y \notin \mathbb{Q} \end{cases} \tag{5.1}$$

auf dem $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion f.

Ist f stetig in $(0,0)$?

A 5.1.20 Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \dfrac{\sin(x^2)}{x^2+y^2}$, bzgl. der Euklidischen Metrik beschränkt?

Kann man f bzgl. der Euklidischen Metrik stetig in den Punkt $(0,0)$ fortsetzen ?

A 5.1.21 Ist die durch $f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig in $(0,0)$?

Zeigen Sie, dass die Funktion f in jeder Kreisscheibe um $(0,0)$ jeden Wert aus $\mathbb{R}$ annimmt.

A 5.1.22 Zeigen Sie, dass es auf dem Einheitskreis $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 | \ \|x\|_2 = 1\}$ einen Punkt (x_1,x_2) gibt, so dass $(x_2)^4 - (y_2)^4 \leq (x_1)^4 - (y_1)^4$ für alle $y \in S^1$ gilt.

5.2 Anwendungsaufgaben zu Kapitel 2

. . . . (Kurven und Bogenlänge)

A 5.2.1 Bestimmen Sie für die folgenden Kurven jeweils den Tangentialvektor und die Bogenlänge:

(a) $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^k$, $t \mapsto (1-t)v + tw$ für $v, w \in \mathbb{R}^k$ fest gewählt.

(b) $c\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} x + r\cos(t) \\ y + r\sin(t) \end{pmatrix}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $r > 0$.

Welche Gebilde beschreiben die oben genannten Kurven?

A 5.2.2 Durch $\gamma(t) := (2\cos(t) - \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t))$ wird eine parametrisierte Kurve γ definiert. Zeigen Sie, dass es kein $t \in \,]0, 2\pi[$ gibt, so dass $\frac{\gamma(2\pi)-\gamma(0)}{2\pi} = \dot{\gamma}(t)$ gilt.

Bestimmen Sie die Länge $\int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\|_{\text{Euklid}}\, dt$ der parametrisierten Kurve γ.
Hinweis: Es gilt $\sin(2t) = 2\cos(t)\sin(t)$ und $\cos(2t) = 1 - 2\left(\sin(t)\right)^2$.

A 5.2.3 Bestimmen Sie die Länge des Weges $c\colon [0,1] \mapsto \mathbb{R}^3$, $c(t) := (t, -t, f(t,-t))$, der im Graphen der Funktion f aus (5.3) verläuft.

. . . . (Kettenregel)

A 5.2.4 Überprüfen Sie, ob für die Funktion f aus (5.2) und die Kurve $g(t) = (t,t)$ die Kettenregel für $f \circ g$ im Punkt $t = 0$ gilt.

A 5.2.5 Berechnen Sie die Ableitung von $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) := (xy^2 + xz^2, y^2 - z^2)$, und die Ableitung von $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $g(t) := (t, \cos(t), \sin(t))$.

Bestimmen Sie die Ableitung von $f \circ g$ einerseits direkt und andererseits mit Hilfe der Kettenregel.

A 5.2.6 Bestimmen Sie für $g(t) = (\sin(t) + \cos(t), t - t^2)$ und $h(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ die Ableitung von $(h \circ g)(t)$ im Punkt $t = 0$ mittels der Kettenregel.

A 5.2.7 Zeigen Sie: Gilt für die stetig differenzierbare Funktion $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto u(t,x)$, die Gleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial x}$, so hängt die durch $(t,x) \mapsto u(t, x - ct)$ definierte Funktion nicht von t ab, und bezeichnet man diese Funktion mit $f = f(x)$, so gilt $u(t,x) = f(x + ct)$.

A 5.2.8 Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Ist die Funktion $f(x,y)$ stetig in $(x_0,y_0) = (0,0)$? (Begründung!)

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $f_x(x,y)$ und $f_y(x,y)$ für $(x,y) \neq (0,0)$!

(c) Existieren die partiellen Ableitungen f_x und f_y im Punkt $(x_0,y_0) = (0,0)$? Falls ja, geben Sie jeweils den Wert an!

(d) Ist die Funktion $f(x,y)$ total differenzierbar in $(x_0,y_0) = (0,0)$? (Begründung!)

Leichte Variation – Rollentausch von x und y:

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Ist die Funktion $f(x,y)$ stetig in $(x_0,y_0) = (0,0)$? (Begründung!)

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $f_x(x,y)$ und $f_y(x,y)$ für $(x,y) \neq (0,0)$!

(c) Existieren die partiellen Ableitungen f_x und f_y im Punkt $(x_0,y_0) = (0,0)$? Falls ja, geben Sie jeweils den Wert an!

(d) Ist die Funktion $f(x,y)$ total differenzierbar in $(x_0,y_0) = (0,0)$? (Begründung!)

A 5.2.9 Existieren für die durch $f(x,y) := \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ bei $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) := 0$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial y}$?

Ist f stetig ? Ist f Fréchet-differenzierbar ?

A 5.2.10 Prüfen Sie nach, ob die durch $f(x,y) := \dfrac{x^3y - xy^3}{|x|+|y|}$ und $f(0,0) = 0$ auf $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion im Nullpunkt partiell differenzierbar ist.

Ist f im Nullpunkt (total oder Fréchet-)differenzierbar?

A 5.2.11 Existieren für die durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{|x|+|y|}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die partiellen Ableitungen im Nullpunkt?

Ist f stetig im Nullpunkt? Ist f (total oder Fréchet-)-differenzierbar im Nullpunkt?

A 5.2.12 Existieren für die durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0), \end{cases} \tag{5.2}$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ im Nullpunkt?

Ist f stetig im Nullpunkt? Ist f (total oder Fréchet-)-differenzierbar im Nullpunkt?

A 5.2.13 Weisen Sie nach, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ die Taylorreihe von $f(x) := \ln(1+x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ ist.

Konvergiert die Taylorreihe von f auf dem Intervall $[0,1]$ gleichmäßig?

A 5.2.14 Ermitteln Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades der durch $g(x,y) := \frac{y}{x}$ definierten Funktion $g\colon\ ]0,\infty[\ \times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zum Entwicklungspunkt $(1,1)$.

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $h := g \circ f$ im Punkt $(1,0)$, wobei $f\colon\ ]0,\infty[\ \times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ durch $f(x,y) := (x\mathrm{e}^{-y}, x^2)$ gegeben ist.

A 5.2.15 Besitzt die Funktion $f(x,y) = (x+y+xy)^2 + 2xy$ auf $\mathbb{R}^2$ eine lokale Minimalstelle ?

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades der Funktion f zum Entwicklunkspunkt $(0,0)$. Nimmt dieses negative Werte an ?

A 5.2.16 Sei $f\colon\ ]0,\infty[^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) := \dfrac{x-y}{x+y}$ definiert. Bestimmen Sie für f das Taylorpolynom zweiten Grades im Entwicklungspunkt $(1,1)$.

Besitzt f lokale oder globale Extrema?

A 5.2.17 Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ , \quad f(x,y) := xy\mathrm{e}^{-(x+y)}\ . \tag{5.3}$$

Besitzt f globale Extrema?

A 5.2.18 Bestimmen Sie alle lokalen Extrempunkte der Funktion $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ und prüfen Sie auf die Art des Extremums.

