Aufgabensammlung zur Analysis I

Dr. Katja Ihsberner[1] und Prof. Dr. habil. Jochen Merker[2]

zuletzt aktualisiert am 21. Juli 2017

[1]Universität Rostock, Institut für Mathematik, Ulmenstr. 69, Haus 3
[2]HTWK Leipzig, Fakultät Informatik, Mathematik u. Naturwissenschaften, Gustav-Freytag-Str. 42A

Inhaltsverzeichnis

1 Aussagen, Mengen und Abbildungen **9**

1.1 Aussagen, Axiome und Wahrheitstabellen . . . 9

1.2 Mengen und Relationen . . . 14

1.3 Abbildungen . . . 19

2 Folgen und Reihen **23**

2.1 Gruppen und Körper . . . 23

2.2 Anordnungsaxiome . . . 32

2.3 Vollständige Induktion . . . 41

2.4 Das Archimedische Axiom . . . 53

2.5 Intervallschachtelungsprinzip . . . 55

2.6 Grenzwerte von Folgen . . . 57

2.7 Das Vollständigkeitsaxiom und die reellen Zahlen . . . 64

2.8 Rekursiv definierte Folgen und Wurzeln . . . 66

2.9 Punktmengen und Abzählbarkeit . . . 73

2.10 Reihen und ihre Konvergenzkriterien . . . 78

2.11 Die Exponentialreihe . . . 93

3 Stetigkeit von Funktionen **95**

3.1 Grenzwerte von Funktionen . . . 95

3.2 Stetige Funktionen . . . 98

3.3 Gleichmäßige, Lipschitz- und Hölder-Stetigkeit . . . 104

3.4 Der Zwischenwertsatz . . . 106

3.5 Umkehrfunktionen, Logarithmus, allgemeine Potenz . . . 108

3.6 Der Körper der komplexen Zahlen . . . 111

3.7 Die Exponentialfunktion im Komplexen . . . 115

3.8 Die Eulersche Formel – trigonometrische Funktionen . . . 116

3.9 Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen . . . 120

3.10 Lösen von Gleichungen über $\mathbb{C}$ . . . 122

4 Differenzierbarkeit von Funktionen **125**

4.1 Differenzierbare Funktionen . . . 125
4.2 Lokale Extrema, Mittelwertsatz und Konvexität . . . 133
4.3 Methode des logarithmischen Ableitens . . . 136
4.4 Weitere Anwendungen der Konvexität . . . 137
4.5 Weitere Anwendungen des Mittelwertsatzes . . . 138
4.6 Die Regeln von L'Hospital . . . 140
4.7 Kurvendiskussion . . . 143
4.8 Numerische Verfahren – Äquivalenz von Fixpunkt- und Nullstellenproblemen . . . 146

5 Riemann-Integrierbarkeit **149**

5.1 Das Integral von Treppenfunktionen . . . 149
5.2 Das Riemann-Integral . . . 151
5.3 Der Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . 153
5.4 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . 154
5.5 Substitutionsregel und Partielle Integration . . . 156
5.6 Integration rationaler Funktionen . . . 159
5.7 Uneigentliche Riemann-Integrale . . . 164

6 Approximierbarkeit von Funktionen **167**

6.1 Funktionenfolgen . . . 167
6.2 Potenzreihen . . . 173
6.3 Taylor-Reihen . . . 177
6.4 Fourier-Reihen . . . 179

7 Klausurfragen – Fachwissen (auch für mündliche Prüfungen geeignet) **185**

7.1 Theoriefragen zu Kapitel 2 . . . 185
7.2 Theoriefragen zu Kapitel 3 . . . 188
7.3 Theoriefragen zu Kapitel 4 . . . 190
7.4 Theoriefragen zu Kapitel 5 . . . 192
7.5 Theoriefragen zu Kapitel 6 . . . 194

8 Klausuraufgaben – Anwendung **195**

8.1 Anwendungsaufgaben zu reellen Zahlenfolgen und -reihen (Kapitel 2) . . . 195
8.2 Anwendungsaufgaben zur Stetigkeit von Funktionen (Kapitel 3) . . . 202
8.3 Anwendungsaufgaben zum Umgang mit komplexen Zahlen (Kapitel 3) . . . 204
8.4 Anwendungsaufgaben zur Differentialrechnung (Kapitel 4) . . . 206
8.5 Anwendungsaufgaben zur Integralrechnung (Kapitel 5) . . . 213
8.6 Anwendungsaufgaben zur Approximierbarkeit von Funktionen (Kapitel 6) . . . 217

Vorwort

Die folgende Aufgabensammlung ist in erster Linie als Nachschlagewerk für uns Dozenten entstanden, um das Erstellen von Übungsblättern zu erleichtern.

Desweiteren wird die Hierarchie der eingeführten Begriffe weitestgehend beachtet, d.h., jede Aufgabe wird im Regelfall erst in dem Kapitel eingeordnet, bis zu dem alles notwendige Fachwissen sauber in der jeweiligen Vorlesung eingeführt worden ist.

Aus didaktischen Gründen ist es jedoch – besonders am Anfang – gelegentlich angebracht, etwas im Stoff vor- oder eben auf (hoffentlich vorhandenes) Schulwissen zurückzugreifen, um zumindest einige anschauliche Beispielaufgaben zur Verfügung zu haben. Derartigen Aufgaben ist dann der Hinweis

. . . . (Schnittstellenaufgaben)

vorangestellt, da sie sich teilweise auch im Unterrichtsstoff der Sekundarstufe I und II integrieren ließen.

Wie immer gilt bei der Abgabe:
Der Lösungsweg der bearbeiteten Aufgaben muss vollständig und lückenlos dargestellt werden.

Besonders als Prüfungsvorbereitung geeignet: Seit der Einführung der Bachelor/Master-Studiengänge haben wir bereits zahlreiche Prüfungsklausuren konzipiert, die sowohl einen Theorieteil enthalten als auch über anwendungsbezogene Aufgaben den sicheren Umgang mit Fachbegriffen abtesten, ohne das dabei Hilfsmittel erforderlich sind.
In den Kapiteln 7 und 8 werden die seit dem Wintersemester 2007/2008 an der Universität Rostock im Modul Analysis 1 gestellten Prüfungsfragen bzw. Teilaufgaben nach und nach integriert.
Aufgrund der Komplexität einiger Aufgaben im Hinblick auf die abgefragten Fähigkeiten und Kenntnisse ist die Berücksichtigung der hierarchischen Anordung bezüglich aufeinander aufbauender Themen verständlicherweise nur teilweise gegeben/realisierbar.

Angebot: Kollegen aus der Analysis sind herzlich eingeladen, alle Aufgaben zu verwenden. Auf Anfrage sind auch die LaTeX-Dateien (inklusive Lösungen – sofern nicht mit „ohne Lsg“ gekennzeichnet) erhältlich.

Dank: An dieser Stelle soll nicht unerwähnt bleiben, dass die Kollegen Prof. Dr. Aicke Hinrichs[1] und Dr. Peter Dencker[2] eine nicht geringe Anzahl an Aufgaben beigesteuert haben. Herzlichen Dank.

[1] Johannes Kepler Universität Linz (JKU), Institut für Analysis
[2] Universität zu Lübeck, Institut für Mathematik

Vorbereitung auf die erste Übung

Folgende Einstiegsfragen/Einstiegsaufgaben sind beispielsweise (unter anderem auch mit einem leichten Augenzwinkern) für ein eventuelles 0.te Übungsblatt geeignet:

A 0.0.1 Lesen Sie gründlich den „Versuch einer Anleitung zum Studium der Mathematik“:

`https://image.informatik.htw-aalen.de/Thierauf/MatheGrundlagen/Handouts/mathe-anleitung.pdf.`

Wie lautet die Goldene Regel zum Aufschreiben der Lösungen von Übungsserien?

A 0.0.2 Lesen Sie die Anleitung zum Bearbeiten eines Übungsblattes, die Sie unter

`http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn/le/uebungsblatt`

finden. Wie lauten die letzten zwei Sätze? Befolgen Sie diesen Hinweis!

A 0.0.3 Wer schrieb das Buch *Das ist o.B.d.A. trivial* ?

Lesen Sie innerhalb der ersten vier Vorlesungswochen dieses Buch.

A 0.0.4 Was machte Georg Cantor unter anderem in seinen Flitterwochen?

Kapitel 1

Aussagen, Mengen und Abbildungen

1.1 Aussagen, Axiome und Wahrheitstabellen

A 1.1.1 Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien, d.h., für beliebige Aussagen A, B wahr?

(i) $A \Longrightarrow A$ (ii) $(A \vee B) \Longrightarrow B$ (iii) $(A \wedge B) \Longrightarrow A$ (iv) $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow A)$

A 1.1.2 Beweisen Sie, dass aus $A \Longrightarrow B$ und $B \Longrightarrow C$ die Aussage $A \Longrightarrow C$ folgt.

Anmerkung:
Die auf dieser Tautologie basierende Beweistechnik nennt man **direkten Beweis**.

A 1.1.3 Wie groß ist die Wahrheitstabelle, falls 4 Grundaussagen an einer Aussage beteiligt sind ?

A 1.1.4 Beweisen Sie, dass aus B und $\neg A \Longrightarrow \neg B$ die Aussage A folgt.

Anmerkung: Die auf dieser Tautologie basierende Beweistechnik nennt man einen **indirekten Beweis** oder auch einen **Widerspruchsbeweis**.

A 1.1.5 Stellen Sie die Wahrheitstabelle für die Aussage „entweder – oder“ auf.

Wie könnte man diese Aussage schaltungstechnisch realisieren ?

A 1.1.6 Überprüfen Sie für beliebige Aussagen A, B und C die Äquivalenzen:

(1) Doppelte Negation:	$\neg(\neg A)$	$\Longleftrightarrow$	A
(2) Kommutativgesetz:	$A \wedge B$	$\Longleftrightarrow$	$B \wedge A$
	$A \vee B$	$\Longleftrightarrow$	$B \vee A$
(3) De Morgansche Regeln:	$\neg(A \wedge B)$	$\Longleftrightarrow$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
	$\neg(A \vee B)$	$\Longleftrightarrow$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
(4) Assoziativgesetz:	$(A \wedge B) \wedge C$	$\Longleftrightarrow$	$A \wedge (B \wedge C)$
	$(A \vee B) \vee C$	$\Longleftrightarrow$	$A \vee (B \vee C)$
(5) Distributivgesetz:	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\Longleftrightarrow$	$A \wedge (B \vee C)$
	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$\Longleftrightarrow$	$A \vee (B \wedge C)$

Alternative Formulierung von (3) und (5) inklusive Erweiterung:

Seien A, B, C beliebige Aussagen. Zeigen Sie die folgenden Tautologien mittels Wahrheitstafeln:

(i) $A \vee (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (ii) $\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

(iii) $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (iv) $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A \vee \neg B)$

(v) $(A \implies (B \implies C)) \implies ((A \implies B) \implies (A \implies C))$

A 1.1.7 Für beliebige Aussagen A und B sei $A \mid B$ definiert als $\neg(A \wedge B)$. Stellen Sie die Aussagen

(i) $\neg A$ (ii) $A \vee B$ (iii) $A \wedge B$ (iv) $A \implies B$ (v) $A \iff B$

mittels der Aussagenverknüpfung $\mid$ (und nur dieser) dar.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie, dass sich die logischen Verknüpfungen $\vee$, $\implies$ und $\iff$ nur mit Hilfe von $\wedge$ und $\neg$ darstellen lassen.

A 1.1.8 Gegeben sei das Axiomensystem bestehend aus den beiden Axiomen

$$A \implies (B \implies A)\,, \tag{1.1}$$

$$\big(A \implies (B \implies C)\big) \implies \big((A \implies B) \implies (A \implies C)\big)\,. \tag{1.2}$$

(a) Beweisen Sie formal nur mit Hilfe der beiden logischen Axiome (1.1) und (1.2) sowie direkten Schließens die logische Aussage $A \implies A$ (Reflexivität von $\implies$).

(b) Beweisen Sie nur mit Hilfe der logischen Axiome (1.1) und (1.2) sowie direkten Schließens, dass aus den Annahmen $A \implies B$ und $B \implies C$ die Aussage $A \implies C$ folgt (Transitivität von $\implies$).

A 1.1.9 Gegeben seien die Konstanten A, B, C, D und die einstelligen Relationen studiertMathe(x) und studiertPhysik(x). Ferner wollen wir die folgenden Aussagen als Axiome ansehen:

(i) $\forall x : \Big(\text{studiertPhysik}(x) \wedge \neg\ \text{studiertMathe}(x)\Big)$
$\vee \Big(\text{studiertMathe}(x) \wedge \neg\ \text{studiertPhysik}(x)\Big)$

(ii) studiertMathe(A) $\implies$ studiertMathe(B)

(iii) studiertMathe(B) $\implies$ studiertPhysik(A) $\vee$ studiertMathe(C)

(iv) studiertPhysik(D) $\implies$ studiertMathe(A) $\wedge$ studiertPhysik(B)

(v) studiertMathe(D) $\implies$ studiertMathe(A)

Zeigen Sie mit Hilfe der oben angegebenen Axiome $\forall x :$ studiertMathe(x).

A 1.1.10 **(mathematische vs. natürliche Sprache)**

(a) Verneinen Sie in kurzen Worten folgende Aussagen:

(i) Es gibt ein schwarzes Schaf, das gerne Salat frisst.

(ii) Alle Studierende der Analysis sind intelligent und fleißig.

(iii) In der Analysis-Vorlesung schläft Tom oder guckt aus dem Fenster.

(b) Ist der folgende Schluss logisch richtig?
(„Wer von der Quantenmechanik nicht schockiert ist, der hat sie nicht verstanden" [Nils Bohr] *und* „Niemand versteht die Quantenmechanik" [Richard Feynman]) $\implies$ „Niemand ist von der Quantenmechanik schockiert."

(c) Formalisieren Sie die nachfolgenden Sprichwörter und denken Sie sich zwei weitere Beispiele aus.

(i) Alle Wege führen nach Rom.

(ii) Hunde, die bellen, beißen nicht. (iii) Wenn zwei sich streiten, freut sich der Dritte.

Wie lauten die entsprechenden Negationen?

.... (Schnittstellenaufgaben)

Die bisher nicht eingeführten Symbole seien wie in der Schule zu interpretieren:

A 1.1.11 Welche der folgenden Ausdrücke sind Terme, welche Aussagen ?

$x - y$, $x = y + z$, $x \geq 3x$, $5 \Longrightarrow (x = 2)$,
$4 \leq 1$, $(3x = 2) \wedge (x \geq 5)$, $(x = y) \Longrightarrow (x = 2y)$.

A 1.1.12 Welche der folgenden Ausdrücke sind Aussagen, welche der auftretenden Variablen sind frei ?

(i) $(x \leq 4) \wedge (x > 3 \Longrightarrow x = 4)$

(ii) $\forall y \colon ((x = y) \Longrightarrow (x \leq y))$

(iii) $\forall x \colon \exists y \colon (x \leq y)$

(iv) $\forall x \colon \exists y \colon \exists x \colon x = y$

A 1.1.13 Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) $x < 4 \Longrightarrow x < 5$ (ii) $x < 5 \Longrightarrow x < 4$ (iii) $2 < 3 \Longrightarrow 3 < 5$ (iv) $3 < 2 \Longrightarrow 5 < 3$

A 1.1.14 Geben Sie die folgenden Aussagen in Worten an. Entscheiden Sie, ob sie wahr oder falsch sind:

(i) $\forall n \in \mathbb{N} \colon (\forall m \in \mathbb{N} \colon n = 2m)$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} \colon (\exists m \in \mathbb{N} \colon n = 2m)$

(iii) $\exists n \in \mathbb{N} \colon (\forall m \in \mathbb{N} \colon n = 2m)$

(iv) $\exists n \in \mathbb{N} \colon (\exists m \in \mathbb{N} \colon n = 2m)$

(v) $\forall m \in \mathbb{N} \colon (\exists n \in \mathbb{N} \colon n = 2m)$

(vi) $\exists m \in \mathbb{N} \colon (\exists n \in \mathbb{N} \colon n = 2m)$

Begründen Sie Ihre Entscheidung gegebenenfalls mit einem Beispiel/Gegenbeispiel.

A 1.1.15 Beweisen Sie mir einer Wahrheitstafel, dass für alle Aussagen A, B die Aussage

$$(A \wedge (A \Longrightarrow B)) \Longrightarrow B$$

eine wahre Aussage ist. Was bedeutet dies sprachlich?

A 1.1.16 Geben Sie die Verneinungen der folgenden Aussagen an:

(i) $\forall a \colon P(a)$, (ii) $\forall a \colon \neg P(a)$, (iii) $\exists a \colon P(a)$, (iv) $\exists a \colon \neg P(a)$.

A 1.1.17 Geben Sie die Verneinungen der folgenden Aussagen an:

(i) $\forall a \colon \exists b \colon P(a,b)$, (ii) $\forall a \colon \forall b \colon P(a,b)$, (iii) $\exists a \colon \forall b \colon P(a,b)$, (iv) $\exists a \colon \exists b \colon P(a,b)$.

A 1.1.18 Welche der folgenden Konklusionen ist richtig?

(a) $(\forall a \colon \exists b \colon P(a,b)) \Longrightarrow (\exists b \colon \forall a \colon P(a,b))$

(b) $(\exists b \colon \forall a \colon P(a,b)) \Longrightarrow (\forall a \colon \exists b \colon P(a,b))$

A 1.1.19 Sei $A(x)$ eine Aussageform. Wir definieren die Aussage $\exists! x\colon A(x)$ (sprich: „Es existiert genau ein x, so dass $A(x)$ gilt.“) durch

$$(\exists x\colon A(x)) \wedge (\forall x \forall y\colon ((A(x) \wedge A(y)) \Longrightarrow x = y))$$

Verneinen Sie die Aussage $\exists! x\colon A(x)$.

A 1.1.20 Formalisieren Sie die folgenden Konstruktionen der Alltagssprache, indem Sie geeignete Aussagen und Aussageformen definieren und diese mit Hilfe der Ihnen zur Verfügung stehenden logischen Verknüpfungen miteinander in Beziehung setzen.

(a) Ist es heiß, so schmilzt das Eis, es sei denn, ich besitze einen Eisschrank.

(b) Zu jeder ganzen Zahl $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ existieren eindeutige ganze Zahlen $p \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ und $q \in \{0, 1\}$ derart, dass k die Summe von q und dem Doppelten von p ist.

A 1.1.21 Finden Sie den Fehler in folgender Rechnung:

$$\begin{array}{ll}
1 = x & \big| \cdot x \\
x = x^2 & \big| -1 \\
x - 1 = x^2 - 1 & \\
x - 1 = (x+1) \cdot (x-1) & |/(x-1) \\
\dfrac{x-1}{x-1} = \dfrac{(x+1)\,(x-1)}{x-1} & \\
1 = x + 1 & \big| x = 1 \\
1 = 2 &
\end{array}$$

. . . . (bisher ohne Lsg)

A 1.1.22 (a) Überprüfen Sie anhand von Wahrheitstafeln, ob folgende Aussagen Tautologien sind:

(i) $\neg(\neg A) \Longleftrightarrow A$

(ii) $((A \Longleftrightarrow B) \wedge (B \Longleftrightarrow C)) \Longrightarrow (A \Longleftrightarrow C)$

(iii) $(A \Longleftrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg A \Longleftrightarrow \neg B)$

(iv) $(A \wedge B) \Longleftrightarrow (\neg(A \Longrightarrow (\neg B)))$

(v) $(\neg(A \Longleftrightarrow B)) \Longleftrightarrow (A \Longleftrightarrow (\neg B))$

(b) „Meiers werden uns heute Abend besuchen“, kündigt Frau Müller an. „Die ganze Familie, also Herr und Frau Meier mit ihren drei Kindern Franziska, Kathrin und Walter?“fragt Herr Müller bestürzt. Darauf Frau Müller, die keine Gelegenheit vorüber gehen lässt, ihren Mann zu logischem Denken anzuregen: „Nun, ich will es dir so erklären: Wenn Herr Meier kommt, dann bringt er auch seine Frau mit. Mindestens eines der beiden Kinder Walter und Kathrin kommen. Entweder kommt Frau Meier oder Franziska, aber nicht beide. Entweder kommen Franziska und Kathrin oder beide nicht. Und wenn Walther kommt, dann auch Kathrin und Herr Meier. So, jetzt weißt du, wer uns heute Abend besuchen wird.“

(c) Ein Fahnder sucht den Verdächtigen *X*aver auf einer kleinen Insel. Er befragt fünf Leute, *A*nn, *B*ob, *C*ora, *D*ave und *E*ve, hat aber dabei ein Problem:

- Manche Leute sagen immer die Wahrheit („Ritter“).
- Manche machen nur falsche Aussagen („Schurken“).
- Jede(r) auf dieser Insel ist genau von einer Sorte, Ritter oder Schurke.

Es sagen

A : X ist heute auf dieser Insel.

B : X ist heute **nicht** auf dieser Insel.

C : X war gestern auf dieser Insel.

D : X ist heute nicht auf dieser Insel und war gestern nicht auf dieser Insel.

E : C ist ein Ritter oder D ist ein Schurke.

Der Fahnder fragt, ob jemand etwas ergänzen möchte. Daraufhin sagt

A : Wenn E ein Ritter ist, dann ist C ein Ritter.

Nun kann der Fahnder über die Aufrichtigkeit aller Personen entscheiden und die Frage beantworten: Ist X heute auf dieser Insel ?

1.2 Mengen und Relationen

. . . . (Konkrete Mengen)

A 1.2.1 Bestimmen Sie für die Mengen $A = \{a, z, 4, 1000, \emptyset, lila\}$, $B = \{gruen, lila, 1000, 4, z, Auto\}$ und $C = \{1, 2, 4, a, b, c, d, x, y, z, Fahrrad\}$ die Mengen

(a) $A \setminus B \ := \ \{x \mid x \in A \wedge \neg(x \in B)\}$

(b) $A \cap (B \cap C)$ (iii) $A \cup (B \cup C)$ (iv) $C \cup (B \cap A)$ (v) $C \setminus (B \setminus A)$

A 1.2.2 Bestimmen Sie für die Mengen $A = \{a, 4, 1000, \emptyset, sieben\}$, $B = \{gruen, lila, rot, 1000, 4, z\}$ und $C = \{2, 4, a, c, x, z, lila\}$ die Mengen

(a) $A \setminus B \ := \ \{x \mid x \in A \wedge \neg(x \in B)\}$ (ii) $A \cap B$ (iii) $C \setminus (B \setminus A)$ (iv) $C \cap (A \setminus B)$

. . . . (Russellsches Paradoxon)

A 1.2.3 Ein Barbier sei definiert als jemand, der genau diejenigen rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Wer rasiert den Barbier? Beantworten Sie diese Frage im Hinblick auf das Russelsche Paradoxon.

. . . . (Unendliche Mengen)

A 1.2.4 Zeigen Sie: Der Durchschnitt aller **induktiven Mengen**, d.h., der Durchschnitt aller Mengen M mit $\emptyset \in M$ und $x \in M \Longrightarrow (x \cup \{x\}) \in M$, ist selbst wieder eine induktive Menge.

. . . . (Komplementärmengen und weitere Mengenoperationen)

A 1.2.5 Zeichnen Sie die Venn-Diagramme für Durchschnitt und Vereinigung zweier nichtleerer beliebiger Mengen A und B in den Fällen

(i) $\big(\neg(A \cap B = \emptyset) \wedge \neg(A \subset B)\big) \wedge \big(\neg(B \subset A)\big)$ (ii) $A \cap B = \emptyset$ (iii) $(A \subset B) \wedge \big(\neg(A = B)\big)$

A 1.2.6 Überprüfen Sie für beliebige Teilmengen A, B und C einer Menge X die Aussagen:

(1) Doppelte Negation: $X \setminus (X \setminus A) = A$

(2) Kommutativgesetze: $A \cap B = B \cap A$ sowie $A \cup B = B \cup A$

(3) Assoziativgesetz: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(4) Distributivgesetz: $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$
$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$

(5) Dominanzgesetze: $A \cup \emptyset = A$ sowie $A \cap \emptyset = \emptyset$

(6) De Morgansche Regeln: $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$
$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

A 1.2.7 Seien A, B Teilmengen einer Grundmenge X. Veranschaulichen Sie sich an einem Venn-Diagramm die folgenden *deMorgan*-Regeln und beweisen Sie diese.

(a) $\overline{A} \cup \overline{B} \ = \ \overline{A \cap B}$ (b) $\overline{A} \cap \overline{B} \ = \ \overline{A \cup B}$

Alternative Formulierung für (b):

Seien $A, B, C \subseteq X$ beliebige Mengen. Zeigen Sie: $(X \setminus A) \cap (X \setminus B) \ = \ X \setminus (A \cup B)$

A 1.2.8 Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige Mengen A, B, C wahr?
Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

(a) $A \setminus B \;=\; A \cap (A \setminus B)$

(b) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$

(c) $A \cup B \;=\; (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

(d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

(e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

A 1.2.9 Beweisen Sie oder widerlegen Sie anhand eines Gegenbeispiels, ob die folgenden Aussagen für beliebige Mengen A, B und C wahr sind:

(i) $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$

(ii) $(A \cup B) \cap C \subset A \cup (B \cap C)$

A 1.2.10 Es seien A, B und C Mengen

(a) Zeigen Sie, dass eine der folgenden Formeln immer richtig ist und dass die andere unter Umständen falsch sein kann:

$$A \setminus (B \setminus C) \;=\; (A \setminus B) \cup C; \qquad A \setminus (B \cup C) \;=\; (A \setminus B) \setminus C$$

(b) Geben Sie eine Bedingung an, unter der die i.A. falsche Formel richtig wird.

A 1.2.11 Beweisen Sie formal oder widerlegen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Aussage

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \;=\; (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

für beliebige Mengen A und B wahr ist.

A 1.2.12 Es seien A, B beliebige Mengen. Beweisen Sie die Äquivalenz der Aussagen

(1) $A \subset B$ (2) $A \setminus B \;=\; \emptyset$ (3) $A \cap B \;=\; A$ (4) $A \cup B \;=\; B$

mit einem Ringschluss (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (1).

A 1.2.13 Beweisen Sie für eine Menge A und eine Familie B_i von Mengen ($i \in I$) die Gültigkeit von

$$A \setminus \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \;=\; \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i) \ .$$

A 1.2.14 Zeigen Sie, dass $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ eine Menge ist, die man wirklich als geordnetes Tupel (a, b) interpretieren kann, also dass $(a, b) = (c, d)$ genau dann gilt, wenn $a = c$ und $b = d$ gilt. Damit wird das **kartesische Produkt** $A \times B$ von zwei Mengen A und B definiert durch

$$A \times B := \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B\} \ .$$

. . . . (bisher ohne Lsg)

A 1.2.15 Gegeben seien beliebige Mengen N, M mit $N \subseteq M$. Beweisen Sie die Äquivalenz der drei Aussagen

(a) $N \neq M$ (b) $\neg(M \subseteq N)$ (c) $M \setminus N \neq \emptyset$

Führen Sie dazu den Ringschluss $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (a)$.

A 1.2.16 Seien A, B, C beliebige Mengen. Zeigen Sie: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Alternative Formulierung:

Seien $A, B, C \subseteq X$ beliebige Mengen. Zeigen Sie: $(A \cap B) \cup C \; = \; (A \cup C) \cap (B \cup C)$

. . . . (Relationen)

Definition: Sei M eine nichtleere Menge. Dann heißt $R \subset M \times M$ eine **Relation** auf M. Insbesondere nennen wir eine Relation

- **reflexiv** $:\Longleftrightarrow$ $\forall x \in M\colon (x,x) \in R$
- **transitiv** $:\Longleftrightarrow \forall x \in M\colon \forall y \in M\colon \forall z \in M\colon \Big(\big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \big) \Longrightarrow (x,z) \in R \Big)$
- **symmetrisch** $:\Longleftrightarrow$ $\forall x \in M\colon \forall y \in M\colon \big((x,y) \in R \Longrightarrow (y,x) \in R \big)$
- **antisymmetrisch** $:\Longleftrightarrow$ $\forall x \in M\colon \forall y \in M\colon \Big(\big((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \big) \Longrightarrow x = y \Big)$

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation heißt **Äquivalenzrelation**.
Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation heißt **Ordnungsrelation**.

A 1.2.17 Eine zweistellige Relation auf einer Menge A ist eine Teilmenge $R \subset A \times A$. Diese nennt man transitiv, wenn mit $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$ auch $(x,z) \in R$ gilt. Geben Sie alle transitiven Relationen auf der Menge $A := \{1,2\}$ an.

A 1.2.18 Weisen Sie nach, dass das in der Mengenlehre durch $x = y :\Longleftrightarrow \forall a : (a \in x \Longleftrightarrow a \in y)$ definierte Relationssymbol $=$ die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation besitzt.

(a) für alle Mengen x gilt: $x = x$ (Reflexivität),

(b) für alle Mengen x gilt: $x = y \Longrightarrow y = x$ (Symmetrie) und

(c) für alle Mengen x, y, z gilt: $((x = y) \wedge (y = z)) \Longrightarrow x = z$ (Transitivität).

A 1.2.19 Konstruieren Sie auf der Menge $M = \{1,2,3,4\}$ Relationen R_1, R_2, R_3, R_4, für die gelten:

(a) R_1 ist reflexiv, transitiv, aber nicht symmetrisch.

(b) R_2 ist reflexiv, symmetrisch, aber nicht transitiv.

(c) R_3 ist transitiv, symmetrisch, aber nicht reflexiv.

(d) R_4 ist reflexiv, aber nicht transitiv und nicht symmetrisch.

A 1.2.20 Das kartesische Produkt einer endlichen Menge $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ mit sich selbst können wir systematisch darstellen in der Form

$$M \times M \;=\; \begin{array}{lllll} \{ & (m_1,m_1), & (m_1,m_2), & \ldots & (m_1,m_n), \\ & (m_2,m_1), & (m_2,m_2), & \ldots & (m_2,m_n), \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & (m_n,m_1), & (m_n,m_2), & \ldots & (m_n,m_n) \quad \}. \end{array}$$

(a) Welche Eigenschaft hat eine Relation $A \subset M \times M$, die alle Diagonalelemente aus obiger Darstellung enthält ?

(b) Welche Eigenschaft hat eine Relation $A \subset M \times M$, die mit jedem Element (a,b) auch dasjenige Element enthält, welches im obigen Schema an der Position steht, welche durch Spiegelung der Position von (a,b) an der Diagonalen erhalten wird?

A 1.2.21 Beurteilen Sie die Richtigkeit der folgenden Argumentation:

- **„Satz“**: Sei A eine Menge und R eine Relation auf A. Ist R symmetrisch und transitiv, dann ist R auch reflexiv.
- **„Beweis“**: Sei $a \in A$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass aRa gilt. Wähle irgendein $b \in A$ mit aRb. Da R symmetrisch, muss auch bRa gelten. Also haben wir aRb und bRa. Da R transitiv ist, folgt aRa, was zu zeigen war.

Kann man also die Reflexivität in der Definition einer Äquivalenzrelation weglassen ???

A 1.2.22 Sei $X \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge und $R, S \subset X \times X$ transitive Relationen.

(a) Zeigen Sie, dass $R \cap S$ auch eine transitive Relation ist.

(b) Finden Sie ein Beispiel für X, R und S, bei welchem $R \cup S$ keine transitive Relation ist.

. . . . (oL)

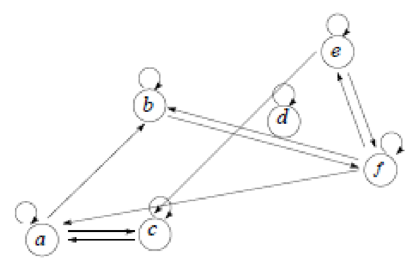
A 1.2.23 Der angegebene Graph beschreibe auf der Menge von 6 Städten $\{a, b, c, d, e, f\}$ die Relation

$$x \sim y \ :\Longleftrightarrow \ \text{Es existiert eine direkte Zugverbindung von } x \text{ nach } y.$$

(Insbesondere gibt es von jeder Stadt eine Zugverbindung in sie selbst.)

(a) Untersuchen Sie diese Relation auf Transitivität, Reflexivität und Symmetrie.

(b) Ergänzen Sie (mit möglichst wenig Pfeilen) den Graphen derart, dass $\sim$ zu einer Äquivalenzrelation wird.



A 1.2.24 Sei $M \neq \emptyset$ und $K \subseteq \mathcal{P}(M)$ eine Partition von M, d.h., es gelte

$$\forall A \in K\colon A \neq \emptyset \quad \text{sowie} \quad \forall A, B \in K\colon (A \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow A = B) \quad \text{und} \quad M = \bigcup_{A \in K} A\,.$$

Zeigen Sie die Existenz einer Äquivalenzrelation auf M, deren Äquivalenzklassen genau die Elemente von K sind.

Seien $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ wie in der Schule verwendet.

A 1.2.25 Ist die Relation $x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; \neg(x = y)$ reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch auf $\mathbb{Q}$?

A 1.2.26 Welche der folgenden Relationen ist reflexiv, symmetrisch bzw. transitiv auf $\mathbb{Q}$?

$$\text{(i)}\; x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; x \leq y \quad \text{(ii)}\; x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; x^2 + x = y^2 + y \quad \text{(iii)}\; x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; x^2 + y^2 = 1$$

Welche von den Relationen sind antisymmetrisch ?

A 1.2.27 Auf der Menge $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sei durch $(a, b) \sim (c, d) :\Longleftrightarrow a + d = b + c$ eine Relation gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}^2$ ist.

(b) Was ist die Äquivalenzklasse eines Elementes $(a, b) \in \mathbb{N}^2$? Fertigen Sie eine Skizze an, in die Sie ein beliebiges Element $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ sowie seine Äquivalenzklasse $[(a, b)]_\sim$ einzeichnen.

(c) Geben Sie ein vollständiges Repräsentantensystem an, d.h, eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}^2$, die genau ein Element aus jeder Äquivalenzklasse enthält.

(d) Entscheiden und beweisen bzw. widerlegen Sie, ob durch $(a, b) \sim (c, d) :\Longleftrightarrow a + c = b + d$ ebenfalls eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}^2$ gegeben ist.

A 1.2.28 Sei $M = \mathbb{Z}^2$ und $R \subseteq M \times M$ eine Relation, definiert durch

$$(a, b) \sim (c, d) \;:\Longleftrightarrow\; a - c = b^2 - d^2 \ .$$

Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation auf M ist.

A 1.2.29 Es seien die folgenden Mengen gegeben:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} X_1 & := & \{y \in \mathbb{Z} \colon y \text{ ist gerade}\} & X_4 & := & \{y \in \mathbb{Z} \colon (y^4 + y^2 - 2)(y^2 - 2y) = 0\}, \\ X_2 & := & \{y \in \mathbb{Z} \colon \exists z \in \mathbb{Z} \text{ mit } y^2 + z^2 \leq 2\}, & X_5 & := & \{y \in \mathbb{Z} \colon 3y^2 \text{ ist durch 4 teilbar }\} \\ X_3 & := & \{y \in \mathbb{Z} \colon y \text{ ist durch 6 teilbar }\}, & & & \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie $X_1 \cap X_2$, $X_3 \cup X_5$, $X_1 \setminus X_3$ und $X_2 \times X_4$.

(b) Für welche $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mit $i \neq j$ gilt $X_i \subseteq X_j$?

A 1.2.30 Zeigen Sie, dass die leere Menge eindeutig ist, d.h., sind $\emptyset$ und $\emptyset'$ zwei Mengen, welche die Definition der leeren Menge erfüllen, gilt bereits $\emptyset = \emptyset'$.

A 1.2.31 Schreiben Sie die folgenden Mengen mathematisch korrekt auf:

(a) Die Menge, welche die leere Menge enthält.

(b) Die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch 2 teilbar sind.

(c) Die Menge aller Primzahlen.

A 1.2.32 Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Gleichheit, Teilmengen- und Elementbeziehungen:

$$\emptyset\ , \quad \{\emptyset\}\ , \quad \{\emptyset, \emptyset\}\ , \quad \mathbb{N}\ , \quad \{1, 2, 5, 3, 3, 1, 2, 1, 4\}\ , \quad \big\{n \in \mathbb{N} \;\big|\; n \leq 5\big\}$$

A 1.2.33 Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Gleichheit, Teilmengen- und Elementbeziehungen:

$$\emptyset\ , \quad \{\{\emptyset\}\}\ , \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\ , \quad \{1, \mathbb{N}\}\ , \quad \mathbb{N}\ , \quad \big\{n \in \mathbb{N} \;\big|\; n^2 = 1\big\}$$

1.3 Abbildungen

Erinnerung: Eine **Abbildung** $f\colon M \to N$ ist eine Teilmenge $R \subset M \times N$ mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ mit $(x, y) \in R$ gibt. Aufgrund der Eindeutigkeit schreiben wir dann $f(x) := y$.

A 1.3.1 Sei M eine Menge mit m Elementen und N eine Menge mit n Elementen. Begründen Sie:

(a) Es existieren n^m Abbildungen von M nach N.

(b) Im Fall $m \leq n$ existieren $\dfrac{n!}{(n-m)!}$ injektive Abbildungen von M nach N.

................................(Charakterisierung einer Abbildung durch ihren Graphen)

A 1.3.2 Welche Eigenschaften muss $X \neq \emptyset$ erfüllen, damit $X \times X$ der Graph einer Abbildung von X nach X ist? Begründen Sie, warum diese Eigenschaften notwendig und hinreichend sind.

A 1.3.3 Seien $X := \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $Y := \{0, 5, 10, 15\}$ und $A := X \times Y$, $B := \{x + y : x \in X, y \in Y\}$. Sei die Menge $R \subset A \times B$ wie folgt definiert:

$$R := \{((x, y), x + y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Zeigen Sie, dass R der Graph einer bijektiven Abbildung von A nach B ist.

........................(Charakterisierung einer Abbildung durch Zuordnungsvorschriften)

A 1.3.4 Untersuchen Sie f jeweils auf Injektivität, Surjektivität, Bijektivität.

(i) $f\colon \{1, 2\} \to \{1\}$, $x \mapsto 1$, (ii) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$, (iii) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $n \mapsto n + 1$

(iv) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \begin{cases} m, & \exists m \in \mathbb{N}\colon n = m + m, \\ n, & \text{sonst,} \end{cases}$

A 1.3.5 (a) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(b) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Beweisen Sie jeweils sauber, warum die von Ihnen angegebenen Abbildungen die geforderten Eigenschaften besitzt.

A 1.3.6 Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Welche natürliche Zahl ergibt sich beginnend bei $k \in \mathbb{N}$ durch n-malige Iteration der Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(k) := k^m$?

....(Eigenschaften des Bildes/Urbildes)

A 1.3.7 Seien X, Y nichtleere Mengen, f eine Abbildung von X nach Y. ....(bisher oL)

- Zu jeder Teilmenge $A \subseteq X$ ist das Bild von A definiert durch

$$f(A) \; := \; \big\{ y \in Y \;\big|\; \exists a \in A\colon f(a) = y \big\} \; .$$

- Zu jeder Teilmenge $B \subseteq Y$ ist das Urbild von B definiert durch

$$f^{-1}(B) \; := \; \big\{ x \in X \;\big|\; \exists b \in B\colon f(x) = b \big\} \; = \; \big\{ x \in X \;\big|\; f(x) \in B \big\} \; .$$

(a) Was sind $f^{-1}(B)$ und $f^{-1}(\emptyset)$?

(b) Zeigen Sie:

(i) f surjektiv $\iff \forall C \subseteq B\colon (C \neq \emptyset \Longrightarrow f^{-1}(C) \neq \emptyset)$.

(ii) $\forall A, B \subseteq X\colon f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Geben Sie insbesondere ein Beispiel an, so dass $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ gilt.

A 1.3.8 Seien M, N nichtleere Mengen und $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Für $U, V \subset M$ gelten $\quad f(U \cup V) = f(U) \cup f(V) \quad$ und $\quad f(M \setminus U) \supset f(M) \setminus f(U)$.

(b) Für $U, V \subset N$ gelten

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \cap V) &= f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \\ f^{-1}(U \cup V) &= f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) \\ f^{-1}(N \setminus U) &= M \setminus f^{-1}(U) \end{aligned}$$

A 1.3.9 Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f\colon X \to Y$ genau dann injektiv ist, wenn für alle Teilmengen $A, B \subset X$ gilt: $f(A \cap B) \;=\; f(A) \cap f(B)$.

A 1.3.10 Seien $A \subset X$ und $B \subset Y$ und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig ?

(i) $A \subset f^{-1}(f(A))$ (ii) $A \supset f^{-1}(f(A))$ (iii) $B \subset f(f^{-1}(B))$ (iv) $B \supset f(f^{-1}(B))$

Inwieweit ändert sich die Antwort, wenn f injektiv, surjektiv oder bijektiv ist ?

.... (Hintereinanderausführungen)

A 1.3.11 (a) Seien X, Y, Z Mengen und $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ Funktionen. Außerdem sei $h = g \circ f\colon X \to Z$ (sprich „g nach f“) die Verknüpfung von g und f gegeben durch $h(x) = g(f(x))$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen richtig sind:

(i) Sind f und g injektiv, so ist auch h injektiv.

(ii) Sind f und g surjektiv, so ist auch h surjektiv.

(iii) Sind f und g bijektiv, ist auch h bijektiv.

(b) Geben Sie im Fall der Bijektivität in (iii) eine Formel für h^{-1} an ?

(c) Kann man in den Aussagen (i), (ii) oder (iii) eine der Voraussetzungen weglassen ?

(d) Gelten auch die umgekehrten Implikationen in (i), (ii) oder (iii)?

A 1.3.12 Es sei $A \neq \emptyset$ eine Menge und $f\colon A \to A$ sowie $g\colon A \to A$ zwei Abbildungen. Zeigen oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass $f \circ g \;=\; g \circ f$ gilt.

A 1.3.13 Es seien A und B nichtleere Mengen sowie $f\colon A \to B$ eine Abbildung und $I_B\colon B \to B$ diejenige Abbildung, welche jedes Element auf sich selbst abbildet. Zeigen Sie:

$$\exists \text{ Abbildung } g\colon B \to A \text{ mit } f \circ g = I_B \qquad \iff \qquad f \text{ surjektiv}$$

A 1.3.14 Es seien A und B nichtleere Mengen sowie $f\colon A \to B$ eine Abbildung und $I_A\colon A \to A$ diejenige Abbildung, welche jedes Element $a \in A$ auf sich selbst abbildet. Zeigen Sie:

$$\exists \text{ Abbildung } g\colon B \to A \text{ mit } g \circ f = I_A \qquad \iff \qquad f \text{ injektiv}$$

A 1.3.15 Sei X eine nichtleere Menge und $G := \{g\colon X \to X \mid g \text{ bijektiv }\}$. Zeigen Sie:

(a) Für beliebige $g_1, g_2 \in G$ gilt $g_1 \circ g_2 \in G$.

(b) Für beliebige $g_1, g_2.g_3 \in G$ gilt $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$.