A 5.2.19 Bestimmen Sie zu $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ den Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, für den die Summe der Quadrate der Abweichungen $\|x - a_1\|, \ldots, \|x - a_k\|$ minimal ist (wobei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm bezeichnet).

A 5.2.20 Zeigen Sie, dass man die Gleichung $x^3 + xy + y^2 + 1 = 0$ in der Nähe des Punktes $(-1, 1)$ sowohl durch $y = y(x)$ als auch durch $x = x(y)$ auflösen kann.

Bestimmen Sie die Ableitung $y'(-1)$ und $x'(1)$.

A 5.2.21 Zeigen Sie, dass man die Gleichung $x^y - y^x = x - 1$ lokal in der Nähe des Punktes $(x_0, y_0) := (1, 1)$ durch eine Funktion $y = y(x)$ auflösen kann.

Ermitteln Sie die Ableitung $y'(1)$.

A 5.2.22 Sei $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $g(x, y, z) := xy + yz + zx$ definiert. Zeigen Sie, dass man für $c \neq 0$ die Gleichung $g(x, y, z) = c$ lokal zumindest immer nach einer der Variablen x, y, z auflösen kann.
Geben Sie einen Punkt aus $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, g(x, y, z) = -1\}$ an, in dessen Nähe man M nicht als Graph $z = h(x, y)$ einer C^1-Funktion h über der (x, y)-Koordinatenebene schreiben kann.

A 5.2.23 Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x^4 + y^2 - z &= 0 \\ x^2 - 2xy + 1 - z &= 0 \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 3, 8)$ lokal nach (x, y) auflösbar ist.

Die auflösende Funktion $g(z) = (x(z), y(z))$ parametrisiert eine Kurve $\gamma(z) = (x(z), y(z), z)$. Berechnen Sie den Tangentialvektor $\gamma'(z)$ an die Kurve im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 3, 8)$.

A 5.2.24 Werden n elektrische Widerstände parallel geschaltet, so wird der Gesamtwiderstand R des Systems durch die Gleichung

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

bestimmt. Wandeln Sie die obige Gleichung derart um, dass Sie den Satz über implizite Funktionen anwenden können. Leiten Sie die so erhaltene Gleichung mittels Kettenregel ab.

Drücken Sie anschließend $\dfrac{\partial R}{\partial R_k}$ durch R und R_k aus.

A 5.2.25 Bezeichne $g(p, q)$ für $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ die größte reelle Nullstelle des Polynoms $x \mapsto x^3 + px + q$. Zeigen Sie, dass $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wohldefiniert ist, und dass g differenzierbar in denjenigen Punkten (p, q) ist, für die $(g(p, q))^2 \neq -\frac{p}{3}$ gilt.

Sei g die in (b) definierte Funktion. Zeigen Sie, dass die Menge der Punkte $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ mit $(g(p, q))^2 \neq -\frac{p}{3}$ offen ist, und bestimmen Sie in Abhängigkeit von g die partiellen Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial p}$ und $\frac{\partial g}{\partial q}$ in diesen Punkten.

. . . . (Lagrange)

A 5.2.26 Bestimmen Sie das Maximum und Minimum der Funktion $f(x,y) := x^4 + y^4$ auf der Menge $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^4 \leq 1\}$.

A 5.2.27 Bestimmen Sie das Maximum und Minimum der Funktion $f(x,y) := -(x^2+y^2)^2 + x^2 - y^2$ auf dem Einheitskreis $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

A 5.2.28 Ermitteln Sie das globale Minimum von $f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2$ unter der Nebenbedingung $xy + yz + zx = -1$.

A 5.2.29 Zeigen Sie, dass das Urbild $M := \{(x,y,z) \mid g(x,y,z) = 1\}$ des Wertes 1 unter der Funktion $g(x,y,z) := x^2 + y^2 + yz + z^2$ eine zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

Ist M kompakt?

Bestimmen Sie die Extrema von $f\colon M \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$, mit M.

A 5.2.30 Finden Sie diejenigen Punkte auf der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, die vom Punkt $(4,-4,2)$ den kleinsten bzw. den größten Abstand haben.

A 5.2.31 Zeigen Sie, dass die Ellipse $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 16\}$ eine eindimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

Ist M kompakt?

Bestimmen Sie die Fläche des größten achsenparallelen Rechtecks innerhalb der Ellipse M.
oder:
Bestimmen Sie die Fläche des größten achsenparallelen Rechtecks, das vollständig innerhalb der Ellipse $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 16\}$ liegt, d.h., bestimmen Sie das Maximum der durch $f(x,y) := 4xy$ definierten Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$.

A 5.2.32 Beweisen Sie, dass $M := \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^∞ ist. Geben Sie die Tangentialebene an M im Punkt $(1,1,1)$ an.

Finden Sie die Punkte, in denen lokale Extrema der Funktion $f(x,y,z) := x - y + z$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ vorliegen können.

A 5.2.33 Ermitteln Sie die (globalen) Extrema von $f(x,y) := x^2 - xy + y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + xy + y^2 = 1$.

A 5.2.34 Finden Sie das Minimum der Funktion $f(x,y,z) := x - y + 2z$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

5.3 Anwendungsaufgaben zu Kapitel 3

A 5.3.1 Für welche Mengen Ω ist die Menge $\mathcal{A} := \{A \subset \Omega \,|\, A \text{ hat endlich viele Elemente}\}$ der endlichen Teilmengen von Ω eine σ-Algebra?

A 5.3.2 Sei $\mathcal{A}$ die Menge derjenigen Teilmengen von $\mathbb{R}$, die abzählbar sind oder ein abzählbares Komplement in $\mathbb{R}$ besitzen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

Auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$ sei eine Abbildung μ durch $\mu(A) := \begin{cases} 0\,, & \text{falls } A \text{ abzählbar}\,, \\ 1\,, & \text{falls } \mathbb{R} \setminus A \text{ abzählbar}\,, \end{cases}$ definiert. Ist μ ein Maß ?

.... (Lebesgue-Theorie)

A 5.3.3 Beweisen Sie, dass der Durchschnitt $A := \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ der Mengen

$$A_n := \{x = 0.x_1x_2x_3\ldots \,|\, \forall 1 \le k \le n :\ x_k \ne 5\}$$

von Zahlen $x \in [0,1]$, in deren nicht abbrechender Dezimalbruchentwicklung $x = 0.x_1x_2x_3\ldots$ bis zur n-ten Stelle keine Fünf auftaucht, eine Lebesgue-Nullmenge ist.

A 5.3.4 Ist die Teilmenge $A := \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \left[k, k + \frac{1}{2^k}\right[$ von $\mathbb{R}$ Lebesgue-messbar?

Bestimmen Sie gegebenenfalls ihr Lebesgue-Maß.

A 5.3.5 Bestimmen Sie das Lebesgue-Maß der Mengen $A := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left]1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$ und $B := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left]n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}\right[$.

A 5.3.6 Berechnen Sie das Lebesgue-Integral $\displaystyle\int_\Omega f(x,y)\,d\mu(x,y)$ von $f(x,y) := x+y$ über das Dreieck $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1-x\}$.

A 5.3.7 Berechnen Sie das Lebesgue-Integral der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aus (5.1).

A 5.3.8 Berechnen Sie das Bereichsintegral $\displaystyle\iint_B y d(x,y)$, wobei B das Dreieck mit den Eckpunkten $P_1(0,0)$, $P_2(3,0)$, $P_3(1,2)$ ist.

Leichte Variation:

Berechnen Sie das Bereichsintegral $\displaystyle\iint_B x d(x,y)$, wobei B das Dreieck mit den Eckpunkten $P_1(0,0)$, $P_2(2,1)$, $P_3(0,3)$ ist.

.... (Flächenberechnungen)

A 5.3.9 Bestimmen Sie den Flächeninhalt $\lambda_2(K)$ der von den Kurven $y = 4x$, $y = \frac{1}{x}$ und $y = x$ berandeten kompakten Menge $K \subset [0,\infty[^2$.

A 5.3.10 Berechnen Sie den Flächeninhalt $\lambda_2(B)$ der Teilmenge $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y \le 2\,,\ x^2 \le y\}$.

A 5.3.11 Berechnen Sie den Flächeninhalt $\lambda_2(B)$ der Teilmenge $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x + y \le 3\,,\ x^2 \le y\}$.

A 5.3.12 Bestimmen Sie den Flächeninhalt (also das 2-dimensionale Lebesgue-Maß $\mu_2(A)$) der Menge

$$A := \{(x, y) \,|\, 0 \le y \le 1\,, y^2 \le x \le y\} \subset \mathbb{R}^2 \;.$$

A 5.3.13 Bestimmen Sie durch Integration der charakteristischen Funktion den Flächeninhalt der Teilmenge $A := \{(x, y) \,|\, 0 \le x \le 1\,,\, 1 - x \le y \le 1 + x^2\}$ von $\mathbb{R}^2$.

.... (Iterierte Integrale)

A 5.3.14 Berechnen Sie für die Funktion $f\colon [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := x + y$, die iterierten Integrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dx\right) dy$ und $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dy\right) dx$.

A 5.3.15 Berechnen Sie für $\quad g\colon [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) := \begin{cases} \dfrac{1}{y^2} & \text{für } 0 < x < y < 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{für } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$

die iterierten Integrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x, y)\, dx\right) dy$ und $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x, y)\, dy\right) dx$.

.... (Fourier-Theorie)

A 5.3.16 Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion f mit $f(x) = \pi^2 - x^2$ für $|x| \le \pi$.

A 5.3.17 Beweisen Sie: Besitzt die komplexe Fourier-Reihe einer stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktion f die Koeffizienten c_k, so hat die Fourierreihe von f' die Koeffizienten $\mathrm{i}kc_k$.

A 5.3.18 Die 2π-periodische Funktion $f(x)$ sei im Intervall $[0, 2\pi]$ wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{\pi}{2} & \text{für } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} - x & \text{für } \frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

(b) Geben Sie eine (integralfreie) Formel für die Fourier-Koeffizienten von $f(x)$ an !

(c) Wie lautet die Fourier-Summe $S_3 f(x)$?

Leichte Abwandlung – Verschiebung nach unten:

Die 2π-periodische Funktion $f(x)$ sei im Intervall $[-\pi, \pi]$ wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{für } 0 \le |x| \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \frac{\pi}{2} \le |x| \le \pi \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

(b) Geben Sie eine (integralfreie) Formel für die Fourier-Koeffizienten von $f(x)$ an !

(c) Wie lautet die Fourier-Summe $S_3 f(x)$?

A 5.3.19 Bestimmen Sie die Fourier-Reihe für die 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \;=\; \sinh(x)\,, \quad (-\pi \;<\; x \;\le\; \pi).$$

A 5.3.20 Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine ungerade (d.h., es gelte $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$) Lebesgue-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass das Lebesgue-Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda_n$ verschwindet.

A 5.3.21 Berechnen Sie die Ableitung der Polarkoordinaten-Abbildung $f(r,\varphi) := (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ und deren Determinante.

Berechnen Sie die Fläche des Kreissektors $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \le x^2 + y^2 \le 4\,,\, x,y \ge 0\}$, indem Sie den Transformationssatz auf die Polarkoordinaten-Abbildung anwenden.

A 5.3.22 Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi(x,y) := (x(1-y), xy)$ in der Nähe jedes Punktes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$ eine differenzierbare Umkehrabbildung besitzt.
Beweisen Sie, dass Φ sogar ein Diffeomorphismus von $]0,\infty[\,\times\,]0,1[$ auf $]0,\infty[\,\times\,]0,\infty[$ ist.

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int\limits_{]0,\infty[\,\times\,]0,\infty[} \mathrm{e}^{-(u+v)^2} \, d\mu(u,v)$ mit Hilfe des Transformationssatzes.

oder:
Berechnen Sie das Integral $\int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(u+v)^2} \, du \, dv$, indem Sie den Transformationssatz auf den Diffeomorphismus $\Phi\colon\,]0,\infty[\,\times\,]0,1[\, \to\,]0,\infty[\,\times\,]0,\infty[$, $\Phi(x,y) := (x(1-y), xy)) = (u,v)$, anwenden.

A 5.3.23 Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi(x,y) := ((x-y)^2, 2xy)$ in der Nähe jedes Punktes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| \neq |y|$ eine differenzierbare Umkehrabbildung besitzt.

Beweisen Sie, dass Φ sogar ein Diffeomorphismus von $\{(x,y) \,|\, 0 < y < x\} \subset \mathbb{R}^2$ auf $]0,\infty[^2$ ist.

Berechnen Sie das Lebesgue-Integral $\displaystyle\int_{\{(x,y)\,|\,0<y<x\}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(x^2 - y^2) \, d\mu_2(x,y)$, indem Sie den Transformationssatz auf Φ anwenden.

A 5.3.24 Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi(\xi,r) := \left(r\xi, r\sqrt{1-\xi^2}\right)$ in der Nähe jedes Punktes $(\xi,r) \in \mathbb{R}^2$ mit $|\xi| < 1$ und $r \neq 0$ eine differenzierbare Umkehrabbildung besitzt.

Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi(\xi,r) := (r\xi, r\sqrt{1-\xi^2})$ ein Diffeomorphismus vom Halbstreifen $]-1,1[\,\times\,]0,\infty[$ auf $\mathbb{R}\times\,]0,\infty[$ ist.

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^\infty \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+r^2\xi^2)\cdot(1+r\sqrt{1-\xi^2})^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{1-\xi^2}} \, d\xi \, dr$, indem Sie die Substitutionsregel (den Transformationssatz) auf den Diffeomorphismus Φ anwenden.

A 5.3.25 Begründen Sie, warum der Zylinderabschnitt

$$\Omega \;:=\; \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \le r^2,\; 0 \le z \le R - y\right\}$$

für $0 < r \le R$ eine Lebesgue-messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ist.

Berechnen Sie für $0 < r \le R$ das Lebesgue-Maß des Zylinderabschnitts Ω.