(c) Es gibt genau ein $e \in G$ mit $g \circ e = e \circ g = g$ für alle $g \in G$.

(d) Zu jedem $g \in G$ existiert genau ein g' mit $g \circ g' = g' \circ g = e$.

.... (oL)

A 1.3.16 Es sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung und $R \subseteq M \times M$ die Relation

$$R \ := \ \Big\{(a,b) \in M \times M \ \Big| \ f(a) = f(b)\Big\}$$

Beweisen Sie:

(a) Die Relation R ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Bezeichnet M/R die Menge der durch R gegebenen Äquivalenzklassen, so ist die Abbildung

$$\tilde{f}\colon M/R \to N\ , \quad [x] \mapsto \tilde{f}([x]) := f(x),$$

wohldefiniert (d.h., unabhängig vom Repräsentanten) und injektiv.

Bemerkung: Die Äquivalenzklasse $[x]$ heißt Faser von f durch x bzw. über x.

.... (Schnittstellenaufgaben)

Die bisher nicht eingeführten Symbole seien wie in der Schule zu interpretieren:

A 1.3.17 Welche der folgenden Relationen R sind Graphen von Abbildungen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$? Wie lautet gegebenenfalls die zugehörige Zuweisungsvorschrift $n \mapsto f(n)$?

$$\big\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\big|\, m \cdot n = 1\big\}\ , \qquad \big\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\big|\, (n = 0 \wedge 3|m) \vee (n = 1 \wedge 3 \nmid m)\big\}\ ,$$
$$\big\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\big|\, m - n = 0\big\}\ , \qquad \big\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\big|\, (n = 0 \wedge 3|m) \vee (n = 1 \wedge 2|m)\big\}\ .$$

Leichte Variation:

Welche der folgenden Relationen R sind Abbildungen ? Wie lautet gegebenenfalls die zugehörige Zuweisungsvorschrift (vorkommende Symbole sind wie in der Schule zu interpretieren)?

$$\big\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\big|\, m - n = 0\big\}\ , \qquad \big\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\big|\, (n = 0 \wedge 3|m) \vee (n = 1 \wedge 3 \nmid m)\big\}\ ,$$
$$\big\{(p,q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \,\big|\, p \cdot q = 1\big\}\ , \qquad \big\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\big|\, (n = 0 \wedge 3|m) \vee (n = 1 \wedge 2|m)\big\}\ .$$

A 1.3.18 Bestimmen Sie für die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ die folgenden Urbilder:

$$f^{-1}(\mathbb{R}),\ \ f^{-1}(\{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}),\ \ f^{-1}(\emptyset),\ \ f^{-1}(\{1\}),\ \ f^{-1}(\{0\}),\ \ f^{-1}([-3,4]),\ \ f^{-1}([1,4]).$$

A 1.3.19 Beschreiben Sie die geometrischen Operationen (z.B. Spiegelung, Streckung, Verschiebung), durch welche sich die Graphen der nachfolgenden Funktionen aus dem Graphen einer vorgegebenen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ ergeben:

(i) $g_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -f(x)$

(ii) $g_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x+7)$

(iii) $g_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f^{-1}(x)$, falls f invertierbar ist.

(iv) $g_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f\left(\frac{1}{2}x\right)$

(v) $g_5\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |f|(x)$

A 1.3.20 Untersuchen Sie, ob die durch die nachfolgenden Operationen aus dem Graphen einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ entstehende Punktmenge jeweils wieder der Graph einer Funktion ist (bzw. unter welchen Voraussetzungen sie es ist), und geben Sie diese Funktion ggf. an.

(a) Spiegelung an der x-Achse

(b) Verschiebung in x-Richtung um 2 Einheiten

(c) Spiegelung an der y-Achse

(d) Verschiebung in y-Richtung um 3 Einheiten

(e) Streckung in y-Richtung um den Faktor 5

(f) Spiegelung an der Geraden $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = -x\}$

A 1.3.21 Beschreiben Sie allgemein, durch welche (Abfolge von) geometrischen Operationen man aus dem Graphen einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ den Graphen der Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a \cdot f(bx+c) + d$$

erhält, wobei a, b, c, d vorgegebene reelle Zahlen mit $a \neq 0 \neq b$ sind. Illustrieren Sie den Sachverhalt zusätzlich an einer Zeichnung (etwa am Beispiel der Hütchenfunktion).

A 1.3.22 Ein neu angelegter Stausee soll gefüllt werden. Dazu werden alle Öffnungen der Staumauer geschlossen. Bei ungefähr gleichmäßigem Zufluss hängt der Wasserstand an der Staumauer im Wesentlichen von der Zeit ab, die seit Schließen der Öffnungen verstrichen ist. Der konkrete Füllgraph hängt natürlich ganz wesentlich vom Geländeprofil ab. Beantworten Sie anhand der Abbildung folgende Fragen:

(a) Welche Füllhöhe wurde nach 400 Stunden erreicht?

(b) Wie lange dauerte es, bis die Füllhöhe 25 m betrug?

(c) Wie schnell steigt der Wasserspiegel in den ersten 800 Stunden durchschnittlich?

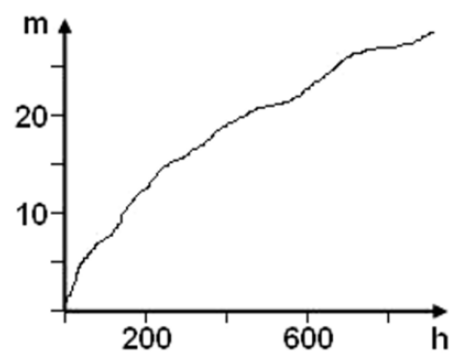


Abb. 2.7: Füllhöhe mit Skalierung

Kapitel 2

Folgen und Reihen

2.1 Gruppen und Körper

Erinnerung:
Ein Tupel $(M, *)$ mit einer nichtleeren Menge M, auf der eine Abbildung $*\colon M \times M \longrightarrow M$, $(m, n) \mapsto m * n$, definiert ist, heißt **Gruppe**, falls die folgenden Axiome erfüllt sind:

(i) $\forall k, l, m \in M\colon k * (l * m) = (k * l) * m$ (Assoziativität)

(ii) $\exists m_0 \in M \; \forall m \in M\colon m * m_0 = m = m_0 * m$ (Existenz eines neutralen Elementes)

(iii) $\forall m \in M \; \exists n \in M\colon m * n = m_0 = n * m$ (Existenz von Inversen)

Eine Gruppe $(M, *)$ heißt **kommutativ/ abelsch**,[1] falls ihre Verknüpfung $*$ zusätzlich erfüllt:

(iv) $\forall k, l \in M \; : \; k * l = l * k$ (Kommutativität)

A 2.1.1 Die **Theorie der Gruppen** besteht aus der klassischen Logik, einer Konstanten 1, einer zweistelligen Funktion $\cdot$, der zweistelligen Relation $=$ und den nichtlogischen Axiomen

(i) $x = x$ (Gleichheit ist reflexiv),
(ii) $x = y \Leftrightarrow y = x$ (Gleichheit ist symmetrisch),
(iii) $(x = y \wedge y = z) \Longrightarrow x = z$ (Gleichheit ist transitiv),
(iv) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (Assoziativität),
(v) $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$ (Eins ist neutral) und
(vi) $\forall x : \exists y : xy = 1$ (Existenz Rechtsinverser).

Beweisen Sie im Rahmen der Theorie der Gruppen:

(a) Jedes rechtsneutrale Element ist gleich 1, d.h. gilt $\forall y : yx = y$, dann gilt $x = 1$.

(b) Jedes idempotente Element ist gleich 1, d.h. gilt $e \cdot e = e$, dann gilt $e = 1$.

(c) Rechtsinverse sind auch Linksinverse, d.h. gilt $x \cdot y = 1$, dann gilt $y \cdot x = 1$.

(d) Inverse sind eindeutig, d.h. gilt $x \cdot y = 1$ und $x \cdot z = 1$, dann gilt $y = z$.

[1] nach dem norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel (1802-1829)

....(Untersuchung auf Gruppeneigenschaften)

A 2.1.2 Auf der Menge $\mathbb{N}_0$ sei die Verknüpfung $\oplus\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ durch

$$n \oplus m := \max\{n, m\} := \begin{cases} n, & \text{falls } m \leq n \\ m, & \text{falls } n \leq m \end{cases}$$

gegeben. Überprüfen Sie, ob $(\mathbb{N}_0, \oplus)$ eine Gruppe ist.

A 2.1.3 Sei $\mathbb{G}$ eine nichtleere Menge mit assoziativer Verknüpfung $\cdot\colon \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ und der Eigenschaft

$$\forall a, b \in \mathbb{G} : ((\exists! x \in \mathbb{G} : a \cdot x = b) \wedge (\exists! y \in \mathbb{G} : y \cdot a = b)) \ .$$

Zeigen Sie, dass dann $(\mathbb{G}, \cdot)$ eine Gruppe ist.

Tipp: Zeigen Sie dazu zunächst die Existenz eines eindeutigen rechtsneutralen Elementes.

....(Charakterisierungen von Körpern)

Definition R1.1: Eine Menge $\mathbb{K}$ zusammen mit zwei Abbildungen $+\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ und $\cdot\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ (kurz $(\mathbb{K}, +, \cdot)$) heißt ein **Körper**, wenn die folgenden fünf Eigenschaften erfüllt sind (wobei wir die Schreibweisen $x + y := +(x, y)$ und $x \cdot y := \cdot(x, y)$ benutzen):

(K1) $\forall x, y, z \in \mathbb{K}\colon \Big(\big((x + y) + z \ = \ x + (y + z)\big) \wedge \big((x \cdot y) \cdot z \ = \ x \cdot (y \cdot z)\big)\Big)$ (Assoziativität)

(K2) $\forall x, y \in \mathbb{K}\colon \Big(\big(x + y \ = \ y + x\big) \wedge \big(x \cdot y \ = \ y \cdot x\big)\Big)$ (Kommutativität)

(K3) $\exists a, b \in \mathbb{K}\colon \Big((a \neq b) \wedge \forall x \in \mathbb{K}\colon \big((x + a = x) \wedge (x \cdot b = x)\big)\Big)$ (Ex. neutr. Elemente)

Aufgrund der Eindeutigkeit (Hausaufgabe) bezeichnen wir fortan a mit 0 und b mit 1.

(K4) $\forall x \in \mathbb{K}\colon \Big((\exists y \in \mathbb{K}\colon x + y = 0) \wedge \big(x \neq 0 \Longrightarrow (\exists z \in \mathbb{K}\colon x \cdot z = 1)\big)\Big)$ (Ex. Inverser)

(K5) $\forall x, y, z \in \mathbb{K}\colon x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ (Distributivität)

A 2.1.4 Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung gegebene Definition eines Körpers äquivalent zur folgenden Charakterisierung ist:

Ein **Körper** ist ein Tripel $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge $\mathbb{K}$, auf der zwei assoziative Verknüpfungen $+\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $(k_1, k_2) \mapsto k_1 + k_2$ und $\cdot\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $(k_1, k_2) \mapsto k_1 \cdot k_2$ so definiert sind, dass

(1′) $(\mathbb{K}, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element e_+ ist,

(2′) $(\mathbb{K} \setminus e_+, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist

und zusätzlich

(3′) $\forall a, b, c \in \mathbb{K}\colon \Big(a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \ \wedge \ (b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)\Big)$ (Distrib.)

erfüllt wird.

A 2.1.5 Zeigen Sie: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein beliebiger Körper. Dann gelten:

(a) Das neutrale Element der Addition ist eindeutig. (Dieses bezeichnen wir mit 0.)

(b) Jedes $a \in \mathbb{K}$ besitzt ein eindeutiges additives Inverse. (Dieses bezeichnen wir mit $-a$).

(c) Das neutrale Element der Addition ist zu sich selbst additiv invers.

(d) Zu beliebigen Körperelementen a, b gibt es genau ein x, so dass $a + x = b$ gilt.

Leichte Variation:

Für gegebene $a, b \in \mathbb{K}$ ist eine Lösung x der Gleichung $b = x + a$ eindeutig.

(e) Für jedes Körperelement $a \in \mathbb{K}$ gilt: $-(-a) = a$.

Alternative Formulierung:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeigen Sie: Es gilt $-(-x) = x$.

(f) Für beliebige Körperelemente $a, b \in \mathbb{K}$ gilt: $-(a + b) = (-a) + (-b)$

(g) Das neutrale Element der Multiplikation ist eindeutig. (Dieses bezeichnen wir mit 1.)

(h) Jedes $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ besitzt ein eindeutiges multiplikatives Inverse. (Bezeichnung: a^{-1}).

Alternative Formulierung für (a,g,b,h):

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeigen Sie: Neutrale Elemente, Negative und Inverse sind eindeutig.

(i) Zu beliebigen Körperelementen a, b mit $a \neq 0$ gibt es genau ein x, so dass $ax = b$ gilt.

Alternative Formulierung:

$\forall a, b \in \mathbb{K}\colon\ (a \neq 0 \Longrightarrow (\exists! x \ :\ ax = b))$.

(j) Für alle Körperelemente $a \in \mathbb{K}$ gilt $0 \cdot a = 0$.

Alternative Formulierung:

In einem Körper $\mathbb{K}$ gilt: Die Multiplikation mit dem neutralen Element der Addition ergibt stets das neutrale Element der Addition, d.h., $\forall x \in \mathbb{K}\colon 0 \cdot x = 0$.

(k) Ein Körper ist nullteilerfrei, d.h., $ab = 0 \Longrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

Alternative Formulierung:

Ein Körper ist **nullteilerfrei**: Aus $xy = 0$ folgt zwingend, dass $x = 0$ oder $y = 0$ ist.

(l) Für alle $a \in \mathbb{K}$ gilt: $(-1) \cdot a = -a$.

(m) Für jedes Körperelement $a \in \mathbb{K}$ mit $a \neq 0$ gilt: $(a^{-1})^{-1} = a$.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie unter Verwendung der Körperaxiome: $\forall x \in \mathbb{K}\colon \big(x \neq 0 \Longrightarrow (x^{-1})^{-1} = x\big)$.

(n) Für beliebige Körperelemente $a, b \in \mathbb{K}$ mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt: $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie mittels Körperaxiomen: $\forall x, y \in \mathbb{K}\colon \big((x \neq 0 \wedge y \neq 0) \Longrightarrow x^{-1}y^{-1} = (xy)^{-1}\big)$.

(o) Für beliebige Körperelemente $a, b \in \mathbb{K}$ gilt $a \cdot (-b) \;=\; -(a \cdot b)$.

(p) Für beliebige Körperelemente $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt $a \cdot (b - c) \;=\; (a \cdot b) - (a \cdot c)$.

A 2.1.6 In einem Körper $\mathbb{K}$ mit Addition $\sqcup$ und Multiplikation $\sqcap$ sei $\square$ das Nullelement und $\boxdot$ das Einselement. Das additiv Inverse zu einem Element $\boxtimes$ werde mit $\bar{\boxtimes}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass

$$\bar{\boxdot} \sqcap \bar{\boxdot} \;=\; \boxdot \;.$$

A 2.1.7 Welches ist der kleinste Körper, der die natürlichen Zahlen enthält ?

. . . . (Beispiele endlicher Körper)

A 2.1.8 Gegeben sei die dreielementige Menge $\mathbb{K} = \{0, 1, b\}$. Es existiert genau eine Möglichkeit, die Addition $\oplus\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ und die Multiplikation $\otimes\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ derart zu definieren, dass $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ zu einem Körper wird. Finden Sie diese, d.h., füllen Sie die untenstehende Additions- und die untenstehende Multiplikationstabelle derart aus, dass die Körperaxiome erfüllt werden:

$\oplus$	0	1	b
0	0	1	b
1	1		
b	b		

und

$\otimes$	0	1	b
0	0	0	0
1	0		
b	0		

A 2.1.9 Ist die Menge $\{0, 1\}$ mit den folgenden Operationen ein Körper?

$$\begin{array}{llllllll} 0+0 &= 0, & 0+1 &= 1, & 1+0 &= 1, & 1+1 &= 0, \\ 0\cdot 0 &= 0, & 0\cdot 1 &= 0, & 1\cdot 0 &= 0, & 1\cdot 1 &= 1. \end{array}$$

A 2.1.10 Sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie, dass $m \equiv n \;:\Longleftrightarrow\; k \big| (m - n)$ eine Äquivalenzrelation[2] auf $\mathbb{Z}$ ist.[3]

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ durch $m \sim n\colon \iff k|(m-n)$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ definiert wird.

A 2.1.11 Ist $\mathbb{F}_p := \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ mit der Addition $x \oplus y := x + y \mod p$ und der Multiplikation[4] $x \otimes y := x \cdot y \mod p$ für eine Primzahl[5] $p \in \mathbb{N}$ ein Körper ?

Alternative Formulierung:
Zeigen Sie: Die Menge $\mathbb{F}_p := \{0, \ldots, p-1\}$, versehen mit der Addition $a +_p b := (a + b) \mod p$ und mit der Multiplikation $a \cdot_p b := (ab) \mod p$, ist für jede Primzahl p ein Körper.

A 2.1.12 Zeigen Sie, dass Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}_k$ wohldefiniert sind.

A 2.1.13 Beweisen Sie durch Rechnen in $\mathbb{Z}_2$:
Das Quadrat jeder ungeraden natürlichen Zahl ist ungerade.

A 2.1.14 Zeigen Sie für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ und festes $m \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$, dass das Produkt $[m]_p \cdot [n]_p$ bei $n = 0, 1, \ldots, p-1$ alle Äquivalenzklassen in $\mathbb{Z}_p$ durchläuft.[6]

[2] Auf der Menge $\mathbb{Z}_k$ der zugehörigen **Äquivalenzklassen** $[n] := \{m \in \mathbb{Z} \,|\, m \equiv n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, kann man wegen $[n] \cap [m] \neq \emptyset \implies [n] = [m]$ durch $[m] + [n] := [m + n]$ und $[m] \cdot [n] := [m \cdot n]$ Addition und Multiplikation mit neutralen Elementen $[0]$ und $[1]$ definieren. Statt $[n] = [m]$ bzw. $n \equiv m$ schreibt man auch $n = m \mod k$.

[3] Es gilt $k \big| m$, sprich „k teilt m“, genau dann, wenn es ein $\ell \in \mathbb{Z}$ mit $k \cdot \ell = m$ gibt.

[4] Hinweis: $a \mod p$ (gesprochen: a modulo p) entspricht genau dem Rest, der entsteht, wenn man a durch p teilt. Um die Existenz multiplikativer Inverser zu beweisen, verwende man den Satz von Fermat $a^{p-1} \mod p = 1 \mod p$, der nur für Primzahlen p allgemein gilt.

[5] Dabei nennt man eine natürliche Zahl $p > 1$ genau dann **prim**, wenn p und 1 die einzigen Teiler von p sind.

[6] Dabei ist $p\mathbb{Z} := \{k \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z}\colon p \cdot m = k\} = \{0, p, -p, 2p, -2p, 3p, -3p, \ldots\}$.

A 2.1.15 Berechnen Sie in $\mathbb{Z}_7$ $(= \mathbb{F}_7)$ die Ausdrücke

$$[3]_7 + [5]_7 \quad , \quad [2]_7 - [6]_7 \quad , \quad [1]_7 - [13]_7 \quad , \quad [3]_7 \cdot [4]_7 \quad , \quad ([5]_7)^{-1} \quad , \quad ([6]_7)^{-1} \quad .$$

A 2.1.16 Wie sehen die kleinste Gruppe und der kleinste Körper aus ?

A 2.1.17 Finden Sie ein Beispiel, dass $\mathbb{F}_n$ für ein $n \neq 1$, das keine Primzahl ist, kein Körper ist.

A 2.1.18 Zeigen Sie, dass man die Menge $M := \{0, 1, 2, 3\}$ so mit einer Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ versehen kann, dass $(M, +, \cdot)$ ein Körper wird.

Alternative Formulierung
Gegeben sei die Menge $\mathbb{K} = \{0, 1, \alpha, \alpha+1\}$. Es existiert genau eine Möglichkeit, die Addition $\oplus \colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ und die Multiplikation $\otimes \colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ derart zu definieren, dass $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ zu einem Körper wird. Finden Sie diese, d.h., füllen Sie die untenstehende Additions- und die untenstehende Multiplikationstabelle derart aus, dass die Körperaxiome erfüllt werden:

$\oplus$	0	1	α	$\alpha+1$
0	0	1	α	$\alpha+1$
1	1		$\alpha+1$	
α	α	$\alpha+1$		
$\alpha+1$	$\alpha+1$			

und

$\otimes$	0	1	α	$\alpha+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	α	$\alpha+1$
α	0	α		
$\alpha+1$	0	$\alpha+1$		

Hinweis: Dieser Körper kann kein zyklischer Körper sein (siehe Übung).

Leichte Variation:

Zeigen Sie, dass es keinen Körper mit genau vier Elementen gibt, in dem die Elemente $0, 1, 1+1$ und $1+1+1$ verschieden sind.

.... (Untersuchung auf Körpereigenschaften)

A 2.1.19 Wann ist die Menge der Abbildungen $\mathrm{Abb}(M, \mathbb{Q})$ von einer Menge M nach $\mathbb{Q}$ mit der Addition $(f+g)(m) := f(m) + g(m)$ und der Multiplikation $(f \cdot g)(m) := f(m) \cdot g(m)$ ein Körper?

A 2.1.20 Untersuchen Sie, inwieweit für die Menge $M := \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{F}_2 \wedge y \in \mathbb{F}_2\}$ der geordneten Paare mit Elementen aus $\mathbb{F}_2$, versehen mit den durch $(x, y) \oplus (u, v) := (x+u, y+v)$ und $(x, y) \odot (u, v) := (x \cdot u, y \cdot v)$ gegebenen Verknüpfungen $\oplus \colon M \times M \to M$ und $\odot \colon M \times M \to M$, die Körperaxiome gelten.

A 2.1.21 Auf der Menge $\mathbb{Z}$ seien die beiden folgenden Operationen definiert:

- Tropische Addition $\oplus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad (a, b) \mapsto a \oplus b := \min(a, b)$,
- Tropische Multiplikation $\otimes : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad (a, b) \mapsto a \otimes b := a + b$.

Beantworten Sie die folgenden Fragen und beweisen Sie alle Ihre Antworten:

(a) Gelten für $\oplus$ das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz ?

(b) Gelten für $\otimes$ das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz ?

(c) Gilt für die Addition $\oplus$ und die Multiplikation $\otimes$ das Distributivgesetz ?

(d) Wird $\mathbb{Z}$ mit der tropischen Addition $\oplus$ und der tropischen Multiplikation $\otimes$ zu einem Körper ?

Alternative Formulierung:
Auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen seien die beiden folgenden Abbildungen definiert:

- Tropische Addition $\oplus\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $a \oplus b := \min(a, b)$.
- Tropische Multiplikation $\otimes\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $a \otimes b := a + b$.

(a) Sind $\oplus$ bzw. $\otimes$ assoziativ, kommutativ, distributiv?

(b) Wird $\mathbb{Z}$ mit der tropischen Addition und der tropischen Multiplikation zu einem Körper?

Beweisen Sie Ihre Antworten!

A 2.1.22 Auf der Menge $\mathbb{Q}$ der reellen Zahlen seien die beiden folgenden Verknüpfungen definiert:

- Tropische Addition $\oplus\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ a \oplus b := \min(a, b)$,
- Tropische Multiplikation $\otimes\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ a \otimes b := a + b$.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen **oder** widerlegen Sie sie mit je einem Gegenbeispiel:

(a) Für $\oplus$ gelten das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz.

(b) Für $\otimes$ gelten das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz.

(c) Für die tropische Addition $\oplus$ und die tropische Multiplikation $\otimes$ gilt das Distributivgesetz.

(d) $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$ ist ein Körper.

.... (Körper der rationalen Funktionen)

A 2.1.23 Bezeichne K die Menge der (bezüglich Erweitern und Kürzen zusammengefassten Äquivalenzklassen von) rationalen Funktionen $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, wobei p, q Polynome mit reellen Koeffizienten sind und $q \neq 0$ ist.

Ist K mit der punktweisen Addition und Multiplikation ein Körper?

.... (Irreduzible Polynome und Erweiterungskörper)

A 2.1.24 Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge für die Gleichung $x^2 = 6$ in der Menge der rationalen Zahlen leer ist. Verwenden Sie die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.

Leichte Variation:

Zeigen Sie, dass Lösungen von $x^2 = 3$ nicht in $\mathbb{Q}$ liegen können.

A 2.1.25 Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeigen Sie: $\qquad (\exists x \in \mathbb{Q}\colon x^2 = n) \Longrightarrow x \in \mathbb{Z}$

A 2.1.26 Es seien n und m natürliche Zahlen. Zeigen Sie: Die Gleichung $x^m = n$ besitzt genau dann über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ eine Lösung, wenn sie schon über der Grundmenge $\mathbb{N}$ eine Lösung besitzt.

A 2.1.27 Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{K} := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} := \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q}\}$

- mit der Addition $(a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d)$ und
- mit der Multiplikation $(a, b) \otimes (c, d) := (ac + 2bd, ad + bc)$

zu einem Körper $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ wird. Besitzt das Polynom $x^2 = 2$ eine Lösung im Körper $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$, wenn wir den Körper der rationalen Zahlen durch $r \mapsto (r, 0)$ in diesen Körper einbetten?

.... (Schnittstellenaufgaben)

A 2.1.28 Welche Körperaxiome erfüllen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ (mit der üblichen Addition und Multiplikation)?

A 2.1.29 Formulieren Sie die sogenannte Uhrzeigerarithmetik mathematisch präzise.

Alternative Formulierung:
„Uhrzeitarithmetik“:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Die 12-elementige Gruppe, welche der im anglikanischen Raum verwendeten Uhrzeitarithmetik zugrunde liegt, ist durch die nebenstehende Operationstabelle eindeutig festgelegt.[a] Warum nennt man diese Gruppe wohl eine zyklische Gruppe? (Welcher Zyklus schiebt sich hier durch die gesamte Operationstabelle?)

[a] Wir erhalten diese Tabelle beispielsweise, wenn wir die Modulo-Rechnung anwenden, d.h., jeweils den Rest nach Division mit 12 ermitteln.

A 2.1.30 Begründen Sie, warum

(a) die Summe zweier gerader Zahlen wiederum gerade ist;

(b) die Summe zweier ungerader Zahlen eine gerade Zahl ist;

(c) das Produkt zweier gerader Zahlen wiederum eine gerade Zahl ist.

A 2.1.31 (a) Berechnen Sie die Ausdrücke (i) $\sum_{k=3}^{10} k^2$ (ii) $\sum_{k=-3}^{3} (k+2) \cdot k$ (iii) $\sum_{k=1}^{4} \left(\prod_{l=1}^{k} 2 \right)$

(b) Zeigen Sie: Teilt die natürliche Zahl k die natürlichen Zahlen m und n, dann teilt k auch $n - m$.

(c) Zeigen Sie: Gäbe es nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$, dann gäbe es unter diesen eine Primzahl, die sowohl

$$\prod_{k=1}^{n} p_k \qquad \text{als auch} \qquad \left(\prod_{k=1}^{n} p_k \right) + 1$$

teilt. Folgern Sie mittels (b), dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

(d) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von 54 , 221 , 2010 und 4807 .

A 2.1.32 Berechnen Sie, sofern existent, in $\mathbb{Q}$ die Ausdrücke

(a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ (ii) $\frac{1}{6} - \frac{5}{4}$ (iii) $\frac{1}{\frac{1}{5} - \frac{2}{11}}$ (iv) $\frac{1}{\frac{11}{12} - \frac{1}{6} - \frac{3}{4}}$

A 2.1.33 (a) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(i) $S_1 := [7m - (5n+3)] - [-(6n+7) + 5m - (3n-2)]$

(ii) $S_2 := (-12a + 20b)15x - 20x(14b - 9a)$

(iii) $S_3 := 10ab(8a - 4b + 5c) - (15a + 12b - 9c)5ab$

(b) Vereinfachen Sie die folgenden Potenzen:

$(2x)^2,\ (-2x)^2,\ 2(-x)^2,\ -2(-x^2),\ (2x)^3,\ (-2x)^3,\ 2(-x)^3,\ -2(-x)^3$

(c) Multiplizieren Sie aus und/oder fassen Sie zusammen:

(i) $T_1 := (-a - 2b)(a + 3b)$ (ii) $T_2 := (c + b)(c - b + 2)$

(ii) $T_3 := 35 - (11 - 5x)(3 - 2x^2) + 2x^2 + 3x^2 - 4x$

(e) Bestimmen Sie $\boxed{?}$ in

(i) $\dfrac{x+2y}{x-y} = \dfrac{\boxed{?}}{x^2 - y^2}$ (ii) $\dfrac{5a+3b}{5a-3b} = \dfrac{25a^2 - 9b^2}{\boxed{?}}$ (iii) $\dfrac{2x+y}{x+y} = \dfrac{4x^2 + 4xy + y^2}{\boxed{?}}$

(f) Kürzen Sie die folgenden Brüche:

(i) $\dfrac{8xy + 4xz}{2x}$ (ii) $\dfrac{ax - ay}{ax^2 - ay^2}$ (iii) $\dfrac{8x^3y^2 - 6x^2y^3}{24x^2y^2}$ (iv) $\dfrac{r^2 - 10rs + 25s^2}{r^2 - 25s^2}$

A 2.1.34 Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen durch:

(a) $(2a^2 + 18a - 20) : (a + 10)$ (b) $(8a^2 - 10a - 3) : (2a - 3)$ (c) $(x^3 + y^3) : (x + y)$

(b) $(5p^2 + 3pq + 9p + 6q - 2) : (5p + 3q - 1)$

. . . . (oL)

A 2.1.37 **(Beispiel eines Regelsystem)** Sei X eine nichtleere Menge und $\odot \colon X \times X \to X$, für welche die folgenden Regeln erfüllt sind:

(R1) : Es existieren $x, y \in X : x \neq y$.

(R2) : Für alle $x \in X$ gilt $x \odot x = x$.

(R3) : Für alle $x, y \in X$ gilt $x \odot y = y \odot x$.

(R4) : Für alle $x, y, z \in X$ gilt: Aus $x \odot y = x \odot z$ folgt $y = z$.

(R5) : Für alle $x, y, z \in X$ gilt: Aus $x \odot z = y \odot z$ folgt $x = y$.

(a) Bestätigen Sie durch Angabe eines Beispiels die Widerspruchsfreiheit des obigen Regelsystem, d.h., geben Sie auf $X = \{a, b, c, d, e\}$ eine Verknüpfung $\odot \colon X \times X \to X$ durch die Vervollständigung der „Verknüpfungsabelle“

$\odot$	a	b	c	d	e
a	a	c	d	e	b
b					
c					
d					
e					

an, so dass diese tatsächlich obiges Regelsystem (R1) bis (R5) erfüllt.

(b) Zeigen Sie: Aus den obigen Regeln (R1) bis (R5) kann folgende Regel abgeleitet werden: (R6): Für alle $x, y \in X$ gilt $(x \odot x) \odot (y \odot y) \;=\; (x \odot y) \odot (x \odot y)$.

(c) Es wird der Vorschlag unterbreitet, das Regelsystem um folgende Regel zu ergänzen: (R7): Es existiert ein Element $n \in X$ so dass $\forall x \in X : n \odot x = x$.
Zeigen Sie, dass das so entstehende Regelsystem nicht mehr widerspruchsfrei ist.

(d) Erläutern Sie: Das obige Regelsystem (R1) bis (R5) ist nicht unabhängig, d.h, mindestens eine Regel kann aus den übrigen bereits abgeleitet werden (also kann man mindestens eine Regel weglassen, ohne etwas zu verlieren).

(e) Erläutern Sie: Das obige Regelsystem (R1) bis (R5) ist nicht vollständig, d.h., die Menge X und die Verknüpfung $\odot$ sind durch die Regeln nicht „eindeutig bestimmt“.

2.2 Anordnungsaxiome

. . . . (Äquivalenzrelationen – vgl. auch S. 16)

A 2.2.1 Sei $\sim$ die Relation auf $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ definiert durch $(x, y) \sim (x', y') \;:\Longleftrightarrow\; 2(x - x') = 3(y - y')$.
Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ist.

A 2.2.2 Zeigen Sie, dass durch $2|(b - a)$ (2 teilt $b - a$) eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert wird.

. . . . (Ordnungsrelationen – vgl. auch S. 16)

A 2.2.3 Sei M eine Menge. Zeigen Sie, dass $\subseteq$ eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(M)$ darstellt.
Bonusfrage: Ist $\subseteq$ im Allgemeinen auf $\mathcal{P}(M)$ eine totale Ordnungsrelation ?

A 2.2.4 Zeigen Sie, dass durch

$$k \sim \ell \;:\Longleftrightarrow\; k\big|\ell \;:\Longleftrightarrow\; \exists m \in \mathbb{N}\colon k \cdot m = \ell \tag{2.1}$$

für $k, \ell \in \mathbb{N}$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ gegeben ist.

Alternative Formulierung:
Sei die Relation R auf $\mathbb{N}$ definiert durch $(x, y) \in R$ genau dann, wenn x ein Teiler von y ist. Ist R eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$?

Alternative Formulierung:
Sei $X := \mathbb{N}_0 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$ und sei R die Relation auf X, für die $(x, y) \in R$ genau dann gilt, wenn $x \in X$ die Zahl $y \in X$ teilt (d.h., falls $\exists n \in X\colon nx = y$ gilt).

Beweisen oder widerlegen Sie, dass R eine Ordnungsrelation auf X ist.

A 2.2.5 Durch $(a, b) \sqsubseteq (c, d) \;:\Longleftrightarrow\; \Big(a < c \vee (a = c \wedge b \leq d)\Big)$ sei eine Relation $\sqsubseteq$ auf der Menge

$$M \;=\; \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;:\; x \text{ und } y \text{ teilerfremd}\}$$

definiert. Zeigen Sie, dass es sich bei $\sqsubseteq$ um eine Ordnungsrelation auf M handelt.

Alternative Formulierung/Erweiterung:
Durch $(a, b) \sqsubseteq (c, d) \;:\Longleftrightarrow\; \Big(a < c \vee (a = c \wedge b \leq d)\Big)$ sei eine Relation $\sqsubseteq$ auf der Menge

$$M \;=\; \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;:\; x \text{ und } y \text{ teilerfremd}\}$$

definiert. Zeigen Sie, dass es sich bei $\sqsubseteq$ um eine Ordnungsrelation auf M handelt und überprüfen Sie, ob sich die Ordnung mit der komponentenweisen (aus dem Körper der reellen Zahlen vererbten) Multiplikation $(a, b) \cdot (c, d) := (a \cdot c, b \cdot d)$ verträgt.

Anmerkung: Warum heißt diese Ordnung wohl „lexikographisch“ ?

Definition R1.2:

- Eine Teilmenge $\mathbb{K}^+ \subset \mathbb{K}$ eines Körpers $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ heißt **Anordnung von** $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(A1) Für jedes $x \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Alternativen: $x \in \mathbb{K}^+$ oder $x = 0$ oder $-x \in \mathbb{K}^+$.

(A2) Für alle $x,\, y \in \mathbb{K}$ gilt: $\Big(x, y \in \mathbb{K}^+ \Longrightarrow \big(x + y \in \mathbb{K}^+ \;\wedge\; x \cdot y \in \mathbb{K}^+\big)\Big)$.

- Ist $\mathbb{K}^+$ eine Anordnung von $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, so heißt $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K}^+)$ ein **angeordneter Körper**.
- In einem **angeordneten Körper** definieren wir die Relationen $<$, $\leq$, $>$ und $\geq$ wie folgt (wobei x und $y \in \mathbb{K}$ beliebig sind):

(i) $x < y \;:\Longleftrightarrow\; y - x \in \mathbb{K}^+$.

(ii) $x \leq y \;:\Longleftrightarrow\; \big(x = y \vee y - x \in \mathbb{K}^+\big)$.

(iii) $x > y \;:\Longleftrightarrow\; x - y \in \mathbb{K}^+$.

(iv) $x \geq y \;:\Longleftrightarrow\; \big(x = y \vee y - x \in \mathbb{K}^+\big)$.

Folgerungen: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K}^+)$ ein angeordneter Körper. Dann folgen die Aussagen:

(a) Für $x, y \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Alternativen: $x < y$ oder $x = y$ oder $x > y$.

(b) $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$: $\Big(\big(x < y \wedge y < z\big) \Longrightarrow x < z\Big)$ (Transitivität)

(c) $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$: $\big(x < y \Longrightarrow x + z < y + z\big)$ (Translationsinvarianz)

(d) $\forall x, y \in \mathbb{K}$: $\big(x < y \Longrightarrow -y < -x\big)$ (Spiegelung)

Alternative Formulierung speziell für $\mathbb{Q}$:

Für $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt $x > y \Longleftrightarrow -x < -y$.

(e) $\forall u, v, x, y \in \mathbb{K}$: $\Big(\big(x < y \wedge u < v\big) \Longrightarrow x + u < y + v\Big)$ (Addition von Ungleichungen)

(f) $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$: $\Big(\big(x < y \wedge 0 < z\big) \Longrightarrow xz < yz\Big)$ (Streckung/Stauchung)

(g) $\forall u, v, x, y \in \mathbb{K}$: $\Big(\big(0 \leq x < y \wedge 0 \leq u < v\big) \Longrightarrow xu < yv\Big)$ (Multiplikation v. Ungl.en)

(h) $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$: $\Big(\big(x < y \wedge z < 0\big) \Longrightarrow xz > yz\Big)$ (Multiplikation mit Negativen)

(i) $\forall x \in \mathbb{K}$: $\big(x \neq 0 \Longrightarrow x^2 > 0\big)$. Insbesondere gilt $1 > 0$. (Nichtneg.tät von Quadraten)

(j) $\forall x \in \mathbb{K}$: $\big(x > 0 \Longleftrightarrow x^{-1} > 0\big)$ (Vorzeicheninvarianz bei Inversion)

(k) $\forall x, y \in \mathbb{K}$: $\big(0 < x < y \Longrightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}\big)$ (Umkehrung bei Inversion)

A 2.2.6 Beweisen Sie die Folgerungen (a) bis (k) aus den Anordnungsaxiomen.

. . . .

A 2.2.7 Beweisen Sie: $R := \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \,|\, x \leq y\}$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{Q}$.

. . . . (Weitere Eigenschaften angeordneter Körper)

A 2.2.8 Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $a, b \in \mathbb{K}$ mit $a < b$.
Zeigen Sie, dass dann $a < \dfrac{a+b}{2} < b$ gilt.

A 2.2.9 Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt: $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

Leichte Variation:

Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $a, b \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie die Gültigkeit von $2ab \leq a^2 + b^2$.

Alternative Formulierung speziell für $\mathbb{Q}$:

Zeigen Sie: Für $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

A 2.2.10 Beweisen Sie mit Hilfe der Anordnungsaxiome für $a, b \in \mathbb{K}$ die folgenden Ungleichungen

(a) $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$

(b) $a > 0 \wedge b > 0 \implies \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$

(c) $b \geq 0 \wedge a^2 < b^2 \implies a < b$

Äquivalente Formulierung für (b)

Zeigen Sie: $\forall x, y \in \mathbb{Q}$: $\left(x > 0 \wedge y > 0 \Longrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\right)$

A 2.2.11 Widerlegen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels die Aussage $b < 0 \wedge a^2 < b^2 \implies a < b$

A 2.2.12 Seien a, b Elemente eines angeordneten Körpers mit $a \leq b$. Zeigen Sie die Ungleichungskette

$$a^2 \;\leq\; \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 \;\leq\; ab \;\leq\; \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \;\leq\; \frac{a^2+b^2}{2} \;\leq\; b^2\,. \tag{2.2}$$

Wann gilt jeweils das Gleichheitszeichen ?

A 2.2.13 Beweisen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ mit $b, d > 0$ die Aussage: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc$.

A 2.2.14 Beweisen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, d > 0$ die Aussage: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \implies \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

A 2.2.15 Zeigen Sie: Für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$, $d \neq 0$, ist $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ äquivalent zu $(ad - bc) \cdot (bd) > 0$.

Alternative Formulierung:
Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie: Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ mit $b \neq 0$, $d \neq 0$ ist die Ungleichung $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ äquivalent zu $(ad - bc) \cdot (bd) > 0$.

A 2.2.16 Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt: $(a-b)^4 \;\leq\; 4(a^3-b^3)(a-b)$.

Hinweis: Verwenden Sie gegebenenfalls auch Gleichung (2.6).

Alternative Formulierung speziell für $\mathbb{Q}$:
Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt $\frac{1}{4}(x - y)^4 \leq (x^3 - y^3)(x - y)$.

A 2.2.17 Zeigen Sie: Existieren in einem Körper zwei Elemente a und b mit $a^2 + b^2 = -1$, so kann dieser Körper nicht angeordnet werden.

A 2.2.18 Beweisen Sie die Äquivalenz der oben genannten Axiome (bzw. der in der Übungs vorgestellten Definition) für einen angeordneten Körper zu denen im Forster (bzw. in der Vorlesung) genannten Axiomen.

A 2.2.19 Zeigen Sie (mit der Definition über eine Ordnungsrelation), dass in einem angeordneten Körper aus $0 < a$ und $0 < b$ auch $0 < a + b$ folgt, und beantworten Sie anschließend die Frage, ob man einen der endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ anordnen kann.

.... (oL)

A 2.2.20 **(Positivbereiche – verschiedene Ordnungen auf dem gleichen Körper)**
Betrachten Sie die Menge $K := \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} = \{x + y\sqrt{2} \colon x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q}\}$ zusammen mit den von $\mathbb{R}$ induzierten Operationen $+, \cdot$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $z = x + \sqrt{2}y \in K$ sind die Zahlen $x, y \in \mathbb{Q}$ eindeutig bestimmt.

(b) $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper.

(c) Jede der Mengen

$$\begin{aligned} P_1 &= \{x + y\sqrt{2} \colon x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q} \wedge x + \sqrt{2}y > 0\} \\ P_2 &= \{x + y\sqrt{2} \colon x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q} \wedge x - \sqrt{2}y > 0\} \end{aligned}$$

ist ein Positivbereich in K.

A 2.2.21 Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Intervalle ?

(a) $A := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{2x+1} < \frac{1}{3} \right\}$ (b) $B := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3-x}{x+1} \right\}$

A 2.2.22 Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

(a) $\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1+\frac{1}{x+2}}{1-\frac{1}{x+2}} < 2$ (b) $\frac{x+10}{x+1} \leq \frac{2x-15}{3-x}$ (c) $\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} > 2$

A 2.2.23 Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit (i) $x < x^2$, (ii) $\frac{10}{x} - 3 < \frac{4}{x} + 1$, (iii) $3x^2 + 6x - 8 > 1$.

oder:

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

(i) $x < x^2$, (ii) $\frac{10}{x} - 3 < \frac{4}{x} + 1$, (iii) $3x^2 + 6x - 8 > 1$.

A 2.2.24 Lösen Sie über dem Körper der reellen Zahlen die folgenden Ungleichungen und skizzieren Sie die Lage der jeweiligen Lösungsmenge auf der x-Achse:

(i) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x \leq x - \frac{7}{6}$ (ii) $\frac{5}{2}(x-3) \leq (x-3)$

A 2.2.25 Geben Sie die folgenden Mengen als Vereinigung (möglichst weniger) paarweise disjunkter[7] offener, halboffener bzw. abgeschlossener Intervalle reeller Zahlen an.

(i) $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 2 \right[$ (ii) $B = [3,7] \cup [5,6[\cup \left] \frac{11}{2}, 8 \right[$

(iii) $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} \ : \ 0 < x - n < \frac{1}{3} \right\}$

[7] Dabei heißt eine Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ von Mengen A_i **paarweise disjunkt**, wenn $\forall i,j \in I \colon (i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$.

. . . . (Eigenschaften des Betrages)

A 2.2.26 Zeigen Sie Satz 3.1 und seine Folgerungen, d.h., zeigen Sie:

(a) **Satz:** Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K}^+)$ ein beliebiger angeordneter Körper. Für den Betrag $|\cdot|\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, welcher durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{im Fall} x \geq 0 \ , \\ -x & \text{im Fall} x < 0 \ . \end{cases} \tag{2.3}$$

definiert ist, gelten die Eigenschaften:

(B1) $\forall x \in \mathbb{K}\colon |x| \geq 0 \wedge (|x| = 0 \iff x = 0)$. (Definitheit)

(B2) $\forall x, y \in \mathbb{K}\colon |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$. (Multiplikativität)

(B3) $\forall x, y \in \mathbb{K}\colon |x + y| \leq |x| + |y|$. (Dreiecksungleichung)

(b) **Folgerungen:**

(i) Es gelten $|1| = 1$, $|-1| = 1$ und $\forall x \in \mathbb{K}\colon |x| = |-x|$.

(ii) Es gelten $\forall x \in \mathbb{K}\colon x \leq |x|$ und $\forall x, y \in \mathbb{K}\colon \big(x \leq |y| \wedge -x \leq |y| \implies |x| \leq |y|\big)$.

(iii) Es gelten $\forall x, y \in \mathbb{K}\colon \big(y \neq 0 \Longrightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\big)$

(iv) Es gelten $\forall x, y \in \mathbb{K}\colon \big(|x - y| \geq |x| - |y| \wedge |x + y| \geq |x| - |y|\big)$

(v) Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y|$.

. . . . (Darstellungsformen des Maximum/Minimum)

A 2.2.27 Zeigen Sie: Für alle reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

Bonusfrage: Wieso folgt daraus dann auch $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$?

Alternative zusammenfassende Formulierung:

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie die Gleichungen

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \qquad \text{und} \qquad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2} \ .$$

. . . . (Schnittstellenaufgaben – vgl. auch Seite 72)

Im Folgenden sei $\mathcal{X}$ eine Menge und $S(x)$ sowie $T(x)$ Terme in $x \in \mathcal{X}$.

A 2.2.28 Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Menge $L = \{x \in \mathbb{D}\colon S(x) = T(x)\}$ für:

(a) $\sqrt{x} = 5$ auf der Menge $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq 0\}$,

(b) $\dfrac{x^3}{x} = 4$ auf der Menge $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\colon x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(c) $bx + c = 0$ auf $\mathbb{R}$ (*allgemeine lineare Gleichung*),

(d) $x^2 = a$ auf $\mathbb{R}$ (*allgemeine quadratische Gleichung ohne lineares Glied*),

(e) $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ auf $\mathbb{R}$ (*allgemeine quadratische Gleichung*),

(f) $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = -x$ auf $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, (g) $\sqrt{x} = 2 - x$ auf $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq 0\}$.

A 2.2.29 Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|2-x|+2 \leq \frac{4}{x}$.

Variation: Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-5|+5 \leq \frac{9}{x}$.

Variation (irrat. Intervallgrenzen!): Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2|+2 \leq \frac{1}{x}$.

A 2.2.30 Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

(i) $|x+3|+|x-3|>8$ (ii) $x(2-x)>1+|x|$ (iii) $\left|\frac{x}{x+1}\right| > \frac{x}{x+1}$

A 2.2.31 Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:

(a) $\frac{3}{|x+2|} < 2-3x$ (b) $\big|x-|x|\big| \leq 1$ (c) $\big|2|x|-1\big| \leq 3$

A 2.2.32 Bestimmen Sie die Lösungsmenge in Form von Intervallen für die folgenden Ungleichungen

(i) $\frac{|2x+1|}{x-3} \leq 1$ (ii) $|3x-5|>|2x+3|$ (iii) $|2-|1-|x||| \leq 3$

A 2.2.33 Finden Sie alle Lösungen der Ungleichung $|x+1|+|x+2|+|x+3| \leq 4$.
Bonusfrage: Welche $x \in \mathbb{R}$ lösen die Gleichung $|x+1|+|x+2|+|x+3| = 4$?

A 2.2.34 Geben Sie die Menge der $x \in \mathbb{R}$, welche die folgenden Ungleichungen erfüllen, als Vereinigung von Intervallen $(a,b) := \{y \in \mathbb{R} \,|\, a<y<b\}$ bzw. $[a,b] := \{y \in \mathbb{R} \,|\, a \leq y \leq b\}$ an:

(a) $|2+|1-x|| \leq 3$ (b) $\frac{|2-|2+x||}{|x|} \leq 1$

A 2.2.35 Geben Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, welche die folgenden Ungleichungen erfüllen, als Vereinigung von Intervallen an:

(a) $\frac{|x|-1}{x^2-1} \geq \frac{1}{2}$ (ii) $\left|\frac{x+4}{x-2}\right| < x$ (iii) $\frac{\big|5-|5-x|\big|}{|x|} \leq 1$, (iv) $\big|2+|4-x|\big| \geq 5$,

(e) $|x-|x-1||>-2x+1$ (vi) $|x-a|+|x-b| \leq b-a$, wobei $a \leq b$

A 2.2.36 Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Ungleichung $|x^2-4|-|x+2|(x^2+x-6)>0$ erfüllen.

A 2.2.37 Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Ungleichung $\frac{|x-2|(x+2)}{x} < |x|$ erfüllen.

A 2.2.38 Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

(a) $|7-|x-5|| \leq 3$ (b) $|x^2-4x+3| \leq |x^2-4|$ (c) $|x+1|-|x|+|x-1|<2$

(d) $|x^2+x-2|<x$ (e) $\frac{x+1}{x} \leq |x|$ (f) $|x+2|-|x-2| \geq 2$ (g) $||x+1|-2| \leq 1$

A 2.2.39 Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

(a) $\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{1+|x-1|}$ (b) $(x-1)^2-2 \geq |x|$ (c) $|3-x| \geq 2$

(d) $\big||3-x|-2\big| \leq |x-1|$ (e) $\big||3-x|-2\big| \geq |x-1|$

. . . . (Zugang über Dedekindsche Schnitte – inklusive Vollständigkeit)

A 2.2.40 Zeigen Sie, dass sich jede rationale Zahl als DEDEKIND'scher Schnitt darstellen lässt.

A 2.2.41 Sei $N \in \mathbb{N}$ und seien $(A_n, B_n),\ n = 1, \ldots, N$, DEDEKIND'sche Schnitte.
Weiter sei $A := \bigcup_{n=1}^{N} A_n$. Zeigen Sie, dass dann $(A, C_{\mathbb{Q}}(A))$ ein DEDEKIND'scher Schnitt ist.

A 2.2.42 Zeigen Sie:
Die Summe zweier DEDEKIND'scher Schnitte ist wieder ein DEDEKIND'scher Schnitt.

A 2.2.43 Sei $N \in \mathbb{N}$ und seien $(A_n, B_n),\ n = 1, \ldots, N$, DEDEKIND'sche Schnitte. Weiter sei $A := \bigcap_{n=1}^{N} A_n$. Zeigen Sie, dass dann $(A, C_{\mathbb{Q}}(A))$ ein DEDEKIND'scher Schnitt ist.

A 2.2.44 Auf der Menge der DEDEKIND'schen Schnitte kann man durch

$$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad A_1 \subseteq A_2.$$

eine Ordnung definieren. Zeigen Sie, dass es sich um eine totale Ordnungsrelation handelt. (Zur Definition einer Ordnungsrelation, siehe Übung.)

. . . . (Weihnachtsaufgabe – ohne Lsg)

A 2.2.45 Er wischte sich den Schweiß von der Stirn, die rotglänzend unter der gleichfarbigen Mütze hervorleuchtete. Dann strich er sich den bis über den runden Bauch reichenden weißen Bart glatt. Dieses Jahr hatte er ganz sicher gehen wollen. Und dann das.

Er hatte bis heute nicht ganz die Demütigung verwunden, die er vor einem Jahr erlitten hatte. Die letzte Station seiner alljährlichen Tour war ihm schon seit einigen Jahren die unangenehmste. Er hatte eine Wohngemeinschaft zu beglücken, in der 11 gleichaltrige Kinder samt diverser Elternteile hausten. Und die Mitglieder dieser Gemeinschaft hatten Ihren Kindern einen Gleichheitssinn anerzogen, den fanatisch zu nennen schon fast eine Untertreibung w+re. So brachte er allen jedes Jahr identische Geschenke. Letztes Jahr gab es 11 niedliche Kuschelbären. Beim Auspacken stellte sich heraus, daß einem der Bären die Schirmmütze fehlte, die alle anderen stolz auf ihrem Haupt trugen. Und das Gezeter startete sofort. Er solle sich zum Pol scheren, Versager, der er sei. Und wenn das nochmal passiere, werden sie künftig auf seine Dienste verzichten können. Das verletzte ihn zutiefst, und so wollte er dieses Jahr ganz sicher gehen.

Vor ihm lagen 12 identische Pakete. Er hatte sie bei einem bekannten Internet-Powerseller erstanden, 12 identische, um ganz sicher zu gehen, falls bei der Post wieder einmal etwas verschwand. Vor ihm lag auch der Brief des Verkäufers. In dem stand, dass leider nur noch 11 identische Kuschelmäuse im Lager gewesen seien, in das zwölfte Paket habe er als Ersatz einen der Kuschelbären gelegt, die im letzten Jahr der Verkaufsschlager waren. Und alle Pakete gleich verpackt, wie gewünscht. Äußerlich überhaupt kein Unterschied feststellbar. Er wusste nur, dass das Gewicht des Pakets mit dem Bären ein wenig anders als das der anderen war, aber nicht, ob es mehr oder weniger wog. Und seine altgediente Balkenwaage, mit der man nur Gewichte vergleichen konnte, war kürzlich so zerbrechlich geworden, dass sie allerhöchstens noch drei Wägungen verkraften konnte.

Helfen Sie ihm !!!!

Zeigen Sie ihm, wie er mit drei Wägungen auf der Balkenwaage, wobei auf jeder Seite der Waage bei jeder Wägung nur einige der Pakete liegen dürfen, das Kuschelbärpaket herausfinden und sogar entscheiden kann, ob es leichter oder schwerer als die anderen Pakete ist.

Für jede korrekte und als Comic eingereichte Lösung gibt es Bonuspunkte!!!

genauer: Für eine Lösung, die in jedem Fall das abweichende Paket mit höchstens n Wägungen liefert, gibt es $7 - n$ Bonuspunkte. Für eine Lösung mit 3 Wägungen, bei der auch noch festgestellt werden kann, ob das abweichende Paket leichter oder schwerer ist, gibt es 5 Bonuspunkte. Überlegen Sie sich genau, ob Sie eine Lösung mit maximal 12 Wägungen tatsächlich einreichen wollen!

2.3 Vollständige Induktion

A 2.3.1 Seien die Mengen

$$\mathbb{N}_0 \;:=\; \big\{x \in \mathbb{R} \;\big|\; \forall A \subset \mathbb{R} : \big(A \text{ induktiv } \implies x \in A\big)\big\} \tag{2.4}$$

sowie $\mathbb{Z} := \{n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}_0 \vee -n \in \mathbb{N}_0\}$ definiert. Wegen $n \in \mathbb{Z} \implies n \in \mathbb{N}_0 \vee -n \in \mathbb{N}_0$ und $-n \in \mathbb{Z} \implies -n \in \mathbb{N}_0 \vee -(-n) \in \mathbb{N}_0$ haben wir also $n \in \mathbb{Z} \iff -n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}_0\colon\ (n = 0 \vee n - 1 \in \mathbb{N}_0)$.

(2) $\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall m \in \mathbb{N}_0\colon\ (m - n \in \mathbb{N}_0 \vee n - m \in \mathbb{N}_0)$.

(3) $\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall m \in \mathbb{N}_0\colon n + m \in \mathbb{N}_0$.

(4) $\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall m \in \mathbb{N}_0\colon n \cdot m \in \mathbb{N}_0$.

(5) $\forall m, n \in \mathbb{Z}\colon m + n \in \mathbb{Z} \wedge n \cdot m \in \mathbb{Z}$.

(6) $M := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\} \implies M = \mathbb{N}_0$.

(7) $\emptyset \neq K \subset \mathbb{N}_0 \implies \exists \min\{n \mid n \in K\}$.

Hinweis: Verwenden Sie die Menge $A = \big\{n \in \mathbb{N}_0 \;\big|\; \forall k \in \mathbb{N}_0 : (k \leq n \Longrightarrow k \in \mathbb{N}_0 \setminus K)\big\}$.

(8) $\forall k, n \in \mathbb{Z}\colon\ (k < n \Longrightarrow k \leq n - 1)$.

(9) Gilt $\emptyset \neq M \subset \mathbb{N}_0$ und ist M nach oben beschränkt, dann besitzt M ein größtes Element.

(10) Gilt $\emptyset \neq M \subset \mathbb{Z}$ und ist M nach oben (bzw. unten) beschränkt, dann besitzt M ein größtes (bzw. kleinstes) Element.

A 2.3.2 Zeigen Sie per Induktion: Enthält eine Menge M das Element $0 \in \mathbb{N}$ und mit jedem $n \in \mathbb{N}$ auch das Element $n + 1 \in \mathbb{N}$, dann gilt $\mathbb{N} \subset M$.

A 2.3.3 Zeigen Sie per Induktion, dass für gegebene $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ und $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ durch

$$a_n := f(a_{n-1}, \ldots, a_{n-k})$$

wirklich eine Folge $a\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ definiert ist.

.... (Rekursionsprinzip)

Satz R1.6 (Rekursionsprinzip):
Sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, $a \in X$ und $f\colon \mathbb{N}_0 \times X \to X$ eine beliebige Funktion. Dann existiert genau eine Funktion $\alpha\colon \mathbb{N}_0 \to X$ derart, dass

$$\alpha(0) = a \quad \wedge \quad \Big(\forall n \in \mathbb{N}\colon \alpha(n+1) = f(n, \alpha(n))\Big)\ . \tag{2.5}$$

Bemerkung: Der Satz bleibt gültig, wenn man, bei beliebigem $n_0 \in \mathbb{Z}$, '0' durch 'n_0' und '$\mathbb{N}_0$' durch '$\mathbb{Z}_{\geq n_0}$' ersetzt.

A 2.3.4 Sei $b \in \mathbb{R}$ beliebig. Geben Sie die Menge X sowie die Abbildung $f\colon \mathbb{N}_0 \times X \to X$ an, für das sich mit $a := 1$ die aus dem Rekursionsprinzip eindeutige Funktion $b^n := \alpha(n)$ ergibt.

....(Rechnen mit dem Summenzeichen)

A 2.3.5 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion mit dem Distributivgesetz für $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ und $x \in \mathbb{K}$ die Gültigkeit von $x \sum_{j=1}^{n} y_j = \sum_{j=1}^{n} x y_j$.

(b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion (in $m \in \mathbb{N}$) mit dem Distributivgesetz und Teil (a) für $y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m \in K$ die Gültigkeit von

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \ .$$

A 2.3.6 Berechnen Sie die Doppelsumme $\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} \frac{3^k}{2^j}$.

Tipp: Über welche Menge wird summiert?

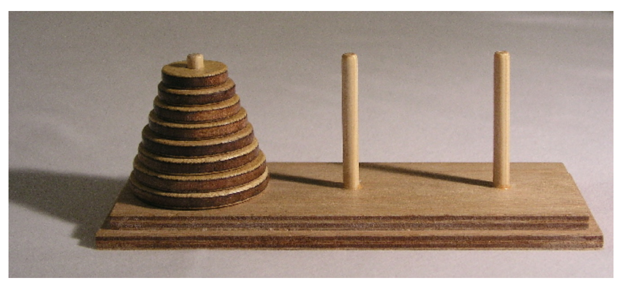
A 2.3.7 Beweisen Sie die (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \ \leq \ \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{für} \quad a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$$

....(Anwendungsaufgaben)

A 2.3.8

Das Spiel „Türme von Hanoi“ besteht aus drei Feldern und n Scheiben unterschiedlicher Größe. Zu Anfang des Spiels sind alle n Scheiben der Größe nach auf dem linken Feld aufgetürmt. Ziel des Spiels ist es, den Turm auf dem linken Feld ab- und auf dem rechten Feld aufzubauen, wobei jedoch folgende Regel eingehalten werden muss:



Es darf immer nur eine Scheibe von oben abgebaut und auf einem anderen Feld platziert werden, und dabei darf niemals eine größere auf einer kleineren Scheibe liegen.

(a) Überlegen Sie, wie die Fälle $n = 1, 2, 3, 4$ aussehen.
(Hinweis: Typisches Beispiel für rekursive Programmierung.)

(b) Zeigen Sie per Induktion, dass das Ziel des Spiels in $2^n - 1$ Zügen erreicht werden kann.

A 2.3.9 (a) Zu Beginn des Jahres 1 liege bei einer Bank das Kapital K_0 vor (im Fall $K_0 \geq 0$ ist es ein Guthaben, im Fall $K_0 \leq 0$ ein Kredit). Weiterhin wird am Ende eines jeden Jahres (man sagt *nachschüssig*) ein fester Geldbetrag E verrechnet (falls $E \geq 0$, wird in die Bank eingezahlt, ist $E \leq 0$, so wird von der Bank ausbezahlt).
Das Kapital wird mit dem jährlichen Zinssatz p verzinst. Geben Sie eine geschlossene Formel für das Kapital K_n am Ende des Jahres n an.

(b) Susi Sorglos nimmt bei der Gierbank einen Kredit über 15 000 Euro mit 13% Zinsen pro Jahr auf, um sich ein Auto zu kaufen. Sie zahlt den Kredit in jährlichen Raten von 2 200 Euro nachschüssig ab. Wie lange wird sie zahlen? Berechnen Sie die Summe ihrer Einzahlungen. (Beachten Sie, dass die letzte Rate u.U. kleiner als 2 200 Euro ist.)

(c) Susi Sorglos nimmt bei der Gierbank einen Kredit über 13.000 Euro mit 9% Zinsen pro Jahr auf, um sich ein Auto zu kaufen. Sie zahlt den Kredit in jährlichen Raten von 1.200 Euro nachschüssig ab. Wie lange wird sie zahlen? Berechnen Sie die Summe ihrer Einzahlungen. (Beachten Sie, dass die letzte Rate u.U. kleiner als 1.200 Euro ist.)

(d) Susi Sorglos nimmt bei der Gierbank einen Kredit über 10 000 Euro mit 10% Zinsen pro Jahr auf, um sich ein Auto zu kaufen. Sie zahlt den Kredit in jährlichen Raten von 1 500 Euro nachschüssig ab. Wie lange wird sie zahlen? Berechnen Sie die Summe ihrer Einzahlungen. Wieviel hätte sie am Ende gehabt, wenn sie die Raten jährlich nachschüssig auf ein Konto mit 5% Zinsen pro Jahr eingezahlt hätte? (Beachten Sie, dass die letzte Rate unter Umständen kleiner als 1 500 Euro sein kann.)

A 2.3.10 Ein Sparer zahlt zu Beginn jeden Jahres den Betrag x bei seiner Bank ein, dieser wird mit dem jährlichen Zinssatz p verzinst. Geben Sie eine geschlossene Formel dafür an, wieviel Geld er am Ende des n-ten Jahres angespart hat.

A 2.3.11 Wie viel Geld hat man nach 7 Jahren, wenn man jährlich 100 EUR auf ein Konto einzahlt und darauf $2,5\%$ Zinsen bekommt ?

A 2.3.12 Was ist an folgendem „Induktionsbeweis“ für die Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}_0 : 4n = 0$ falsch?

Induktionsanfang: $4 \cdot 0 = 0$.
Induktionsschluss: Gilt $4k = 0$ für alle $k < n$, so gilt auch $4n = 0$. Denn es gibt $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $n = k_1 + k_2$ und $k_1, k_2 < n$, also gilt $4n = 4k_1 + 4k_2 = 0$.

A 2.3.13 Wo steckt der Fehler in dieser Argumentation:

- **Behauptung**: Alle Autos haben dieselbe Farbe.
- **Beweis:** Wir zeigen per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ in einer Menge von n Autos alle die gleiche Farbe besitzen.
- Induktionsanfang ($n = 1$): Die Behauptung ist offenbar erfüllt.
- Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr.
- Induktionsbehauptung: Dann gilt die Behauptung auch für $n + 1$.
- Beweis: Wir betrachten eine Menge $M := \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ von $n + 1$ Autos. Nehmen wir Auto a_1 aus der Menge M heraus, so erhalten wir eine Menge $M_1 := \{a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ von n Autos, welche nach Induktionsannahme alle die gleiche Farbe besitzen. Nehmen wir stattdessen Auto a_{n+1} aus der Menge M heraus, so gelangen wir zur Menge $M_2 := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ von n Autos, welche ebenso nach Induktionsvoraussetzung alle dieselbe Farbe haben. Also müssen alle Autos dieselbe Farbe besitzen.

A 2.3.14 Wir beweisen mittels vollständiger Induktion, dass alle Frauen blond sind. Gibt es in diesem Beweis eventuell einen Fehler?

- Wir führen den Beweis, indem wir für jede Gruppe von n Frauen zeigen, dass alle Frauen in der Gruppe die gleiche Haarfarbe haben.
- Da es nur endlich viele Frauen gibt, müssen also alle die gleiche Haarfarbe haben.
- Da es mindestens eine blonde Frau gibt, müssen also alle blond sein.
- Die Behauptung über die einheitliche Haarfarbe einer Frauengruppe zeigen wir per Induktion über die Gruppengröße n.
  - Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich (Induktionsanfang).
  - Die Induktionsvoraussetzung ist nun, dass in jeder Gruppe von n Frauen alle die gleiche Haarfarbe haben.
  - Wir müssen dies für Gruppen von $n + 1$ Frauen zeigen (Induktionsbehauptung).
  - („Beweis:“)
    Nehmen wir also eine solche Gruppe von $n + 1$ Frauen her und bilden durch Herausnehmen der kleinsten Frau eine Gruppe von n Frauen. Diese haben nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Haarfarbe.
    Fügen wir nun die kleinste Frau wieder dazu und nehmen dafür die größte heraus, erhalten wir wieder eine Gruppe von n Frauen, die nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Haarfarbe haben. Die kleinste Frau hat also auch die gleiche Haarfarbe wie die anderen n. Damit ist der Induktionsbeweis vollständig.

A 2.3.15 (a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die folgende Summenformel gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \ \forall q \neq 1 \ : \quad \sum_{k=0}^{n} q^k \ = \ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad (\textbf{geometrische Summenformel}).$$

(b) Finden Sie einen alternativen Beweis, den auch jemand ohne Vorwissen verstehen kann.
oder:
Beweisen Sie die Summenformel aus (a) direkt.

A 2.3.16 Es seien a, b beliebige Körperelemente. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Gleichung:

$$a^{n+1} - b^{n+1} \ = \ (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k \ . \tag{2.6}$$

Alternative Formulierung:
Es seien a, b reelle Zahlen. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Gleichung: (2.6)

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie: $\quad \forall a, b \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ a^{n+1} - b^{n+1} \ = \ (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k.$

A 2.3.17 Finden Sie eine Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen und beweisen Sie sie anschließend mittels vollständiger Induktion.

Alternative Formulierung:
Beweisen Sie die folgende Gleichung[8] für alle $n \in \mathbb{N}$ per vollständiger Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

Alternative Formulierung:

Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad$ (**Gaußsche Summenformel**)

A 2.3.18 Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \qquad$ (b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 \ = \ \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Alternative (versteckte) Formulierung zu Teil (a):

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$ eine natürliche Zahl.

(b) Ermitteln Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (a) die Summe der n ersten Quadratzahlen für $n = 100$.

[8] Wir erkennen an dieser Stelle, dass Rechnungen mit natürlichen Zahlen (jeweils linke Seite der Gleichung) oftmals zu Rechnungen mit Brüchen (rechte Seite der Gleichung) führen. Dieses ist ein typisches Beispiel dafür, dass sich Probleme einer Schwierigkeitsebene in einer nächsthöheren Ebene in geschlossener Form darstellen lassen.

. . . . (Binomialkoeffizienten)

A 2.3.19 Zeigen Sie: Für $1 \leq k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, wobei

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!} & \text{für } k \in \{0, 1, \ldots, n\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Beziehung der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ kann mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & &
\end{array}$$

veranschaulicht werden. Jedes Element entsteht als Summe der beiden darüberstehenden.

A 2.3.20 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

(a) $\forall k \in \mathbb{N} \colon \forall n \in \mathbb{N} \colon \left(n \geq k \implies \binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} \right)$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2}$

A 2.3.21 Beweisen Sie die **Binomialformel**[9]:

Für beliebige Körperelemente x, y und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$

A 2.3.22 Beweisen Sie direkt mit dem Binomischen Lehrsatz, dass für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt

$$(1+x)^n \geq \frac{n^2}{4} x^2 \ .$$

. . . . (Schnittstellenaufgaben – Binomialkoeffizienten)

A 2.3.23 Zur Kennzeichnung von Kraftfahrzeugen wird in einer Region ein System aus Buchstaben und Ziffern verwendet, bei dem zwei Buchstaben vier Ziffern folgen. Wie viele Möglichkeiten der Kennzeichnung von Kraftfahrzeugen gibt es insgesamt?

A 2.3.24 Ein festes 8-stelliges Passwortsystem sei nach folgenden Regeln aufgebaut:

[9] Oftmals spricht man auch vom Binomischen Lehrsatz oder Satz von Binomi, einen Mathematiker dieses Namens gab es aber nie

(a) Jedes Passwort besteht genau aus 8 Symbolen.

(b) Die zu verwendenden Symbole sind die Ziffern 0 bis 9 und die Buchstaben a-z und A-Z. Kleine und große Buchstaben sind als *unterschiedliche Symbole* betrachtet.

(c) Es muss mindestens eine Stelle geben, die von einer Ziffer belegt wird.

Man interpretiere mit dieser Aufgabe

$$\sum_{j=1}^{8} \binom{8}{j} 10^j \cdot 52^{8-j} = 62^8 - 52^8 \ .$$

kombinatorisch.

.... (oL)

A 2.3.25 Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Aussage $\quad 4^{-n} \cdot \binom{2n}{n} = (-1)^n \cdot \binom{\frac{1}{2}}{n}$.

A 2.3.26 Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ jeweils die Zahl $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{2j}$. Lsg: 2^{n-1} ?

.... (Weitere Summenformeln)

A 2.3.27 Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Alternative Formulierung:

Sei

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \ .$$

Berechnen Sie die ersten Terme S_1, S_2, S_3, S_4 und stellen Sie eine Vermutung über den Wert von S_n auf. Beweisen Sie diese Vermutung durch vollständige Induktion.

(b) $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{2}{k^3 - k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n-1)}$ für alle natürliche Zahlen $n > 1$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$.

(d) $\forall x \neq \pm 1 \ : \left(\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2^k}}{1 - x^{2^{k+1}}} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1 - x^{2^n}} \right)$.

(e) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 1$ gilt $\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \frac{n! - 1}{n!}$

(f) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und beliebige Körperelemente x, y gilt $\sum_{k=0}^{n} (y+kx) = \frac{1}{2}(n+1)(2y+nx)$.

A 2.3.28 Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! \; = \; (n+1)! - 1$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) \; = \; \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k^2+1) \; = \; \frac{n^4+2n^3+3n^2+2n}{4}$

.... (Produktformeln)

A 2.3.29 Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \left(n \geq 2 \implies \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \; = \; \frac{n+1}{2n} \right)$$

A 2.3.30 Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Gleichung $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1$.

Alternative Formulierung:

Gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1$?

A 2.3.31 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \neq 1$ die Gültigkeit der Gleichung (siehe auch S. 61)

$$\prod_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1-x} \quad .$$

Alternative Formulierung:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt die Gleichung

$$\prod_{k=0}^{n} (1 + x^{(2^k)}) = \frac{1 - x^{\left(2^{n+1}\right)}}{1-x} \; .$$

.... (Eigenschaften von Zahlen)

A 2.3.32 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $a, b \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ gilt

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = 0 \iff \exists\, j \in \{1, \ldots, n\}\colon a_j = 0$$

A 2.3.33 Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

(i) $n^3 + 2n$ durch 3 teilbar (ii) $3^n - 3$ durch 6 teilbar (iii) $7^{2n} - 2^n$ durch 47 teilbar.

(iv) $n^3 + 5n$ durch 6 teilbar (v) $5^n - 1$ ist durch 4 teilbar.

(vi) $3^{2^n} - 1$ ist durch 2^{n+2} teilbar

(vii) $1 + 2^{2^n} + 2^{2^{n+1}}$ ist durch 7 teilbar

(viii) $n^2 - n$ ist durch 2 teilbar (ix) $n^5 - n$ ist durch 6 teilbar

(x) $(2n+1)^2 - 1$ ist durch 8 teilbar (xi) $n^p - n$ ist durch p teilbar, sofern p prim.

A 2.3.34 Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $5^n + 7$ durch 4 teilbar.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $10^n - 3^n$ durch 7 teilbar.

(c) $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ 5 \big| (7^n - 2^n)$. (Dabei bedeutet $k|n \ :\Longleftrightarrow \ \exists \ell \in \mathbb{N} \ : \ \ell \cdot k = n$).

A 2.3.35 Zeigen Sie, dass $5^{2n+1} + 3^{n+2}2^{n-1}$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ durch 19 teilbar ist.

A 2.3.36 Gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ durch die Zahl 133 teilbar ist ?

A 2.3.37 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon n \geq 0.$

A 2.3.38 Ab welcher Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $n! \geq 2^n$? Führen Sie einen Induktionsbeweis.

A 2.3.39 Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $n! \geq 3^n$?

A 2.3.40 Beweisen Sie per Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $2^n > n$.

A 2.3.41 Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n^2 + n$?

A 2.3.42 Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n - 5 > n^2$?

A 2.3.43 Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n^3$? Begründen Sie Ihre Aussage.

A 2.3.44 Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n!$

Leichte Abwandlung:

Für welche n gilt die Ungleichung $n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n$? . . . . (bisher oL)

A 2.3.45 Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der nach Größe geordneten Primzahlen, also $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, $p_6 = 13$, $p_7 = 17$, $p_8 = 19$, $p_9 = 23$, ...

Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $p_n \leq 2^{(2^{n-1})}$.

A 2.3.46 Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen

(a) $\dfrac{n^3 - 5n + 3}{2n^3 + 1} < \dfrac{1}{2}$ (b)

A 2.3.47 Zeigen Sie für alle $n \geq 2$ die Ungleichung $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$. . . . . (oL)

A 2.3.48 Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungskette $1 + \dfrac{n}{2} \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \leq n + \frac{1}{2}$.

A 2.3.49 (a) Zeigen Sie $(1-x)^n \leq 1 - nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2$ für beliebiges $x \in \,]0,1[$ und $n \in \mathbb{N}$.

(b) Gilt die Formel aus (a) auch für $x = 0,1$ bzw. für $x < 0$, $x > 1$?

A 2.3.50 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} .$$

A 2.3.51 Zeigen Sie, dass für $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$.

A 2.3.52 Zeigen Sie: Sofern für alle $a_1, \ldots, a_n$ die Bedingung $-1 \leq a_1, \ldots, a_n \leq 0$ erfüllt ist, gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\prod_{j=1}^{n}(1+a_j) \geq 1 + \sum_{j=1}^{n} a_j \ . \tag{2.7}$$

Bonusfrage: Gilt (2.7) auch für alle $a_1, \ldots, a_n$ mit $-1 \leq a_1, \ldots, a_n$?

A 2.3.53 Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

(a) Für alle reellen Zahlen $x \geq 0$ und alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt
$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n^2}{4}x^2$.

(b) Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ und beliebiges x mit $0 < x < 1$ die Ungleichungskette

$$1 - nx \ \leq \ (1-x)^n \ \leq \ \frac{1}{1+nx} \ .$$

A 2.3.54 Gegeben seien $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{N}$ und ein $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Implikation

$$\prod_{j=1}^{m}(1+a_j) \ > \ 2^n \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{m} a_j \ > \ n \ .$$

Tipp: Zeigen Sie dazu zunächst $\forall \ell \in \mathbb{N} \ : \ (1+\ell) \leq 2^\ell$ und beweisen Sie die Aussage indirekt.

A 2.3.55 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie (5 P)

(a) Falls f konvex ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und beliebige $x_1, \ldots, x_n \in D$ die Ungleichung

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \ \leq \ \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} \ . \tag{2.8}$$

Hinweise:

(i) Es ist f konvex $\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D\colon f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

(ii) Beweisen Sie (2.8) zunächst für $n = 2^k$ mit Hilfe von Induktion über $k \in \mathbb{N}$. Schließen Sie dann von der Aussage für n auf die Aussage für $n-1$. Warum ist dann damit wirklich gezeigt, dass (2.8) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt?

(b) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, beliebiges $k \in \mathbb{N}$ und beliebige positive reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ gilt die Ungleichung

$$\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^{2^k} \ \leq \ \frac{x_1^{2^k} + \ldots + x_n^{2^k}}{n} \ . \tag{2.9}$$

Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass die Funktion $f(x) = x^{2^k}$ $(x > 0)$ konvex ist.

.... (Mehrstufige Induktionen)

A 2.3.56 Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

(a) Ist $a > 0$ eine Zahl mit $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$, dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ auch $a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; F_{n+1} \;=\; \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$.

Hinweis: Hierbei werden mit F_n die durch die rekursive Bildungsvorschrift

$$F_0 \;:=\; 0 \;, \quad F_1 \;:=\; 1 \;, \quad F_{n+1} \;:=\; F_n + F_{n-1}$$

definierten **Fibonacci**-Zahlen bezeichnet. Somit ist eine zweistufige Induktion erforderlich.

.... (Schnittstellenaufgaben)

A 2.3.57 Begründen Sie anschaulich/graphisch die geometrische Summenformel.

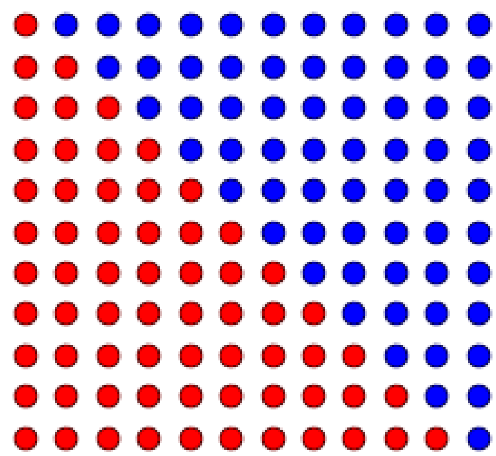
A 2.3.58 Finden Sie eine anschauliche Begründung für die Gaußsche Summenformel.

A 2.3.59 **(Beweise ohne Worte)**

Die Summe der n ersten natürlichen Zahlen ist $\frac{n(n+1)}{2}$, wie man dem Bild „entnehmen" kann. Desweiteren wird deutlich, warum man die Zahlen

$$\Delta_n := \frac{n(n+1)}{2}$$

auch **Dreieckszahlen** nennt.



(a) Können Sie einen analogen „Beweis" ohne Worte dafür finden, dass die Summe zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen eine Quadratzahl ist ?

(b) Können Sie einen analogen „Beweis" ohne Worte dafür finden, dass die Summe der n ersten ungeraden Zahlen genau n^2 ist ?

2.4 Das Archimedische Axiom

A 2.4.1 Zeigen Sie Satz 3.2: Für alle $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Alternative Formulierung:
Zeigen Sie für bel. $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die **Bernoulli-Ungleichung** $(1+x)^n \geq 1+nx$.

A 2.4.2 Sei $\mathbb{K}$ archimedisch angeordnet. Zeigen Sie: Satz 3.3(a): $b > 1 \implies \forall K \in \mathbb{K}\ \exists n \in \mathbb{N}\colon b^n > K$.

Alternative Formulierung:
Zeigen Sie: Satz 3 (§3): (a) $b > 1 \quad \Longrightarrow \quad \forall K \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\ :\ b^n > K$.

A 2.4.3 Gibt es einen angeordneten Körper, in dem das Archimedische Axiom nicht gilt ? Ja:

.... (Beispiel eines **nicht-Archimedisch** angeordneten Körpers)

Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper, der $\mathbb{Q}$ enthält. Wir betrachten Polynome $p(x)$ mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$. Das einfachste Polynom ist das **Nullpolynom** mit der Normaldarstellung $p(x) = 0$ (für alle $x \in \mathbb{K}$). Jedes andere Polynom $p(x)$ hat eine Normaldarstellung $p(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_n \neq 0$. Die Zahl n heißt **Grad** des Polynoms. Dem Nullpolynom wird der Grad $-\infty$ zugeordnet. Ein $a \in \mathbb{K}$, für das $p(a) = 0$ gilt, nennen wir **Nullstelle** des Polynoms $p(x)$.

A 2.4.4 Analog zur Definition des Körpers $\mathbb{Q}$ aus den ganzen Zahlen heraus sei $\mathbb{K}(x)$ definiert als die Menge von Äquivalenzklassen der als **formale** Polynomquotienten $\frac{p(x)}{q(x)}$ geschriebenen geordneten Paare $\big(p(x), q(x)\big)$ von Polynomen mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$ (wobei $q(x)$ nicht das Nullpolynom $n(x)$ ist) bezüglich der Äquivalenzrelation, die solche formalen Quotienten identifiziert, welche durch Kürzen bzw. Erweitern (mit Polynomen über $\mathbb{K}$) auseinander hervorgehen, d.h.

$$\mathbb{K}(x) \ := \ \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \ \middle|\ p(x), q(x) \text{ Polynome mit Koeffizienten aus } \mathbb{K} \ \wedge \ q(x) \neq n(x) \right\}. \tag{2.10}$$

Zeigen Sie, dass die repräsentantenweise definierten Operationen

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)} \ := \ \frac{p_1(x)q_2(x) + p_2(x)q_1(x)}{q_1(x)q_2(x)} \qquad \text{und} \qquad \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \cdot \frac{p_2(x)}{q_2(x)} \ := \ \frac{p_1(x)p_2(x)}{q_1(x)q_2(x)}$$

der Addition und Multiplikation in $\mathbb{K}(x)$ wohldefiniert sind und $\mathbb{K}(x)$ mit diesen ein Körper ist.

A 2.4.5 Zeigen Sie, dass der Körper $\mathbb{K}(x)$ aus (2.10) für einen angeordneten Körper $\mathbb{K}$ mit der repräsentantenweise für Elemente aus $\mathbb{K}(x)$ durch

$$0 \ \preceq \ \frac{p(x)}{q(x)} \ :\Longleftrightarrow \ 0 \leq \frac{a_n}{b_m}$$

definierten Relation $\preceq$, wobei $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $q(x) = \sum\limits_{l=0}^{m} b_l x^l$ die Normaldarstellungen von $p(x)$ und $q(x)$ seien, selbst ein angeordneter Körper ist.

A 2.4.6 Sei $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$ ein beliebiger angeordneter Körper und $\mathbb{K}(x)$ sowie $\preceq$ wie oben definiert.

(a) Zeigen Sie: Jedes Polynom vom Grad $n \geq 0$ über $\mathbb{K}$ hat **höchstens** n Nullstellen in $\mathbb{K}$.

(b) Zeigen Sie, dass das Archimedische Axiom in $(\mathbb{K}(x), \preceq)$ nicht erfüllt ist.[10]

A 2.4.7 Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper, der $\mathbb{Q}$ enthält. Wir betrachten Polynome $p(x)$ mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$. Das einfachste Polynom ist das **Nullpolynom** mit der Normaldarstellung $p(x) = 0$ (für alle $x \in \mathbb{K}$). Jedes andere Polynom $p(x)$ hat eine Normaldarstellung $p(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_n \neq 0$. Die Zahl n heißt **Grad** des Polynoms. Dem Nullpolynom wird der Grad $-\infty$ zugeordnet. Ein $a \in \mathbb{K}$, für welches $p(a) = 0$ gilt, nennen wir **Nullstelle** des Polynoms $p(x)$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: Das Polynom $x - a$ teilt das Polynom $q(x) = a^n - x^n$.

(b) Ist a Nullstelle eines Polynoms $p(x)$ vom Grad $n \geq 1$, so teilt $x - a$ das Polynom $p(x)$.

(c) Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ über $\mathbb{K}$ hat **höchstens** n Nullstellen in $\mathbb{K}$.

. . . . (oL)

A 2.4.8 Sei $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ -\dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{1}{n}$. Zeigen Sie $x = 0$.

A 2.4.9 Ein Beispiel für einen angeordneten Körper, welcher das Archimedische Axiom **nicht** erfüllt. Es sei K der Körper der rationalen Funktionen, d.h., der Brüche von Polynomen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Sei $f \in K$. Dann schreiben wir

$$f > 0 \;:\Longleftrightarrow\; \exists \varepsilon > 0\colon \forall x \in \,]0, \varepsilon[\,\colon f(x) > 0$$

und für beliebige $f, g \in K$ dann

$$f > g \;:\Longleftrightarrow\; f - g > 0$$

(a) Zeigen Sie das $(K, >)$ ein angeordneter Körper ist.

(b) Zeigen Sie, dass in $(K, >)$ das Archimedische Axiom nicht gilt.

[10] In natürlicher Weise ist $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}(x)$ (Polynome vom Grad 0 bzw. das Nullpolynom vom Grad $-\infty$), also insbesondere auch $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}(x)$.

2.5 Intervallschachtelungsprinzip

Definition R1.3:

- Eine $\mathbb{K}$**-Folge** ist eine beliebige Abbildung $a\colon \mathbb{N}_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}$. Für $n \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ schreiben wir üblicherweise a_n anstelle von $a(n)$ bzw. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\mathbb{K}}}$ für a.
- Als eine **Intervallschachtelung (bzgl.** $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K}^+)$**)** bezeichnen wir ein geordnetes Paar $((a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\mathbb{K}}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}_{\mathbb{K}}})$ von $\mathbb{K}$-Folgen mit folgenden Eigenschaften:

(IS1) $\forall n \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}\colon \Big(a_n \le b_n \ \wedge\ a_n \le a_{n+1} \ \wedge\ b_{n+1} \le b_n\Big)$

(IS2) $\forall \varepsilon \in \mathbb{K}^+ \ \exists n = n_\varepsilon \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}\colon b_n - a_n < \varepsilon.$

- Wir sagen, $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K}^+)$ **genügt dem Intervallschachtelungsprinzip**, wenn zu jeder Intervallschachtelung $((a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\mathbb{K}}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}_{\mathbb{K}}})$ ein $s \in \mathbb{K}$ existiert mit $\forall n \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}\colon a_n \le s \le b_n$.