A 5.3.26 Sei $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x\|_{\text{Euklid}} < 1\}$. Zeigen Sie: Durch $\Phi(r,x) := r(\sqrt{1-\|x\|^2_{\text{Euklid}}}, x)$ wird für $n \ge 2$ ein C^1-Diffeomorphismus $\Phi\colon\,]0,1[\times B_{n-1} \to \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, y_1 > 0\,,\, \|y\|_{\text{Euklid}} < 1\}$ mit $\det(d\Phi(r,x)) = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|x\|^2_{\text{Euklid}}}}$ definiert, und es gilt

$$\frac{1}{n}\int_{B_{n-1}} \frac{1}{\sqrt{1-\|x\|^2_{\text{Euklid}}}} \, d\lambda_{n-1}(x) = \frac{1}{2}\lambda_n(B_n)\,.$$

A 5.3.27 Berechnen Sie das Bereichsintegral

$$\iiint_B (x^2 + y^2) d(x, y, z) \ ,$$

wobei B der gerade Kreiskegel mit der Spitze in $S(0, 0, 1)$ und dem Kreis $x^2 + y^2 \leq 4$ in der x, y-Ebene als Grundfläche ist. **Tipp:** Zylinderkoordinaten.

Leichte Variation – Zylinderspitze und Radius der Grundfläche:

Berechnen Sie das Bereichsintegral

$$\iiint_B (x^2 + y^2) d(x, y, z) \ ,$$

wobei B der gerade Kreiskegel mit der Spitze in $S(0, 0, 2)$ und dem Kreis $x^2 + y^2 \leq 1$ in der x, y-Ebene als Grundfläche ist. **Tipp:** Zylinderkoordinaten.

. . . . („Erweiterter Transformationssatz – Integration auf einer UM“)

A 5.3.28 Stellen Sie das Integral auf, über das man die Fläche der oberen Hälfte der Einheitssphäre ($z \geq 0$) im $\mathbb{R}^3$ berechnen kann.

Berechnen Sie nun das Integral.

A 5.3.29 Berechnen Sie den Flächeninhalt desjenigen Teils der Fläche $z = \sqrt{2xy}$, der über dem Rechteck $[0, a] \times [0, b]$, $(a, b > 0)$, liegt.

Tipp: Siehe Integration auf Untermannigfaltigkeiten (Seite 124)

Kapitel 6

Vorbereitung – Examen (I & II & ODE)

6.1 Aufgaben aus der Analysis I

.... (Induktion)

A 6.1.1 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $c \in \mathbb{C}$ gilt

$$(1-c)\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+c^{2^k}\right) \;=\; 1-c^{2^n}\ .$$

A 6.1.2 Sei x eine reelle Zahl mit $|x| \neq 1$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2^k}}{1-x^{2^{k+1}}} \;=\; \frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2^n}}\ .$$

.... (Explizite und rekursive Folgen)

A 6.1.3 Zeigen Sie mittels Beweismethode per Widerspruch, dass der Grenzwert einer konvergenten reellen Zahlenfolge eindeutig ist.

A 6.1.4 Zeigen Sie, dass die Folge

$$n \mapsto a_n := \frac{n^2+\frac{1}{2}n-1}{4n^2-1}$$

konvergiert, in dem Sie zunächst durch Anwendung der Rechenregeln für konvergente Folgen ihren Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ ermitteln und anschließend zu jedem $\varepsilon > 0$ ein konkretes $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ angeben, für welches die Implikation

$$(n > N_\varepsilon \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ stets richtig bleibt.

A 6.1.5 Bestimmen Sie die Grenzwerte $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3+4\mathrm{i}}{6}\right)^n \quad$ und $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}-\frac{n^2}{2n+3}\right)$.

A 6.1.6 Bestimmen Sie den Grenzwert der Folgen $\quad a_n = \frac{n!}{n^n} \quad$ und $\quad b_n := \sqrt{(c+n)(d+n)}-n$ für $\ c, d > 0$.

A 6.1.7 Konvergiert die Folge $x_n := \dfrac{n^2+2}{n+1} - \dfrac{n^2-3}{n+4}$? Wenn ja, gegen welchen Wert ?

A 6.1.8 Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ und $b_n := \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$.

A 6.1.9 Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit der Eigenschaft, dass für alle natürlichen Zahlen k die Ungleichung

$$|a_k - a_{k+1}| < 2^{-k}$$

gilt. Zeigen Sie die Konvergenz der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Tipp: Was besagt das Vollständigkeitsaxiom ?

A 6.1.10 Zeigen Sie, dass für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ die durch $x_{n+1} := \dfrac{1+x_n}{1+x_n^2}$ rekursiv definierte Folge x_n konvergiert, und bestimmen Sie deren Grenzwert.

.... (Reihen & Punktmengen)

A 6.1.11 Ermitteln Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

A 6.1.12 Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(\sqrt{k}-2)^2}{k^2+\sqrt{k^4+1}}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{k^2} + \dfrac{(-1)^k}{k}\right)$ auf Konvergenz.

A 6.1.13 Für $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei die Folge (a_k) durch $a_k = \dfrac{\cos(k\pi)}{\sqrt{\ln(k+3)}}$ festgelegt.

Untersuchen Sie die Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ auf Konvergenz.

A 6.1.14 Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{2014}}{2014^n}$ auf Konvergenz.

A 6.1.15 Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k} \,|\, \forall k \le n \,:\, x_k \in \{0,2\} \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k} \,|\, \forall k \in \mathbb{N} \,:\, x_k \in \{0,2\} \right\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge des Intervalls $[0,1]$ ist, die überabzählbar ist.

.... (Grenzwert v. Funktionen/Stetigkeit/Satz v. Minimum/Maximum)

A 6.1.16 Bestimmen Sie für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N},\ n \ge 2$, den Grenzwert $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x+a} - \sqrt[n]{x}$.

A 6.1.17 Ermitteln Sie zu $x > 0$ den Grenzwert der Folge $\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, und zeigen Sie mit dessen Hilfe, dass jede stetige Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x^2) = f(x)$ für alle $x > 0$ konstant ist.

A 6.1.18 Beweisen Sie:
Ist $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und gilt $f(0) = f(1)$, dann gibt es ein $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ mit $f(p) = f(p+\frac{1}{2})$.

A 6.1.19 Zeigen Sie:

Ist $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $g([a,b]) \subset [a,b]$, dann existiert ein $\xi \in \,]a,b[$ mit $g(\xi) = \xi$.

A 6.1.20 Beweisen Sie, dass eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

Zeigen Sie mittels dieses Kriteriums, dass die durch $f(0) := 0$ und $f(x) := \frac{\sin(x^2)}{x}$ für $x \neq 0$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

. . . . (Rechnen im Komplexen)

A 6.1.21 Berechnen Sie den Real- und Imgaginärteil von

$$\frac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{15}}{(1-\mathrm{i})^{22}}\ .$$

A 6.1.22 Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $\dfrac{1}{z^3}$ für eine beliebige komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ mit $z\bar{z} \neq 0$.

A 6.1.23 Gegeben seien nun weitere komplexe Zahlen a, b mit $|a| \neq |b|$. Zeigen Sie die Äquivalenz:

$$|\bar{a}z + b| \;=\; |\bar{b}z + a| \quad\Longleftrightarrow\quad |z| = 1\ .$$

. . . . (Differentiation & Regel von L'Hospital)

A 6.1.24 Beweisen Sie für die n-te Ableitung eines Produktes von n-mal differenzierbaren Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die **Leibnizsche Produktregel**

$$(fg)^{(n)} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}\ .$$

Bestimmen Sie anschließend mit Hilfe der Leibnizschen Produktregel die Ableitung $(x\ln(x))^{(2015)}$.