Satz R1.9 [Eigenschaften des Körpers der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$**]:** Für die Menge

$$\mathbb{Q} \ = \ \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists p, q \in \mathbb{Z}\colon \left(q \neq 0 \wedge x = \frac{p}{q} := p \cdot q^{-1}\right)\right\} \tag{2.11}$$

gelten die Aussagen:

(Q1): $\forall x, y \in \mathbb{Q}\colon \Big(-x \in \mathbb{Q} \wedge x + y \in \mathbb{Q} \wedge x \cdot y \in \mathbb{Q} \wedge \big(x \neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} := x^{-1} \in \mathbb{Q}\big)\Big)$,
d.h., $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist als Teilkörper von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper.

(Q2): Mit $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}$ wird $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \mathbb{Q}^+)$ zu einem angeordneten Teilkörper von $(\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R}^+)$.

(Q3): $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \mathbb{Q}^+)$ ist archimdisch, wobei $\mathbb{N}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{N}_{\mathbb{R}} = \mathbb{N}_0$ gilt.

(Q4): Der archimedische Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \mathbb{Q}^+)$ genügt nicht dem Intervallschachtelungsprinzip.

Folgerung:

(a) Jeder Teilkörper $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F}$ wird mit $\mathbb{F}^+ := \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{F}$ zu einem archimedisch angeordneten Teilkörper $(\mathbb{F}, +, \cdot, \mathbb{F}^+)$ von $(\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R}^+)$, wobei $N_{\mathbb{F}} = \mathbb{N}_0$ gilt.

(b) Ein archimedisch angeordneter Teilkörper $(\mathbb{F}, +, \cdot, \mathbb{F}^+)$ von $(\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R}^+)$ genügt genau dann dem Intervallschachtelungsprinzip, wenn $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ gilt.

A 2.5.1 (a) Zeigen Sie: $\forall a, b \in \mathbb{R}\colon \big(a < b \Longrightarrow \exists x \in \mathbb{Q}\colon a < x < b\big)$

(b) Sei $s \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie:
Es gibt eine Intervallschachtelung $\Big((a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\Big)$ aus $\mathbb{Q}$ mit den Eigenschaften

(i) $\forall n \in \mathbb{N}_0\colon a_n \le s \le b_n$, (ii) $a_n \to s$, (iii) $b_n \to s$.

Hinweise: Verwenden Sie gegebenenfalls Satz 3.3 (b) (Forster 1) sowie den vorangegangenen Aufgabenteil.

(c) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \mathbb{Q}^+)$ dem Intervallschachtelungsprinzip nicht genügt (Eigenschaft **(Q4)**).
Zeigen Sie vorbereitend dazu:

(i) $\forall c, d, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}\colon \Big(\big(c \le x \le d \wedge c \le \tilde{x} \le d\big) \Longrightarrow |x - \tilde{x}| \le d - c\Big)$

(ii) Das rekursiv durch $(a_0, b_0) := (1, 2)$ sowie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right), & \text{falls } \left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)^2 \geq 2, \\ \left(\dfrac{a_n + b_n}{2}, b_n\right), & \text{falls } \left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)^2 < 2, \end{cases} \tag{2.12}$$

definierte Paar $((a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ von $\mathbb{Q}$-Folgen ist eine Intervallschachtelung in $\mathbb{Q}$.

(iii) Die Gleichung $x^2 = 2$ besitzt keine Lösung in $\mathbb{Q}^+$.

2.6 Grenzwerte von Folgen

. . . . (Schnittstellenaufgaben)

A 2.6.1 Überlegen Sie sich, warum die folgende in der Schule häufig verwendete Formulierung

> „Der Grenzwert einer Folge ist eine Zahl, der sich die einzelnen Folgenglieder beliebig dicht annähern, ohne sie jedoch zu erreichen."

den mathematisch präzise definierten Begriff der Konvergenz einer Folge **verkehrt !**

A 2.6.2 Überlegen Sie sich, wie Sie den Begriff der Konvergenz einer reellen Zahlenfolge in einer graphischen Darstellung veranschaulichen können.

A 2.6.3 Warum ist folgende Charakterisierung des Grenzwertes äquivalent zur Definition?

„Eine Folge reeller Zahlen **konvergiert gegen einen Grenzwert** a, wenn in jeder ε-Umgebung[11] $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthalten sind."

. . . . (Theoretische Aussagen, beweisbar mit der ε-Definition des Grenzwertes:)

A 2.6.4 Zeigen Sie, dass der Grenzwert einer Folge eindeutig ist.

A 2.6.5 Zeigen Sie für konvergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Rechenregeln

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) \;=\; \Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big) \pm \Big(\lim_{n\to\infty} b_n\Big) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \;=\; \Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big)\cdot\Big(\lim_{n\to\infty} b_n\Big)\;.$$

A 2.6.6 Zeigen Sie folgende Spezialfälle von Rechenregeln zu konvergenten Folgen:

(a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Zahlenfolgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$ für $n \to \infty$.
Dann konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = 3a_n - 5b_n$ gegen den Grenzwert $3a - 5b$.

(b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Zahlenfolgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$ für $n \to \infty$.
Dann konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = 5a_n - 6b_n$ gegen den Grenzwert $5a - 6b$.

A 2.6.7 Zeigen Sie **direkt mittels der ε-Definition des Grenzwertes:**

(a) Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann konvergiert die durch $c_n := |b_n|$ definierte Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $b > 0$.
Zeigen Sie, dass es ein $K \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $b_n > 0$ für alle $n \geq K$.

Verallgemeinerte Formulierung:

Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $c \neq 0$.
Zeigen Sie, dass es ein $K \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $c_n \neq 0$ für alle $n \geq K$.

(c) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann konvergiert auch $\min(a_n, b_n)$.
Bonusfrage: Gilt die Umkehrung auch ?

(d) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann konvergiert auch $\max(a_n, b_n)$.
Bonusfrage: Wogegen konvergiert $\max(a_n, b_n)$? Gilt die Umkehrung auch ?

. . . . (Folge der arithmetischen Mittel einer Folge)

[11] d.h., in jeder (eindimensionalen) offenen Kreisscheibe mit Mittelpunkt a und Radius $\varepsilon > 0$

A 2.6.8 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit Grenzwert a.

(a) Zeigen Sie, dass die durch $b_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ gegebene Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

(b) Kann man aus der Konvergenz von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schließen ?

.... (Umordnung von Folgen/Teilfolgen)

A 2.6.9 (a) Es sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen, die gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Desweiteren sei $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine injektive Abbildung. Zeigen Sie, dass dann die durch $b_n := a_{\varphi(n)}$ definierte Folge (b_n) ebenfalls gegen a konvergiert.

(b) Geben Sie zwei Beispiele an, in denen $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sogar eine Bijektion ist.

A 2.6.10 Beweisen Sie, dass jede Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ reeller Zahlen eine monotone (wachsende oder fallende) Teilfolge besitzt.

.... (Anwendung der ε-Definition)

A 2.6.11 Weisen Sie mit Hilfe der Definition des Grenzwertes nach, dass Folgendes gilt:

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty} 2^5 = 32, \quad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2} = 0, \quad \text{(iii)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n-14}{n+1} = 2, \quad \text{(iv)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{5n^2-2} = \frac{1}{5}.$$

A 2.6.12 (a) Bestimmen Sie für die durch $a_n := \dfrac{5n^2}{3n^3-25}$ definierte und gegen Null konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$, mit dem $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt. Geben Sie insbesondere ein $N\left(\frac{5}{82}\right)$ an.

(b) Zeigen Sie analog zu Aufgabenteil (a) anhand der ε-Definition des Grenzwertes

$$\text{(i)}\ a_n := \frac{4n^2+12n}{3n^5-6n^4+4n^3} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a := 0 \qquad \text{(ii)}\ b_n := \frac{7n+9n^2}{13n^2+5} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b := \frac{9}{13}$$

A 2.6.13 Bestimmen Sie für die gegen Null konvergente Folge $a_n := \dfrac{n^2}{2n^3-23}$ zu $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$, mit dem $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt.

A 2.6.14 Beweisen Sie, dass die durch $a_n := \dfrac{1}{n^2+1}$ gegebene Folge gegen Null konvergiert, indem Sie zu $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ angeben, mit dem $\forall n \geq N(\varepsilon) : |a_n| \leq \varepsilon$ gilt.

A 2.6.15 Beweisen Sie für die nachstehend definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen die Konvergenz gegen den vorgegebenen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ angeben, mit dem $\forall n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| \leq \varepsilon$ gilt.

$$\text{(a)}\ a_n := \frac{n-2}{3n+10} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a := \frac{1}{3} \qquad \text{(b)}\ a_n := \frac{n^2}{n+1} - n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a := -1$$

A 2.6.16 Beweisen Sie für die nachstehend definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen die Konvergenz gegen den vorgegebenen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ angeben, mit dem $\forall n \geq N(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$ gilt.

(a) $a_n := \dfrac{1}{n^2-3}$ konvergiert gegen $a := 0$

(b) $a_n := \dfrac{2n-7}{5n-1}$ konvergiert gegen $a := \dfrac{2}{5}$

(c) $a_n := \dfrac{n^2}{2n-1} - \dfrac{n}{2}$ konvergiert gegen $a := \dfrac{1}{4}$

. . . . (ε-Definition in Kombination)

A 2.6.17 Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $a_n := \dfrac{n-2}{3n+11}$ und beweisen Sie erneut die Konvergenz, indem Sie wiederum die Definition des Grenzwertes anwenden.

A 2.6.18 Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch $n \mapsto a_n := \dfrac{3n-1}{5n+7}$ definiert.

(a) Beweisen Sie die Konvergenz der Folge (a_n) gegen $a = \frac{3}{5}$, indem Sie direkt die **Definition des Grenzwertes** verwenden, d.h., finden Sie zu jedem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N(\varepsilon)$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt.

Alternative Formulierung (falls Rechenregeln schon bekannt):

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (a_n) und beweisen Sie die Konvergenz, indem Sie direkt die Definition des Grenzwertes verwenden, d.h., finden Sie $a \in \mathbb{R}$ und zu jedem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N(\varepsilon)$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt.

(b) Bestimmen Sie jeweils (mindestens) ein $N(\varepsilon)$ für alle $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-6}\}$.

(c) Bestimmen Sie mittels Rechenregeln den Grenzwert der Folge $b_n = \left(2 + \dfrac{1}{n}\right)^7 \dfrac{3n-1}{5n+7}$.

A 2.6.19 (a) Beweisen Sie die Konvergenz der Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{5n-1}{7n+9}$, indem Sie direkt die Definition des Grenzwertes verwenden, d.h. finden Sie ein $a \in \mathbb{R}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, mit dem für alle $n \geq N(\varepsilon)$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt.

(b) Bestimmen Sie jeweils ein $N(\varepsilon)$ für $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-6}\}$.

(c) Bestimmen Sie mittels Rechenregeln den Grenzwert der Folge $b_n = \left(3 - \dfrac{2}{n}\right)^4 \dfrac{5n-1}{7n+9}$.

A 2.6.20 Zeigen Sie, dass die Folge $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^3}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

A 2.6.21 Durch $a_n := \left(3 + \dfrac{1}{n}\right)^4$ $(n \in \mathbb{N})$ sei die reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert.

(a) Berechnen Sie den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mittels Rechenregeln für konvergente Folgen.

(b) Zeigen Sie anschließend erneut die Konvergenz der Folge, indem Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ derart bestimmen, so dass für alle $n > N(\varepsilon)$ die Abschätzung $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt.

A 2.6.22 Zeigen Sie **direkt mittels der ε-Definition des Grenzwertes:**

(i) Die Folge $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen 1. (ii) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

(iii) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht konvergent. (iv) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^4 - n^2 + 1} = 0$.

A 2.6.23 Zeigen Sie **direkt mittels der ε-Definition des Grenzwertes:**

Die durch $a_1 := 2$ und $a_{n+1} := \frac{3}{5}a_n + 2$ rekursiv definierte Folge (a_n) konvergiert gegen $a = 5$.

Tipp: Zeigen Sie zunächst $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n - 5| = 5\left(\frac{3}{5}\right)^n$

. . . . (Anwendung der Rechenregeln für konvergente Folgen)

A 2.6.24 Bestimmen Sie mittels Rechenregeln für konvergente Folgen die Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3 - 5n + 1}{4n^3 - 2n^2 + 2}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 6n + 1}{n^2 - 6n - 1}$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2 + 1}{2n + 3} - \dfrac{n^3 + 1}{2n^2 - 1}\right)$

A 2.6.25 Untersuchen Sie die nachstehenden reellen Zahlenfolgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte:

(a) $c_n := \dfrac{3^n + (-3)^n}{4^n}$; (b) $d_n := \dfrac{3^n + (-3)^n}{2^n}$;

A 2.6.26 Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten der Folgen

(a) $a_n := \dfrac{n^2}{2n^2 - 3n + 3}$, (b) $b_n := \dfrac{n - 1}{n^2 + 1}$, (c) $c_n := \dfrac{(-1)^n}{2n^2 + 5}$ (d) $d_n := \dfrac{n^2 + 3n - 2}{4n^2 - n + 5}$

(b) $e_n := \dfrac{n^2 + 2}{n^2 + 2n + 2}$ (f) $f_n := \dfrac{n^2 + n + 1}{n^3 + n^2 + n + 1}$

A 2.6.30 Berechnen Sie den Grenzwert der Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} .$$

A 2.6.31 Bestimmen Sie mittels Rechenregeln für konvergente Folgen die Grenzwerte von

$$a_n := \frac{3n^2 - n - 1}{4n^3 - 5n^2} , \quad b_n := \frac{n}{2} - \frac{n^2}{2n + 3} \quad \text{und} \quad c_n := \frac{n^2 + 1}{n + 2} - n .$$

. . . . (Sandwich-Lemma und Anwendungen)

A 2.6.32 (a) Beweisen Sie das sogenannte **„Sandwich-Lemma“**: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ und $c_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$. Desweiteren existiere zu einer Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \geq K$. Dann ist auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$.

(b) Bestimmen Sie mittels der in der Vorlesung bewiesenen „Rechenregeln“ sowie (a) die Grenzwerte

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n}{n!}$ **Tipp**: Wieviele der n Faktoren sind kleiner als 1?

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 5^n}{2^n - 5^n}$ (iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7^n}{n!}$ **Tipp**: Wieviele der n Faktoren sind kleiner als 1?

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ **Tipp**: Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz für $(1 + 1)^n$.

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ **Tipp**: Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz für $(1+1)^n$.

(c) Bestimmen Sie mittels Rechenregeln für konvergente Folgen und ggf. (a) die Grenzwerte von

(i) $a_n = \dfrac{n}{(-2)^n}$ (ii) $b_n = \dfrac{n^2+1}{n-2} - \dfrac{n^3}{(n+1)(n-3)}$ (iii) $c_n = \dfrac{n!}{n^n}$

A 2.6.33 Konvergieren die nachstehenden Folgen ? Falls ja, wogegen ?

(i) $x_n := \dfrac{(-1)^n n}{2n^2+5}$ (ii) $y_n := n^2\left(\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^5 - \left(1+\dfrac{5}{n}\right)^3\right)$ (iii) $z_n := \dfrac{2n^3}{2n^2+3} + \dfrac{1-5n^2}{5n+1}$

A 2.6.34 Zeigen Sie, dass $a_n \geq a_{n+1} \geq a_{n+2} > 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+2}}{a_n} = 1$ die Konvergenz $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ impliziert.

Kürzer:

Zeigen Sie: Aus $a_n \geq a_{n+1} \geq a_{n+2} > 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+2}}{a_n} = 1$ folgt die Konvergenz $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

.... (Kombination mit Induktion)

A 2.6.35 Zeigen Sie per Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ die Gleichung

$$\prod_{k=0}^{n}(1+x^{(2^k)}) = \frac{1-x^{\left(2^{n+1}\right)}}{1-x} \ .$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge $a_n := \prod\limits_{k=0}^{n}(1+x^{(2^k)})$?

A 2.6.36 Zeigen Sie **direkt mit Hilfe der Definition bestimmter Divergenz**:

(a) $\left(a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \ \wedge \ b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\right) \implies a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$

(b) $\left(a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \ \wedge \ b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty\right) \implies a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.$

(c) $\left(a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \ \wedge \ b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\right) \implies a_n b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$

(d) $\left(a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \ \wedge \ b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty\right) \implies a_n b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$

Alternative Formulierungen:

Zeigen Sie **direkt mit Hilfe der Definition bestimmter Divergenz**:

(a) Für $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ und $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ gilt $a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

(b) Für $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ gilt $a_n b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

(c) Für $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ und $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ gilt $a_n b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

A 2.6.37 Zeigen Sie:
Die durch $a_n := n^2 - n$ für $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen ∞.

A 2.6.38 Zeigen Sie, dass die durch $a_n := n^2 - 3n$ für $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge (a_n) bestimmt divergent gegen ∞ ist, indem Sie zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $N(K)$ bestimmen, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \ (n \geq N(K) \Longrightarrow a_n > K) \ .$$

A 2.6.39 Zeigen Sie, dass die durch $a_n := n^3 - 3n^2 + 2n$ für $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge (a_n) bestimmt divergent gegen ∞ ist, indem Sie zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $N(K)$ bestimmen, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \ (n \geq N(K) \Longrightarrow a_n > K) \ .$$

A 2.6.40 Zeigen Sie, dass die durch $a_n := n^5 - 8n^2 + 5n$ für $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge (a_n) bestimmt divergent gegen ∞ ist, indem Sie zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $N(K)$ bestimmen, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \ (n \geq N(K) \Longrightarrow a_n > K) \ .$$

A 2.6.41 Zeigen Sie: Falls (a_n) den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ besitzt und (b_n) bestimmt divergent gegen ∞ ist, dann ist auch die Folge $(a_n b_n)$ bestimmt divergent gegen ∞.

A 2.6.42 Geben Sie ein Beispiel für eine unbeschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so dass $a_n > 0$ für alle n gilt, die jedoch nicht bestimmt divergent ist.

A 2.6.43 Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten der Folgen

(a) $c_n := \dfrac{4n^4 - 1}{8n - 1}$.

(b) $d_n := \left(\dfrac{6^n}{4^n + 1} - \dfrac{3^{n-1}}{2^n - 1}\right)$

A 2.6.44 Was besagt das Archimedische Axiom im Hinblick auf das Konvergenzverhalten der Folge $a_n := n$?

A 2.6.45 Welche mathematischen Aussagen werden durch die folgenden, **bitte zu vermeidenden**, „Ausdrücke“ symbolisiert?

(a) $\infty + \infty = \infty$, (c) $a \cdot \infty = \infty$, falls $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$, (e) $\infty + a = \infty$ für $a \in \mathbb{R}$,

(b) $\infty \cdot \infty = \infty$, (d) $a \cdot \infty = -\infty$, falls $a \in \mathbb{R}$ mit $a < 0$, (f) $\dfrac{a}{\infty} = 0$, falls $a \in \mathbb{R}$.

A 2.6.46 Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen mit $a_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ und $b_n \overset{n\to\infty}{\to} \infty$, dann existiert keine allgemeine Aussage über das Konvergenzverhalten von $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Geben Sie jeweils ein Beispiel an mit $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ und

(a) $a_nb_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$; (d) $a_nb_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c, \quad c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ beliebig;

(b) $a_nb_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$; (e) $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbestimmt divergent, jedoch beschränkt;

(c) $a_nb_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$; (f) $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbestimmt divergent und unbeschränkt.

A 2.6.47 Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen mit $a_n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty$ und $b_n \overset{n\to\infty}{\to} -\infty$, dann existiert keine allgemeine Aussage über das Konvergenzverhalten von $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Geben Sie je ein Beispiel an mit $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,\ b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ und

(a) $a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty$; (d) $a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\to} c, \quad c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ beliebig;

(b) $a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\to} -\infty$; (e) $a_n + b_n$ unbestimmt divergent, jedoch beschränkt;

(c) $a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$; (f) $a_n + b_n$ unbestimmt divergent und unbeschränkt.

A 2.6.48 Welche weiteren unbestimmten Ausdrücke gibt es noch ?

A 2.6.49 Geben Sie eine Formel an, mit der sich die Folgenglieder der Folge

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, \ldots$$

explizit berechnen lassen.

2.7 Das Vollständigkeitsaxiom und die reellen Zahlen

A 2.7.1 Zeigen Sie, dass jede konvergente Folge auch eine Cauchy-Folge ist.

A 2.7.2 Beweisen Sie, dass jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge reeller Zahlen eine Cauchy-Folge ist.

.... (b-adische Brüche)

A 2.7.3 Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$ und $(a_n)_{n \geq -n_0}$ eine Folge mit der Eigenschaft

$$\forall n \in \mathbb{Z} \colon \Big(n \geq -n_0 \Longrightarrow (a_n \in \mathbb{N}_0 \wedge a_n < b) \Big) \,. \tag{2.13}$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=-n_0}^{\infty} a_n b^{-n}$ konvergiert mit einem Grenzwert $S \in [0, b^{n_0+1}]$.

A 2.7.4 Bestimmen Sie den Grenzwert von $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n 11^{-n}$ für $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} \colon (a_{2n-1} = 7 \wedge a_{2n} = 3)$.

Bonus:

Geben Sie die Ziffernfolgen $\big(a_n\big)_{n \geq -n_0}$ zu den nachstehenden Zahlen für die Basen $b_1 = 10$ (Dezimalbrüche), $b_2 = 2$ (dyadische Brüche) und $b_3 = 60$ (von den Babyloniern verwendete Sexagesimalbrüche) explizit an: (i) 274679 (ii) 735.25 (iii) $\dfrac{1001}{64}$.

Alternative Formulierung:

Geben Sie $\big(a_{-n}\big)_{n=-k}^{\infty}$ zu den nachstehenden Zahlen für die Basen $b_1 = 10$ (Dezimalbrüche), $b_2 = 2$ (dyadische Brüche) und $b_3 = 60$ (von den Babyloniern verwendete Sexagesimalbrüche) explizit an:

(a) 274679 (b) 735.25 (c) $\dfrac{1001}{64}$.

A 2.7.5 Begründen Sie, warum die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}$ für jede Wahl von $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ gegen eine Zahl $a \in [0, 1]$ konvergiert.

A 2.7.6 (a) Bestimmen Sie $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ mit $\displaystyle S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k 8^{-k}$ und $a_k := \begin{cases} 5\,, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ 3\,, & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$

(b) Begründen Sie, warum die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k 8^{-k}$ für jede beliebige Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_k \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ gegen ein $a \in [0, 1]$ konvergiert.

Alternative Formulierung:

Begründen Sie, warum die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k 8^{-k}$ für jede Wahl von $a_k \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ gegen eine Zahl $a \in [0, 1]$ konvergiert.

Bestimmen Sie speziell den Grenzwert, falls $a_k := \begin{cases} 5\,, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ 3\,, & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$

A 2.7.7 Zeigen Sie, dass die Folge

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{7^k} \tag{2.14}$$

für beliebige $a_k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ eine Cauchy-Folge ist, indem Sie zu $\varepsilon > 0$ angeben, wie man ein $N(\varepsilon)$ ermittelt, mit dem $|S_n - S_m| \leq \varepsilon$ bei $n, m \geq N(\varepsilon)$ gilt.

A 2.7.8 (a) Gegeben sei eine beliebige Abbildung $a\colon \mathbb{N} \to \{0,1,2,3,4\}$. Begründen Sie, warum die durch $b_n := \sum_{k=1}^{n} a(k) \cdot 5^{-k}$ definierte Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Zahl $b \in [0,1]$ konvergiert.

(b) Bestimmen Sie diesen Grenzwert b speziell im Fall $a(k) := \begin{cases} 1\ , & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ 3\ , & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$

Leicht abgewandelte Variante:

(a) Beweisen Sie, dass für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Ziffern $a_n \in \{0,1,2,3,4\}$ die Folge (S_N) der Partialsummen $S_N := \sum_{n=1}^{N} a_n 5^{-n}$ gegen eine reelle Zahl $a \in [0,1]$ konvergiert.

(b) Bestimmen sie $\lim\limits_{N\to\infty} S_N$ zur Ziffernfolge $a_{2n-1} := 3$ und $a_{2n} := 2$.

(c) Welchen Grenzwert besitzt $\left(\sum_{n=1}^{N} a_n 5^{-n}\right)_N$ zur Ziffernfolge $a_{2n-1} := 0$ und $a_{2n} := 4$?

A 2.7.9 Beweisen Sie, dass für jede Folge von Ziffern $x_n \in \{0,1,2\}$ die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n 3^{-n}$ gegen eine reelle Zahl $x \in [0,1]$ konvergiert.

Bestimmen sie den Grenzwert x der Reihe, die zur Folge $x_{2n-1} := 2$ und $x_{2n} := 0$ gehört.

A 2.7.10 Ermitteln Sie die triadische Entwicklung von $\frac{1}{2}$.

.... (Schnittstellenaufgaben)

A 2.7.11 Überlegen Sie sich, wie das Hexadezimalsystem, des Dezimalsystem und das duale Zahlensystem in das Konzept der b-adischen Brüche passt.

A 2.7.12 Finden Sie ein Beispiel für eine reelle Zahl und zwei unterschiedliche Zahlen

$$b_1, b_2 \in \{2, 3, \ldots, 16\},$$

für die es eine abbrechende b_1-adische Entwicklung und eine nicht abbrechende b_2-adische Entwicklung gibt.

A 2.7.13 Ermitteln Sie die Dualzahl- und die Hexadezimalzahldarstellung der folgenden (bezüglich der Basis 10 dargestellten) natürlichen Zahlen 17, 127, 4096.

Anmerkung: Die Ziffernmenge im Hexadezimalsystem ist $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$.

A 2.7.14 Finden Sie ein Beispiel für eine reelle Zahl, deren b-adische Entwicklung nicht eindeutig ist. Kann diese Zahl irrational sein?

A 2.7.15 Begründen Sie, warum eine periodische Dezimalzahl rational sein muss.

2.8 Rekursiv definierte Folgen und Wurzeln

A 2.8.1 Zeigen Sie per Induktion, dass für gegebenes $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a_0 \in \mathbb{R}$ durch $a_n := f(a_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$ wirklich eine Folge $a\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ definiert ist. Solch eine Folge nennt man rekursiv definiert.

A 2.8.2 Die Abbildung $c\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei durch

$$c(n) := \begin{cases} 3n+1, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

definiert. Die Entscheidung über die Richtigkeit der Vermutung, dass für jede beliebige Wahl von $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die rekursiv definierte Folge

$$a_1 := n, \quad a_{k+1} := c(a_k)$$

ab einer bestimmten Stelle in den Zyklus $1, 4, 2, 1, 4, 2, \ldots$ einmündet, wird Collatz-Problem oder $3x+1$-Problem genannt (ist z.B. $n = 1$, erhalten wir direkt die Folge $(1, 4, 2, 1, 4, 2, \ldots)$) und gehört bislang zu den ungelösten Problemen der Mathematik.

(a) Prüfen Sie die Vermutung für $n = 9$ und $n = 17$.

(b) Prüfen Sie die Vermutung für $n = 39$ und $n = 113$.

A 2.8.3 Sei (a_n) die durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \dfrac{1}{2}a_n + 1$ rekursiv definierte Folge.

(a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $|a_n - 2| = \frac{2}{2^n}$.

(b) Zeigen Sie nun, dass (a_n) gegen $a = 2$ konvergiert, indem Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ bestimmen, so dass $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ (n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$ gilt.

Alternative Formulierung:
Bestimmen Sie den Grenzwert a der durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \dfrac{1}{2}a_n + 1$ rekursiv definierten Folge. Zeigen Sie, dass (a_n) tatsächlich gegen a konvergiert.
Hinweis: Welcher Fixpunktgleichung muss der Grenzwert genügen?

....(Anwendung des Satzes von Bolzano-Weierstraß)

A 2.8.4 Zeigen Sie mittels Folgerung des Satzes von Bolzano-Weierstraß, dass die durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \dfrac{1}{2}a_n + 1$ rekursiv definierte Folge konvergiert.

A 2.8.5 Bestimmen Sie den Grenzwert der rekursiv definierten Folge $b_1 := 1$, $b_{n+1} := \dfrac{1}{8}(b_n + 1)$.

Hinweis: Verwenden Sie die Konsequenz aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß.

A 2.8.6 Beweisen Sie, dass die durch $a_{n+1} := a_n(2 - a_n)$ für jeden Startwert $0 < a_0 < 2$ rekursiv definierte Folge konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

A 2.8.7 Sei $a > 0$. Beweisen Sie, dass für jeden Startwert $0 < x_0 < \frac{1}{a}$ die durch

$$x_{n+1} := x_n(2 - ax_n)$$

rekursiv definierte Folge x_n konvergiert.

Bonusfrage: Hängt der Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ vom Startwert x_0 ab? (+1 ZP)

Alternative Formulierung:
Sei $a > 0$. Beweisen Sie, dass für jeden Startwert $0 < x_0 < \frac{1}{a}$ die durch

$$x_{n+1} := x_n(2 - ax_n)$$

rekursiv definierte Folge x_n gegen $\dfrac{1}{a}$ konvergiert.

Alternative Formulierung:

Es sei $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Weiterhin sei $0 < a_1 < \dfrac{1}{b}$ und $a_{n+1} = 2a_n - ba_n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass a_n konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{b}$.

A 2.8.8 Zeigen Sie die Konvergenz der Folgen, welche für alle $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definiert sind durch

(a) $a_{n+1} = a_n - a_n^2$ zu beliebigem Startwert $0 \leq a_1 \leq 1$,

(b) $b_{n+1} = \dfrac{b_n^2 + 1}{2b_n}$ zu beliebigem Startwert $1 < b_1$.

(c) $c_{n+1} := \dfrac{1}{4}(c_n + 1)$ zum Startwert $c_1 := 1$.

(d) $d_{n+1} := \dfrac{2d_n}{1 + d_n}$ zum Startwert $d_1 := 2$.

Alternative Formulierung inklusive Anleitung:

Die Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv durch $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{1 + a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

(i) Weisen Sie nach, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $1 \leq a_n \leq 2$ gilt.
(ii) Zeigen Sie, dass die Folge monoton ist.
(iii) Begründen Sie nun, warum die Folge konvergieren muss.
(iv) Gegen welchen Wert konvergiert die Folge ? (Begründung)

Bonusfrage: Wie lautet jeweils der Grenzwert der Folge (mit Begründung)?

A 2.8.9 Konvergiert die durch $a_1 := 1$, $a_{n+1} := \dfrac{1}{4}\left(a_n + \dfrac{3}{4}\right)$, rekursiv gegebene Folge ?

A 2.8.10 Zeigen Sie, dass die rekursiv durch $a_0 := 2$ und $a_{n+1} := 2 - \dfrac{1}{a_n}$ definierte Folge a_n konvergiert.

A 2.8.11 Zeigen Sie, dass die rekursiv durch die Vorschrift $a_1 := 0$ und $a_{n+1} := 1 - \dfrac{1}{2 + a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge (a_n) konvergiert.

. . . . (Erweiterter Konvergenzbegriff)

A 2.8.12 Sei $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ und $\leq_{\bar{\mathbb{R}}}$ wie in der Vorlesung definiert. Zeigen Sie: (1+3 P)

(a) Es ist $\leq_{\bar{\mathbb{R}}}$ eine totale Ordnung auf $\bar{\mathbb{R}}$.

(b) $a \in \bar{\mathbb{R}} \quad \wedge \quad x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ in $\bar{\mathbb{R}} \quad \wedge \quad (x_{n_k})$ Teilfolge von $(x_n) \quad \Longrightarrow \quad x_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$ in $\bar{\mathbb{R}}$.

A 2.8.13 Sei (a_n) eine reelle Folge. Beweisen Sie:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert genau dann, wenn die Folge (a_n) **genau** einen Häufungspunkt $h \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ besitzt. Weiterhin gilt dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = h$.

Hinweise/Wiederholung: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge und $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge.

- Wir sagen „$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert“, wenn (a_n) konvergiert oder bestimmt divergiert. In allen anderen Fällen sagen wir „$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht“ oder „(a_n) ist unbestimmt divergent“.
- **Satz:** Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, so auch $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$, und es gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
- **Satz:** Jeder Häufungspunkt von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist auch Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- **Folgerung** aus Bolzano-Weierstrass und der Zusatzmaterial
  Jede reelle Zahlenfolge besitzt einen Häufungspunkt in $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

. . . . (Definition der k-ten Wurzeln)

A 2.8.14 Sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass die zu beliebigem $x_0 > 0$ durch $x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ rekursiv definierte Folge gegen die (d.h., **eindeutige**!) positive Lösung von $x^2 = a$ konvergiert.

Alternative Formulierung – Anleitung am Beispiel:

Seien $x > 0$, $a_1 = 1$ und die weiteren Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} \;=\; \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) .$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 2$ die Ungleichung $a_n > \sqrt{x}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(d) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

A 2.8.15 Sei $a > 0$ eine reelle und $k \geq 2$ eine natürliche Zahl. Beweisen Sie, dass für jeden Startwert $x_0 > 0$ die rekursiv durch

$$x_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right)$$

definierte Folge gegen die (d.h. eindeutige) positive Lösung der Gleichung $x^k = a$ konvergiert. Diese bezeichnen wir mit $\sqrt[k]{a}$ und nennen sie die (positive) k-te Wurzel von a.

. . . . (Eigenschaften der Wurzeln)

A 2.8.16 Für natürliche Zahlen a, b ist $\sqrt[b]{a}$ entweder eine natürliche Zahl oder irrational.

A 2.8.17 Zeigen Sie, dass die k-te Wurzel streng monoton wachsend ist.

....(Induktionen mit Wurzeln)

A 2.8.18 Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungskette $\frac{1}{n+1} \leq \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

A 2.8.19 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die Ungleichung $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$

A 2.8.20 Beweisen Sie für alle natürliche Zahlen $n \geq 2$ die Ungleichung $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$.

....(Konvergenz von Folgen mit Wurzeln)

A 2.8.21 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge positiver reeller Zahlen mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ ($a \geq 0$). Zeigen Sie, dass dann die durch $b_n := \sqrt{a_n}$ gegebene Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $b := \sqrt{a}$ konvergiert.

Verallgemeinerte Aufgabenstellung für die k-te Wurzel

Sei $k \geq 2$ eine beliebige natürliche Zahl und a_n eine konvergente Folge nicht-negativer reeller Zahlen mit Grenzwert $a \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann die durch $b_n := \sqrt[k]{a_n}$ gegebene Folge gegen den Grenzwert $b := \sqrt[k]{a}$ konvergiert.

A 2.8.22 Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^4+n^2}+\sqrt{n}}{n\sqrt[3]{n}+n+1}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^4+n^3}+n+1}{n^2+1}$.

................(Geschicktes Erweitern und/oder Verwendung der 3. Binomischen Formel)

A 2.8.23 Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

(a) $a_n := 2\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

Leichte Abwandlung: Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$?

(b) $b_n := \sqrt{(c+n)(d+n)} - n$ für $c, d > 0$.

A 2.8.24 Wogegen konvergiert die Folge $\left(n\left(1-\sqrt{1-\frac{a}{n}}\right)\right)_{n\geq a}$ mit $a > 0$?

A 2.8.25 Untersuchen Sie die Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-2\right)$.

A 2.8.26 Prüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie sie ggf.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+5n-3}-n\right)$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[4]{1+\frac{100}{n}}-2\right)$.

Hinweise: Für $a \geq 0$ gilt $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$ sowie $(a-1)(a^3+a^2+a+1) = (a^4-1)$.

A 2.8.27 Bestimmen Sie die (gegebenenfalls uneigentlichen) Grenzwerte a, b, c der durch $a_n := \sqrt{n+1000} - \sqrt{n}$, $b_n := \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ und $c_n := \sqrt{n+\frac{n}{1000}} - \sqrt{n}$ definierten Folgen. Zeigen Sie, dass für alle $n < 1000000$ die Ungleichung $a_n > b_n > c_n$ gilt, obwohl für die Grenzwerte $a < b < c$ gilt.

....(Anwendungen des Sandwich-Lemma)

A 2.8.28 Zeigen Sie mittels Sandwich-Lemma: (3+1+1 P)

(a) $a > 0 \implies \sqrt[n]{a} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ **Tipp:** Betrachten Sie zuerst $a \geq 1$ und verwenden Sie Satz 3.2.

(b) $\sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ **Tipp:** Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz für $(\sqrt[n]{n})^n = (1+x_n)^n$.

Alternative Formulierung:

Beweisen Sie, dass die folgenden Grenzwerte 1 sind. (2+2 P)

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$ bei $a > 0$. **Hinweis:** Verwenden Sie die Bernoulli-Ungleichung.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ **Tipp:** Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz für $(\sqrt[n]{n})^n = (1+x_n)^n$.

A 2.8.29 Zeigen Sie unter Verwendung des Sandwich-Lemma

(a) $\sqrt[n]{5^n + 11^n + 42^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 42$ (b) $\sqrt[n]{n^3 - n^2 + 1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ (c) $27\sqrt[n]{n^4 - n^2 + 2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 27$

(d) $\sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} \to 7$ (e) $\sqrt[n]{2^n + 3^n} \to 3$

....(Rekursiv definierte Folgen mit Wurzeln)

A 2.8.30 Beweisen Sie, dass für jeden Startwert $0 < a_0 < 2$ die durch

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n + 2}$$

rekursiv definierte Folge (a_n) konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Alternative Formulierung eines Spezialfalls:

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch

$$a_1 = \sqrt{2},\ a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}},\ a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ .$$

Zeigen Sie die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

A 2.8.31 Die reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien rekursiv definiert durch

$$a_1 = a > 0\ , \quad b_1 = b > 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Beweisen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergieren.

Bemerkung: Dieser gemeinsame Grenzwert wird als **arithmetisch-geometrisches Mittel** $M(a, b)$ bezeichnet.

....(Ungleichungen mit Wurzeln)

A 2.8.32 Zeigen Sie, dass das geometrische Mittel nicht größer ist als das arithmetische Mittel, d.h., dass für alle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$ gilt

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \ .$$

Hinweis: In einem mathematischen Beweis schließt man die Behauptung aus bekannten wahren Aussagen und nicht umgekehrt. Schreiben Sie den Beweis sauber hin!

A 2.8.33 Zeigen Sie:

(a) Für $a, b > 0$ gilt $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(b) Für $a, b, c, d > 0$ gilt $\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$.

.... (oL)

A 2.8.34 Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungskette

$$2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \ \leq \ \frac{1}{\sqrt{n}} \ \leq \ 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$$

A 2.8.35 (AGM) Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und es seien reelle Zahlen

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \tag{2.15}$$

gegeben. Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k \ = \ 1 \implies \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} a_k} \ \geq \ \sqrt[n]{n}$,

(b) $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \ \leq \ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$.

.... (Aufgaben zum Goldenen Schnitt)

A 2.8.36 Für die positive Lösung von $g^2 - g - 1 = 0$ gilt sowohl $\frac{1}{g} = g - 1$ als auch $2 - g = (1-g)^2$.

A 2.8.37 Die durch $a_0 := 0$, $a_1 := 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, rekursiv definierte Folge erfüllt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - g = \dfrac{(-1)^n}{a_n g^n}$ mit der positiven Lösung g von $g^2 - g - 1 = 0$.

A 2.8.38 Zeigen Sie, dass die durch $g^2 = 1 + g$ eindeutig bestimmte positive Zahl g (die goldener Schnitt genannt wird) irrational ist.

A 2.8.39 Zeigen Sie, dass die Kettenbruchfolge $1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}$, die genauer durch die Rekursion $a_0 := 1$, $a_{n+1} := 1 + \dfrac{1}{a_n}$, gegeben ist, gegen den goldenen Schnitt g konvergiert.

A 2.8.40 Bezeichne a_n die durch $a_0 := 1$, $a_{n+1} := 1 + \dfrac{1}{a_n}$, rekursiv definierte Kettenbruchfolge und $g := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ den goldenen Schnitt, der die positive Lösung von $g^2 - g - 1 = 0$ ist. Beweisen Sie per Induktion für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung $|a_n - g| \leq \dfrac{1}{g^n}$. Konvergiert a_n gegen g?

A 2.8.41 Die durch $g^2 = 1 + g$ eindeutig bestimmte positive reelle Zahl g heißt **goldener Schnitt**.

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Wurzeln $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$, welche präziser durch die Rekursionsvorschrift $a_1 := 1$, $a_{n+1} := \sqrt{1+a_n}$ definiert ist, gegen g konvergiert.

Tipp: Zeigen Sie zunächst per Induktion $|a_n - g| \le \frac{1}{g^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und danach $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

. . . . (Schnittstellenaufgaben)

Im Folgenden sei $\mathcal{X}$ eine Menge und $S(x)$ sowie $T(x)$ Terme in $x \in \mathcal{X}$.

A 2.8.42 Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Menge $L = \{x \in \mathbb{D} : S(x) = T(x)\}$ für:

(a) $\sqrt{x} = 5$ auf der Menge $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \colon x \ge 0\}$,

(b) $\frac{x^3}{x} = 4$ auf der Menge $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \colon x \ne 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(c) $bx + c = 0$ auf $\mathbb{R}$ (*allgemeine lineare Gleichung*),

(d) $x^2 = a$ auf $\mathbb{R}$ (*allgemeine quadratische Gleichung ohne lineares Glied*),

(e) $ax^2 + bx + c = 0$, $a \ne 0$ auf $\mathbb{R}$ (*allgemeine quadratische Gleichung*),

(f) $\frac{x^2-1}{x-1} = -x$ auf $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

(g) $\sqrt{x} = 2 - x$ auf $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \colon x \ge 0\}$.

A 2.8.43 Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{x-12} < x$?

A 2.8.44 Lösen Sie die folgenden Ungleichungen und skizzieren Sie die Lage der Lösungsmenge auf der x-Achse:

$$\frac{x+3}{x+\sqrt{x-\sqrt{x+2}}} > 1 .$$

A 2.8.45 Überlegen Sie sich, warum die Dezimalentwicklung von $\sqrt{2}$ nicht periodisch sein kann.

A 2.8.46 Seien $x > 0$, $a_1 = 1$ und die weiteren Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) .$$

(a) Berechnen Sie mit dem Hilfsmittel ihrer Wahl die ersten 10 Folgenglieder der Folge (a_n) für $x = 1, 4, 9, 16$ mindestens auf 6 Stellen nach dem Komma genau. Formulieren Sie eine Vermutung über die Konvergenz der Folge (a_n) und ihren Grenzwert.

(b) Berechnen Sie mit dem Hilfsmittel ihrer Wahl die ersten 10 Folgenglieder der Folge (a_n) für $x = 2, 3, 5$ mindestens auf 6 Stellen nach dem Komma genau. Erhärtet das Ihre Vermutung aus (a) ?

2.9 Punktmengen und Abzählbarkeit

A 2.9.1 Bestimmen Sie $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ für (4+4+4 P)

(a) $A_n = \{x \in \mathbb{Z} : -n \leq x \leq n\}$ (b) $A_n = \{3n-2, 3n-1\}$ (c) $A_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\right\}$

. . . . (Test auf Abzählbarkeit und Gleichmächtigkeit)

A 2.9.2 Zeigen Sie: Jede endliche Menge ist (höchstens) abzählbar.[12]

Hinweis:
Eine Menge D heißt **höchstens abzählbar**, wenn sie leer ist oder wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = D$ gilt. Andernfalls heißt die Menge **überabzählbar**.