Hinweis:
Ermitteln Sie zunächst die n-te Ableitung von $f(x) = \ln(x)$.
Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mittels vollständiger Induktion.

A 6.1.25 Bestimmen Sie $(\arctan(t))'$ mit Hilfe der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion.

Alternative Formulierung:

Wenden Sie die Regel zur Ableitung der Umkehrfunktion an, um $\arctan'(x)$ zu ermitteln.

A 6.1.26 Begründen Sie knapp, warum die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := x + \mathrm{e}^x$, eine stetige Umkehrfunktion besitzt.

Sei nun $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die entsprechende Umkehrfunktion von f. Berechnen Sie die Ableitung von f^{-1} an der Stelle 1.

A 6.1.27 Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) \;=\; \left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)^{\sin(2x)}$$

durch logarithmische Differentiation.

A 6.1.28 Für welche Paare (a,b) mit $a,b \in \mathbb{R}$ ist die durch

$$h(x) \;=\; \begin{cases} (x+a)^2 & \text{für } x \geq 0 \;, \\ \dfrac{\sin(bx)}{x} & \text{für } x < 0 \;, \end{cases}$$

definierte Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und für welche differenzierbar ?

A 6.1.29 Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{m\to\infty} \left(\cos\left(\dfrac{x}{m}\right)\right)^m$.

A 6.1.30 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung von $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und in x selbst zweimal differenzierbar. Zeigen Sie mittels der Regel von L'Hospital die Gültigkeit von

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \;=\; f''(x) \quad .$$

A 6.1.31 Kann man die Funktion $f\colon\ ]0,\infty[\ \to \mathbb{R},\ f(x) := x\ln(x)$, stetig nach $x = 0$ fortsetzen ?

Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

A 6.1.32 Zeigen Sie die Stetigkeit der Funktion $\quad f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{bei } x = 0, \\ x^x & \text{bei } x \in\ ]0,1]. \end{cases}$

Begründen Sie, ohne zu rechnen, dass f ein globales Maximum und ein globales Minimum hat.

Berechnen Sie alle globalen Maximumstellen und alle globalen Minimumstellen.

Geben Sie das globale Maximum und das globale Minimum von f an.

. . . . (Monotonie/Konvexität/Extrema)

A 6.1.33 Die reellwertige Funktion Cosinus Hyperbolicus ist wie folgt definiert:

$$\cosh(x) \;=\; \frac{e^x + e^{-x}}{2} \;.$$

Untersuchen Sie diese Funktion

(a) auf ihre Symmetrieeigenschaften

(b) auf Monotonie

(c) auf Extremwerte und

(d) auf Krümmungsverhalten und berechnen Sie

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \cosh(x)$.

A 6.1.34 Zeigen Sie, dass aus der Konvexität der Funktionen $f\colon I \to J$ und $g\colon J \to \mathbb{R}$ zusammen mit der Eigenschaft, dass g monoton wachsend ist, bereits die Konvexität von $g \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ folgt.

Hinweis: Über die Differenzierbarkeit der Funktionen f und g sei nichts bekannt.

A 6.1.35 Beweisen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\quad \dfrac{1}{9}(x+2y)^4 \leq 3(x^4 + 2y^4)$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := x^4$, konvex ist.

A 6.1.36 Bestimmen Sie alle Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$, für die die durch $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowohl ein lokales Maximum als auch ein lokales Minimum besitzt.

A 6.1.37 Beweisen Sie, dass eine zweimal differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann konvex ist, wenn ihre Ableitung f' monoton wachsend ist.

Ist die Funktion $g(x) := |x|^{\frac{3}{2}}$ konvex?

A 6.1.38 Wie lang darf eine Leiter höchstens sein, damit man sie in einem zwei Meter breiten Gang um eine rechtwinklige Ecke tragen kann?

A 6.1.39 Beweisen Sie per vollständiger Induktion für das Produkt von n differenzierbaren Funktionen $f_1, \ldots, f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die verallgemeinerte Produktregel

$$\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right)'(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} f_j(x)\,.$$

Zeigen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass die Polynomfunktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{k}\right)$, genau in den Punkten $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-a} = 0$ ein lokales Extremum besitzt.

. . . . (Integration)

A 6.1.40 Begründen Sie knapp, warum die Funktion $f(x) := \max(x^3, x^2, x)$ eine Stammfunktion besitzt.

Finden Sie eine Stammfunktion von f und bestimmen Sie mit deren Hilfe das Integral $\int_{-6}^{3} f(x)\, dx$. **Tipp:** Zeichnen Sie beide Funktionen.

A 6.1.41 Die rationale Zahl $\frac{22}{7}$ ist eine hervorragende Näherung für die Zahl π. Viele Leute behaupten sogar $\pi = \frac{22}{7}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\, dx$$

und argumentieren Sie mit dessen Hilfe sowie mittels qualitativer Eigenschaften des Integranden sowie des allgemeinen Integrals, warum $\pi \neq \frac{22}{7}$ gelten muss.

A 6.1.42 Geben Sie eine Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^{2x}}$ an.

A 6.1.43 Bestimmen Sie die Integrale $\displaystyle\int_0^\pi x \sin(2x)\, dx$ und $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2 - x + 2}{x^3}\, dx$.

A 6.1.44 Sei $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 1-periodische Fortsetzung der durch $H(x) := x - \frac{1}{2}$ für $0 < x < 1$ und $H(0) := 0$ definierten Funktion. Beweisen Sie für eine stetig differenzierbare Funktion

$f\colon [1,n] \to \mathbb{R}$ durch Berechnung von $\int_k^{k+1} \left(x - \frac{1}{2} - k\right) \cdot f'(x)\, dx$ für $k, n \in \mathbb{N}$ mittels partieller Integration die Eulersche Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\, dx + \frac{1}{2}(f(1) + f(n)) + \int_1^n H(x) f'(x)\, dx$$

und zeigen Sie damit $0 < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^s - \frac{1}{s+1} n^{s+1} \leq n^s - \frac{1}{s+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $s > 0$.

A 6.1.45 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von $f(x) := \dfrac{x+1}{x^4 - x}$ und eine Stammfunktion F von f.

.... (Uneigentliche Integrale – Integralvergleichskriterium)

A 6.1.46 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von $g(x) = \dfrac{1}{x^3 - 2x^2 + x}$.

Ermitteln Sie eine Stammfunktion G von g.

Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_2^\infty g(x)\; dx$?

A 6.1.47 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) := \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\, dx$?

Leichte Variation:

Zeigen Sie, dass für die Funktion $f(x) := \dfrac{\ln(x)}{x}$ zwar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ gilt, dass aber das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\, dx$ nicht existiert.

A 6.1.48 Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}\; dx$.

A 6.1.49 Bestimmen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals $\displaystyle\int_2^\infty \frac{2}{x^2 - 1}\, dx$.

A 6.1.50 Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x-1}{x^3 - 1}\, dx$?

A 6.1.51 Überprüfen Sie, ob das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4}\, dx$ existiert, und berechnen Sie es gegebenenfalls.

Hinweis: Der Nenner besitzt die doppelte Nullstelle -2.