A 2.9.3 Ist $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ abzählbar ?

Alternative Formulierung:

- Zeigen Sie: Die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.
- Zeigen Sie: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.
- Zeigen **oder** widerlegen Sie: Die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

A 2.9.4 Ist die Menge der Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ abzählbar ?

A 2.9.5 Sei $k \geq 2$ eine natürliche Zahl. Ist die Menge $k\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n\}$ abzählbar unendlich?

A 2.9.6 Ist das kartesische Produkt $A \times B$ abzählbarer Mengen A, B selbst wieder abzählbar?

A 2.9.7 Ist die Menge $E := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ mit $E_k = \Big\{(c_1, c_2, \dots, c_k) \mid \forall j = 1, \dots, k : c_j \in \mathbb{N}\Big\}$ abzählbar ?

A 2.9.8 Ist die Menge $\{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ eine abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$?

A 2.9.9 Ist die Menge der irrationalen Zahlen gleichmächtig zu der Menge aller rationalen Vielfachen von Wurzeln aus rationalen Zahlen?

A 2.9.10 Ist die Menge aller endlichen Teilmengen einer abzählbar unendlichen Menge abzählbar ?

A 2.9.11 Sind die Intervalle $[a, b]$ mit $a < b$ und $[0, 1]$ gleichmächtig ?

A 2.9.12 Sind die Mengen $[0, 1]$ und $]0, 1]$ gleichmächtig ?

A 2.9.13 Sind die Mengen $]0, 1[$ und $[0, 1]$ gleichmächtig ?

A 2.9.14 **Beweisen** oder **widerlegen** Sie die folgenden Aussagen:

(a) Jede überabzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthält ein offenes Intervall.

(b) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist (höchstens) abzählbar.

(c) Die Menge $\{A \subset \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ endlich }\}$ aller coendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

[12] Das ist insbesondere äquivalent zu: Jede überabzählbare Menge ist unendlich.

(d) Zwischen je zwei Intervallen[13] gibt es eine Bijektion, d.h. je zwei Intervalle sind gleichmächtig.

. . . . (oL)

A 2.9.15 Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Jedes nichtleere offene Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ist überabzählbar.

(b) Für jedes nichtleere offene Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ist $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ abzählbar und $(a, b) \setminus \mathbb{Q}$ überabzählbar.

. . . . (Ausflug Topologie)

A 2.9.16 Zeigen Sie, dass für beliebiges $\mathrm{O} \subseteq \mathbb{R}$ gilt: O offen $\iff$ $\mathbb{R} \setminus \mathrm{O}$ abgeschlossen.

Hinweise: Sei $\mathrm{O} \subseteq \mathbb{R}$.

(a) $a \in \mathrm{O}$ heißt **innerer Punkt** von $\mathfrak{L} :\iff \exists\, \varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\colon\ (|x - a| < \varepsilon \Longrightarrow x \in \mathrm{O})$.

(b) O heißt **offen**, falls jedes $a \in O$ ein innerer Punkt ist.

(c) O heißt **abgeschlossen**, falls mit jeder CAUCHY-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus O auch der zugehörige Grenzwert in O liegt (also alle Häufungspunkte von O auch in O liegen).

. . . . (Häufungspunkte – allgemein)

A 2.9.17 Zeigen Sie, dass eine konvergente Folge genau einen Häufungspunkt besitzt.

A 2.9.18 Zeigen Sie: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\iff (a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Bonusfrage: Können wir eine der Teilfolgen weglassen?

Leichte Variation der Rückrichtung:

Gegeben sei eine Folge b_n, für welche die Teilfolgen $b_{2n},\ b_{2n+5}$ und b_{7n} konvergieren. Zeigen oder widerlegen Sie, dass dann auch b_n konvergent ist.

A 2.9.19 Von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei bekannt, dass sie die Häufungspunkte $a, b \in \mathbb{R}$ besitze und dass $a_{2n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ sowie $a_{2n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$ und $a \neq b$ gelte. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine weiteren Häufungspunkte besitzt.

. . . .

A 2.9.20 Kann es eine streng monotone Abzählung der Menge $\mathbb{Q} \cap]0, 1[$ geben ?

A 2.9.21 Zeigen Sie: Ist a_n eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, dann ist jede reelle Zahl $x \in [0, 1]$ ein Häufungspunkt der Folge a_n.

[13] Die Intervalle seien nicht entartet, d.h., $I = [a, b]$ oder $I = [a, b[$ oder $I =]a, b[$ oder $I =]a, b]$ mit $a < b$.

A 2.9.22 **Bemerkung:** Intervalle kann man auch folgendermaßen definieren: Eine nichtleere Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass aus $x, z \in I$ und $x < y < z$ schon $y \in I$ folgt, heißt **Intervall**.

(a) Zeigen Sie: Eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall $\iff \ ]\inf I, \sup I[\ \subset \ I$.

(b) Folgern Sie, dass die Intervalle genau die Teilmengen

- $]a, b[\ (-\infty \leq a < b \leq \infty)$,
- $[a, b[\ (-\infty < a < b \leq \infty)$,
- $]a, b] \ (-\infty \leq a < b < \infty)$ und
- $[a, b] \ (-\infty < a \leq b < \infty)$

sind, also die altbekannte Form besitzen.

A 2.9.23 Bestimmen Sie Infimum und Supremum von $]-\infty, a]$, $]-\infty, b[$, $]a, b[$, $]b, +\infty[$ für $a < b$.

A 2.9.24 Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $\mathbb{M} = \{x \ : \ x \in \mathbb{R}_+ \wedge x^n < a\}$. Sei außerdem $b = \sup \mathbb{M}$. Zeigen Sie, dass dann nicht $b^n > a$ gilt. **Hinweis**: Beweismethode mit Widerspruch.

A 2.9.25 Seien $V, W \subset \mathbb{R}$ nichtleer, beschränkt und $V - W \ := \ \{v - w \mid v \in V, w \in W\}$. Zeigen Sie:

(a) $V - W$ ist nach unten beschränkt. (ii) Es gilt $\inf(V - W) = \inf(V) - \sup(W)$.

A 2.9.26 (a) Seien $A \subset B \subset \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie:

(i) $A \neq \emptyset \Longrightarrow \inf A \leq \sup A$

(ii) $A \neq \emptyset \Longrightarrow \Big(\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ aus } A \text{ mit } x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup A \ \wedge \ \exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ aus } A \text{ mit } y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf A\Big)$

(iii) $\sup A \leq \sup B$ (iv) $\sup(-A) = -\inf A$ (v) $\inf A \geq \inf B$

(b) Sei $(a_n)_{n\geq n_0}$ aus $\mathbb{R}$ beliebig sowie $A := \{a_n \mid n \geq n_0\}$. Zeigen Sie:

(i) $\Big((a_n)_{n\geq n_0} \text{ mon. wachsend} \Longrightarrow a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup A\Big)$
$\wedge \Big((a_n)_{n\geq n_0} \text{ mon. fallend} \Longrightarrow a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf A\Big)$

(ii) $\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ (iii) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

(iv) Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \ = \ a \iff \begin{cases} (\alpha) & \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ \Big(n \geq N_\varepsilon \ \Longrightarrow \ a_n > a - \varepsilon\Big) \ , \\ (\beta) & \exists (a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}} \ \forall k \in \mathbb{N}\colon a_{m_k} < a + \varepsilon \ . \end{cases}$$

(v) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \iff a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$

A 2.9.27 (a) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere beschränkte Mengen. Wir setzen . . . . (oL)

$$A + B \ := \ \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\} \quad \text{und} \quad A - B \ := \ \{a - b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Zeigen Sie:

(i) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ und anschließend $\inf(A - B) = \inf(A) - \sup(B)$

(ii) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$ (iii) $\sup(A \cap B) = \min\{\sup(A), \sup(B)\}$

(b) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere beschränkte Mengen. Definieren Sie sinnvoll $A \cdot B$. . . . . (oL)
Unter welcher Voraussetzung an A und B gilt $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$?

A 2.9.28 Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge und $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Zeigen Sie:

(a) $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n < b \iff \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \exists\, q < b\, \forall\, n \in \mathbb{N}\colon\ (n \geq n_0 \implies b_n < q)$.

(b) $\liminf\limits_{n\to\infty} b_n > b \iff \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \exists\, q > b\, \forall\, n \in \mathbb{N}\colon\ (n \geq n_0 \implies b_n > q)$.

. . . . (Supremum/Imfimum – konkrete Mengen)

A 2.9.29 Geben Sie für die folgenden Mengen $\mathbb{M}_k$ jeweils das Supremum $\sup \mathbb{M}_k$ und das Infimum $\inf \mathbb{M}_k$, das Maximum $\max \mathbb{M}_k$ und das Minimum $\min \mathbb{M}_k$ an, falls diese existieren:

$$\begin{array}{lll} \mathbb{M}_1 := \mathbb{N}, & \mathbb{M}_2 := \{(-1)^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}, & \mathbb{M}_3 := \left\{1 + \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}, \\ \mathbb{M}_4 := \mathbb{Z}, & \mathbb{M}_5 := \{(-2)^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}, & \mathbb{M}_6 := \left\{n + \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}, \\ \mathbb{M}_7 := \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, & \mathbb{M}_8 := \left\{1 + \frac{1}{x} \ : \ x \in [1, 2[\right\}, & \mathbb{M}_9 := \{x \in \mathbb{Q} \ : \ |x| < |x-2|\}. \end{array}$$

Alternative Formulierung für $\mathbb{M}_{3,6,9}$:

Bestimmen Sie Supremum und Infimum der Mengen

$$M_1 := \left\{1 + \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}, \quad M_2 := \left\{n + \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}, \quad M_3 := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, |x| < |x-2|\} \ .$$

A 2.9.30 Bestimmen Sie Infimum und Supremum von $A := \left\{\dfrac{(-1)^m}{m} + \dfrac{(-1)^n}{n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

A 2.9.31 Bestimmen Sie Supremum und Infimum folgender Mengen. Entscheiden Sie jeweils, ob ein Maximum und/oder ein Minimum existiert.

$$\text{(i)}\ M_1 := \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} \quad \text{(ii)}\ M_2 := \left\{\frac{n}{2n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} \quad \text{(iii)}\ M_3 := \left\{\frac{|x|}{|x|+1} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\}$$

A 2.9.32 Bestimmen Sie im Falle der Existenz Supremum, Infimum, Maximum und Minimum von

(a) $M_1 := \{x \in \mathbb{R}\colon x(x-1)(x+2) > 0\}$ (b) $M_2 := \left\{\dfrac{n-m}{n+3m} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N}\right\}$

A 2.9.33 Bestimmen Sie den Limes superior und wenn möglich den Grenzwert von $\left(\dfrac{3n^2+2}{2n(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

. . . . (Konkrete Beispiele zu Häufungspunkten)

A 2.9.34 Finden Sie eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} s_n < \liminf\limits_{n\to\infty} s_n < \limsup\limits_{n\to\infty} s_n < \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} s_n$.

A 2.9.35 Beweisen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \ \leq \ \left(\limsup\limits_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\limsup\limits_{n\to\infty} b_n\right)$ und geben Sie Beispielfolgen an, für die eine echte Ungleichung vorliegt.

Alternative Formulierung:
Beweisen Sie die Ungleichung

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq (\limsup_{n\to\infty} a_n) + (\limsup_{n\to\infty} b_n)$$

Geben Sie Folgen an, für welche die Ungleichung echt ist, d.h., mit $<$ gilt.

A 2.9.36 Gibt es eine Folge mit abzählbar unendlich vielen Häufungspunkten?

A 2.9.37 Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge $a_n := \left(\dfrac{(125)^{\frac{n}{3}} - (-5)^n}{2 \cdot (25)^{\frac{n}{2}}}\right)^n$.

A 2.9.38 Bestimmen Sie die Häufungspunkte der rekursiv durch die Vorschrift $b_1 := 2$ und $b_{n+1} := 1 - b_n$ für $n \in \mathbb{N}$ definierten Folge (b_n).

A 2.9.39 Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $a_n := \cos(n\pi) + \frac{1}{n}$ und geben Sie Teilfolgen an, die gegen diese Häufungspunkte konvergieren.

A 2.9.40 Bestimmen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ für die Folge $a_n := \begin{cases} 3 + \frac{1}{5n}, & \text{für } n = 3k, \\ 3 - \frac{n+4}{n}, & \text{für } n = 3k+1, \\ 3 + \sqrt[n]{n}, & \text{für } n = 3k+2. \end{cases}$

A 2.9.41 Bestimmen Sie für die nachstehend definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils den Limes inferior und den Limes superior:

$$a_n := \frac{1}{n^4} \cdot \binom{n}{3}, \quad b_n := \sqrt[n]{(1+(-1)^n)^n + 1}, \quad c_n := \begin{cases} 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n, & \text{falls } n \equiv 0 \mod 3, \\ 2 + \frac{n+1}{n}, & \text{falls } n \equiv 1 \mod 3, \\ 2, & \text{falls } n \equiv 2 \mod 3. \end{cases}$$

A 2.9.42 Bestimmen Sie den Limes Superior und den Limes Inferior der Folgen $a_n := (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$ und $b_n := (-1)^n p_n$, wobei p_n der kleinste Primteiler von n sei.

A 2.9.43 Ermitteln Sie Limes Superior und Limes Inferior der Folge $a_n := \dfrac{(-2)^n}{(3+(-1)^n)^n}$.

A 2.9.44 Bestimmen Sie die Menge aller Häufungspunkte, den Limes Superior und den Limes Inferior für die nachstehenden Folgen (b_n) und (c_n):

$$b_n = (1+(-1)^n)\, n, \qquad c_n = (-1)^{n-1}\left(2 - \frac{4}{n}\right) + (-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

. . . . (Schnittstellenaufgabe)

A 2.9.45 **Hilberts Hotel**:
Hilberts Hotel hat zu jeder natürlichen Zahl n ein Zimmer. Wenn das Hotel voll belegt ist und ein weiterer Gast kommt, so muss dieser nicht abgewiesen werden, sondern man bittet den Gast aus Zimmer n in das Zimmer mit der Nummer $n+1$ umzuziehen und vergibt das freigewordene Zimmer 1 an den neuen Gast. Nun kommt ein Bus, der zu jeder natürlichen Zahl einen Sitzplatz hat, auf dem ein Reisender sitzt. Können alle neuen Gäste in Hilberts Hotel unterbracht werden und, wenn ja, wie ?

2.10 Reihen und ihre Konvergenzkriterien

.... (Vorbereitung – Reihen als spezielle rekursiv definierte Folgen)

A 2.10.1 Sind die nachstehenden Folgen konvergent/bestimmt divergent? (4 P)

(a) $a_n := (-42)^n$ (b) $b_n := \dfrac{(n+1)! \cdot 3n}{(n+2)! - n!}$ (c) $c_n := \dfrac{7 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + 42^{-n}}$ (d) $d_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$

Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren (möglicherweise uneigentlichen) Grenzwert.

A 2.10.2 Zeigen Sie das **„unendliche Assoziativgesetz“** (2.16) für konvergente Reihen:

Ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $k \mapsto n_k$ eine streng monotone Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n_1 = 1$, dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j \right) . \tag{2.16}$$

.... (Die geometrische Reihe)

A 2.10.3 (a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die folgende Summenformel gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \; \forall q \neq 1 \; : \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad (\textbf{geometrische Summenformel}). \tag{2.17}$$

(b) Sei $q \in \mathbb{R}$ beliebig und $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die durch $S_0 = 1$, $S_n = S_{n-1} + q^n$ rekursiv definierte Folge.

(i) Finden Sie mittels (a) eine explizite Darstellung der Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und begründen Sie, warum sie genau für $|q| < 1$ konvergiert.

(ii) Beweisen Sie im Fall $q \in \,]0, 1[$ erneut die Konvergenz der Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, in dem Sie zeigen, dass es sich um eine monotone und beschränkte Folge handelt.

A 2.10.4 Untersuchen Sie die Konvergenz der **geometrischen Reihe** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ im Fall $|q| \leq 1$.

.... (Beispiele bestimmt divergenter Reihen)

A 2.10.5 Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen bestimmt divergieren:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} d$ für ein $d \neq 0$ **(arithmetische Reihe)**

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **(harmonische Reihe)**

.... (Teleskopreihen und Co – z.T. Partialbruchzerlegung)

A 2.10.6 Drücken Sie $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots$ mit Hilfe des Summenzeichens aus.

Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

A 2.10.7 Geben Sie die folgenden Reihen mit Hilfe des Summenzeichens an. Berechnen Sie jeweils die N-te Partialsumme, untersuchen Sie die Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert der Reihe.

(a) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \dots$

(b) $\frac{2}{4\cdot 1 - 9} + \frac{2}{4\cdot 4 - 9} + \frac{2}{4\cdot 9 - 9} + \frac{2}{4\cdot 16 - 9} + \dots$

(c) $\frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \frac{2}{24} + \frac{2}{35} + \dots$

Alternative Formulierungen:

(a) Ermitteln Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Tipp: Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $k \mapsto \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ und überprüfen Sie, welche Terme sich in der n-ten Partialsumme aufheben.

Leichte Abwandlung: Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^3 - n}$.

(b) (i) Berechnen Sie für jedes $N \in \mathbb{N}$ die N-te Partialsumme $S_N := \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{4n^2 - 9}$.

(ii) Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 9}$? Falls ja, geben Sie den Grenzwert an.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$ bzw. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$.

Leichte Abwandlung:

Prüfen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$ auf Konvergenz. Berechnen Sie ggf. ihren Grenzwert.

A 2.10.8 Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $\quad S_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{7}{4k^2 - 1}$.

Leichte Abwandlung: Zeigen Sie die Gültigkeit von $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$.

. . . inkl. Erweiterung: Bestimmen Sie den Grenzwert S der Folge $S_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

Ab wann gilt $|S - S_n| < 10^{-4}$?

A 2.10.9 Berechnen Sie die N-te Partialsumme und im Falle der Existenz auch den Grenzwert der Reihen

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n^2 - 1)}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n^2 - 4}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f_n f_{n+2}}$ mit $f_0 := 1$, $f_1 := 1$, $f_{n+2} := f_{n+1} + f_n$.

. . . . (Teleskop-Produktfolgen)

A 2.10.10 Bestimmen Sie $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\to 0$.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie, dass die durch

$$a_1 := 1, \quad a_n := \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) \;=\; \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right),\ n\geq 2,$$

definierte Folge gegen den Wert 0 konvergiert.

Alternative Formulierung:

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $a_n := \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

A 2.10.11 Beweisen Sie, dass die nachstehend definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $\frac{1}{2}$ konvergiert:

$$a_1 \;:=\; 1\,, \quad a_n \;:=\; \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \;=\; \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\;\ldots\;\left(1-\frac{1}{(n-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\,.$$

Alternative Formulierung:
Beweisen Sie die Konvergenz $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\longrightarrow\frac{1}{2}$.

. . . . (Allgemeine Konvergenzkriterien)

A 2.10.12 Zeigen Sie:

(a) Satz 7.4 (**Leibniz-Kriterium** für alternierende Reihen):
Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$.

(b) Satz 7.5: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Longrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

Alternative Formulierung:
Beweisen Sie mittels Cauchyschem Konvergenzkriterium für Reihen, dass aus der absoluten Konvergenz einer Reihe die Konvergenz einer Reihe folgt.

(c) Zeigen Sie: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann absolut konvergent, wenn nichtnegative konvergente Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ existieren, so dass $\forall n\in\mathbb{N}$: $a_n = b_n - c_n$.

(d) Satz 7.7: (**Quotientenkriterium**):

$$\exists \theta \in]0,1[\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\colon \left(k \geq k_0 \implies a_k \neq 0 \wedge \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \theta\right)$$
$$\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

Alternative Formulierung:

Gilt $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$ und $\lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ k_0 \leq k}} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = c$ für ein $c \in [0,1[$, dann konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

A 2.10.13 Beweisen Sie das **Wurzelkriterium**:

$$\exists \theta \in]0,1[\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\ : \left(k \geq k_0 \implies \sqrt[k]{|a_k|} \leq \theta\right) \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

A 2.10.14 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie das **allgemeine Wurzelkriterium:**

(a) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

(c) $\forall\, n \in \mathbb{N}\colon a_n \geq 0 \wedge \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$.

A 2.10.15 Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \tag{2.18}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = s \in \mathbb{R} \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = s\ . \tag{2.19}$$

Hinweise: Zu jeder reellen Folge (a_n) existieren[14] stets $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = H$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = h$. Es gilt stets $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Weiter[15] gilt $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = g \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

.... (Versteckte Reihen)

A 2.10.16 Konvergiert die durch $a_1 := 1$ und $a_{k+1} := a_k + \dfrac{1}{a_k}$ für $k \in \mathbb{N}$ definierte Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

[14] Dabei ist $H < \infty$, wenn (a_n) nach oben beschränkt (bzw. $h > -\infty$ wenn (a_n) nach unten beschränkt) ist und $H = \infty$ (bzw. $h = -\infty$), wenn (a_n) nach oben (bzw. nach unten) unbeschränkt ist. Im letzten Fall ist H (bzw. h) keine Zahl, sondern der Ausdruck $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = h$) besagt, dass es eine bestimmt gegen ∞ (bzw. $-\infty$) divergente Teilfolge gibt.

[15] Dies gilt sowohl für $g \in \mathbb{R}$, also auch wenn $g = -\infty$ oder $g = \infty$ ist – dann ist bestimmte Divergenz gegen g gemeint.

A 2.10.17 Zeigen Sie: $\left(\forall k \in \mathbb{N}\colon |a_k - a_{k+1}| < 2^{-k} \implies (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Cauchy-Folge}\right)$

Alternative Formulierung:

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit der Eigenschaft, dass für alle natürlichen Zahlen k die Ungleichung

$$|a_k - a_{k+1}| < 2^{-k}$$

gilt. Zeigen Sie die Konvergenz der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

Tipp: Was besagt das Vollständigkeitsaxiom ?

.... (Anwendung des Verdichtungskriterium – auch Integralvergleichskriterium möglich)

A 2.10.18 Zeigen Sie, dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ für jede natürliche Zahl $s \geq 2$ konvergiert.

A 2.10.19 Gegeben sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$. (2+2 P)

(a) Ist hier das Quotientenkriterium anwendbar ?

(b) Ist hier das Wurzelkriterium anwendbar ? **Bonusfrage:** Ist die Reihe konvergent ?

A 2.10.20 Zeigen Sie, dass für die durch

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n} & \text{für } n \equiv 0 \mod 2\ , \\ 3^{-n} & \text{für } n \equiv 1 \mod 2\ , \end{cases}$$

gegebene reelle Zahlenfolge mit Hilfe des Quotientenkriteriums keine Aussage über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ möglich ist, wohl aber mit Hilfe des Wurzelkriteriums.

Alternative Formulierung:

Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ wobei $a_n := \begin{cases} 2^n & \text{falls } n \equiv 0 \mod 2, \\ 3^n & \text{falls } n \equiv 1 \mod 2. \end{cases}$

A 2.10.21 Prüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+4}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3+1}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k := \begin{cases} 3^{-k} & \text{für gerade } k, \\ 5^{-k} & \text{für ungerade } k. \end{cases}$

A 2.10.22 Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$?

A 2.10.23 Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$?

A 2.10.24 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^k}{2k^k}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$

A 2.10.25 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5n+2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3-2}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-\sqrt{n}}$

A 2.10.26 Prüfen Sie die folgenden Reihen mittels bekannter Kriterien auf Konvergenz

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2+1}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{7k-4}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} k 3^{-k^2}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$

A 2.10.27 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz: (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n-1}{n}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)(n+2)}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2^n}{2^{n+1}}\right)^n$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-6}{3^n(3n+4)}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+22}{2n+62}\right)^n$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2n\sqrt{n}}$

A 2.10.28 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3(1+n)}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{2^n 3^{n+1}}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-a^n)$ für eine reelle Zahl $0 < a < 1$.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2011}}{2011^n}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{90-2n^2}$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1-2\sqrt{n}}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$ (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000 \cdot n + 1}$

A 2.10.29 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+4)}{n^2-3n+1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} - \frac{2n-1}{2n}\right)$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\mathrm{e}}$ (h) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$

....(ohne Lsg)

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$ (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{2^n 3^{n+1}}$ (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$ (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

(v) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n - 2n^n}$ (vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$ (vii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n^2-1}$

(viii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^k}$, $k \in \mathbb{Z}$

Für welche Reihen kann keine bestimmt divergente Umordnung existieren ?

A 2.10.30 Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-\sqrt{k}}{(k+\sqrt{k})^2}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k}-2)^2}{k^2+\sqrt{k^4+1}}$ auf Konvergenz.

A 2.10.31 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz: (1+2+1+1+1 P)

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{(-1)^k}{k}\right)$ (c) $\sum_{\ell=1}^{\infty} \left(1-\sqrt[\ell]{\ell}\right)^\ell$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{2k^2-k}$ (e) $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ell}}$

(f) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{(-1)^k}{k^2}\right)$ ....(oL)

Bonusfrage: Zu welchen Reihen existiert keine bestimmt divergente Umordnung?

A 2.10.32 Für welche $a > 0$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \sqrt[n]{a}\right)$?

A 2.10.33 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $1 + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{3^3}{2^3 \cdot 7} + ...;$ (b) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + ...$

A 2.10.34 Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$

. . . . (oL – mittels Taylor ?)

A 2.10.35 Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n+1} \left(\sqrt[n]{3} - 1\right)$ auf absolute Konvergenz:

A 2.10.36 Zeigen Sie **oder** widerlegen Sie mit einem Gegenbeispiel:

(a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ konvergiert genau dann, wenn die Folge x_n konvergiert.

(b) Gilt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ und konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut.

(c) Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut, dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konvergent.

(d) Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und gilt $\forall k\colon a_k \geq 0$, dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konvergent.

Alternative Formulierung:

Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und gilt $\forall n\colon a_n \geq 0$, dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent.

(e) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent mit $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \geq 0$, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$.

Alternative Formulierung:

Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und gilt $\forall k\colon a_k \geq 0$, dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ konvergent.

(f) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und gilt $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \geq 0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

Alternative Formulierung:

Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und gilt $\forall k\colon a_k \geq 0$, dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ konvergent.

(g) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ absolut.

(h) Existiert $c \in \mathbb{R}$ mit $n^2 a_n \xrightarrow{n\to\infty} c$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(i) Gilt $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \neq -1$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$.

(j) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen, für welche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann ist die Folge $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
Hinweis: Verwenden Sie das Cauchysche Konvergenzkriterium für Reihen.

....

(k) Ist (a_n) eine konvergente Folge und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Alternative Formulierung:

Existieren Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass a_n sowie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, jedoch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ divergent ist ?

(l) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$.

(m) Ist (a_n) eine Nullfolge nichtnegativer Zahlen, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

(n) Ist 1 Häufungspunkt der Folge $\sqrt[n]{|a_n|}$, dann divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(o) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls 1 Häufungspunkt der Folge $\sqrt[n]{|a_n|}$ ist.

(p) Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konvergent, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

(q) Gilt $a_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$, so divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Alternative Formulierung:

Gegeben sei eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht konvergent.

A 2.10.37 (a) Zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen heißen **asymptotisch proportional**, wenn es ein $c > 0$ mit $\frac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$ gibt. In diesem Fall schreiben wir $(a_n) \sim (b_n)$. Zeigen Sie:

$$(a_n) \sim (b_n) \implies \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \right).$$

(b) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$?

(c) Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2\sqrt[n]{n}}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n^5}}$ auf Konvergenz.

A 2.10.38 Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diejenige Teilfolge der Folge der natürlichen Zahlen $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche durch Weglassen derjenigen Folgenglieder n entsteht, in deren Dezimaldarstellung mindestens einmal die Ziffer 9 auftritt, dann ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n}$ konvergent.

Leichte Variation:

Die harmonische Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert bekanntlich bestimmt gegen ∞.

Man streiche in der harmonischen Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ alle Glieder, bei denen die Dezimaldarstellung des Nenners n die Ziffer 7 enthält. Zeigen Sie, dass die so erhaltene Reihe konvergiert.

A 2.10.39 Konvergiert die Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ gegen denselben Grenzwert wie die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \pm \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} \pm \ldots \quad ?$$

A 2.10.40 Für $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, seien $(S_N)_{N\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ sowie $(T_N)_{N\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{n=1}^{N} a_{\tau(n)}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ und $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung definiert durch $\tau(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2n+1) & \text{für } n = 1 \mod 3, \\ \frac{2}{3}(2n-1) & \text{für } n = 2 \mod 3, \\ \frac{4}{3}n & \text{für } n = 0 \mod 3. \end{cases}$.

Berechnen Sie den Vektor $\big(\tau(n)\big)_{n=1}^{18}$ sowie S_{12} und T_{18} und $T_{18} - \frac{1}{2}S_{12}$ auf 8 Stellen nach dem Komma. Zeigen Sie weiterhin:

(a) τ ist eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Folglich ist (T_N) eine Umordnung von (S_N).

(b) Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt $T_{3N} = \frac{1}{2}S_{2N}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} T_N = \frac{1}{2}S \neq S$, wobei $S > 0$ den nach dem Leibniz-Kriterium existierenden Grenzwert von S_N bezeichne.

A 2.10.41 Konstruieren Sie eine Umordnung von $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{(-1)^n}{n}$, die divergiert.

A 2.10.42 Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$ gegen eine Zahl kleiner als $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ konvergiert, jedoch nicht absolut konvergiert. Finden Sie weiterhin eine Umordnung $\tau : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, so dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{\tau(n)}\dfrac{1}{2\tau(n)+1}$ gegen eine Zahl größer als $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ konvergiert.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie, dass die Leibniz-Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$ gegen eine Zahl kleiner als $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ konvergiert, jedoch nicht absolut konvergiert. Konstruieren Sie eine Umordnung, die gegen eine Zahl größer als $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ konvergiert.

A 2.10.43 (a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3n+1}$ gegen eine Zahl kleiner als $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7}$ konvergiert, jedoch nicht absolut konvergiert.

(b) Konstruieren Sie eine Umordnung der Reihe aus Aufgabenteil (a), die gegen eine Zahl größer als $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7}$ konvergiert.

A 2.10.44 Prüfen Sie, ob es für die folgenden Reihen eine Umordnung gibt, die gegen $+\infty$ divergiert. Falls ja, geben Sie solch eine Umordnung an.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k^2}$ (b) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1}$

. . . . (Cauchy-Produkt von Reihen)

A 2.10.45 (a) Gegeben seien die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}$. Berechnen Sie ihr Cauchy-Produkt.

(b) Berechnen Sie das Cauchy-Produkt der beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{n!}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b}{n!}$.

A 2.10.46 Sei $|x| < 1$. Berechnen Sie jeweils das Cauchy-Produkt von

$$\text{(a)} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k\right) \qquad \text{und} \qquad \text{(b)} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k\right).$$

Alternative Formulierung:

Sei $|x| < 1$. Berechnen Sie die Cauchy-Produkte

$$\text{(i)} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k\right) \qquad \text{und} \qquad \text{(ii)} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k\right)$$

A 2.10.47 Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ konvergiert (jedoch nicht absolut), wohingegen das Cauchy-Produkt der Reihe mit sich selbst divergiert.

Alternative Formulierung:

Für $n \in \mathbb{N}_0$ seien $a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ und $c_j := \sum_{n=0}^{j} a_{j-n} b_n$. Zeigen Sie, dass die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergieren, jedoch ihr Cauchy-Produkt $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ divergiert.

Leichte Variation des ersten Teils:

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

A 2.10.48 Für $s, n \in \mathbb{N}$ sind die Binomialkoeffizienten durch $\binom{s}{n} := \frac{s \cdot (s-1) \cdot \ldots \cdot (s-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$ definiert. Sie geben an, wieviele Möglichkeiten man hat, aus s verschiedenen Objekten n auszuwählen.

(a) Zeigen Sie, dass $(1+x)^s = \sum_{n=0}^{s} \binom{s}{n} x^n$ gilt und damit dann $\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k}\binom{t}{n-k} = \binom{s+t}{n}$.

(b) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $\binom{\alpha}{n} := \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha - k + 1}{k}$.

Zeigen Sie, dass die Binomialreihe $B_\alpha(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ für $|x| < 1$ absolut konvergiert und für das Cauchy-Produkt $B_\alpha(x) B_\beta(x) = B_{\alpha+\beta}(x)$ gilt.

Alternative Formulierung für (b):

(i) Zeigen Sie, dass die Binomialreihe $B_x(y) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} y^n$ für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|y| < 1$ konvergiert. Dabei bezeichnet

$$\binom{x}{n} := \prod_{k=1}^{n} \frac{x - k + 1}{k} \tag{2.20}$$

den verallgemeinerten Binomialkoeffizienten.

(ii) Beweisen Sie mit Hilfe der Formel $\sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n}$ und des Cauchy-Produktes von Reihenfür $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$ mit $|y| < 1$ das Additionstheorem

$$B_{x_1}(y) B_{x_2}(y) = B_{x_1+x_2}(y) \ . \tag{2.21}$$

A 2.10.49 Informieren Sie sich über das sogenannte Paradoxon des Zenon von Elea.

A 2.10.50 Achilles, der schnellfüßige, unbesiegbare griechische Held, misst sich im Wettrennen mit einer Schildkröte. Die Schildkröte bewegt sich mit Geschwindigkeit v_s und Achilles hat die Geschwindigkeit $v_a > v_s$. Darum bekommt die Schildkröte beim Start den Vorsprung s_0 vor Achilles. Mit elementarer Schulphysik sieht man: Achilles hat die Schildkröte nach der Zeit

$$t_e = \frac{s_0}{v_a - v_s}$$

eingeholt. Der griechische Philosoph Zenon (von Elea, etwa 490 bis 430 v. Chr.) interpretierte das Wettrennen so: Um die Schildkröte einzuholen, muss Achilles den Punkt erreichen, an dem die Schildkröte startet. Wenn er diesen Punkt erreicht hat, hat sich die Schildkröte aber ebenfalls weiterbewegt, sie liegt also noch vorne. Hat Achilles auch diese Distanz überwunden, so hat sich auch die Schildkröte wieder ein Stück weiter bewegt, usw. Die provokante Schlussfolgerung von Zenon: Achilles kann die Schildkröte niemals einholen.

Berechne die Zeit t_e mittels der Interpretation von Zenon. Worin lag sein Irrtum?

2.11 Die Exponentialreihe

A 2.11.1 Für ein $\omega \in \mathbb{R}$ sei ω_n eine beliebige Folge mit $\omega_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \omega$. Zeigen Sie: (1+1+2+2 P)

(a) $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ \left(n \geq k \implies \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}\right)$ (b) $\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{k!}$.

(c) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $K \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ \left(n \geq K \implies \sum_{k=K}^{n} \binom{n}{k} \frac{|\omega_n|^k}{n^k} \leq \sum_{k=K}^{\infty} \frac{(|\omega|+1)^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{4}\right).$$

(d) Zu ε und K aus (c) existiert ein $M \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ \left(n \geq M \implies \forall k = 0, \ldots, K-1\ :\ \left|\binom{n}{k} \frac{\omega_n^k}{n^k} - \frac{\omega^k}{k!}\right| < \frac{\varepsilon}{2K}\right).$$

Bonusaufgabe: Zeigen Sie nun

$$\left(1 + \frac{\omega_n}{n}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^k}{k!} \tag{2.22}$$

A 2.11.2 Untersuchen Sie die Folgen $a_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ und $b_n = \left(\frac{n+2}{n-1}\right)^n$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

A 2.11.3 Konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}, n\geq 3}$, definiert durch $x_n := \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{-n+5}$? Falls ja, wogegen?

A 2.11.4 Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen (i) $\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n}$ sowie (ii) $\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$.

.... (Explizite Bestimmung von Grenzwerten)

A 2.11.5 Bestimmen Sie mittels geometrischer bzw. Exponentialreihe die Grenzwerte

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-2k}$ (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7+5^k}{k!}$ (c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{3k}}{(k+1)!}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!}$ (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3}{2^{n+1}}$

A 2.11.6 Bestimmen Sie $\lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^k$.

Tipp: Verwenden Sie (2.22) oder Bernoulli-Ungleichung und Sandwich-Lemma.

A 2.11.7 Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{4^n n!}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{n!} + \frac{(-1)^n}{2^n}\right)$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}\right)$

A 2.11.8 Ermitteln Sie die Grenzwerte von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{5^k}$ und $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k 2^k}{3^{k-2}} - \frac{3^k}{(k-1)!}\right)$.

A 2.11.9 Ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ konvergent? Falls ja, gegen welchen Wert ?

A 2.11.10 Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^7 \mathrm{e}^{-k^2}$ auf Konvergenz.

A 2.11.11 Verwenden Sie (2.19) und (2.22), um den Grenzwert von $\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zu bestimmen.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie, dass die Folge $\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Kapitel 3

Stetigkeit von Funktionen

3.1 Grenzwerte von Funktionen

. . . . (Allgemeine Aussagen/Zusammenhänge)

A 3.1.1 **Wiederholung:**

- Wir nennen p einen Häufungspunkt (HP) einer Menge A, falls eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_n \in A \setminus \{p\}$ und $x_n \to p$ existiert.
- Die Definition des **rechtsseitigen Grenzwertes** lautet:

$$\lim_{x\searrow a} f(x) = c \quad :\Longleftrightarrow \quad a \text{ ist HP von } D\cap]a,\infty[\text{ und}$$

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ aus } D\cap]a,\infty[\colon \left(\lim_{n\to\infty}(x_n) = a \implies \lim_{n\to\infty}(f(x_n)) = c\right)$$

- Die Definition des **linksseitigen Grenzwertes** lautet:

$$\lim_{x\nearrow a} f(x) = c \quad :\Longleftrightarrow \quad a \text{ ist HP von } D\cap]-\infty,a[\text{ und}$$

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ aus } D\cap]-\infty,a[\colon \left(\lim_{n\to\infty}(x_n) = a \implies \lim_{n\to\infty}(f(x_n)) = c\right)$$

(a) Zeigen Sie, dass man sich in der Definition des rechtsseitigen Grenzwertes auf streng monoton fallende Folgen beschränken kann, d.h., zeigen Sie die Gültigkeit der Aussage

$$\lim_{x\searrow a} f(x) = c \quad \Longleftrightarrow \quad a \text{ ist HP von } D\cap]a,\infty[\text{ und } \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ aus } D\cap]a,\infty[\colon$$

$$\left(\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ streng monoton } \wedge \lim_{n\to\infty}(x_n) = a\right) \implies \lim_{n\to\infty}(f(x_n)) = c\right)$$

(b) Sei a ein Häufungspunkt von $D\cap\ ]a,\infty[$ und von $D\cap\ ]-\infty,a[$. Dann gilt

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\searrow a} f(x) = c \quad \text{und} \quad \lim_{x\nearrow a} f(x) = c.$$

Hinweis: Beachten Sie, dass wegen $c \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ drei Fälle zu unterscheiden sind.

Variation von (b):

Sei $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie:

$$\forall \xi \in]a,b[\ \colon \left(\lim_{\substack{x\to\xi\\ x\neq\xi}} f(x) = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\lim_{x\searrow\xi} f(x) \ = \ c \ \wedge \ \lim_{x\nearrow\xi} f(x) \ = \ c\right)\right)$$

A 3.1.2 Zeigen Sie: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, sofern die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ übereinstimmt mit

(a) einer der konstanten Funktionen $f_c\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ x \mapsto c\ (c \in \mathbb{R})$ oder

(b) einer der linearen Funktionen $g_b\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ x \mapsto bx\ (b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ oder

(c) einem Polynom $p_N(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} b_k x^k\ (\forall k = 0, \ldots, N\colon b_k \in \mathbb{R},\ b_N \neq 0)$.

A 3.1.3 Beweisen Sie mittels der **Definition des Grenzwertes** von Funktionen

(a) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ (b) $\lim\limits_{x\to 5} x^3 = 125$ (c) $\lim\limits_{x\to 2} |x-2| = 0$ (d) $\lim\limits_{x\to 7} |x-7| = 0$

(e) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$

A 3.1.4 Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{x^2}{|x|}$? Falls ja, bestimmen Sie ihn.

A 3.1.5 Berechnen Sie für $m, n \in \mathbb{N}$ den Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$.

A 3.1.6 Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$.

A 3.1.7 Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-x)^2}{1-x^2}$

A 3.1.8 Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+4x+3}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x\neq 3}} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$ und $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x\neq 4}} \dfrac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}$

A 3.1.9 Sei $\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$. Zeigen Sie $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = 1$.

Alternative Formulierung:

Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ mit $\lfloor y \rfloor := \max\limits_{\substack{z\in\mathbb{Z}\\ z\leq y}} z$.

Leichte Variation:

Zeigen Sie direkt mittels Definition des Grenzwertes für Funktionen: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x \left\lfloor \dfrac{3}{x} \right\rfloor = 3$

A 3.1.10 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{6x^2-4x-2}{2x^2+x-3}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-2x-1}{4x^2+2x-6}$ (c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-x^2-x+1}$

(d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ (e) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-x-2}}$ (f) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{x^2+2x-8}{2x^2-2x-4}}$

A 3.1.11 Untersuchen Sie, ob die Funktion $g \circ f$ in $a = 0$ den Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$ besitzt, falls $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben sind durch

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0\,, & x \in \mathbb{Q}\,, \\ x^2\,, & x \notin \mathbb{Q}\,, \end{cases} \,, \qquad g(x) \;=\; \begin{cases} 1\,, & x = 0\,, \\ x\,, & x \neq 0\,. \end{cases}$$

A 3.1.12 Bestimmen Sie zu $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, die Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ derart, dass für die Funktion

$$f(x) \;:=\; \sqrt{ax^2 + bx + c} - \alpha x - \beta \tag{3.1}$$

die Konvergenz $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ gilt.

A 3.1.13 Ist die durch $f(x) := \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt?

Besitzt f ein Maximum?

.... (Pathologisches Beispiel)

A 3.1.14 Die Funktion $f\colon\;]0, 1] \to \mathbb{R}$ sei stückweise linear definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} 2n(1 - (2n-1)x) & , x \in \left]\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right]\,,\ n \in \mathbb{N}, \\ 2n((2n+1)x - 1) & , x \in \left]\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right]\,,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zeigen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}$ existieren $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2n}} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2n-1}} f(x)$, jedoch existiert $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nicht.

Alternative abgeschwächte Formulierung:

Auf dem halboffenen Intervall $]0, 1]$ sei die Funktion f für alle $n \in \mathbb{N}$ durch

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = 1 \qquad \text{und} \qquad f\left(\frac{1}{2n-1}\right) = 0$$

definiert sowie auf $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ linear, d.h., im Graphen der Funktion sind jeweils die Punkte $\left(\frac{1}{n}, \left(\frac{1}{n}\right)\right)$ und $\left(\frac{1}{n+1}, \left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$ durch eine Strecke verbunden. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion und zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nicht existiert.