A 6.1.52 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) := \dfrac{2x^2 + 1}{x^4 + x^2}$.

Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\, dx$?

A 6.1.53 Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$?

Existiert der Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{\ln(n)}{n^2}$?

A 6.1.54 Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx$.

Konvergieren die Reihen $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{\ln(k)}{k^3}$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{1+(-1)^k}{2k^k}$?

A 6.1.55 Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{4x+8}{x^3+5x^2+7x+3}\,dx.$

A 6.1.56 Zeigen Sie, dass die beiden Funktionen $f(x) := \dfrac{1}{x\ln(x)}$ und $g(x) := \dfrac{1}{x(\ln(x))^2}$ für $x \to +\infty$ zwar gegen Null konvergieren, aber nur das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^\infty g(x)\,dx$ existiert, während $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^\infty f(x)\,dx$ nicht existiert.

.... (Punkteweise & Gleichmäßige Konvergenz)

A 6.1.57 Bestimmen Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ die Stammfunktion F_n von $f_n(x) := \dfrac{n}{n^2+x^2}$ mit $F_n(0) = 0$.

Überprüfen Sie weiterhin die Funktionenfolgen

$$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad F_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

A 6.1.58 Konvergiert die Folge $f_n(x) := x^n(1-x)^n$ von Funktionen f_n auf dem Intervall $[0,1]$ punktweise?

Auch gleichmäßig ?

A 6.1.59 Konvergiert die Folge $f_n(x) := n\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$ von Funktionen f_n auf dem Intervall $[0,1]$ punktweise ?

Auch gleichmäßig ?

A 6.1.60 Zeigen Sie, dass die durch $f_n(x) := \mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}$ definierte Folge von Funktionen f_n auf dem Intervall $[0,\infty[$ zwar punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

Konvergiert f_n gleichmäßig, wenn man das Intervall $[0,b]$, $b>0$, statt $[0,\infty[$ betrachtet ?

A 6.1.61 Konvergiert die Folge u_n der Funktionen $u_n(x) := \frac{1}{n}\left(\sin(nx)\right)^2$ auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$ punktweise? Auch gleichmäßig?

Konvergiert die Folge der Ableitungen u_n' auf $[-\pi,\pi]$ punktweise? Auch gleichmäßig?

A 6.1.62 Bestimmen Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ die Stammfunktion F_n von $f_n(x) := \dfrac{n}{n^2+x^2}$ mit $F_n(0) = 0$.

Konvergiert die Folge der Funktionen F_n punktweise? Konvergiert F_n gleichmäßig auf $\mathbb{R}$?

Hinweis: Es gilt $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

. . . . (Potenzreihen)

A 6.1.63 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ und zeigen Sie die Gleichung $f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$.

A 6.1.64 Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n}$?

Zeigen Sie die Gleichung $f(\frac{1}{2}) = \frac{16}{17}$.

A 6.1.65 Ermitteln Sie den Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k} z^k$ und geben Sie eine explizite Formel für $f(z)$ an.

A 6.1.66 Ermitteln Sie den Konvergenzradius $R > 0$ der komplexen Potenzreihe

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{k\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} z^k \ .$$

Geben Sie im Fall $|z| < R$ den Grenzwert der Reihe an, d.h., eine explizite Formel für $f(z)$.

. . . . (Taylor-Reihen)

A 6.1.67 Bestimmen Sie die Taylorreihe von $\arctan(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und deren Konvergenzradius.

A 6.1.68 Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) := \sin(2x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 := 0$, sowie die tausendste Ableitung $f^{(1000)}(x_0)$.

A 6.1.69 Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) := \sinh(x)$ um den Entwicklungspunkt 0, ermitteln Sie deren Konvergenzradius und prüfen Sie, ob die Taylorreihe gegen f konvergiert.

A 6.1.70 Beweisen Sie, dass man die durch $f(x) := \dfrac{\cos(x)}{\pi - 2x}$ gegebene Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \to \mathbb{R}$ stetig in den Punkt $x = \frac{\pi}{2}$ fortsetzen kann.

Bestimmen Sie die Taylorreihe der stetigen Fortsetzung von f um den Entwicklungspunkt $\frac{\pi}{2}$.

6.2 Aufgaben aus der Analysis II

. . . . (Stetigkeit & Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$)

A 6.2.1 Ist die durch $f(x,y) := \dfrac{\sin(x^2)}{x^2+y^2}$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ beschränkt?

Kann man f stetig in den Punkt $(0,0)$ fortsetzen? Besitzt f ein globales Maximum?

A 6.2.2 Prüfen Sie nach, ob die durch $f(x,y) := \dfrac{x^3y - xy^3}{|x|+|y|}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = 0$ auf $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion im Nullpunkt partiell differenzierbar ist.

Ist die Funktion f im Nullpunkt stetig? Ist f im Nullpunkt differenzierbar?

A 6.2.3 Zeigen Sie, dass die durch $f(x,y) := \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq 0$ und $f(0,0) := 0$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $(0,0)$ partiell differenzierbar ist. Ist f dort auch stetig ?

A 6.2.4 Zeigen Sie, dass für die durch

$$f(x,y) \ := \ \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{bei } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{bei } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

definierte Funktion die gemischten Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ im Nullpunkt existieren, aber verschieden sind.

Sind die gemischten Ableitungen von f stetig im Nullpunkt ?

A 6.2.5 Bezeichne $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie, dass die durch $f(x) := \dfrac{\|x\|}{1+\|x\|}$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt $x \neq 0$ differenzierbar ist und die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion f in $x \neq 0$ ein Vielfaches von x ist.

Ist f im Punkt $x = 0$ differenzierbar?

. . . . (Kurven)

A 6.2.6 Kurven c in den Euklidischen $\mathbb{R}^2$ von der Form $c(t) = \mathrm{e}^{kt} \cdot (\cos(t), \sin(t))$ mit einer reellen Zahl $k > 0$ nennt man logarithmische Spiralen.

Bestimmen Sie die Länge $\displaystyle\int_a^b \|c'(t)\|\,dt$ einer logarithmischen Spirale auf dem Intervall $[a,b]$.

Wie lang wird die Kurve bei $a \to -\infty$?

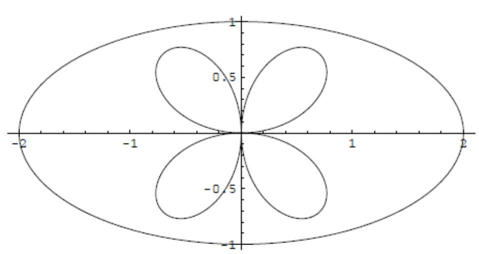
A 6.2.7 Begründen Sie: Rollt ein Rad vom Radius 1 auf der x-Achse, so ist die Bahn des zum Zeitpunkt $t = 0$ in $(0,0)$ liegenden Punktes auf dem Rad durch $c(t) := (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ gegeben.

Bestimmen Sie die Länge $\displaystyle\int_0^{2\pi} \|\dot{c}(t)\|\,dt$ des Zykloidenbogens $c([0,2\pi])$.

A 6.2.8 Zeigen Sie, dass die Kurven

$$\alpha \ : [0,2\pi] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix},$$

$$\beta \ : [0,2\pi] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(2t)\cos(t) \\ \sin(2t)\sin(t) \end{pmatrix},$$



die gleiche Bogenlänge besitzen.

. . . . (Extremwertaufgaben ohne NB)

A 6.2.9 Bestimmen Sie alle lokalen Extrema und Sattelpunkte der durch $f(x,y) := x^3 - 3xy^2 - 6y$ definierten Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

A 6.2.10 Bestimmen Sie zu gegebenen $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ den Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, für den die Summe der Quadrate der Abweichungen $\|x - a_1\|, \ldots, \|x - a_k\|$ minimal ist (wobei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm bezeichnet).

A 6.2.11 Die Wirkung $W(x,t)$, die x Einheiten eines Medikamentes t Stunden nach der Einnahme auf einen Patienten haben, sei durch $W(x,t) := x^2(a-x)t^2\mathrm{e}^{-t}$ für $0 \leq x \leq a$, $t \geq 0$ gegeben. Bestimmen Sie die Dosis x und die Zeit t, so dass $W(x,t)$ maximal ist.

.... (Spezialfall: Methode der kleinsten Quadrate)

A 6.2.12 Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $p_n(t)$ das quadratische Polynom der Form $x_1 + x_2 t^2$ mit Koeffizienten $x = (x_1, x_2)$, das an den Stellen $t = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$ im quadratischen Mittel den kleinsten Abstand zur Gerade $q(t) = t$ hat.

Bestimmen Sie die Grenzfunktion $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(t)$.

.... (Extremwertaufgaben mit NB – Textaufgaben)

A 6.2.13 Bestimmen Sie drei positive Zahlen a, b, c, deren Summe 60 und deren Produkt maximal ist.

A 6.2.14 Ermitteln Sie zu n gegebenen Punkten $\mathbf{p}_i := (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ die Punkte $\mathbf{p} := (x,y) \in \mathbb{R}^2$ auf dem Einheitskreis um den Nullpunkt, für die

$$\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i\|^2$$

minimal oder maximal wird, wobei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm bezeichnet.

A 6.2.15 Für welche Punkte $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ auf dem Halbkreis $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = r^2\,,\, y > 0\}$ mit $x_1 < x_2$ besitzt das Viereck mit den Eckpunkten $(-r,0), (x_1,y_1), (x_2,y_2), (r,0)$ den maximalen Flächeninhalt?

A 6.2.16 In den kartesischen Koordinaten (x,y) einer Landkarte der Alpen liegt eine winzige Insel im Ursprung des Koordinatensystems, während der die Insel umgebende See in guter Näherung die Form der Ellipse $x^2 + xy + y^2 < 4$ besitzt.

An welchen Punkten des Seeufers ist ein Spaziergänger der Insel am nächsten?

A 6.2.17 Bestimmen Sie den maximalen Flächeninhalt eines Rechtecks, dessen Ecken auf dem Rand eines Kreises vom Radius 1 liegen.

A 6.2.18 Bestimmen Sie die lokalen Extrema der durch $f(x,y) := x^2 y$ definierten Funktion f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4$.

Welche der lokalen Extrema sind globale Extrema?

A 6.2.19 Bestimmen Sie die Fläche des größten achsenparallelen Rechtecks innerhalb der durch die Gleichung $4x^2 + 9y^2 = 36$ gegebenen Ellipse.

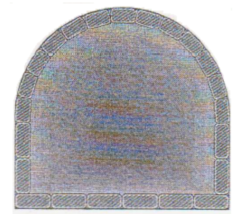
A 6.2.20 Bestimmen Sie die Punkte auf der Ellipse $x^2 + xy + y^2 = 3$, die den größten bzw. kleinsten Abstand vom Ursprung $(0,0)$ haben.

A 6.2.21 Bestimmen Sie die Radien $r > 0$, für die der Kreis $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ komplett innerhalb der Ellipse $\{(x,y) \mid x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$ liegt.

A 6.2.22

Der Querschnitt eines unterirdischen Kanals ist ein Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis.

Wie sind Breite und Höhe des Rechteckes zu wählen, damit die Querschnittsfläche $8m^2$ beträgt und zur Ausmauerung des Kanals möglichst wenig Material benötigt wird.



A 6.2.23 Ein Juwelier möchte einen von Gold umrandeten Anhänger herstellen. Der Anhänger soll die Form eines Rechtecks haben, an dessen untere Kante ein Halbkreis angefügt ist. Da nur eine feste Menge an Gold für die Beschichtung zur Verfügung steht, die Kunden aber möglichst große Schmuckstücke wünschen, soll die Gesamtfläche des Anhängers bei konstantem Umfang möglichst groß sein.

Wie sieht nach diesen Kriterien der optimale Anhänger aus ?

A 6.2.24 In einem in kartesischen Koordinaten (x, y, z) vorliegenden dreidimensionalen Hologramm wird durch die Einheitskugel $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ein im Koordinatenursprung zentrierter georteter Himmelskörper dargestellt. Eine weitere Analyse ergibt, dass die an einem Punkt $(x, y, z) \in B$ vorliegende (skalierte) Konzentration eines auf der Erde selten vorkommenden und daher gefragten Erzes durch die Funktion $f(x, y, z) := \exp(x^2 - y^2 + z^2)$ gut beschrieben wird.

Bestimmen Sie, an welchen Punkten von B obige Konzentration f am höchsten bzw. am niedrigsten ist. Wo lohnt sich demnach der Abbau besonders ?

A 6.2.25 Betrachte in der Ebene zwei Kreise um den Ursprung mit Radius r bzw. R. Existieren Radien $R > r$, so dass die Summe $\pi(R^2 + r^2)$ der einzelnen Kreisflächen bei fest vorgegebener Fläche zwischen den Kreisen maximal wird?

A 6.2.26 Bestimmen Sie Maximum und Minimum der Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ unter der Nebenbedingung, dass (x, y) auf dem Einheitskreis im Euklidischen $\mathbb{R}^2$ liegt.

A 6.2.27 Gegeben sei die Kreisscheibe $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f : E \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 4x^2 - 3xy$.

Warum muss die Funktion f zwingend ihre Extrema annehmen?

Hinweis: Ermitteln Sie zunächst die lokalen Extrema von f im Inneren von E und dann auf dem Rand ∂E, d.h. unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

A 6.2.28 Gegeben sei die Funktion $g(x, y, z) := x^2 + y^2 + yz + z^2$.

Bestimmen Sie die Extrema von $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$ unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = 1$.

A 6.2.29 **(aussortiert!)**

Zeigen Sie, dass unter allen Vierecken mit drei festen Seitenlängen $a, b, c > 0$ dasjenige den maximalen Flächeninhalt hat, dessen vierte Seitenlänge x die Gleichung $x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0$ erfüllt.

. . . . (Taylor-Polynome)

A 6.2.30 Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2 f((x,y);(-1,1))$ für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \mathrm{e}^{x^2-y^2}$.

. . . . (Diffeomorphismen)

A 6.2.31 Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $JF(r,\varphi)$ der Polarkoordinatenabbildung

$$F\colon\ ]0,\infty[\ \times\ ]-\pi,\pi[\ \to \mathbb{R}^2\ ,\quad (r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}\ .$$

Beweisen Sie durch Berechnung der Funktionaldeterminante $\det(JF(r,\varphi))$, dass F in der Nähe jedes Punktes $(r,\varphi) \in\ ]0,\infty[\ \times\ ]-\pi,\pi[$ bijektiv ist.