.... (Schnittstellenaufgaben – Funktionenreihen)

A 3.1.15 (a) Zeigen Sie für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$.

(b) Bezeichnet nun jeweils g_x den Grenzwert der von x abhängigen Reihe aus (a), dann wird durch $f\colon x \mapsto g_x$ eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert. Zeigen Sie, dass dann die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k}$$

für festes $x \neq 0$ gegen $\dfrac{f(x)}{x}$ konvergiert.

(c) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so dass $\forall n \in \mathbb{N}\colon x_n \neq 0$ gilt. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(x_n)}{x_n}$.

3.2 Stetige Funktionen

. . . . (Anwendung der Folgen-Definition)

A 3.2.1 Zeigen Sie: Die konstanten Funktionen $f_c\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ x \mapsto c$ ($c \in \mathbb{R}$) sind in allen $x \in \mathbb{R}$ stetig.

Erweiterung:

Zeigen Sie die Stetigkeit von konstanten und linearen Funktionen sowie die Stetigkeit von Summen, Produkten und Hintereinanderausführungen stetiger Funktionen.

A 3.2.2 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Geben Sie ein Folgenkriterium dafür an, dass f in einem Punkt $a \in I$ unstetig ist.

A 3.2.3 Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. (2+2 P)

Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Zeigen Sie: f stetig $\iff$ f konstant.

Erinnerung:

Eine Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, falls es $t_0, t_1, \ldots, t_n \in [a, b]$ mit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und reelle Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ gibt, so dass $f(x) = c_k$ für alle $x \in]t_{k-1}, t_k[$ ($k = 1, 2, \ldots, n$).

A 3.2.4 Sei $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $\forall x \in [0, 1]\colon f(x) = f(x^2)$.
Zeigen Sie, dass f konstant ist.

A 3.2.5 Gegeben seien Funktionen $u, v, w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichungskette $u(x) \le v(x) \le w(x)$ erfüllt sei. Desweiteren seien die Funktionen u und w stetig in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $u(x_0) = w(x_0)$. Zeigen Sie, dass dann auch v in x_0 stetig ist.

. . . . (Minimum, Maximum, Positivteil, Negativteil stetiger Funktionen)

A 3.2.6 Seien f und g stetige Funktionen. Zeigen Sie die Stetigkeit von

$$\max(f, g)(x) \ := \ \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \ge g(x)\ , \\ g(x), & \text{falls } f(x) < g(x)\ . \end{cases} \tag{3.2}$$

Hinweis: Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\max(x, y) = \dfrac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

A 3.2.7 Seien f und g stetige Funktionen. Zeigen Sie die Stetigkeit von

$$\min(f, g)(x) \ := \ \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \le g(x)\ , \\ g(x), & \text{falls } f(x) > g(x)\ . \end{cases} \tag{3.3}$$

Hinweis: Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\min(x, y) = \dfrac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

A 3.2.8 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktionen $f_+, f_-\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f_+(x) \ := \ \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \ge 0\ , \\ 0, & \text{falls } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad f_-(x) \ := \ \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) \le 0\ , \\ 0, & \text{falls } f(x) > 0\ . \end{cases} \tag{3.4}$$

Zeigen Sie zunächst die Identitäten $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$ sowie anschließend, dass die Funktionen f_+ und f_- stetig sind.

A 3.2.9 Zeigen Sie:

Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit stetigem $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f_a(x) := \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3, \\ 2ax, & x \geq 3. \end{cases}$

Alternative Formulierung:

Für welchen Wert von $a \in \mathbb{R}$ ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3, \\ 2ax, & x \geq 3, \end{cases}$ stetig ?

A 3.2.10 Bestimmen Sie das Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, so dass $f_{(a,b)}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig wird, welches definiert ist durch

$$f_{(a,b)}(x) := \begin{cases} -2, & x \leq -1, \\ ax - b, & -1 < x < 1, \\ 3, & x \geq 1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Alternative Formulierung:

Existieren $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq -1, \\ ax - b, & -1 < x < 1, \\ 3, & x \geq 1, \end{cases}$ stetig ist ?

A 3.2.11 Für welche Konstanten $a, b > 0$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, welche durch

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{ax + b} & \text{für } x > 0, \\ \dfrac{1}{a - bx} & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

gegeben ist, stetig in den Punkt 0 fortsetzbar?

A 3.2.12 Zeigen Sie:

Es existieren $a \in \mathbb{R}$ mit stetigem $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_a(x) := \begin{cases} a^2x - 2a, & x \geq 2, \\ 12, & x < 2. \end{cases}$

A 3.2.13 Existieren $c \in \mathbb{R}$ mit stetigem $f_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f_c(x) := \begin{cases} (x - c)^2, & \text{falls } x \leq 1, \\ x, & \text{falls } x > 1, \end{cases}$?

Alternative Formulierung:
Für welche Konstanten $c \in \mathbb{R}$ lässt sich die durch

$$f(x) := \begin{cases} (x - c)^2 & \text{bei } x < 1 \\ x & \text{bei } x > 1 \end{cases}$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ stetig in den Punkt $x = 1$ fortsetzen?

A 3.2.14 Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 - ax & \text{für } x < 1, \\ a - x^2 & \text{für } x \geq 1, \end{cases}$ stetig ?

A 3.2.15 Zu welchen Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ existiert eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2}{|1 - x|} & \text{wenn } x \leq -1 \text{ oder } x \geq 2\ , \\ ax + b & \text{wenn } -1 < x < 2\ ? \end{cases}$$

A 3.2.16 Für welche Konstanten $c \in \mathbb{R}$ lässt sich die durch

$$f(x) := \begin{cases} (x-c)^4 & \text{bei } x < 1 \\ x & \text{bei } x > 1 \end{cases}$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ stetig in den Punkt $x = 1$ fortsetzen?

. . . . (bisher otexL)

A 3.2.17 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$

(a) Bestimmen Sie die einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x \searrow 1} f(x)$ und $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x)$.

(b) Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$?
Falls ja, welchen Wert hat er ? Falls nein, warum nicht ?

A 3.2.18 Zeichnen Sie den Graphen der auf $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ definierten Funktion $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2, \\ \dfrac{x}{2} + 2, & x > 2 \end{cases}.$

(a) Bestimmen Sie die einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x \searrow 2} f(x)$ und $\lim\limits_{x \nearrow 2} f(x)$.

(b) Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$?
Falls ja, welchen Wert hat er ? Falls nein, warum nicht ?

(c) Bestimmen Sie die einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x \searrow 5} f(x)$ und $\lim\limits_{x \nearrow 5} f(x)$.

(d) Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$?
Falls ja, welchen Wert hat er ? Falls nein, warum nicht ?

A 3.2.19 Begründen Sie, warum die folgenden Funktionen über ihrem Definitionsbereich stetig sind:

(a) $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$ (ii) $f_2(x) = \left| \dfrac{x-2}{x^2-2} \right|$ (iii) $f_3(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{1 + x^4}$

A 3.2.20 Überprüfen Sie die Stetigkeit der Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit

(a) $D = [2, \infty[$ und $f\colon x \mapsto \sqrt{4x - 8}$

(b) $D = \mathbb{R}$ und $f\colon x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}, & x \neq 3, \\ 5, & x = 3. \end{cases}$

(c) $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ und $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x-4} - 7x$

. . . . (Die Sägezahnfunktion)

A 3.2.21 Die Funktion zack: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $\quad \mathrm{zack}(x) = \left| \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor - x \right|.$
Wie sieht der Graph der Funktion zack aus ? Beweisen Sie:

(a) Für $|x| \leq \frac{1}{2}$ gilt $\mathrm{zack}(x) = |x|$.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\mathrm{zack}(x + n) = \mathrm{zack}(x)$.

(c) zack ist stetig.

. . . . (Weitere Beispiele)

A 3.2.22 (a) Zeigen Sie $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1$

(b) Zeigen Sie die Stetigkeit von $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

A 3.2.23 Diskutieren Sie, ob die folgenden Funktionen f stetig sind. (2+2+2+2 P)

(a) $f(x) := \cosh(x) := \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$ auf ganz $\mathbb{R}$.

(b) $f(x) := \lfloor x \rfloor$ auf $[0, 1[$ und $[0, 2[$. (c) $f(x) := x^2$ auf $[0, \infty[$. (d) $f(x) := \sqrt[3]{x}$ auf $[0, \infty[$.

Bonusfrage: Welche der Funktionen sind gleichmäßig stetig ? (2+2+2+2 ZP)

A 3.2.24 Warum ist die Funktion $f(x) := x^x$ auf $]0, \infty[$ stetig?

. . . . (Funktionalgleichungen stetiger Funktionen – weitere Bsp.e bei allgemeine Potenz)

A 3.2.25 Zeigen **oder** widerlegen Sie:
Sind $f, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\forall q \in \mathbb{Q}\colon f(q) = h(q)$, dann gilt schon $\forall x \in \mathbb{R}\colon f(x) = h(x)$.

A 3.2.26 Welche stetigen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllen die Funktionalgleichung $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon f(x+y) = f(x)+f(y)$?

Alternative Formulierung inklusive Anleitung:

Verwenden Sie die bereits in der vorangegangenen Aufgabe bewiesene Aussage

> „Sind f und g zwei auf ganz $\mathbb{R}$ definierte stetige Funktionen und gilt $f(r) = g(r)$ für alle $r \in \mathbb{Q}$, so ist sogar $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.“,

um alle stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu finden, die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$ erfüllen. Setzen Sie dazu $a = f(1)$ und berechnen Sie nacheinander $f(0)$, $f(n)$ für $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{m}{n}\right)$ für $m, n \in \mathbb{N}$, $f(x)$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

A 3.2.27 Finden Sie alle stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die Gleichung $f(x+y) = f(x)+2f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllen.

. . . . (Anwendung der ε-δ-Definition)

A 3.2.28 Zeigen Sie, dass die ε-δ-Charakterisierung äquivalent zur Stetigkeit ist (Satz 11.3).

A 3.2.29 Beweisen Sie mittels ε-δ-Definition, dass die Wurzelfunktion $f(x) := \sqrt{x}$ im Punkt $a := 1$ stetig ist.

Leichte Variation:

Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 9} \sqrt{x}$. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mittels ε-δ-Definition.

A 3.2.30 Zeigen Sie: Auf ganz $\mathbb{Q}$ ist die Funktion $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ stetig, welche definiert ist durch

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x^2 < 2, \\ 1, & \text{falls } x^2 > 2. \end{cases}$$

Alternative Formulierung:

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Funktion $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mit $$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x^2 < 2, \\ 1, & \text{falls } x^2 > 2 \end{cases}$$ ist auf ganz $\mathbb{Q}$ stetig.

A 3.2.31 Zeigen Sie: Ist die Funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt, so ist $x \mapsto x \cdot g(x)$ in 0 stetig.

A 3.2.32 Zeigen Sie: Ist $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $h(0) = 0$, $\eta > 0$ und $g\colon [-\eta, \eta] \to \mathbb{R}$ beschränkt, dann ist die Funktion $x \mapsto g(x) \cdot h(x)$ in 0 stetig.

Alternative Formulierung:

Sei $\eta > 0$ und $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $h(0) = 0$. Zeigen oder widerlegen Sie: Für jede beschränkte Funktion $g\colon [-\eta, \eta] \to \mathbb{R}$ ist die Funktion $x \mapsto g(x) \cdot h(x)$ in 0 stetig.

Leichte Variation:

Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine in 0 stetige Funktion mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass dann für eine beliebige beschränkte Funktion $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ auch $f \cdot g$ in 0 stetig ist.

A 3.2.33 Zeigen Sie das Corollar zu Satz 11.3:
Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$ mit $f(a) \neq 0$. Dann existiert für ein $\delta > 0$ eine δ-Umgebung $U_\delta := D \cap \;]a - \delta, a + \delta[$ von a, so dass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in U_\delta$ gilt.

A 3.2.34 Seien $a < b$, $f\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ stetig in $c \in]a,b[$. Zeigen Sie, dass dann zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $U_\delta(c) :=]c - \delta, c + \delta[\subset]a,b[$ und $|f(x)| \geq (1 - \varepsilon)|f(c)|$ für alle $x \in U_\delta(c)$ gilt.

. . . . (Beispiele unstetiger Funktionen)

A 3.2.35 Zeigen Sie die Unstetigkeit von nichtkonstanten Treppenfunktionen.

A 3.2.36 Sei $\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$. Ist dann $f(x) := \lfloor x \rfloor$ auf $[0, 2[$ stetig ?

A 3.2.37 Geben Sie eine monotone Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, welche abzählbar unendlich viele Spungstellen besitzt.

A 3.2.38 Geben Sie eine monotone Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ an, welche abzählbar unendlich viele Spungstellen besitzt.

A 3.2.39 Bestimmen Sie die Menge aller Punkte in denen die folgende Funktion stetig ist:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,, \qquad f(x) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{(x-1)x}{x^2 - 1} & \text{für } x \notin \{-1, 1\} \,, \\ \dfrac{1}{2} & \text{für } x = 1 \,, \\ 0 & \text{für } x = -1 \,. \end{cases}$$

A 3.2.40 Zeigen Sie: Die **Dirichlet-Funktion** $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ ist in keinem Punkt stetig.

Leichte Abwandlung:

Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\,, \\ 1, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$
Zeigen Sie, dass f in keinem Punkt des Definitionsbereiches stetig ist.

A 3.2.41 Die **modifizierte Dirichlet-Funktion** $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$d(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}\,, \\ \dfrac{1}{n} & \text{für } x = \dfrac{z}{n} \text{ mit teilerfremden } n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass d in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig und in jedem $x \in \mathbb{Q}$ unstetig ist.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie die Stetigkeit auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und die Unstetigkeit auf $\mathbb{Q}$ der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\min\{n \in \mathbb{N}\colon nx \in \mathbb{Z}\}} & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.6}$$

A 3.2.42 Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, welche durch $f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ definiert ist?

Alternative Formulierung:

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ definiert.
In welchen $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion stetig, in welchen nicht ?

A 3.2.43 Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, welche durch $f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{für } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ definiert ist?

.... (oL)

A 3.2.44 Bestimmen Sie den natürlichen Definitionsbereich und untersuchen Sie die stetige Fortsetzbarkeit von

$$f(x) = \frac{7x^4 + 12x^3 - 4x^2 + 4x + 8}{x^3 + 3x + 14}$$

A 3.2.45 Skizzieren Sie die folgenden Funktionen und untersuchen Sie sie auf Stetigkeit:

(a) $f(x) = x - [x]$ (b) $g(x) = (x - [x])(x - [x] - 1)$

(c) $h(x) = \left(x - \dfrac{[x]}{2}\right)\left(x - \dfrac{[x]+1}{2}\right)$

.... (Schnittstellenaufgaben)

A 3.2.46 Seien $f(x) = 2x + 3$ und $g(x) = x^2 - 2x - 24$ Funktionen auf $\mathbb{R}$. Ermitteln Sie die Funktionen $(f \circ g)(x)$ sowie $(g \circ f)(x)$ und bestimmen Sie den Wertebereich von $f, g, f \circ g$ und $g \circ f$.

3.3 Gleichmäßige, Lipschitz- und Hölder-Stetigkeit

....(Allgemeine Zusammenhänge)

A 3.3.1 Zeigen Sie: Lipschitz-stetige Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ sind gleichmäßig stetig.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie: Eine Lipschitz-stetige Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist auch gleichmäßig stetig.

A 3.3.2 Zeigen Sie: Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f auf $[a,b]$ sogar gleichmäßig stetig.

Alternative Formulierung:

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Zeigen Sie:
Ist f auf $[a,b]$ stetig, so ist f auf $[a,b]$ sogar gleichmäßig stetig.

A 3.3.3 Sei $a < b < c \leq \infty$. Ist eine auf $[a,c[$ stetige und auf $[a,b]$ und $[b,c[$ gleichmäßig stetige Funktion auch auf $[a,c[$ gleichmäßig stetig?

A 3.3.4 (a) Sei f eine gleichmäßig stetige Funktion auf D und $\big(x_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in D. Zeigen Sie, dass die Bildfolge $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchy-Folge ist.

(b) Gilt Aussage (a) auch für stetige, aber nicht unbedingt gleichmäßig stetige Funktionen?

....(Standardbeispiele)

A 3.3.5 Ist die Funktion $f(x) := x^2$ auf $[0,b]$, $b > 0$, gleichmäßig stetig ? Auch auf $[0,\infty[$?

Alternative (erweiterte) Formulierung für den zweiten Teil:

Untersuchen sie die Funktion $x^2\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit.

A 3.3.6 Zeigen Sie, dass $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt[3]{x}$ gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

A 3.3.7 Beweisen Sie:

(a) Die Funktion $f(x) := \dfrac{1}{x}$ ist auf jedem Intervall $[a,\infty[$, $a > 0$, gleichmäßig stetig.

(b) Die Funktion $f(x) := \dfrac{1}{x}$ ist auf $]0,\infty[$ nur stetig (und nicht gleichmäßig stetig).

Leichte Variation:

Zeigen Sie für die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

(a) f ist stetig auf dem Intervall $D \ = \ ]0,\infty[$.

Verwenden Sie dabei direkt die ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit:

$$\forall\, y \in D\, \forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta \ = \ \delta(y,\varepsilon) > 0\, \forall\, x \in D\colon\ (|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

(b) f ist nicht gleichmäßig stetig auf dem Intervall $]0,1]$;

(c) f ist gleichmäßig stetig auf dem Intervall $[1,\infty[$.

. . . . (Weitere Beispiele)

A 3.3.8 Zeigen Sie, dass die in (3.1) ermittelte Funktion f auf $[K, \infty[$ gleichmäßig stetig ist, wobei $K \in \mathbb{R}$ so groß sei, dass $f(x)$ für $x \geq K$ wohldefiniert ist.

A 3.3.9 Existiert ein $f\colon [0,1[\to \mathbb{R}$ beschränkt, stetig, aber nicht gleichmäßig stetig?

A 3.3.10 Existiert ein $f\colon\ ]0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt, stetig, aber nicht gleichmäßig stetig?

. . . . (Hölder-Stetigkeit)

A 3.3.11 Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I heißt **Hölder-stetig mit Exponent** $\alpha > 0$, falls es ein $L < \infty$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|^\alpha$ für alle $x, y \in I$ gibt.

(a) Zeigen Sie, dass Hölder-Stetigkeit gleichmäßige Stetigkeit impliziert.

Alternative Formulierung:
Beweisen Sie, dass jede Hölder-stetige Funktion f auf einem Intervall I mit Exponent $\alpha > 0$ gleichmäßig stetig auf I ist.

(b) Zeigen Sie, dass $f\colon [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) \ := \ \begin{cases} \dfrac{-1}{\ln(x)} & \text{für } 0 < x \leq \frac{1}{2}\ , \\ 0 & \text{für } x = 0\ , \end{cases}$$

stetig ist, jedoch kein $\alpha > 0$ existiert, für das f Hölder-stetig mit Exponent α ist.

. . . . (Stetige Funktionen auf kompakten Mengen – Satz vom Minimum/Maximum)

A 3.3.12 Zeigen Sie, dass das Bild kompakter Mengen unter stetigen Funktionen kompakt ist.

A 3.3.13 Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

Welche Voraussetzungen an f und I garantieren, dass f auf I ein Maximum und Minimum annimmt ?

A 3.3.14 Hat zu gegebenen $c, d \in \mathbb{R}$ die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) := cx + d$ ein Minimum ? Wenn ja, wie lautet es ?

A 3.3.15 Zeigen Sie:
Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, so besitzt f ein Maximum oder ein Minimum.

3.4 Der Zwischenwertsatz

A 3.4.1 Zeigen **oder** widerlegen Sie:
Zwischen je zwei reellen Zahlen liegt immer eine rationale Zahl.[1]

A 3.4.2 Folgt aus der Stetigkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ schon, dass f konstant ist ?

Alternative Formulierung:

Falls $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ stetig ist, muss dann f konstant sein?

A 3.4.3 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir nennen $x \in \mathbb{R}$ einen **Schattenpunkt**, wenn ein $y > x$ mit $f(y) > f(x)$ existiert. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, keine Schattenpunkte, jedoch alle Punkte im Intervall $]a, b[$ seien Schattenpunkte. Zeigen Sie:

(i) $\forall x \in \,]a, b[$ gilt $f(x) \le f(b)$ (ii) $f(a) = f(b)$.

A 3.4.4 Formulieren Sie den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen und beweisen Sie, dass die Funktion $g(x) := x^3 + x + 1$ eine reelle Nullstelle besitzt.

A 3.4.5 Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) := x^3 - 3x + 1$ genau drei reelle Nullstellen besitzt.

A 3.4.6 Beweisen Sie mit Hilfe des **Zwischenwertsatzes**:

(a) Jede Polynomfunktion von ungeradem Grad besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

(b) Die Polynomfunktion $f(x) = x^6 - x^3 + x - 2$ besitzt mindestens zwei Nullstellen in $\mathbb{R}$.

(c) Die Funktion $f(x) = x^6 - 3x^5 + x^3 - 5x + 3$ besitzt zwei Nullstellen im Intervall $[0, 3]$.

(d) Ist $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(1)$, dann gibt es ein $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ mit $f(p) = f\left(p + \frac{1}{2}\right)$.

Zeigen Sie nun weiter den sogenannten **Antipodensatz**:
Angenommen, die zeitabhängige Temperaturverteilung auf der (idealisierten) Erde sei eine stetige Funktion auf $\mathbb{R} \times S_2$. Dann existieren zu jedem Zeitpunkt auf dem Äquator zwei Antipoden (d.h., zwei Punkte, deren Verbindungsstrecke durch den Erdmittelpunkt verläuft) mit gleicher Temperatur.

(e) Ist $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(1)$, dann gibt es ein $p \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$ mit $f(p) = f\left(p + \frac{1}{3}\right)$.

(f) Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = b$ und $f(b) = a$.
Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = a + b - f(\xi)$.

(g) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ besitzt $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - a} + \dfrac{x^6 + 1}{x - b}$ eine Nullstelle in $]a, b[$.

(h) Zu vorgegebenen Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \,]a, b[$ finden wir zu einer auf $]a, b[$ stetigen Funktion f ein $\xi \in \,]a, b[$ mit $nf(\xi) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.

Alternative Formulierung:

Sei $f\colon \,]a, b[\to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:
Zu vorgegebenen Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \,]a, b[$ existiert ein $\xi \in \,]a, b[$ mit $nf(\xi) =$

[1] Das bedeutet, dass die rationalen Zahlen dicht in den reellen Zahlen liegen, d.h. für jede reelle Zahl x existiert eine Folge rationaler Zahlen x_n mit $x_n \to x$.

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Hinweis: Für eine Teilmenge E eines angeordneten Körpers mit Elementen $e_1, \ldots, e_n$ gilt

$$\min E \;\leq\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k \;\leq\; \max E\;.$$

(i) Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f([a,b]) \subseteq [a,b]$, dann[2] existiert ein $p \in [a,b]$ mit $f(p) = p$.

Alternativ (nicht ganz dasselbe, aber gleicher Lösungsansatz möglich):

Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $a < f(a), f(b) < b$, dann besitzt f einen Fixpunkt $\xi \in\,]a,b[$.

A 3.4.7 Zeigen Sie mit Hilfe des **Brouwerschen Fixpunktsatzes** im $\mathbb{R}^1$:
Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f([a,b]) \subseteq [a,b]$, so existiert ein $p \in [a,b]$ mit $f(p) = a + b - p$.

Existiert für $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ ein $p \in D$ mit $f(p) = p$, dann heißt p **Fixpunkt** von f.

A 3.4.8 Existieren ein Intervall $D \subset \mathbb{R}$ und ein $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(D) \subset D$, so dass

(a) f in D keinen Fixpunkt besitzt ? (+1 ZP)

(b) f in D mehr als einen Fixpunkt besitzt ? (+1 ZP)

A 3.4.9 Beweisen Sie:
Es sei $A \subset \mathbb{R}$ kompakt[3] und $f\colon A \to \mathbb{R}$ eine Kontraktion (d.h. $|f(y) - f(x)| \leq L|x - y|$ mit $L < 1$ für alle $x, y \in A$) mit $f(A) \subset A$. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt (d.h. ein $x \in A$ mit $f(x) = x$ und die für einen beliebigen Startwert $x_0 \in A$ durch $x_{n+1} := f(x_n)$ für $n \geq 0$ definierte Folge konvergiert gegen den Fixpunkt.

....(Beispiele aus dem Kuriositätenkabinett)

A 3.4.10 Zeigen Sie, dass sich die durch $f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ nicht stetig in den Nullpunkt fortsetzen lässt, jedoch f bei beliebiger Festsetzung von $f(0) \in [-1,1]$ die „Zwischenwerteigenschaft“ besitzt, d.h., für beliebige $a < b$ mit $f(a) \neq f(b)$ existiert zu jedem $c \in\,]f(a), f(b)[$ (bzw. zu jedem $c \in\,]f(b), f(a)[$) ein $p \in\,]a,b[$ mit $f(p) = c$.

[2] Dies ist eine Variante des **Brouwerschen Fixpunktsatzes** im $\mathbb{R}^1$.

[3] Dies ist in diesem Fall gleichbedeutend mit beschränkt und abgeschlossen

3.5 Umkehrfunktionen, Logarithmus, allgemeine Potenz

. . . . (Vorbereitung und Anwendung des Satzes über die stetige Umkehrfunktion)

A 3.5.1 Zeigen Sie: Eine streng monotone Funktion ist injektiv.

A 3.5.2 Es existiert eine injektive Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, die nicht monoton ist.

A 3.5.3 Geben Sie ein Beispiel einer bijektiven Funktion $f\colon [a,b] \to [a,b]$ an, die nicht monoton ist.

A 3.5.4 Beweisen Sie: Eine stetige und injektive Funktion auf einem Intervall ist streng monoton.

A 3.5.5 Beweisen Sie, dass die Umkehrfunktion jeder stetigen bijektiven Funktion $f\colon \mathbb{R} \to I$ auf dem Intervall $I := f(\mathbb{R})$ stetig ist.

A 3.5.6 Zeigen Sie: Jede monotone Funktion besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

A 3.5.7 Zeigen Sie, dass für jede streng monotone (aber nicht unbedingt stetige) Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon f([a,b]) \to [a,b] \subset \mathbb{R}$ stetig ist.

. . . . (Allgemeine Potenz)

A 3.5.8 Zeigen Sie:

Satz 12.4: Die Funktion $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und es gilt:

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp_a(x+y) \ = \ \exp_a(x)\exp_a(y)$

(ii) $\forall n \in \mathbb{Z}\colon\ \exp_a(n) \ = \ a^n$ (iii) $\forall p \in \mathbb{Z}\ \forall q \in \mathbb{N},\ q \geq 2\colon\ \exp_a\left(\frac{p}{q}\right) \ = \ \sqrt[q]{a^p}$

Satz 12.5 [Rechenregeln für Potenzen]: Für alle $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ mit $a > 0, b > 0$ gilt

(i) $a^x a^y \ = \ a^{x+y}$ (ii) $(a^x)^y \ = \ a^{xy}$ (iii) $a^x b^x \ = \ (ab)^x$ (iv) $\left(\frac{1}{a}\right)^x \ = \ a^{-x}$

A 3.5.9 Sei $y > 0$ gegeben. Lösen Sie die Gleichung $2^x = y$ mittels der Exponentialfunktion und des natürlichen Logarithmus nach x auf.

A 3.5.10 Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[,\ f(x) := 2^x$, stetig? Ist auch die Umkehrfunktion von f stetig?

A 3.5.11 Zeigen Sie: Die Funktion $x \mapsto a^x$ ist

(i) streng monoton wachsend, falls $a > 1$; (ii) streng monoton fallend, falls $1 > a > 0$.

A 3.5.12 Warum ist die Funktion $f(x) := x^x$ auf $]0,\infty[$ stetig?

. . . . (Stetigkeit und Funktionalgleichung)

A 3.5.13 Welche stetigen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllen die Funktionalgleichung $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$?

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie **Satz 12.6 [Funktionalgleichung]**:
Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\forall x, y\colon F(x+y) \ = \ F(x)F(y)\ .$$

Dann ist entweder $F \equiv 0$ oder $a := F(1) > 0$ und $\forall x \in \mathbb{R}\ :\ F(x) = a^x \ := \ \exp(x \cdot \ln(a))$.

A 3.5.14 Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen $h\colon\ ]0,\infty[\to\mathbb{R}$, die für beliebige $x, y > 0$ die Gleichung $h(x\cdot y) = h(x) + h(y)$ erfüllen.

. . . . (Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen)

A 3.5.15 Die Funktionen $\cosh\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ (cosinus hyperbolicus) und $\sinh\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ (sinus hyperbolicus) sind definiert durch

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) \qquad \text{und} \qquad \sinh(x) := \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)\ . \tag{3.7}$$

Weiterhin definieren wir die Funktion $\tanh\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ (tangens hyperbolicus) durch

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\ . \tag{3.8}$$

Zeigen Sie:

(i) Die Funktionen aus (3.7) und (3.8) sind stetig.

(ii) Für alle $x\in\mathbb{C}$ gilt $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$.

(iii) Die Funktion sinh bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab.

A 3.5.16 Beweisen Sie, dass die durch (3.7) definierte Funktion $\sinh\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stetige Umkehrabbildung $\operatorname{arsinh}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ besitzt.

Erweiterte Formulierung (inklusive area tanh):

Zeigen Sie: Die Funktionen $\sinh\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $\tanh\colon\mathbb{R}\to]-1,1[$ besitzen die Umkehrfunktionen $\operatorname{arsinh}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (Areasinus hyperbolicus), $\operatorname{artanh}\colon]-1,1[\to\mathbb{R}$ (Areatangens hyperbolicus), und es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh}(x) &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \quad (x\in\mathbb{R}),\\ \operatorname{artanh}(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (|x|<1).\end{aligned}$$

A 3.5.17 (a) Ist der **Cosinus Hyperbolicus** stetig, d.h., die Funktion

$$\cosh\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ , \qquad x\mapsto\cosh(x) := \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\ ? \tag{3.9}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion in (3.9) nur ein Minimum, aber kein Maximum besitzt.

Bonus: Warum widerspricht dies nicht dem Satz vom Minimum/Maximum ?

(c) Begründen Sie (ohne explizite Bestimmung), warum cosh auf $[0,\infty[$ eine Umkehrfunktion $\operatorname{arcosh}\colon[1,\infty[\to[0,\infty[$ (**Area Cosinus Hyperbolicus**) besitzen muss.

(d) Zeigen Sie, dass $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ für alle $x\in[1,\infty[$ gilt.

Alternative Formulierung für (c,d):

Zeigen Sie, dass cosh auf $[0,\infty[$ eine Umkehrfunktion $\operatorname{arcosh}\colon[1,\infty[\to[0,\infty[$ (**Area Cosinus Hyperbolicus**) besitzt, und dass für alle $x\geq 1$ gilt

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\ .$$

. . . . (Spezielle Grenzwerte/Kombi)

A 3.5.18 Überprüfen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\forall k \in \mathbb{N}_0\colon \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^k} = \infty$ (b) $\forall k \in \mathbb{N}_0\colon \lim\limits_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0$

(c) $\forall k \in \mathbb{N}_0\colon \lim\limits_{x\searrow 0} x^k e^{\frac{1}{x}} = 0$ (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ (e) $\lim\limits_{x\searrow 0} \ln(x) = -\infty$

(f) $\forall a > 0\colon \left(\lim\limits_{x\searrow 0} x^a = 0 \;\wedge\; \lim\limits_{x\searrow 0} x^{-a} = \infty \;\wedge\; \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^a} = 0 \;\wedge\; \lim\limits_{x\searrow 0} x^a \ln(x) = 0\right)$

(g) $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = 1$

A 3.5.19 Zeigen Sie $\lim\limits_{x\searrow 0} x^x = 1$.

A 3.5.20 Warum ist die Funktion $F(x) := x^x$ auf $]0,\infty[$ stetig? Ist sie auch stetig in 0 fortsetzbar?

A 3.5.21 (a) Ist die Funktion $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0) = 1$ und $f(x) = x^{\sin(x)}$ für $x > 0$ stetig?

(b) Ist die in (a) definierte Funktion $f(x)$ auf $[\alpha,\beta]$ mit $\beta > \alpha > 0$ gleichmäßig stetig? Ist sie es auch auf $[0,\alpha]$ mit $\alpha > 0$?
Bonusfrage: Ist f auch auf $[0,\infty[$ gleichmäßig stetig?

A 3.5.22 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(c) $\lim\limits_{x\to 3} \ln(|x^2 - 5x + 6|) - \ln(|x - 3|)$

A 3.5.23 Sei $a > 0$. Nutzen Sie die Stetigkeitseigenschaften von exp und ln, um zu zeigen, dass

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

. . . . (Folgen und Reihen mit Logarithmus bzw. allgemeiner Potenz)

A 3.5.24 Beweisen Sie, dass für eine Folge $x_n > 0$ die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ genau dann konvergiert, wenn die Folge x_n gegen eine positive Zahl konvergiert.

A 3.5.25 Berechnen Sie die N-te Partialsumme und im Falle der Existenz auch den Grenzwert von

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

. . . . (Binomialreihe)

A 3.5.26 Zeigen Sie mit Hilfe der Binomialreihe für $s = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ (statt $s \in \mathbb{N}$), dass für die kinetische Energie $E = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right)$ eines mit der Geschwindigkeit $v < c$ bewegten Körpers der Ruhemasse m_0 in der Relativitätsttheorie die Näherung $E = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 v^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \ldots$ gilt.

3.6 Der Körper der komplexen Zahlen

A 3.6.1 Wie ist die komplexe Multiplikation definiert?

Zeigen Sie, dass die komplexe Multiplikation kommutativ ist.

A 3.6.2 (a) Was fällt Ihnen auf, wenn Sie die folgenden Matrix-Vektor-Multiplikationen

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{berechnen ?}$$

(b) Bestimmen Sie das Matrizenprodukt $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
Was können wir im Fall $(a,b) \neq (0,0)$ sehen ?
Welche Struktur hat die Menge aller dieser Matrizen mit der Matrizenmultiplikation ?

(c) Verwenden Sie (b) um auf das multiplikative Inverse einer komplexen Zahl zu schließen.

A 3.6.3 Die Menge $\mathbb{R}^2$ sei mit den Verknüpfungen $\oplus, \otimes \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche durch

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ac-bd \\ ad+bc \end{pmatrix}$$

definiert seien, versehen. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ ein Körper ist.[4]

Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A 3.6.4 Berechnen Sie das Produkt $\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\mathrm{i}\right)(12 + 18\mathrm{i})$.

A 3.6.5 Zeigen Sie: Es gelten

(i) $\forall z \in \mathbb{C} \;:\; \overline{\overline{z}} = z$, (ii) $\forall z, w \in \mathbb{C} \;:\; \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, (iii) $\forall z, w \in \mathbb{C} \;:\; \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

A 3.6.6 Zeigen Sie, dass $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt.

A 3.6.7 Wie sind Realteil $\mathrm{Re}(z)$ und Imaginärteil $\mathrm{Im}(z)$ einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ definiert?

A 3.6.8 Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil der komplexen Zahl $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}}$.

A 3.6.9 Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

(i) $\dfrac{(1+\mathrm{i})^5}{(1-\mathrm{i})^3}$ (ii) $\dfrac{(1+\mathrm{i})^8}{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^6}$ (iii) $\dfrac{(1-\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i})^4}$ (iv) $\dfrac{\mathrm{i}^3}{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^2}$

A 3.6.10 Was ist falsch an

$$\mathrm{i}^2 = -1 \implies \mathrm{i} = \sqrt{-1} \implies \frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{-1} = \mathrm{i} \implies 1 = \mathrm{i}^2 = -1 \;?$$

---

[4] Die Verknüpfung $\otimes$ kann als eine spezielle Matrix-Vektor-Multiplikation aufgefasst werden, denn es ist $\begin{pmatrix} ac-bd \\ ad+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, wobei wegen $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$ die auftretenden Matrizen bis auf einen positiven Faktor orthogonal sind und daher die Multiplikation mit einer komplexen Zahl als eine Drehstreckung bzw. Drehstauchung interpretiert werden kann (siehe auch Polarkoordinatendarstellung).

A 3.6.11 Zeigen Sie, dass es für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Inverses gibt und geben Sie es explizit in der Gestalt $x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

Alternative Formulierung:
Berechnen Sie das multiplikative Inverse von $z := a + \mathrm{i}b \neq 0$ in $\mathbb{C}$.

A 3.6.12 Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, den Betrag, das Quadrat sowie das konjugiert Komplexe, das additive und das multiplikative Inverse (jeweils in der Gestalt $x + \mathrm{i}y$ mit reellen x, y) für die komplexe Zahl

$$z \;:=\; (45 + 15\mathrm{i})\left(\frac{4}{5} + \frac{7}{3}\mathrm{i}\right) .$$

. . . . (Weitere Eigenschaften komplexer Zahlen)

A 3.6.13 Zeigen Sie:

$$\text{(i) } \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\colon \left|\frac{\bar{z}}{z}\right| \;=\; 1 \qquad \text{(ii) } \forall z \in \mathbb{C}\colon \Big(|z| = 1 \Longrightarrow \exists w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\colon \frac{\bar{w}}{w} \;=\; z\Big)$$

A 3.6.14 Zeigen Sie die **Parallelogramm-Gleichung**: $\forall z, w \in \mathbb{C}\colon |z+w|^2+|z-w|^2 \;=\; 2\,(|z|^2 + |w|^2)$.

A 3.6.15 Beweisen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$ die negative Parallelogrammgleichung $|z+w|^2-|z-w|^2 = 4\,\mathrm{Re}(z\bar{w})$.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie: Für beliebige $w, z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z + w|^2 - |z - w|^2 \;=\; 4\,\mathrm{Re}(z\overline{w}).$$

Dabei bezeichnet $\mathrm{Re}(z)$ den Realteil von $z \in \mathbb{C}$.

A 3.6.16 Zeigen Sie, dass das Dreieck mit den Ecken $0, z, w$ genau dann ein gleichseitiges Dreieck ist, wenn $|z|^2 = |w|^2 = 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})$ gilt.

A 3.6.17 (a) Sei $p(z)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten.
Zeigen Sie: $\forall z \in \mathbb{C}\colon \Big(p(z) = 0 \iff p(\overline{z}) = 0\Big)$.

Alternative Formulierung:

Sei $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$.

Beweisen Sie: Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, dann ist auch $\bar{z}$ eine Nullstelle von p.

(b) Ein Polynom ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten besitzt (mind.) eine reelle Nullstelle.

(i) Zeigen Sie die obige Aussage mit Hilfe von (a).
(ii) Zeigen Sie die obige Aussage mittels Zwischenwertsatz.

Leichte Variation in der Aufgabenstellung:

Warum existiert für ein Polynom p von ungeradem Grad mit reellen Koeffizienten mindestens eine reelle Lösung der Gleichung $p(z) = 0$?

A 3.6.18 Bestimmen Sie die folgenden Mengen und zeichnen Sie sie gegebenenfalls

(a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(\bar{z}) = 3\}$,

(b) $M_2 := \{z \mid |z| = 1\}$, (c) $M_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z - \bar{z}) = 1\}$.

A 3.6.19 Wie sehen die folgenden Teilmengen $M \subset \mathbb{C}$ der komplexen Ebene aus? Fertigen Sie eine Skizze an und begründen Sie diese.

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 3\} \qquad M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 1\}$$
$$M_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid z - \bar{z} = \mathrm{i}\}$$

A 3.6.20 Skizzieren Sie die Teilmengen

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - 4 + \mathrm{i}| = 3\} \text{ und } M_2 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, z + \bar{z} = 2\}.$$

und begründen Sie Ihre Skizze.

A 3.6.21 Stellen Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Ebene dar: (2+2+1 P)

(a) $A := \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{1}{\operatorname{Re}(z)} > \frac{1}{\operatorname{Im}(z)}\right\}$ (c) $C := \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - \mathrm{i}| = |z + 1|\right\}$

A 3.6.22 Skizzieren Sie die Teilmenge $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\right\}$ von $\mathbb{C}$.
Alternative Formulierung:
Bestimmen und skizzieren Sie die Lösungsmenge der Gleichung $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$.

A 3.6.23 Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene:

$$A = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - 1 + \mathrm{i}| \leq 2 \;\wedge\; -1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 0\right\}, \quad B = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 2\operatorname{Im}(z) + 1 = \operatorname{Re}(z^2)\right\}.$$

A 3.6.24 Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ und begründen Sie Ihre Skizze:

$$M_1 := \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - 2 + 3\mathrm{i}| = 5\right\} \qquad \text{und} \qquad M_2 := \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = \operatorname{Re}(z) + 1\right\}$$

Welche Menge wird durch $M_3 := \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z - \bar{z} = 3\right\}$ beschrieben?

Skizzieren Sie die Menge

$$M_4 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0,\ \operatorname{Im}(z) > 0,\ \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) \leq 1\}.$$

Bestimmen Sie zur Menge $M_5 := \{|z| \colon z \in M_4\}$ im Falle der Existenz Supremum, Infimum, Minimum und Maximum.

.... (Konvergenz von Folgen in $(\mathbb{C}, |.|)$)

A 3.6.25 Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}$. Dann definieren wir

$$\lim_{n\to\infty} = c : \iff \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\colon (n \geq N(\varepsilon) \quad\Longrightarrow\quad |z_n - c| < \varepsilon)$$

Zeigen Sie, dass die Aussagen (1), (2), (3) gleichwertig sind (Dabei ist $\mathrm{Re}(z)$ der Realteil und $\mathrm{Im}(z)$ der Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$):

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n) = c$
(hier konvergiert eine komplexe Zahlenfolge gegen eine komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}$).

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (|z_n - c|) = 0$ (hier konvergiert eine reelle Zahlenfolge gegen den Wert Null).

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(c)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(c)$.

A 3.6.26 Konvergieren die Folgen $a_n := \mathrm{i}^n$ bzw. $b_n := \dfrac{(2+\mathrm{i})^n}{(3-2\mathrm{i})^n}$ in $\mathbb{C}$?

A 3.6.27 Berechnen Sie $\left|\left(\dfrac{3+\mathrm{i}4}{5}\right)^n\right|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

A 3.6.28 Prüfen Sie, ob die Folgen $a_n := \left(\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^n$ bzw. $b_n := \left(\dfrac{3}{5} + \mathrm{i}\dfrac{4}{5}\right)^n$ **alternativ** $c_n := \left(\dfrac{3+4\mathrm{i}}{5}\right)^n$ in $\mathbb{C}$ konvergieren.

Alternative (erweiterte) Formulierung (Teil 2):

Zeigen Sie, dass die durch $a_n := \left(\dfrac{3+4\mathrm{i}}{5}\right)^n$ in $\mathbb{C}$ definierte Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt ist, jedoch keine **Cauchy-Folge** bildet und folglich nicht konvergieren kann.

Hinweis: Für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

A 3.6.29 Prüfen Sie, ob $a_n := \left(\dfrac{\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}\right)^n$, $b_n := \left(\dfrac{3}{5} - \mathrm{i}\dfrac{4}{5}\right)^n$ bzw. $c_n := |b_n|$ in $\mathbb{C}$ konvergieren.

A 3.6.30 Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3+4\mathrm{i}}{6}\right)^n$.