A 6.2.32 Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $JF(x,y)$ der durch $F(x,y) := (x(1-y), xy)$ definierten Abbildung $F\colon]0,1[^2 \to \mathbb{R}^2$. Beweisen Sie durch Berechnung der Determinante $\det(JF(x,y))$, dass F in der Nähe jedes Punktes $(x,y) \in\ ]0,1[^2$ bijektiv ist.

Alternative Formulierung:

Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $JF(x,y)$ der durch $F(x,y) := (x(1-y), xy)$ definierten Abbildung $F\colon (0,1)^2 \to \mathbb{R}^2$.

Beweisen Sie durch Berechnung der Determinante $\det(JF(x,y))$, dass F in der Nähe jedes Punktes $(x,y) \in (0,1)^2$ eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung besitzt.

A 6.2.33 Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi(\xi,r) := \left(r\xi, r\sqrt{1-\xi^2}\right)$ in der Nähe jedes Punktes $(\xi,r) \in \mathbb{R}^2$ mit $|\xi| < 1$ und $r \neq 0$ eine differenzierbare Umkehrabbildung besitzt.

. . . . (Satz über lokale Auflösbarkeit impliziter Funktionen)

A 6.2.34 Überprüfen Sie, ob man die Gleichung $x^y - y^x \ = \ x-1$ lokal in in der Nähe des Punktes $(x_0,y_0) := (1,1)$ nach einer der beiden Variablen auflösen kann.

A 6.2.35 Werden n elektrische Widerstände parallel geschaltet, so wird der Gesamtwiderstand R des Systems durch die Gleichung

$$\frac{1}{R} \ = \ \frac{1}{R_1} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

bestimmt. Wandeln Sie die obige Gleichung derart um, dass Sie den Satz über implizite Funktionen anwenden können. Leiten Sie die so erhaltene Gleichung mittels Kettenregel ab.

Drücken Sie anschließend $\dfrac{\partial R}{\partial R_k}$ durch R und R_k aus.

6.3 Aufgaben zu Differentialgleichungen

A 6.3.1 Finden Sie alle reellen differenzierbaren Funktionen mit der Eigenschaft, dass die Tangente an jedem Punkt (x,y) des Funktionsgraphen die y-Achse in der Höhe y^2 schneidet.

. . . . (Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten)

A 6.3.2 Beweisen Sie, dass jede differenzierbare Funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche Lösung der Differentialgleichung $y' = ay$ ist, von der Gestalt $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$ ist.

A 6.3.3 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung $y''' - y' = 1$. Wie lautet die Lösung zu den Anfangswerten $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$?

A 6.3.4 Berechnen Sie alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder der zugehörigen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

A 6.3.5 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' - 2y' = 1$. Wie lautet die Lösung mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$?

A 6.3.6 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $y'' = -4y$.

Zeigen Sie, dass für eine Lösung $y(x)$ dieser Differentialgleichung die Energie $\frac{(y')^2}{2} + 2y^2$ nicht von x abhängt, sondern in x konstant ist.

A 6.3.7 Hängt man die Endpunkte einer Kette im Gravitationsfeld der Erde auf, so wird die Form der Kette durch Lösungen $y\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y''(x) = \frac{1}{a^2} y(x)$$

mit einer Konstanten $a > 0$ beschrieben.

Lösen Sie diese Differentialgleichung unter den Randbedingungen $y(-a) = a\cosh(1) = y(a)$ und berechnen Sie die Länge

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$$

der Kette.

Variation der Differentialgleichung

(vgl. auch spezielle Lösungsmethoden – Trennung der Variablen/Substitution):

Durch die Differentialgleichung $y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$ wird die Form einer Kette unter dem Einfluss der Schwerkraft beschrieben.

Lösen Sie diese Differentialgleichung unter den Randbedingungen $y(0) = 1$, $y(1) = \cosh(1)$, und ermitteln Sie die Länge $\int_0^1 \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$ der Kette.

A 6.3.8 Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung $y'' + 2ay' + by = 0$ für Parameter $a \geq 0$, $b > 0$, und ermitteln Sie in Abhängigkeit von den Parametern a, b die minimale und maximale Anzahl der Vorzeichenwechsel einer Lösung $y \neq 0$.

A 6.3.9 Finden Sie die allgemeine Lösung von $y'' - 4y' + 5y = 8\cos(x) + \mathrm{e}^{2x}$.

A 6.3.10 Ermitteln Sie jeweils die allgemeine reellwertige Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$y'' + 4y = 0\,, \quad y'' + 4y = te^t\,, \quad y'' + 4y = 10\sin(2t)\,.$$

A 6.3.11 Zeigen Sie, dass jede Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y'' + 9y = 0$ beschränkt bleibt, jedoch die Lösungen der inhomogenen Gleichung $y'' + 9y = \sin(3x)$ unbeschränkt sind.

A 6.3.12 Lösen Sie das Anfangswertproblem $\begin{cases} y'(x) &= \dfrac{x^4}{y(x)} \ , \\ y(0) &= -2 \ . \end{cases}$

A 6.3.13 Lösen Sie das Anfgangswertproblem $\begin{cases} 0 = y' \sin(x) - y \cos(x) \ , \\ 5 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) \ . \end{cases}$

A 6.3.14 Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$xy^2y' \ = \ (\ln(x))^2 \ + \ \frac{y^3}{\ln(x)} \ , \qquad\qquad y(\mathrm{e}) \ = \ -3 \ .$$

Tipp: Beim Differentialgleichungstyp $xy'(x) = f\left(\dfrac{y(x)}{\ln(x)}\right)$ substituiert man $z(x) := \dfrac{y(x)}{\ln(x)}$.

A 6.3.15 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch $f(0) := 0$ und $f(y) := y \ln|y|$ für $y \neq 0$ definierte stetige Funktion.

Bestimmen Sie für einen beliebigen Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}$ bei $x = 0$ eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $y'(x) = -xf(y(x))$ und zeigen Sie, dass $y(x)$ für alle $x \geq 0$ existiert.

Konvergiert $y(x)$ für $x \to +\infty$?

A 6.3.16 Lösen Sie die Differentialgleichung $y'(x) = (y(x))^2$ zu den beiden Anfangswerten $y(0) = \pm 1$.

Worin unterscheiden sich die Lösungen qualitativ für $x > 0$?

A 6.3.17 Zeigen Sie: Gilt für eine differenzierbare Funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gleichung $y'(x) = -x \cdot y(x)$, dann besitzt sie die Form $y(x) = C \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

A 6.3.18 Die Höhe $x(t)$ einer senkrecht gestarteten Rakete über der Erdoberfläche wird durch die Differentialgleichung $\ddot{x} = -\dfrac{1}{x^2}$ beschrieben.

Ermitteln Sie $x(t)$ für eine Rakete, deren Triebwerk in der Höhe $x(0) = 2$ bei Geschwindigkeit $\dot{x}(0) = 1$ abgeschaltet wird.

Hinweis: Multiplizieren Sie die Differentialgleichung auf beiden Seiten mit $\dot{x}$ und integrieren Sie.

Sporadisches Fachwortverzeichnis