....(Konvergenz – Mix)

A 3.6.31 Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ bis $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Häufungspunkte, indem Sie geeignete Teilfolgen mit ihren Grenzwerten angeben. Geben Sie im Falle der Konvergenz jeweils ein mögliches $N(\varepsilon)$ zu variablem $\varepsilon > 0$ an bzw. im Falle der bestimmten Divergenz ein mögliches $N(L)$ zu variablem $L \in \mathbb{R}$ an.

$$a_n := \mathrm{i}^n,\ \ b_n := \frac{3^n + (-3)^n}{4^n},\ \ c_n := \frac{5^n + (-5)^n}{2^n},\ \ d_n := \left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{3n},\ \ e_n := \left(\frac{-8}{\sqrt{n}+5}\right)^n.$$

.... (oL)

A 3.6.32 Untersuchen Sie die Folge

$$a_n = \frac{r_0 + r_1 n + r_2 n^2 + \ldots + r_k n^k}{s_0 + s_1 n + s_2 n^2 + \ldots + s_k n^k}$$

für vorgegebene $r_j, s_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, k$ mit $s_k \neq 0$, für die der Nenner für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$ von 0 verschieden ist, auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

....(Konvergenz von Reihen in $(\mathbb{C}, |.|)$)

A 3.6.33 Zeigen Sie, dass eine in $\mathbb{C}$ absolut konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_n$ auch konvergent in $\mathbb{C}$ ist.

A 3.6.34 Überprüfen Sie die Reihen (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ und (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}\right)^n$ auf Konvergenz.

Sind die Reihen auch absolut konvergent ?

A 3.6.35 Sei $-z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$ beliebig, fest. Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)(z+n+1)}$.

....(Stetigkeit in $(\mathbb{C}, |.|)$)

A 3.6.36 Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig und $a \in \mathbb{C}$ Häufungspunkt der komplexen Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Zeigen Sie, dass dann $f(a)$ Häufungspunkt der Folge $\big(f(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

....(Schnittstellenaufgaben)

A 3.6.37 Schreiben Sie die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jeweils zu einer Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ einer komplexen Variablen um:

(i) $f_1(x,y) = x$, (ii) $f_2(x,y) = x^2 + y^2$, (iii) $f_3(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, (iv) $f_4(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

3.7 Die Exponentialfunktion im Komplexen

A 3.7.1 Zeigen Sie mit Hilfe der Definition und der Funktionalgleichung:

(a) Zu jedem $c \in \mathbb{C}$ gibt es eine Folge $(a_\ell)_{\ell=0}^{\infty}$, so dass

$$\forall z \in \mathbb{C}\colon\ f(z) = z^2 \exp(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell (z-c)^\ell$$

(b) Es gibt eine Folge $(b_\ell)_{\ell=0}^{\infty}$ gibt, so dass $\forall z \in \mathbb{C}\colon \left(|z| < 1 \quad\Longrightarrow\quad g(z) = \dfrac{z^2}{(1+z)^3} = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell z^\ell \right)$.

Bestimmen Sie explizit die Folgen $(a_\ell)_{\ell=0}^{\infty}$ und $(b_\ell)_{\ell=0}^{\infty}$.

Nutzen Sie dabei nur die Mittel der Vorlesung/Übung, d.h., noch keine Differentialrechnung!

3.8 Die Eulersche Formel – trigonometrische Funktionen

A 3.8.1 Zeigen Sie: Es gelten

(i) $\forall z \in \mathbb{C}\colon \exp(z) \neq 0$, (ii) $\forall z \in \mathbb{C}\colon \exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$, (iii) $\forall x \in \mathbb{R}\colon |\exp(\mathrm{i}x)| = 1$.

Alternative Formulierung von (iii):

Zeigen Sie, dass $|\exp(\mathrm{i}t)| = 1$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt.

. . . . (Formel von Moivre)

A 3.8.2 Zeigen Sie die Formel von **Moivre**: $\forall n \in \mathbb{N}_0\colon (\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)$.

A 3.8.3 Zeigen Sie, dass die Formel von Moivre direkt aus der Eulerschen Formel folgt.

A 3.8.4 Geben Sie für $z = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2016}$ den Real- und Imaginärteil an.

A 3.8.5 Geben Sie Real- und Imaginärteil der Zahl $z = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2015}$ an.

A 3.8.6 Geben Sie Real- und Imaginärteil der Zahl $z = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2011}$ an.

A 3.8.7 Geben Sie Real- und Imaginärteil der Zahl $z = \left(\mathrm{i} - \sqrt{3}\right)^8$ an.

A 3.8.8 Geben Sie Real- und Imaginärteil der Zahl $z = \left(\sqrt{3}\mathrm{i} - 1\right)^8$ an.

A 3.8.9 Beweisen Sie mit Hilfe von $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$ $(z_1, z_2 \in \mathbb{C})$ die Formel $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

A 3.8.10 Verwenden Sie die Formel von Moivre $(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)$, um die Funktion $\cos(3\varphi)$ allein mit Hilfe von $\cos(\varphi)$ und $\sin(\varphi)$ auszudrücken.

A 3.8.11 Finden Sie je ein Polynom $P(x, y) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{jk}x^j y^k$ mit reellen Koeffizienten $a_{j,k}$, so dass

(a) $P(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \cos(3\varphi) - \sin(5\varphi)$;

(b) $P(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \cos(2\varphi) - \sin(3\varphi)$;

(c) $P(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \cos(2\varphi) + \sin(3\varphi)$;

(d) $P(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \sin(2\varphi) + \cos(4\varphi)$;

(e) $P(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \cos(4\varphi) - \sin(6\varphi)$; (f) $P(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \cos(4\varphi)$.

Alternative Formulierung von (b):

Verwenden Sie die in (a) gezeigte Formel, um ein Polynom $P(x, y) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{jk}x^j y^k$ mit reellen Koeffizienten $a_{j,k}$ zu finden, so dass $P(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \cos(2\varphi) - \sin(3\varphi)$ gilt.

A 3.8.12 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} z^k \;=\; \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \;. \tag{3.10}$$

A 3.8.13 Verwenden Sie die Formel von Moivre, um $1 + \cos(\varphi) + \cos(2\varphi) + \cdots + \cos(n\varphi)$ für beliebig große $n \in \mathbb{N}$ allein mit Hilfe von $\cos((n{+}1)\varphi)$, $\sin((n{+}1)\varphi)$, $\cos(\varphi)$ und $\sin(\varphi)$ auszudrücken.

.... (Herleitung der Additionstheoreme mittels Definition/Eulerscher Formel)

A 3.8.14 (a) Stellen Sie $\sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi)$ mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion dar.

(b) Zeigen Sie die Gültigkeit des Additionstheorems $(\sin(\varphi))^2 + (\cos(\varphi))^2 = 1$.

(c) Weisen Sie mit Hilfe von (a) die folgenden Additionstheoreme nach:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos(\varphi)\;, \qquad \cos(\varphi \pm \psi) = \cos(\varphi)\cos(\psi) \mp \sin(\varphi)\sin(\psi)\;,$$
$$2\sin(\varphi)\cos(\varphi) = \sin(2\varphi)\;, \qquad \sin(\varphi \pm \psi) = \sin(\varphi)\cos(\psi) \pm \cos(\varphi)\sin(\psi)\;.$$

Alternative Formulierung für (i) und (iii):

Zeigen Sie die Gültigkeit von $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \;=\; \cos(\varphi)$ und $\sin(2\varphi) \;=\; 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)$.

Alternative (verkürzte) Formulierung:

Stellen Sie $\sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi)$ mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion dar. Berechnen Sie mit Hilfe dieser Darstellung die folgenden Additionstheoreme:

$$(\sin(\varphi))^2 + (\cos(\varphi))^2 = 1\;, \qquad \cos(\varphi \pm \psi) = \cos(\varphi)\cos(\psi) \mp \sin(\varphi)\sin(\psi)\;,$$
$$\frac{1}{2}(\cos(2\varphi) + 1) = (\cos(\varphi))^2\;, \qquad \sin(\varphi \pm \psi) = \sin(\varphi)\cos(\psi) \pm \cos(\varphi)\sin(\psi)\;.$$

A 3.8.15 Zeigen Sie $\sin(x) - \sin(y) \;=\; 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$ für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$.

A 3.8.16 Gegeben sei ein $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\forall k \in \mathbb{Z}\colon (2k{+}1)\pi \neq x$. Zeigen Sie: Mit $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ergeben sich

$$\sin(x) \;=\; \frac{2u}{1+u^2} \qquad \text{sowie} \qquad \cos(x) \;=\; \frac{1-u^2}{1+u^2}\;. \tag{3.11}$$

A 3.8.17 Die Funktion Tangens ist durch $\tan(\varphi) := \dfrac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$ definiert.

(a) Für welche $\varphi \in \mathbb{R}$ ist $\tan(\varphi)$ definiert? Zeichnen Sie den Graphen von $\tan(\varphi)$.

(b) Beweisen Sie das Additionstheorem $\tan(\varphi + \psi) \;=\; \dfrac{\tan(\varphi) + \tan(\psi)}{1 - \tan(\varphi)\tan(\psi)}$.

(c) Zeigen Sie die Identität $\dfrac{1 + \mathrm{i}\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1 - \mathrm{i}\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \;=\; \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$.

A 3.8.18 Zeigen Sie die Verdopplungsformel des Cotangens: $2\cot(2z) = \cot(z) - \tan(z)$.

Bemerkung: Mit Hilfe der Funktionen aus (3.13) definieren wir dabei (sofern möglich)

$$\tan(z) \;:=\; \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \qquad \text{und} \qquad \cot(z) \;:=\; \frac{\cos(z)}{\sin(z)}\;. \tag{3.12}$$

A 3.8.19 Zeigen Sie die Gültigkeit von $\cot(x+y) = \dfrac{\cot(x)\cdot\cot(y)-1}{\cot(y)+\cot(x)}$ für alle $x, y \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

.... (Schnittstellenaufgaben – Anwendung der Eulerschen Formel)

A 3.8.20 Geometrisch: Warum kann man jede komplexe Zahl $z \neq 0$ eindeutig als $z = r\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ schreiben, wobei $r \in \,]0,\infty[$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$?

A 3.8.21 Wie berechnet man zu $z \in \mathbb{C}$ den Radius r und den Winkel φ ?

A 3.8.22 Stellen Sie die komplexen Zahlen in trigonometrischer Form ($z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$) dar:

(a) $1 - \mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$ (b) $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ (c) $1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right) + \mathrm{i}\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$

A 3.8.23 Bestimmen Sie den Betrag r und das Argument φ für die folgenden komplexen Zahlen

(i) $z_1 = \mathrm{i}$, (ii) $z_2 = -1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$ (iii) $z_3 = \dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$.

A 3.8.24 Was ist die komplexe Multiplikation geometrisch ?

A 3.8.25 Geben Sie die komplexen Zahlen

$$z_1 := \frac{7+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \qquad \text{und} \qquad z_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

in Polarkoordinaten an, d.h., in der Gestalt $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$.

A 3.8.26 Stellen Sie die komplexe Zahl $z = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{2-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}$ in der Form $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und in der Form $z = r\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ mit $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi[$, dar. Berechnen Sie auch z^4.

Alternative (erweiterte) Formulierung:

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und in der Form $z = r\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ mit $r \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in [0, 2\pi[$, dar. Berechne auch z^4:

(a) $z_1 = -\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$ (b) $z_2 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{2-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}$

.... (Schnittstellenaufgabe – Ausflug Bogenlänge)

A 3.8.27 Sei $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $A_0^{(n)}A_1^{(n)}...A_n^{(n)}$ der Polygonenzug der Punkte

$$A_k^{(n)} := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k}{n}x}\ , \quad k = 0, ...n\ .$$

(a) Zeigen Sie:
Die Länge $L_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left|A_k^{(n)} - A_{k-1}^{(n)}\right|$ des Polygonenzuges erfüllt $L_n = 2n\left|\sin\left(\dfrac{x}{2n}\right)\right|$.

(b) Beweisen Sie die Identität $\lim\limits_{n\to\infty} 2n\sin\left(\dfrac{x}{2n}\right) = x$.

(c) Zeigen Sie: Im Fall $x \geq 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = x$.

Bemerkung: In der Schule wird $\sin_{\text{Schule}}$ über die Verhältnisse von Seitenlängen im rechtwinkeligen Dreieck definiert. In der Vorlesung wird ab jetzt die Potenzreihendefinition $\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix})$ verwendet. Sei $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Wir betrachten das Dreieck, das durch die Punkte $0, 1, e^{ix}$ der komplexen Zahlenebene definiert wird. Im Dreieck $0, 1, e^{ix}$ ist die Länge der Hypotenuse 1 und die Länge der Gegenkathete des Winkels zwischen den Strecken $0, 1$ und $0, e^{ix}$ ist $\operatorname{Im}(e^{ix})$. Die Größe dieses Winkels sei α. Nach klassischer Definition ist dann

$$\sin_{\text{Schule}}(\alpha) = \frac{|\text{Gegenkathete}|}{|\text{Hypotenuse}|} = \frac{\operatorname{Im}(e^{ix})}{1} = \operatorname{Im}(e^{ix}) \ .$$

Der Begriff der Größe α des Winkels α kann exakt über den Begriff der „Bogenlänge des Einheitskreisbogens von 0 bis e^{ix}“ gefasst werden, aber nicht bei unserem jetzigen Kenntnisstand. Weiter kann man dann zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \alpha$. Es ist auch heuristisch (d.h. ohne exakten Begriff der Bogenlänge) sicher einsichtig, dass durch „Verfeinerung“ des Polygonzuges sich dieser immer mehr an den Kreisbogen „annähert“, also auch die Länge des Polygonzuges sich an die „Länge des Kreisbogens“. (c) besagt nun, dass $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = x$. Damit ist $\alpha = x$ und somit $\sin_{\text{Schule}}(x) = \operatorname{Im}(e^{ix})$. Damit stimmen die klassische Definition und die Definition über die Potenzreihe

$$\sin(x) \;=\; \operatorname{Im}(e^{ix}) \;=\; \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}\right) \;=\; \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}\right)$$

überein.

....(Rekursion mittels Cosinus)

A 3.8.28 Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit $x_1 \geq 0$ und $x_{n+1} = x_n \cdot (\cos(x_n))^2$ für $n \geq 1$. (5 P)

(a) Zeigen Sie die Konvergenz von $(x_n)_{n\geq 1}$ mittels Satz von Bolzano-Weierstraß.

(b) Zeigen Sie, dass der Grenzwert der Folge $\left(\frac{x_n}{\pi}\right)$ eine ganze Zahl sein muss.

(c) Berechnen Sie für die Startwerte $x_1 = 6.2$ bzw. $x_1 = 6.25$ bzw. $x_1 = 6.29$ die Anfangsfolgenglieder

$$\frac{x_1}{\pi}, \frac{x_2}{\pi}, \cdots, \frac{x_{10}}{\pi} \ .$$

3.9 Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen

.... (Anwenden von Additionstheoremen)

A 3.9.1 Berechnen Sie die exakten Werte von $\cos(x), \sin(x), \tan(x)$ an den Stellen $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}$. Verwenden Sie dabei Additionstheoreme.

A 3.9.2 Bestimmen Sie nur unter Verwendung von Additionstheoremen die exakten Werte von

$\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right), \ \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right), \ \tan\left(\frac{3\pi}{10}\right), \ \cot\left(\frac{3\pi}{10}\right)$. **Tipp:** Bestimmen Sie zunächst $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Weiterer Hinweis: Verwenden Sie $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ und (3.10) sowie die Definition des Cosinus.

A 3.9.3 Lösen Sie auf dem Intervall $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ die Gleichung $\sin(x) + \cos(x) = \frac{1}{2}$.

A 3.9.4 Beweisen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$\tan(x+y) \ = \ \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} \ .$$

Zeigen Sie anschließend die **Funktionalgleichung des Arcustangens**: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|\arctan(x) + \arctan(y)| < \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \arctan(x) + \arctan(y) \ = \ \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \ .$$

.... (Grenzwerte/Stetigkeit)

A 3.9.5 Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\arctan(x)}{x^2+1}$.

A 3.9.6 Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\arctan(x)}{x}$.

A 3.9.7 Ist die Funktion $\quad f(x) := \begin{cases} x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$ $\quad$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ?

A 3.9.8 Warum lässt sich die durch $g(x) := \sqrt{|x|}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ definierte Funktion stetig in den Punkt $x = 0$ fortsetzen ?

Hat die stetige Fortsetzung von g auf dem Intervall $\left]-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right[$ ein Maximum/Minimum ?

.... (Folgen und Reihen mit trigonometrischen Funktionen)

A 3.9.9 Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $c_n \ = \ \frac{\sin(n) + (\cos(n))^3}{\sqrt{n}}$.

A 3.9.10 Untersuchen Sie die Reihen $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin(n)}{4^n} \quad$ und $\quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k^k} \quad$ auf Konvergenz.

A 3.9.11 Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^2\pi}{n+1}\right)$ und von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 \cdot \cos(n)}{3^n}$.

A 3.9.12 Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan(n))^n}{2^n}$?

A 3.9.13 Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i} \cdot \arctan(n))^n}{2^n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{n^2\pi}{n+1}\right)$ auf Konvergenz.

. . . . (Erweiterung des Kosinus/Sinus)

A 3.9.14 (a) Beweisen Sie für beliebige $z \in \mathbb{C}$ die absolute Konvergenz der Reihen

$$\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{und} \qquad \sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{3.13}$$

(b) Zeigen Sie: Die so definierten Funktionen $\cos, \sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erfüllen die Gleichungen

$$\cos(z) \;=\; \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) \qquad \text{und} \qquad \sin(z) \;=\; \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)$$

A 3.9.15 Zeigen Sie, dass $|\sin(z)|^2 \;=\; (\sin(\mathrm{Re}(z)))^2 + (\sinh(\mathrm{Im}(z)))^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

A 3.9.16 Zeigen Sie, dass $|\cos(z)|^2 \;=\; (\cos(\mathrm{Re}(z)))^2 + (\sinh(\mathrm{Im}(z)))^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

. . . . (Verkettete Funktionen)

A 3.9.17 Was ist der maximale Definitions- und Wertebereich von $x \mapsto \arcsin\left(\frac{x+1}{2x}\right)$?

A 3.9.18 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und den zugehörigen Wertebereich von

$$f(x) := \arccos\left(\frac{x^2 - x}{x^2}\right).$$

3.10 Lösen von Gleichungen über $\mathbb{C}$

A 3.10.1 Was ist „Wurzelziehen“ bzw. das Lösen der Gleichung $z^n = w$ geometrisch ?

.... (Gleichungen mit **Polynomen 1. Grades**)

A 3.10.2 Geben Sie die Lösung $z \in \mathbb{C}$ von $(1 - \mathrm{i}) \cdot z = \mathrm{i}$ in der Form $z = x + \mathrm{i}y$ an (wobei $x, y \in \mathbb{R}$).

A 3.10.3 Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $(3 + 2\mathrm{i})z = (6 - 5\mathrm{i})$.

.... (Gleichungen mit **Polynomen 2. Grades**)

A 3.10.4 Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 = \mathrm{i}$.

A 3.10.5 Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 = -\mathrm{i}$.

A 3.10.6 Bestimmen Sie in $\mathbb{C}$ alle Lösungen von $z^2 + 49 = 0$ und von $9z^2 + 6z + 5 = 0$.

A 3.10.7 Bestimmen Sie in $\mathbb{C}$ die Nullstellen von $f(z) = z^2 + 36$ und von $g(z) = 2z^2 + 2z + 5$.

A 3.10.8 Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 + 4z + 8 = 0$.

A 3.10.9 Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 = 1 + \mathrm{i}$.

.... (Gleichungen mit **Polynomen 3. Grades**)

A 3.10.10 Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = -1$.

A 3.10.11 Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = -1 + \mathrm{i}$.

A 3.10.12 Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = 1 + \mathrm{i}$.

.... (Gleichungen mit **Polynomen 4. Grades**)

A 3.10.13 Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 = z$.

A 3.10.14 Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 = \mathrm{i}z$ in $\mathbb{C}$.

A 3.10.15 Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 = 8(\mathrm{i}\sqrt{3} - 1)$.

A 3.10.16 Ermitteln Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 = -1$ und skizzieren Sie diese in der Ebene.
Alternative Formulierung:
Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 + 1 = 0$.

A 3.10.17 Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 = 16\mathrm{i}$.

A 3.10.18 Welche Lösungen besitzt die Gleichung $z^4 - \mathrm{i}z^2 = (\mathrm{i} - 1)z^3$ in $\mathbb{C}$?

A 3.10.19 Zeigen Sie, dass es eine reelle und eine rein imaginäre Nullstelle der Gleichung $f(z) = 0$ mit

$$f(z) \;=\; z^4 + 4z^3 + 6z^2 + (6 - 2\mathrm{i})z + 3 - 2\mathrm{i}$$

gibt. Ermitteln Sie anschließend die verbleibenden Nullstellen der Gleichung $f(z) = 0$.

.... (Gleichungen mit **Polynomen 5. Grades**)

A 3.10.20 Wieviele Lösungen in $\mathbb{C}$ besitzt die Gleichung $z^5 + \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})^2 = 0$? Geben Sie sie an.

A 3.10.21 Lösen Sie die Gleichung $z^5 = \mathrm{i}$ in $\mathbb{C}$.

.... (Gleichungen mit **Polynomen 6. Grades**)

A 3.10.22 Welche $z \in \mathbb{C}$ lösen die Gleichung $z^6 + (1-2\mathrm{i}\sqrt{2})z^3 - 2\mathrm{i}\sqrt{2} = 0$.

.... (Allgemeine Kreisteilungsgleichung)

A 3.10.23 Geben Sie zu beliebigem $n \in \mathbb{N}$ die n-ten Einheitswurzeln an, d.h. alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^n = 1$.

.... (weitere Teilmengen in $(\mathbb{C}, |.|)$)

A 3.10.24 Stellen Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Ebene dar:

$$B := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \cos(2\,\mathrm{Re}(z)) = \cos(2\,\mathrm{Im}(z)) \right\}$$

A 3.10.25 Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) \geq 2$.

Lsg: Zunächst ist $0 + \mathrm{i}$ nicht in der Lösungsmenge, da sonst die linke Seite nicht definiert ist. Wegen

$$\frac{z-1}{z-\mathrm{i}} = \frac{(z-1)(\overline{z}+\mathrm{i})}{|z-\mathrm{i}|^2} = \frac{|z|^2 - \overline{z} + \mathrm{i}z - \mathrm{i}}{|z-\mathrm{i}|^2} \tag{3.14}$$

schreibt sich obige Ungleichung mit $a := \mathrm{Re}(z)$ und $b := \mathrm{Im}(z)$ als

$$\frac{a^2+b^2-a-b}{a^2+(b-1)^2} \geq 2 \qquad \text{bzw.} \qquad -a-b \geq a^2+b^2-4b+2 \qquad \text{bzw.} \qquad b-a \geq (b-a)^2+2$$

Für reellwertiges $x := b-a$ ist also die Ungleichung $0 \geq x^2 - x + 2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ zu lösen. Aufgrund der Nichnegativität von Quadraten ist die Lösungsmenge jedoch leer.

A 3.10.26 Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) \geq 1$.

Lsg: Zunächst ist $0 + \mathrm{i}$ nicht in der Lösungsmenge, da sonst die linke Seite nicht definiert ist. Wegen (3.14) schreibt sich obige Ungleichung mit $a := \mathrm{Re}(z)$ und $b := \mathrm{Im}(z)$ als

$$\frac{a^2+b^2-a-b}{a^2+(b-1)^2} \geq 1 \qquad \text{bzw.} \qquad -a-b \geq -2b+1 \qquad \text{bzw.} \qquad b-a \geq 1$$

Somit Ist die Lösungsmenge die berandete schiefe Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geq \mathrm{Re}(z)+1\}$ ohne $\{0+\mathrm{i}\}$.

.... (Teilmengen in $\mathbb{R}^2$)

A 3.10.27 Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ in der (x,y)-Ebene: (2+2 P)

(a) $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \frac{1}{x} > \frac{1}{y},\, x \neq 0,\, y \neq 0 \right\}$ (b) $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \cos(2x) = \cos(2y) \right\}$

A 3.10.28 Skizzieren Sie die Menge $B := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x-y| + 2 \leq |y| \right\}$.

.... (ohne Lsg)

A 3.10.29 Skizzieren Sie die Menge $A := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x-1|y - 1 \geq 0 \right\}$.

Kapitel 4

Differenzierbarkeit von Funktionen

4.1 Differenzierbare Funktionen

....(Anwendung der Definition)

A 4.1.1 Beweisen Sie, dass jede in $a \in \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch stetig in a ist.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie Corollar zu Satz 15.1: Ist f in a differenzierbar, dann ist f auch stetig in a.

A 4.1.2 Zeigen Sie, dass bei beschränktem $b\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto x^2 b(x)$ im Nullpunkt differenzierbar ist und dort die Ableitung 0 besitzt.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie: Ist g beschränkt, dann ist $x \mapsto x^2 g(x)$ im Nullpunkt differenzierbar.

A 4.1.3 Sei $f(x) := x^2$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$?

A 4.1.4 Untersuchen Sie jeweils für $k = 1,2,3,4,5,$ und die Funktionen

$$f_1(x) := x^3, \qquad f_2(x) := x^n \ (n \in \mathbb{N}), \qquad f_3(x) := \frac{1}{x}, \qquad f_4(x) := \frac{1}{x^2}, \qquad f_5(x) := \exp(x),$$

in welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f_k(x+h)-f_k(x)}{h}$ existiert.

Alternative Formulierung:

In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie in diesen Punkten jeweils die Ableitung mit Hilfe der **Definition** der Differenzierbarkeit!

$$f_1(x) := x^3, \qquad f_2(x) := x^n \ (n \in \mathbb{N}), \qquad f_3(x) := \frac{1}{x}, \qquad f_4(x) := \frac{1}{x^2}, \qquad f_5(x) := \exp(x).$$

A 4.1.5 In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen $f_1(x) := \sqrt{x}$, $f_2(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ differenzierbar?

Bestimmen Sie in diesen Punkten die Ableitung mittels Definition des Differentialquotienten!

A 4.1.6 Gegeben sei die Funktion $f(x) := \dfrac{1}{x^2+1}$. Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \;.$$

Alternierende Formulierung:
Prüfen Sie mit Hilfe der Definition, ob die Funktion $f(x) := \dfrac{1}{x^2+1}$ differenzierbar ist.

A 4.1.7 Prüfen Sie mit Hilfe der Definition, ob die Funktion $f(x) := \dfrac{1}{x^4+1}$ differenzierbar ist.

A 4.1.8 Überprüfen Sie mittels Definition die Differenzierbarkeit der Funktion $s(x) = |x|$.

A 4.1.9 Bestimmen Sie die Ableitungen (mittels Definition) der Funktionen (2+2+2 P)

(a) $u(x) := \dfrac{1}{\sin(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi \;:\; n \in \mathbb{Z}\}$.

Alternative Formulierung:

Sei $r(x) := \dfrac{1}{\sin(x)}$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(x+h)-r(x)}{h}$?

(b) $v(x) := \dfrac{1}{x^n}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $(n \in \mathbb{N})$.

(c) $w(x) := \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Alternative erweiterte Formulierung für (c):
Berechne die Ableitung von $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ zunächst mit Hilfe der Definition und danach unter Nutzung von Ableitungsregeln.

.... (Stückweise definierte Funktionen)

A 4.1.10 Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig, fest. Bestimmen Sie $b, c \in \mathbb{R}$, so dass $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existiert, falls

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} x^2 & x \le a, \\ bx + c\,, & x > a. \end{cases}$$

Tipp: Ist die Funktion f dann auch stetig ?

Variation:

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig, fest. Bestimmen Sie $b, c \in \mathbb{R}$, so dass $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existiert, falls

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} x^5 & x \le a, \\ bx + c\,, & x > a. \end{cases}$$

Tipp: Ist die Funktion f dann auch stetig ?

A 4.1.11 Beweisen Sie die Differenzierbarkeit von $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x > 1, \\ x^3 - 3x + 2 & \text{falls } x \in [-1,1], \\ 4 & \text{falls } x < -1. \end{cases}$

Bestimmen Sie die Ableitung. Ist die Funktion stetig ?

A 4.1.12 Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Punkt $a = 1$:

(a) $f_1(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \ , & \text{falls } x \geq 1, \\ x^2 - 1 \ , & \text{falls } x < 1 \ ; \end{cases}$

(b) $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \ , & \text{falls } 0 < x < 1, \\ \dfrac{3 - x^2}{2} \ , & \text{falls } x \geq 1 \ ; \end{cases}$ (c) $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1} \ , & \text{falls } 0 < x < 1, \\ \dfrac{3-x}{4} \ , & \text{falls } x \geq 1 \ . \end{cases}$

Alternative Formulierung für (c): Untersuchen Sie die folgende Funktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Punkt $a = 1$:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1} \ , & \text{falls } 0 < x < 1, \\ \dfrac{3-x}{4} \ , & \text{falls } x \geq 1 \ . \end{cases}$$

Bonus: **(+4 ZP)**

Finden Sie ein Beispiel für eine in allen $x \neq a$ differenzierbare, jedoch in $a \in \mathbb{R}$ unstetige Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche dennoch $\lim\limits_{x \searrow a} f'(x) = \lim\limits_{x \nearrow a} f'(x)$ erfüllt.

Warum ist dieses Beispiel kein Widerspruch zur Aussage, dass Stetigkeit von f in a eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit von f in a ist ?

A 4.1.13 Zeigen Sie die Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Funktion $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \ , & x \neq 0, \\ 0 \ , & x = 0. \end{cases}$

Ist f stetig differenzierbar?

Variation:

Gegeben sei die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \ , & x \neq 0, \\ 0 \ , & x = 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Ableitung $g'(x)$ für $x \neq 0$.

(b) Ist $g(x)$ stetig im Punkt $x_0 = 0$? (Begründung)

(c) Ist die Funktion $g(x)$ in $x_0 = 0$ differenzierbar?
Falls ja, bestimmen Sie den Wert an dieser Stelle.

Satz 15.2: [Algebraische Differentiationsregeln]

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g, \lambda f, fg \colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für alle $x \in D$ gelten

$$(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x) \qquad \textbf{(Linearität)} \tag{4.1}$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \textbf{(Produktregel)} \tag{4.2}$$

Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch $\frac{f}{g} \colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für alle $x \in D$ gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{\big(g(x)\big)^2} \qquad \textbf{(Quotientenregel)} \tag{4.3}$$

Satz 15.3 [Ableitung der Umkehrfunktion]: Ist $f \colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x mit $f'(x) \neq 0$ und besitzt f in der Umgebung von x die Umkehrfunktion f^{-1}, dann gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right)}, \quad \text{also} \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} . \tag{4.4}$$

Satz 15.4 [Kettenregel]:

Sind $f \colon D \to \mathbb{R}$ und $g \colon E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$ und ist f differenzierbar in $x \in D$ und g differenzierbar in $y := f(x) \in E$, dann ist die Komposition $g \circ f \colon D \to \mathbb{R}$ (sprich: „g nach f“) ebenfalls differenzierbar in x mit

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \cdot f'(x) . \tag{4.5}$$

(a) Beweisen Sie die Linearität (4.1) des Ableitens.

(b) Beweisen Sie die Produktregel (4.2) für die Ableitung.

(c) Beweisen Sie die Kettenregel (4.5) für die Ableitung.

(d) Beweisen Sie die Quotientenregel (4.3) für die Ableitung.

(e) Leiten Sie die Regel zur Differentiation der Umkehrfunktion (4.4) aus (4.5) her.

. . . . (Anwendung der **Kettenregel**)

A 4.1.14 Sei $u \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare ungerade (d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $u(-x) = -u(x)$) Funktion. Beweisen Sie, dass die Ableitung von u eine gerade Funktion ist.

A 4.1.15 Beweisen Sie, dass die Ableitung einer geraden Funktion eine ungerade Funktion ist.

A 4.1.16 Beweisen Sie mittels Eulerscher Formel, dass der Kosinus die Ableitung vom Sinus ist.

A 4.1.17 Bestimmen Sie mittels Rechenregeln die Ableitung der Funktionen

(a) $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ (b) $\sin(x)$ und $\cos(x)$

Alternative Formulierung von (b):

Differenzieren Sie $\sinh(x) := \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ und $\cosh(x) := \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$.

A 4.1.18 Berechnen Sie die Ableitung von $g \colon]0, \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto (2x)^x$.

.... (Anwendung des Satzes über die **Ableitung der Umkehrfunktion**)

A 4.1.19 Bestimmen Sie die Ableitung von $\ell(x) = \ln(x)$ und $w(x) = \sqrt{x}$ mit Hilfe der Umkehrfunktion.

A 4.1.20 Bestimmen Sie die Ableitung $(f^{-1})'(y)$ für die Funktion $f(x) \;=\; \ln\left(\sqrt{1+x^4}\right)$.

A 4.1.21 Bestimmen Sie mittels Ableitung der Umkehrfunktion die Ableitung von $a(x) = \arctan(x)$.

A 4.1.22 Für welche $x \in \mathbb{R}$ existiert die Ableitung von $\arcsin(x)$ und wie lautet sie ?

A 4.1.23 Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktionen $\arccos\colon\,]-1,1[\, \to \,]0,\pi[$ (Umkehrfunktion von cos) und $\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Umkehrfunktion von sinh).

A 4.1.24 Wie lautet die Ableitung von $f(x) := \operatorname{arsinh}(x^2 - x)$ im Punkt $x_0 := 1$?

A 4.1.25 Warum muss $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := x + \mathrm{e}^x$, eine stetige Umkehrfunktion besitzen? Sei nun $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f. Berechnen Sie die Ableitung von $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

Alternative Formulierung:

Begründen Sie knapp, warum die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := x + \mathrm{e}^x$, eine stetige Umkehrfunktion besitzt.

Sei nun $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die entsprechende Umkehrfunktion von f. Berechnen Sie die Ableitung von f^{-1} an der Stelle 1.

A 4.1.26 Die Funktion $f\colon \; \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\; \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := 5x + \tan(x)$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f besitzt eine differenzierbare Umkehrabbildung $g\colon \mathbb{R} \to \; \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(b) Für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt $|g'(y)| \leq \dfrac{1}{5}$. und für alle $y, z \in \mathbb{R}$ gilt $|g(y) - g(z)| \;\leq\; \dfrac{1}{5}|y - z|$

Hinweis: Für (b) wird auf den Mittelwertsatz vorgegriffen!

.... (Weitere Ableitungsregeln)

A 4.1.27 Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für das Produkt von n differenzierbaren Funktionen $f_1, \ldots, f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gültigkeit der **verallgemeinerten Produktregel**

$$\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_k' \cdot \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} f_j\right) . \tag{4.6}$$

A 4.1.28 Beweisen Sie für die n-te Ableitung eines Produktes von n-mal differenzierbaren Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die **Leibnizsche Produktregel**

$$(fg)^{(n)} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} . \tag{4.7}$$

A 4.1.29 Berechnen Sie mit Hilfe der Leibnizschen Produktregel $(x \ln(x))^{(2000)}$.

Variationen:

(a) Berechnen Sie mit Hilfe der Leibnizschen Produktregel $(x \ln(x))^{(2015)}$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Leibnizschen Produktregel $(x \ln(x))^{(2016)}$.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe der Leibnizschen Produktregel $(x\ln(x))^{(2017)}$.

.... (**Differenzieren von Lösungen** von Gleichungen)

A 4.1.30 (a) Berechnen Sie die Ableitung der Lösung $\varphi(x)$ der Gleichung $f(\varphi(x)) = g(x)$.

(b) Bestimmen Sie nun die Ableitung von $x^{\frac{1}{k}}$ und von der Lösung φ von $(\varphi(x))^3 = \sinh(x)$.

A 4.1.31 Berechnen Sie die Ableitung der Lösung $\varphi(x)$ der Gleichung $f(x)\cdot\varphi(x) = g(x)$ unter Verwendung der Produktregel. Dabei gelte $f(x) \neq 0$ für alle x.

A 4.1.32 Berechnen Sie die Ableitung der Lösung $\varphi(x)$ der Gleichung $\varphi(x)\cdot x^k = 1$ für $k \in \mathbb{N}$ und $x \neq 0$.

.... (Lösungen von **Differentialgleichungen**)

A 4.1.33 Beweisen Sie, dass jede differenzierbare Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = -\frac{x}{a}y(x)$, $a > 0$, die Gestalt $y(x) = C\exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right)$ besitzt.

A 4.1.34 Beweisen Sie, dass jede differenzierbare Funktion y, welche Lösung der Differentialgleichung $y' = ay$ ist, von der Gestalt $y(x) = Ce^{ax}$ mit einer Konstanten C ist.

Anwendungsaufgabe – Differenzengleichung vs. Differentialgleichung:

In einer Stadt gibt es 120.000 Haushalte. Man vermutet, dass jeder dritte Haushalt auf eine neue digitale Fernsehtechnik umsteigen möchte. Eine Firma geht davon aus, dass die Zunahme des Verkaufs bei Markteinführung am größten war und modelliert die Verkaufszahlen mit begrenztem Wachstum. Sie macht dabei die Annahme, dass die Zunahme des Absatzes pro Monat immer 12% der noch möglichen Verkäufe ausmacht (t: Zeit in Monaten).

> **Andere Formulierung:** Eine Firma geht davon aus, dass der Verkauf bei Markteinführung am größten war und modelliert die Verkaufszahlen mit begrenztem Wachstum. Sie macht dabei die Annahme, dass der Absatz pro Monat stets 12% der noch möglichen Verkäufe ausmacht (t: Zeit in Monaten).

Wird die Firma im ersten Jahr 30.000 Geräte verkaufen ?

Bemerkung: Bezeichnet H die 40.000 möglichen Verkäufe und $q = 0,12$, so ist etwa

(a) (diskreter Fall – Anfangswertproblem) die Differenzengleichung

$$f(n+1) - f(n) = q \cdot \underbrace{(H - f(n))}_{\substack{\text{noch mögliche}\\ \text{Verkäufe}}} \qquad \text{mit Anfangsbedingung} \qquad f(0) = qH$$

(b) (kontinuierlicher Fall – Randwertproblem) die parameterabhängige gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'(t) = k(H - y(t)) \qquad \text{mit Randwerten} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} y(0) & = & qH \\ & = & H - (1-q)H, \\ y(1) & = & q(H - y(0)) + y(0) \\ & = & qH + (1-q)y(0) \\ & = & qH + (1-q)[H - (1-q)H] \\ & = & H - (1-q)^2 H \end{array} \right.$$

zu lösen.

. . . . (Rechenaufgaben)

A 4.1.35 Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen definiert/differenzierbar ?

(a) $x^2 \sinh(x)$ (b) $\tan(x)$ (c) $\ln(1-x^4)$ (d) $x^2 \sin(x)$ (e) $\arccos(3x^{-\frac{5}{2}})$

(f) $x(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x)))$ (g) $\exp(\tan(x))\,(\cos(x))^2$

Alternative Formulierung:

Bestimmen Sie durch Anwendung von Rechenregeln die Ableitungen von ...
Geben Sie explizit an, in welchen Punkten diese Funktionen definiert sind und in welchen Punkten sie differenzierbar sind.

A 4.1.36 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktionen

(a) $f(x) := \ln(1-x^2)$ (b) $g(x) := x\cos(\ln(x))$

und ermitteln Sie deren Ableitung.

A 4.1.37 Berechnen Sie die Ableitungen von: (i) $(x+3)^{27} \cdot x^4$ (ii) $\ln(x^2+1)$ (iii) $\dfrac{x+1}{x^2+6}$

A 4.1.38 Bestimmen Sie die Ableitung (dort, wo möglich) von

(a) $u(x) = \arctan(x^3 + 2x^2 - 1)$ (b) $v(x) = \exp(\tan(x))(\sin(x))^3$ (c) $w(x) = a^x$ $(a > 0)$

A 4.1.39 Berechnen Sie jeweils die 1. Ableitung von (a) $\sin(x)$ (b) $\cos(x)$

(c) $f(x) = \cos\left(\sin(x) \cdot \mathrm{e}^{\left(x^2\right)}\right)$ (d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$ (e) $f(x) = x^{(x^x)}$

(f) $f(x) = \left(\cos\left(\left(\sin\left(\mathrm{e}^{4x}\right)\right)^3\right)\right)^2$ (g) $f(x) = \arctan(x^2)$ (h) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}$

(i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} \cdot \mathrm{e}^{\sin(x)}}{\sqrt[3]{1+x} \cdot (x^2+3)^2}$ (j) $f(u) = \mathrm{e}^u \ln(\sin(u))$ (k) $f(z) = z^{\sin(z)}$

A 4.1.40 Bestimmen Sie die Ableitung von **(+5 ZP)**

$$\frac{1}{\left(\arctan(\sqrt{x^2+1})\right)^2}, \quad x^{x+\ln(x)}, \quad \ln\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}\right), \quad 2x\arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right), \quad \sqrt[3]{\sqrt{x}+1}.$$

A 4.1.41 Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung von $f\colon x \mapsto \sin(x\mathrm{e}^x)$ und $h\colon x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

A 4.1.42 Differenzieren Sie die Funktionen $f(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^{\cos(x)}}{\ln(x)}$, $g(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$, $h(x) = \mathrm{e}^{x\sin(x)}$.

A 4.1.43 Bestimmen Sie mit Hilfe der Definition die erste und zweite Ableitung von $f(x) := |x^3|$ auf $\mathbb{R}$.

A 4.1.44 Geben Sie für die folgenden Funktionen die natürlichen Definitionsgebiete an, untersuchen Sie die Funktionen auf Differenzierbarkeit in den Punkten des Definitionsbereichs, und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung:

(a) $\mathrm{e}^{x^3 \cos(x)}$ (b) $\dfrac{(\sin(x))^2}{\sin(x^2)}$ (c) $|\pi^2 - x^2|\,(\sin(x))^2$ (d) x^{2x} (e) $\left(\cos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\right)^2$

(f) $|\cos(x)|$ (g) $2^{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ (h) $(x+2)^{\cos(x)}$ (i) $\sin(\exp(x^2) - 1)$ (j) $\arctan(\ln(1+x))$

4.2 Lokale Extrema, Mittelwertsatz und Konvexität

A 4.2.1 Begründen Sie, warum für eine differenzierbare Funktion $f\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ an einer lokalen Maximalstelle $x \in]a,b[$ die Ableitung verschwindet.

Leichte Variation:

Zeigen Sie: Ist $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und nimmt in $a \in \mathbb{R}$ ihr globales Maximum an, dann gilt $g'(a) = 0$.

A 4.2.2 Geben Sie eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die ein (lokales oder globales) Maximum in einem Punkt annimmt, in dem f nicht differenzierbar ist.

A 4.2.3 Beweisen Sie:
Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem offenen Intervall $]a,b[$ sowie stetig in den Randpunkten a, b und gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a,b[$, dann ist f auf $[a,b]$ monoton wachsend.

A 4.2.4 Gegeben seien stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktionen $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) \geq g(a)$ und $f'(x) \geq g'(x)$ auf $]a,b[$. Zeigen Sie, dass $f(x) \geq g(x)$ auf $[a,b]$ gilt.

A 4.2.5 Sei $a \in \mathbb{R}, a < b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $f\colon [a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ existiere.

(a) Zeigen Sie: f hat ein globales Maximum $\iff \exists\, x_0 \in I := [a,b[$ mit $\lim\limits_{x\to b} f(x) \leq f(x_0)$.

(b) Zeigen Sie: f hat ein globales Minimum $\iff \exists\, x_0 \in I := [a,b[$ mit $\lim\limits_{x\to b} f(x) \geq f(x_0)$.

(c) Zeigen Sie: Alle globalen Extrema liegen in $K = \{x \in]a,b[\ :\ f'(x) = 0\} \cup \{a\}$.

.... (Pathologisches Beispiel)

A 4.2.6 Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x) \ := \ \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(0) = \frac{1}{2}$ ist, jedoch kein Intervall $]a,b[$, $a < 0 < b$, existiert, auf dem f monoton wächst.

In etwa vom gleichen Typ: (Lsg(?): $f(x) = -x^6 \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$)

Konstruieren Sie eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\ :\ ]-1,1[\ \to \mathbb{R}$, mit den folgenden Eigenschaften:

(a) f besitzt in 0 ein lokales Maximum;

(b) Es gibt kein $\varepsilon > 0$, so dass f im Intervall $[0,\varepsilon]$ monoton fallend ist;

(c) Es gibt kein $\varepsilon > 0$, so dass f im Intervall $[-\varepsilon, 0]$ monoton wachsend ist.

Sogar Striktes Maximum: (Lsg(?): $f(x) = -x^8 - x^6 \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$)

Konstruieren Sie eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\ :\ ]-1,1[\ \to \mathbb{R}$, mit den folgenden Eigenschaften:

(a) f besitzt in 0 ein striktes lokales Maximum;

(b) Es gibt kein $\varepsilon > 0$, so dass f im Intervall $[0, \varepsilon]$ monoton fallend ist;

(c) Es gibt kein $\varepsilon > 0$, so dass f im Intervall $[-\varepsilon, 0]$ monoton wachsend ist.

. . . . (Schnittstellenaufgaben – Anwendungen)

A 4.2.7 Aus einem kreisrunden Stück Papier (mit Radius R) soll ein Sektor so herausgeschnitten werden, dass daraus ein Kreiskegel möglichst großen Volumens geformt werden kann. Bestimmen Sie den dafür notwendigen Sektorwinkel.

A 4.2.8 In welchem Verhältnis müssen bei einem Zylinder mit Kreis als Grundfläche der Durchmesser dieses Grundflächenkreises und die Höhe des Zylinders stehen, damit bei gegebenem Volumen die Oberfläche des Zylinders minimal wird?

A 4.2.9 Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gegeben. Für welchen Punkt x ist die Summe der Quadrate der Abstände $|x - a_i|$ am geringsten ?

Alternative Formulierung:
Bestimmen Sie zu gegebenen $a_1, \ldots, a_n$ die Zahl x, für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen $a_1 - x, \ldots, a_n - x$ minimal ist.

A 4.2.10 Bestimmen Sie alle Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$, für welche die durch $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowohl ein lokales Maximum als auch ein lokales Minimum besitzt.

A 4.2.11 Es sei a eine beliebige reelle Zahl.
Wieviele reelle Lösungen besitzt die Gleichung $2x + \sin(x) = a$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Berechnen Sie, dort wo sie existiert, die Ableitung der Umkehrfunktion von $f(x) = 2x + \sin(x)$.

. . . . (Extrema von Funktionen auf beschränkten Intervallen)

A 4.2.12 Bestimmen Sie das Maximum und Minimum der Funktion $f(x) := x^3 - 3x + 1$ auf dem Intervall $[0, 2]$.

A 4.2.13 Untersuchen Sie folgende Funktionen auf lokale/globale Extrema

(a) $f\colon [-3, 3[\to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto (2 - x)\mathrm{e}^{-x^2}$ (b) $g\colon \;]-\infty, 4] \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto -(-3 + 3x + x^2)\mathrm{e}^{-x}$

A 4.2.14 (a) Zeigen Sie die Differenzierbarkeit der Funktion

$$f\colon \left[-\frac{2}{\pi}, 0\right] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \in \ \left[-\frac{2}{\pi}, 0\right[\ , \\ 0 & \text{für } x = 0\ . \end{cases}$$

Entscheiden und bestimmen Sie gegebenenfalls die lokalen und globalen Maximalstellen und Maxima sowie die lokalen und globalen Minimalstellen und Minima der Funktion f.

(b) Wie sieht es aus, wenn wir stattdessen die Funktion

$$g\colon \left[-\frac{2}{\pi}, 0\right] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \in \ \left[-\frac{2}{\pi}, 0\right[\ , \\ 0 & \text{für } x = 0\ , \end{cases}$$

betrachten.

. . . . (Monotonie und lokale/globale Extrema)

A 4.2.15 Gegeben seien $f(x) := -2x^2 + 4x - 4$ und $g(x) = x^2 \mathrm{e}^x$.

(a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) Wo sind f, g monoton wachsend bzw. monoton fallend ?

(c) Besitzen die Funktionen f und g auch globale Maxima oder Minima ?

A 4.2.16 Bestimmen Sie die lokalen Extrema der durch $f(x) := \dfrac{x}{1+x^2}$ definierten Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

A 4.2.17 Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f\colon\ ]0,\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) := x^{\frac{1}{x}}$.

A 4.2.18 Entscheiden und bestimmen Sie gegebenenfalls die lokalen und globalen Maximalstellen und Maxima sowie die lokalen und globalen Minimalstellen und Minima der Funktion

$$f(x) \;=\; \frac{2-3x+x^2}{2+3x+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-2\}.$$

A 4.2.19 Sei $n > 0$. Beweisen Sie, dass die Funktion $f\colon\ ]0,\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-x}$ genau an der Stelle $x = n$ ihr globales Maximum annimmt.

. . . . (Konvexität)

A 4.2.20 Es seien I und J Intervalle, $f\colon I \to J$ konvex und $g\colon J \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und konvex. Zeigen Sie, dass die Funktion $g \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ ebenfalls konvex ist.

Hinweis: Über die Differenzierbarkeit der Funktionen sei nichts bekannt !

A 4.2.21 Zeigen Sie **Satz 16.6:**
Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$f \text{ konvex} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x \in D\colon f''(x) \geq 0 \ .$$

A 4.2.22 Zeigen Sie: Die Funktion $f(x) := \frac{1}{p}|x|^p$ ist für $p > 1$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) := \begin{cases} |x|^{p-2}x & ,\ x \neq 0, \\ 0 & ,\ x = 0\ . \end{cases}$$

Ist f konvex?

A 4.2.23 Wo ist die auf $]0,\infty[$ definierte Funktion $f(x) := x^{\ln(x)}$ konvex bzw. konkav ?

4.3 Methode des logarithmischen Ableitens

A 4.3.1 Bestimmen Sie die Ableitung von $\ln\circ f$ mit einem differenzierbaren $f\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$.

A 4.3.2 Beweisen Sie, dass das logarithmische Ableiten $L\colon f \mapsto \dfrac{f'}{f}$ von Funktionen $f > 0$ die Rechenregeln $L(fg) = L(f) + L(g)$ und $L(f^a) = aL(f)$ erfüllt.

A 4.3.3 Zeigen Sie, dass $(1+\frac{1}{x})^x$ auf $\mathbb{R}^+$ monoton wächst.

A 4.3.4 Zeigen Sie, dass eine differenzierbare positive Funktion $f\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$ genau dann ein lokales Maximum/Minimum in x besitzt, wenn $\ln\circ f$ ein lokales Maximum/Minimum in x besitzt.

A 4.3.5 Berechnen Sie die lokalen Extrema von $f(x) := \dfrac{\mathrm{e}^{x^2-2x-1}}{x^4}$ einerseits direkt und andererseits durch logarithmisches Ableiten.

Leichte Variation:

Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f(x) := \dfrac{\mathrm{e}^{x^2-2x-1}}{x^{12}}$ einmal direkt durch Anwenden notwendiger und hinreichender Kriterien und dann noch einmal erneut mit logarithmischem Ableiten.

A 4.3.6 Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden positiven Funktionen, indem Sie zunächst jeweils $(\ln\circ f)'$ bestimmen und anschließend die Beziehung zur Ableitung von f verwenden.

(a) $f\colon]1,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x-1}{(x+2)^2(x+7)}$

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3^x$

(c) $f\colon]1,\infty[\setminus\{5\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-5)^2(x+1)(x+2)}$

(d) $f\colon \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt[3]{x^2}\dfrac{|1-x|}{(x+1)^2}(\sin(x))^4(\cos(x))^2$

(e) $f\colon]2,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$

(f) $f\colon]0,\pi[\to \mathbb{R},\ x \mapsto (\sin(x))^{(x-4)}$

.... (Schnittstellenaufgaben – Anwendungen)

A 4.3.7 Die Stärke der Strahlung, die ein schwarzer Körper der Temperatur T in der Wellenlänge λ aussendet, wird durch die Funktion

$$E(\lambda) = \frac{a}{\lambda^5(\exp(\frac{b}{T\lambda})-1)}$$

beschrieben, wobei a, b feste positive Konstanten sind. Zeigen Sie, dass genau eine (von T abhängige) Wellenlänge $\lambda_{max} \in]0,\infty[$ existiert, für welche die Strahlungsemission am stärksten ist, und dass $\lambda_{max}T = C$ mit einer von T unabhängigen Konstanten C gilt.

4.4 Weitere Anwendungen der Konvexität

A 4.4.1 Zeigen Sie nacheinander die

(a) **Young-Ungleichung**: Sind $p, q \in \,]1, \infty[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\colon \left(\left(x \geq 0 \wedge y \geq 0\right) \implies x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \;\leq\; \frac{x}{p} + \frac{y}{q} \right).$$

Hinweis: Ist der Logarithmus eine konvexe Funktion ?

(b) **Hölder-Ungleichung:** Seien $p, q \in \,]1, \infty[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n \;:\; \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu y_\nu| \;\leq\; \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q \tag{4.8}$$

Bemerkung:
Im Spezialfall $p = 2$ erhalten wir die bekannte **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**.

(c) **Minkowski-Ungleichung:**

$$\forall p \in [1, \infty[\;\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n\colon \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \;\leq\; \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p \;. \tag{4.9}$$

A 4.4.2 Wann wird in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und wann wird in der Minkowski-Ungleichung jeweils Gleichheit angenommen ?

A 4.4.3 Zeigen Sie die Ungleichungen:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} |a_k| \;\leq\; \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \;\leq\; \sqrt{n} \max_{k=1,\ldots,n} |a_k|$$

A 4.4.4 Es sei

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

das geometrische Mittel und

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

das arithmetische Mittel. Zeigen Sie die **Ungleichung von** Ky Fan:
Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Dann gilt

$$\frac{G(x_1, \ldots, x_n)}{G(1 - x_1, \ldots, 1 - x_n)} \;\leq\; \frac{A(x_1, \ldots, x_n)}{A(1 - x_1, \ldots, 1 - x_n)} \;.$$

Hinweis: Betrachten Sie $f(x) = \ln(1 - x) - \ln(x)$, $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

A 4.4.5 Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^4$, konvex ist.

Beweisen Sie $(x + y)^4 \leq 8(x^4 + y^4)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

A 4.4.6 Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^4$, konvex ist.

Beweisen Sie $\frac{1}{9}(x + 2y)^4 \leq 3(x^4 + 2y^4)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Alternative Formulierung:

Beweisen Sie $(x + 2y)^4 \leq 27(x^4 + 2y^4)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

4.5 Weitere Anwendungen des Mittelwertsatzes

A 4.5.1 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $|f'(x)| \leq K < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist f gleichmäßig stetig?

Hinweis:
Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung um Lipschitz-Stetigkeit zu zeigen.

A 4.5.2 Zeigen Sie, dass die Funktion $\arctan\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

A 4.5.3 Zeigen Sie, dass die Funktion $\ln\colon [1, \infty[\to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst Lipschitz-Stetigkeit.

A 4.5.4 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die gerade ist und eine Nullstelle in $a > 0$ besitzt. Beweisen Sie, dass es dann einen Punkt $x \in]-a, a[$ mit $f'(x) = 0$ gibt.

A 4.5.5 Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare gerade (d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g(x) = g(-x)$) Funktion. Beweisen Sie einmal ohne und einmal mit dem **Satz von Rolle**, dass die Ableitung mindestens eine Nullstelle besitzt.
Beweisen Sie die obige Aussage erneut unter der Zusatzvoraussetzung, dass g stetig differenzierbar ist, in dem Sie den **Zwischenwertsatz** auf die Ableitung anwenden.

A 4.5.6 Sei $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ für alle $x, y \in]a, b[$.

Ist f konstant?

A 4.5.7 Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und zeigen Sie anschließend:

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 1$ gegeben und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$, so ist f konstant.

Alternative (etwas verallgemeinerte) Formulierung:
Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I heißt **Hölder-stetig mit Exponent** $\alpha > 0$, falls es ein $L < \infty$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha$ für alle $x, y \in I$ gibt.

Zeigen Sie, dass jede Funktion f auf einem Intervall, die Hölder-stetig mit Exponent $\alpha > 1$ ist, schon konstant ist.

Alternative versteckte Formulierung:
Begründen Sie, warum man im Allgemeinen keine Hölder-stetigen Funktionen zum Exponenten $\alpha > 1$ betrachtet.

A 4.5.8 Zeigen Sie, dass bei einer 2π-periodischen differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ableitung f' an mindestens zwei Stellen im Intervall $[0, 2\pi[$ verschwindet.

A 4.5.9 Beweisen Sie den **Satz von Cauchy** (auch „verallgemeinerter Mittelwertsatz“ genannt):

Seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ im offenen Intervall $]a, b[$ differenzierbare und in den Randpunkten a, b stetige Funktionen. Weiter gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$.

Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es gibt ein $\xi \in]a, b[$ mit
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

A 4.5.10 Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

(a) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\colon \mathrm{e}^x > 1 + x$.
Lsg:
Betrachte für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Funktion $f(x) = f'(x) = \mathrm{e}^x > 0$.

- Für jedes $x > 0$ existiert nach MWS ein $\xi \in \,]0, x[$ mit

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = \mathrm{e}^\xi > \mathrm{e}^0 = 1\ .$$

  Umstellen liefert somit $f(x) > f(0) + x$, also wie behauptet $\mathrm{e}^x > 1 + x$.

- Für jedes $x < 0$ existiert nach MWS ein $\xi \in \,]x, 0[$ mit

$$\frac{1 - \mathrm{e}^x}{-x} \ = \ \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} \ = \ f'(\xi) \ = \ \mathrm{e}^\xi \ < \ \mathrm{e}^0 \ = \ 1$$

  Wegen $-x > 0$ folgt zunächst $1 - \mathrm{e}^x \ < \ -x$. Umstellen ergibt wieder $\mathrm{e}^x > 1 + x$.

. . . . (ab hier ohne Lsg)

(b) $\forall x > 0\colon \dfrac{x}{1+x} < \ln(1 + x) < x$

(c) $\forall x > 0\colon \cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2} > 0$

A 4.5.11 Gegeben seien $a \in \mathbb{R}$ und $x \in [-1, +\infty[\setminus\{0\}$. Verwenden Sie den Mittelwertsatz, um die folgenden Ungleichungen zu beweisen:

(a) $(1 + x)^a < 1 + ax$ für $0 < a < 1$,

(b) $(1 + x)^a > 1 + ax$ für $a < 0$ oder $a > 1$.

4.6 Die Regeln von L'Hospital

A 4.6.1 Sei $0 \leq q < \infty$ und $f \in]q, \infty[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Beweisen Sie, dass dann auch $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = c$.

Bemerkung: Es handelt sich um einen interessanten Spezialfall der Regel von L'Hospital. Diese dürfen Sie beim Beweis natürlich **nicht (!)** benutzen, da wir diese Aussage beim Beweis der Regel von L'Hopital benutzt haben!

A 4.6.2 Beweisen Sie mittels des verallgemeinerten Mittelwertsatzes/Satz von Cauchy die Regel von **L'Hospital** für den Fall $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\searrow a} g(x)$.

.... (Scheinbares Gegenbeispiel)

A 4.6.3 Wo steckt der **Fehler** in dem folgenden scheinbaren Gegenbeispiel zur Regel von L'Hospital? Für $f(x) = x + \sin(x)\cos(x)$ und $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ offensichtlich nicht. Dennoch gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(\mathrm{e}^{-\sin(x)} \frac{2\cos(x)}{2\cos(x) + f(x)}\right) = 0\ .$$

.... (Anwendungsbeispiele)

A 4.6.4 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (2+2 P)

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(3x)}{\sin(2x)}$ **Hinweis:** Verwenden Sie $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{\sin(a)}{a} = 1$.

A 4.6.5 Berechnen Sie die Grenzwerte (1+3+1 P)

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ (b) $\lim\limits_{x\searrow 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha}$ für $\alpha > 0$.

A 4.6.6 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte: (2+2+2 P)

(a) $\lim\limits_{m\to\infty} \left(\cos\left(\dfrac{x}{m}\right)\right)^m$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} (1 - 2^x)^{\sin(x)}$

(d) $\lim\limits_{m\to\infty} \left(\cos\left(\dfrac{1}{m}\right)\right)^m$ (e) $\lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{m^2 + 1}$ (f) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

A 4.6.7 Berechnen Sie nach geeigneter Umformung mit der Regel von L'Hospital (Bernoulli-L'Hospital)

$\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln(x)$, $\lim\limits_{x\searrow 0} x^x$, $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\tan(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$ für $a \in \mathbb{R}$.

Alternative Formulierung zum zweiten Grenzwert:
Nutzen Sie die aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz folgende Regel von L'Hospital, um den Grenzwert $\lim\limits_{x\searrow 0} x^x$ zu berechnen.

A 4.6.8 Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^n - 1\right)$.

A 4.6.9 Berechnen Sie die Grenzwerte (i) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$.

A 4.6.10 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mittels L'Hospitalscher Regeln:

(a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(x-3)^2}$ (b) $\lim\limits_{x\nearrow 1}\ln(x)\ln(1-x)$ (c) $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\ln(\sin(5x))}{\ln(\sin(3x))}$

A 4.6.11 Berechnen Sie

(a) $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\ln(\cos(2x))}{\sin(x)}$ (b) $\lim\limits_{x\searrow 0}\left(\cot(x)-\dfrac{1}{x}\right)$ (c) $\lim\limits_{x\searrow 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$.

. . . . (bisher ohne Lsg)

A 4.6.12 Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin(x)}-\cos(x)}{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$

A 4.6.13 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls diese existieren:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}|\sin(x)|^x$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)-1\right)$

. . . . (Kombi-Aufgaben)

A 4.6.14 Ist die Funktion $f(x) := \dfrac{\arctan(x)}{x}$ stetig in den Punkt $a := 0$ fortsetzbar ?

A 4.6.15 Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2)}{x}$. Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{\sin(x^2)}{x}$ stetig fortsetzbar.

Zeigen Sie weiter, dass die durch $f(0) := 0$ und $f(x) := \dfrac{\sin(x^2)}{x}$ für $x\neq 0$ definierte Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zwar $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ erfüllt, aber nicht $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$.

A 4.6.16 Ist die durch $f(x) := \dfrac{\sin(x)}{x}$ für $x\neq 0$ und $f(0) := 1$ definierte Funktion f differenzierbar im Nullpunkt?

A 4.6.17 Zeigen Sie die Stetigkeit der Funktion $f\colon [0,1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases}1 & \text{bei } x=0,\\ x^x & \text{bei } x\in\,]0,1].\end{cases}$

Begründen Sie, ohne zu rechnen, dass f ein globales Maximum und ein globales Minimum hat.
Berechnen Sie alle globalen Maximumstellen und alle globalen Minimumstellen sowie das globale Maximum und das globale Minimum von f.

A 4.6.18 Sei $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in einer Umgebung von $x\in\mathbb{R}$ differenzierbar und in x selbst zweimal differenzierbar. Zeigen Sie mittels der Regel von L'Hospital die Gültigkeit von

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \;=\; f''(x)\,. \tag{4.10}$$

Zeigen Sie, dass für die durch $f(x) := |x|x$ definierte Funktion der Limes auf der linken Seite in (4.10) bei $x=0$ existiert, obwohl die Funktion nicht zweimal differenzierbar im Nullpunkt ist.

A 4.6.19 (a) Zeigen Sie: $\dfrac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \cos\dfrac{x}{2} \cdot \cos\dfrac{x}{4} \cdot \ldots \cdot \cos\dfrac{x}{2^n}$ und damit $\dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \cos\dfrac{x}{2^k}$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass für den Grenzwert der Produktfolge (P_n), definiert durch $P_n := \prod\limits_{k=0}^{n} a_k$ mit $a_0 := \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $a_k := \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_{k-1}}$, $k = 1, 2, \ldots$, gilt:

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{n\to\infty} P_n = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}} \cdot \ldots$$

. . . . (ohne Lsg)

A 4.6.20 Wie oft ist bei $n \in \mathbb{N}$ die durch $f(x) := x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ und $f(0) := 0$ definierte Funktion im Nullpunkt differenzierbar ?

4.7 Kurvendiskussion

A 4.7.1 Diskutieren Sie die Funktion $f(x) := \exp(x^2 - x) - 1$, d.h. ermitteln Sie Nullstellen, lokale Extrema, Wendepunkte sowie die Intervalle, in denen f positiv / negativ, monoton wachsend / fallend bzw. konvex / konkav ist.

A 4.7.2 Diskutieren Sie die Funktion $f(x) := \ln(1 + x^2) - 1$, d.h. ermitteln Sie Nullstellen, lokale Extrema, Wendepunkte sowie die Intervalle, in denen f positiv / negativ, monoton wachsend / fallend bzw. konvex / konkav ist.

Bestimmen Sie außerdem $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ und skizzieren Sie die Funktion f.

A 4.7.3 Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^x = \exp(x \ln(x))$. (5 P)

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und die Intervalle, in denen die Funktion positiv/negativ, monoton wachsend/fallend, konvex/konkav ist.

(b) Berechnen Sie die Grenzwerte in den Randpunkten (gegebenenfalls auch $\pm\infty$) des jeweiligen Definitionsbereiches, die nicht mehr zu demselben gehören.

(c) Bestimmen Sie die lokalen/globalen Extrema sowie Wendepunkte, falls diese existieren.

A 4.7.4 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{2x}(x^2 - 2x - 55), \quad x \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Funktion monoton fällt (bzw. wächst).

(b) Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Funktion konkav (bzw. konvex) ist.

(c) Bestimmen Sie ggf. die lokalen und globalen Maximalstellen und Maxima sowie die lokalen und globalen Minimalstellen und Minima der Funktion sowie ihre Wendepunkte.

A 4.7.5 Gegeben seien (a) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ (b) $g(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ und (c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$.

(i) Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich und die Intervalle, in denen die Funktion positiv/negativ, monoton wachsend/fallend, konvex/konkav ist.

(ii) Berechnen Sie die Grenzwerte in den Randpunkten (gegebenenfalls auch $\pm\infty$) des jeweiligen Definitionsbereiches, die nicht mehr zu demselben gehören.

(iii) Bestimmen Sie die lokalen/globalen Extrema sowie Wendepunkte, falls diese existieren. Skizzieren Sie die Funktionen aufgrund der gewonnenen Informationen.

A 4.7.6 Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := x^4 \mathrm{e}^{-x^2}$, auf Monotonie, Konvexität sowie auf lokale und globale Extrema. Besitzt f Wendepunkte ?

A 4.7.7 Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \mathrm{e}^{-x^2}$, zwar $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ erfüllt und ein Maximum besitzt, aber kein Minimum hat.

A 4.7.8 Diskutieren Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{\arctan(x)}{x}$, d.h. berechnen Sie die Grenzwerte in der Definitionslücke und für $x \to \pm\infty$, bestimmen Sie die offenen Intervalle, auf denen f positiv/negativ bzw. monoton wachsend/fallend ist, bestimmen Sie die lokalen und globalen Maxima/Minima von f, und fertigen Sie aufgrund der gewonnenen Informationen eine Skizze an.

A 4.7.9 Ist die Funktion $g\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) := x\ln(x)$, konvex ?

Besitzt g ein globales Minimum ?

A 4.7.10 Ermitteln Sie den Definitionsbereich, Nullstellen, lokale Extrema und Wendestellen von

$$g(x) = \frac{x^2-1}{x+2}\ .$$

Prüfen Sie auch, wo diese Funktionen positiv/ negativ, monton wachsend / fallend bzw. konvex / konkav sind. Skizzieren Sie die Funktionen aufgrund der gewonnen Informationen.

A 4.7.11 Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{(x+a)^2}$, wobei $a > 0$ beliebig.

(a) Welche Nullstelle besitzt f?
In welchen Intervallen ist f monoton wachsend/fallend, konvex/konkav?

(b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to -a} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ sowie die lokalen Extrema von f.
Gibt es globale Extrema?

A 4.7.12 Diskutieren Sie die durch $(h(x))^3 = 2x^2 - x^3$ eindeutig bestimmte Funktion $h(x)$ auf $\mathbb{R}$, indem Sie sie auf Nullstellen, Monotonie, Extrema, Konvexität und Wendepunkte hin untersuchen.

Bonusfrage: An welche Gerade $ax+b$ schmiegt sich die Funktion für $x\to\pm\infty$ an?

A 4.7.13 Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f(x) := \arctan(x) - \dfrac{x}{2}$.

A 4.7.14 Sei $p \geq 1$ und sei $f(x) = \dfrac{(1+x)^p}{1+x^p}$.

(a) Bestimmen Sie das Minimum und das Maximum von $f(x)$ in $[0,1]$.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a) die Aussage

$$\forall a,b\geq 0\colon\ a^p+b^p \leq (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)\ . \tag{4.11}$$

A 4.7.15 Untersuchen Sie jeweils, ob die folgenden Funktionen in $x_0 = 0$ ein lokales Extremum besitzen. Bestimmen Sie gegebenenfalls welcher Art das Extremum ist.

(a) $f(x) = \exp(x^2)\cos(x)$ (b) $g(x) = x^2(\sin(x))^3 + x^2\cos(x)$ (c) $h(x) = \dfrac{1+x^3}{1+x^2}$

. . . . (bisher ohne ge-tex-te Lsg)

A 4.7.16 Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion. In einem Punkt $a \in I$ gelte $f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ und $f^{(n)}(a) \neq 0$. Zeigen Sie

(a) Falls n gerade und $f^{(n)}(a) > 0$ ist, dann hat f bei a ein strenges lokales Minimum.

(b) Falls n gerade und $f^{(n)}(a) < 0$ ist, dann hat f bei a ein strenges lokales Maximum.

(c) Falls n ungerade ist, dann hat f bei a kein Extremum.

Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung des Restgliedes der Taylor-Formel nach Lagrange.

A 4.7.17 Gegeben sei die Funktion $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + a^2}$, wobei $a > 0$ beliebig.

(a) Welche Nullstelle besitzt g?
In welchen Intervallen ist g monoton wachsend/fallend, konvex/konkav?

(b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

(c) Untersuchen Sie g auf lokale und globale Extrema sowie Wendepunkte.

A 4.7.18 (a) Untersuchen Sie die auf $[0, \infty[$ gegebenen Funktionen $f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$ $(n \in \mathbb{N})$ auf lokale und globale Extrema.

(b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \mathrm{e}^{\frac{2x}{3}}(2 + x^2)$ definiert.

(i) Untersuchen Sie f auf Monotonie und lokale Extrema.

(ii) Wieviele Lösungen besitzt die Gleichung $f(x) = 1$ über $\mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Bestimmen Sie die Extremalstellen der folgenden Funktionen

(i) $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$ (ii) $g(x) = \sqrt{x^4 - 4x^3 + 5x^2}$ (iii) $h(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x^2}$

(d) Finden Sie auf den angegebenen Intervallen den kleinsten und den größten Wert der Funktionen

(i) $f\colon [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$ (ii) $g\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{5 - 4x}$

A 4.7.19 Für folgende Funktionen soll eine Kurvendiskussion (Definitions-/Wertebereich, Nullstellen, Unstetigkeitsstellen, lokale/globale Extrema, Monotonie, Wendepunkte, Konvexität/Konkavität), Verhalten im Unendlichen, Asymptoten, Skizze) durchgeführt werden:

(a) $f(x) = \dfrac{2c\mathrm{e}^x}{c\mathrm{e}^x - (c+2)}$ in Abhängigkeit von der Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(|x|)}, & x \neq 0, 1, -1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

A 4.7.20 Bestimmen Sie das Rechteck in der (x, y)-Ebene, dessen Eckpunkte auf der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

liegen, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind und dessen Flächeninhalt maximal ist.

4.8 Äquivalenz von Fixpunkt- und Nullstellenproblemen – Numerische Verfahren

.... (Fixpunktsätze)

A 4.8.1 **(Brouwerscher Fixpunktsatz im $\mathbb{R}^1$ – Existenz)**

Zeigen Sie:
Ist $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f([-1,1]) \subseteq [-1,1]$, dann existiert ein $p \in [-1,1]$ mit $f(p) = p$.

Tipp: Verwenden Sie den Zwischenwertsatz.

A 4.8.2 **(Banachscher Fixpunktsatz im $\mathbb{R}^1$ – Existenz & Eindeutigkeit)**

Beweisen Sie den folgenden **Fixpunktsatz**:

> Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(D) \subseteq D$. Weiter existiere ein $q < 1$, so dass $|f'(x)| \le q$ für alle $x \in D$. Sei $x_0 \in D$ beliebig und $x_n := f(x_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen die eindeutige Lösung $\xi \in D$ der Gleichung $f(\xi) = \xi$. Insbesondere gilt die Fehlerabschätzung
>
> $$|\xi - x_n| \;\le\; \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \;\le\; \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \;\; .$$

.... (Einfache Anwendungen/Selbstabbildungen & Kontraktionen)

A 4.8.3 Betrachten Sie die Iteration $x_{n+1} := f(x_n)$ mit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := ax + b$.

(a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist f eine Selbstabbildung des Intervalls $[0,1]$?

(b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist f eine Kontraktion ?

(c) Was besagt der Banachsche Fixpunktsatz für f auf $[0,1]$?

A 4.8.4 Welches ist das maximale (beschränkte) Intervall, auf dem $f(x) := x^2$ eine Selbstabbildung ist? Für welche $b > 0$ ist $f\colon [0,b] \to [0,b]$ eine Kontraktion?

A 4.8.5 Sei f stetig differenzierbar und x^* ein Fixpunkt von f. Zeigen Sie mittels Fixpunktsatz, dass es bei $|f'(x^*)| < 1$ eine Umgebung U von x^* gibt, für welche die Iterationsfolge $x_{n+1} = f(x_n)$ zu jedem Startwert $x_0 \in U$ gegen x^* konvergiert. Solche Fixpunkte x^* nennt man stabil.

Tipp: Verwenden Sie auch den Mittelwertsatz.

A 4.8.6 Für Startwerte aus welchem Intervall ist die Gleichung $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ (näherungsweise) lösbar, indem man den Banachschen Fixpunktsatz auf $1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = x$ anwendet ?

A 4.8.7 Gegeben sei die Funktion $f(x) = 1 - ax^2$.

(a) Ermitteln Sie die Parameter $a \ge 0$, für die $f(x)$ das Intervall $[-1,1]$ in sich abbildet.

(b) Zeigen Sie, dass es für diese Parameter genau einen Fixpunkt von f in $[-1,1]$ gibt.

(c) Für welche Parameter ist dieser Fixpunkt stabil?

(d) Berechnen Sie mit dem Taschenrechner Trajektorien für $a = \frac{1}{2}$ und für $a = 1$.

. . . . (Populationsmodelle)

A 4.8.8 Das Modell $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ für die zeitliche Entwicklung einer Population entsteht, indem man annimmt, dass sich innerhalb eines Zyklus (z.B. eines Jahres) die Population x um einen Faktor $k(x)$ ändert, d.h. $x_{n+1} = k(x_n)x_n$ gilt, dieser Faktor aber umso kleiner ist, je mehr Überbevölkerung (und damit Mangel an Nahrung und Lebensraum für jeden einzelnen) herrscht. Hier wurde $k(x) = a(1 - x)$ gewählt, so dass für x nahe bei 0 die Population um den Faktor a wächst, während für x nahe der Maximalpopulation 1 ein gewaltiges Sterben einsetzt ($k(1) = 0$).

Zeigen Sie, dass das Modell $X_{n+1} = \frac{a}{P}(P - X_n)X_n$ mit Maximalpopulation P durch $x_n := \frac{X_n}{P}$ in das Modell $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ überführt wird (Entdimensionalisierung).

A 4.8.9 Ein einfaches Modell für die zeitliche Entwicklung einer Population (z.B. von Insekten) in einem Ökosystem ist die Iteration $x_{n+1} = f(x_n)$ mit der **logistischen** Abbildung $f(x) = a(1 - x)x$, wobei $a \geq 0$ ein fester Parameter ist.

(a) Zeigen Sie, dass das Modell für Parameter $a \in [0, 4]$ insoweit Sinn macht, als dass mit $x_n \in [0, 1]$ auch $x_{n+1} \in [0, 1]$ gilt.

(b) Führen Sie drei Schritte der Iteration bei $a = \frac{1}{2}, 1, 2$ und dem Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$ durch.

(c) Für welche $0 < a < a_0$ garantiert der Banachsche Fixpunktsatz die Existenz genau eines Fixpunktes in $[0, 1]$?

(d) Zeigen Sie, dass es für $a_0 < a$ genau einen weiteren Fixpunkt $0 \neq x_a \in [0, 1]$ gibt, und dass dieser Fixpunkt für $a < 3$ stabil ist.

(e) Bestimmen Sie die Fixpunkte $\notin \{0, x_a\}$ der Doppel-Iteration $x_{n+1} = f(f(x_n))$. Was bedeuten diese für die Einfach-Iteration?

A 4.8.10 Gegeben sei die Funktion $f(x) = 4x(1 - x),\ 0 \leq x \leq 1$.

(a) Zeigen Sie $0 \leq f(x) \leq 1$ für jedes $x \in [0, 1]$.
Dabei können wir f als Funktion $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ betrachten.

(b) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Abbildung $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$, d.h., bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $f(x) = x$.

(c) Berechnen Sie die 3. iterierte Funktion $f_3 := f \circ f \circ f$ und zeichnen Sie den Graphen von $f_3(x)$.

A 4.8.11 Das Newton-Verfahren kann man als Iterationsverfahren zur Auffindung eines Fixpunktes von $F(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ interpretieren. Welche Bedingung an f für die Konvergenz des Newton-Verfahrens liefert die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes auf F?

A 4.8.12 Führen Sie für die folgenden Funktionen und Startwerte drei Schritte des Newton-Verfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle durch, und prüfen Sie jeweils, ob das Newton-Verfahren wirklich gegen eine Nullstelle konvergiert:

(a) $4x^2 - 1$ für $x_0 = 1$ sowie $x_0 = 0$ (b) $x^5 - x - \dfrac{1}{5}$ für $x_0 = 0$ sowie $x_0 = 1$

A 4.8.13 Führen Sie die Newton-Iteration für $f(x) = x^2 - 1$ sowie die Startwerte $-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 2$ durch und begründen Sie, ob das Newton-Verfahren gegebenenfalls konvergiert.

A 4.8.14 Susi Sorglos hatte einen Kredit über 10 000 Euro mit 10% Zinsen pro Jahr aufgenommen, um sich ein Auto zu kaufen. Sie zahlte den Kredit in jährlichen Raten von 1 500 Euro nachschüssig ab. Dabei musste sie 12 Jahre zahlen (wobei die letzte Rate geringer war als 1500 Euro). Nach 9 Jahren ist das Auto endgültig schrottreif.

Wie hoch hätten die Zinsen seien dürfen, damit sie bei sonst gleichen Konditionen den Kredit nach 9 Jahren abbezahlt hätte?

Hinweis: Gesucht ist eine Lösung $p > 0$ der Gleichung

$$-10000 \cdot (1+p)^9 + 1500 \cdot \frac{(1+p)^9 - 1}{p} = 0 .$$

Bestimmen Sie dazu eine Nullstelle der Funktion

$$f(p) = -10000 \cdot p \cdot (1+p)^9 + 1500 \cdot ((1+p)^9 - 1)$$

mit dem Newton-Verfahren mit Startwert $p_0 = 0.1$ und vier Newton-Iterationen.

Kapitel 5

Riemann-Integrierbarkeit

5.1 Das Integral von Treppenfunktionen

A 5.1.1 Bestimmen Sie jeweils das Integral der folgenden Treppenfunktionen $\varphi\colon [-4,7] \to \mathbb{R}$ und $\psi\colon [-2,1] \to \mathbb{R}$, welche durch

$$\varphi(t) := \begin{cases} 2 & \text{für } t \in [-4,-1], \\ 4 & \text{für } t \in [3,7], \\ -5 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \psi(t) := \begin{cases} -3 & \text{für } t \in [-1,0], \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert sind.

Permutation:

Bestimmen Sie jeweils das Integral der durch

$$\varphi(t) := \begin{cases} -3 & \text{für } t \in [-1,0], \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \psi(t) := \begin{cases} 2 & \text{für } t \in [-4,-1], \\ 4 & \text{für } t \in [3,7], \\ -5 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definierten Treppenfunktionen $\varphi\colon [-2,1] \to \mathbb{R}$ und $\psi\colon [-4,7] \to \mathbb{R}$.

A 5.1.2 Wählen Sie zwei beliebige Treppenfunktionen $\varphi, \psi\colon [-3,8]$ aus.

(a) Bestimmen Sie $\varphi_+, \varphi_-, \psi_+, \psi_-$.

(b) Bestimmen Sie die Integrale

$$\int_{-3}^{8} \varphi(t)\ dt\ , \quad \int_{-3}^{8} |\varphi(t)|\ dt\ , \quad \left|\int_{-3}^{8} \varphi(t)\ dt\right|, \quad \int_{-3}^{8} (\varphi(t))^3\ dt\ , \quad \int_{-3}^{8} (3\psi \pm 5\varphi)(t)\ dt$$

sowie

$$\int_{-3}^{8} (\varphi \cdot \psi)(t)\ dt\ .$$

. . . . (Ober- und Untersummen)

A 5.1.3 Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf dem Intervall $[0, 10]$ bezüglich der äquidistanten Unterteilung $\left(x_k^{(n)} = \frac{10k}{n}\right)_{k=0,\ldots,n}$ die Riemannsche Untersumme

$$U(n, f) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \left(\inf_{]x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}[} f(x) \right) \cdot (x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) \tag{5.1}$$

und die analog definierte Riemannsche Obersumme $O(n, f)$ der Funktion $f(x) = 2^x$.

A 5.1.4 Berechnen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf dem Intervall $[-2, 3]$ bezüglich der äquidistanten Unterteilung $\left(x_k^{(n)} = -2 + \frac{k}{n}\right)_{k=0,\ldots,5n}$ die Riemannsche Untersumme

$$U(5n, f) \;=\; \sum_{k=1}^{5n} \left(\inf_{]x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}[} g(x) \right) \cdot (x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) \tag{5.2}$$

und die analog definierte Riemannsche Obersumme $O(5n, f)$ der Funktion $g(x) = x^2$.

A 5.1.5 Geben Sie für eine monoton fallende Funktion $f\colon [0, n] \to \mathbb{R}$ die Untersumme zur äquidistanten Zerlegung $0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$ des Intervalls $[0, n]$ an.

A 5.1.6 Geben Sie für eine monoton wachsende Funktion $f\colon [1, n] \to \mathbb{R}$ die Riemannsche Untersumme zur äquidistanten Zerlegung $1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$ des Intervalls $[1, n]$ an.

. . . . (Riemannsche Zwischensummen)

A 5.1.7 Finden Sie die Riemann-Zwischensumme $ZS(\mathcal{Z}_n, f)$ für jedes $n = 1, 2, ..., f(x) = 1 + x$ auf $[-1, 4]$, wenn Sie eine äquidistante Zerlegung $\left\{ I_k^{(n)} \right\}_{k=1}^{n}$, $I_k^n = [x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]$ von $[-1, 4]$ annehmen und den Zwischenwert $\xi_k^n = \frac{x_{k-1}^{(n)} + x_k^{(n)}}{2}$ setzen.

. . . . (bisher ohne Lsg)

A 5.1.8 Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine **Unterteilung** P des Intervalls $[a, b]$ ist ein $(n+1)$-Tupel $(x_0, \ldots, x_n)$ von $x_k \in [a, b]$ mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Die Menge aller Unterteilungen von $[a, b]$ sei $\mathcal{P}([a, b])$. Sei $a < b$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann kann man zu jeder Unterteilung $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{P}([a, b])$ des Intervalls $[a, b]$ die **Riemannsche Obersumme**

$$\mathcal{OS}\,(P, f) := \sum_{k=1}^{n} \Big(\sup_{x \in\ ]x_{k-1}, x_k[} f(x) \Big) (x_k - x_{k-1}) \tag{5.3}$$

und die **Riemannsche Untersumme**

$$\mathcal{US}\,(P, f) := \sum_{k=1}^{n} \Big(\inf_{x \in\ ]x_{k-1}, x_k[} f(x) \Big) (x_k - x_{k-1}) \tag{5.4}$$

definieren. Aus der Definition sehen wir sofort, dass für jede Wahl von P offenbar

$$\mathcal{US}\,(P, f) \;\leq\; \int_{a_*}^{b} f(x)dx \leq \int_{a}^{b^*} f(x)dx \;\leq\; \mathcal{OS}\,(P, f) \tag{5.5}$$

gilt. Zeigen Sie: Für jede beschränkte Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ gelten

$$\int_{a_*}^{b} f(x)dx \;=\; \sup_{Z \in \mathcal{Z}([a,b])} \mathcal{US}\,(P, f) \qquad \text{sowie} \qquad \int_{a}^{b^*} f(x)dx \;=\; \inf_{P \in \mathcal{P}([a,b])} \mathcal{OS}\,(P, f) \tag{5.6}$$

5.2 Das Riemann-Integral

A 5.2.1 Finden Sie beschränkte $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\displaystyle\int_0^{1^*} (f+g)(x)dx < \int_0^{1^*} f(x)dx + \int_0^{1^*} g(x)dx$.

A 5.2.2 Zeigen Sie: Potenzen $|f|^p$, $1 \le p < \infty$, Riemann-integrierbarer Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sind wieder Riemann-integrierbar.

A 5.2.3 Zeigen Sie: Produkte Riemann-integrierbarer Funktionen sind wieder Riemann-integrierbar.

.... (Das Riemann-Integral als Grenzwert von Ober- und Untersummen)

A 5.2.4 Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$ mithilfe der Riemann-(Ober- oder Unter-)Summen.

A 5.2.5 Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^{10} 2^x\, dx$ als den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} U(n,f)$ der entsprechend (5.1) gebildeten n-ten Untersummen. Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} O(n,f)$?

A 5.2.6 Bestimmen Sie das Integral $\displaystyle\int_{-2}^{3} x^2\, dx$, indem Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} U(5n,f)$ der entsprechend (5.2) gebildeten $5n$-ten Untersummen ermitteln.

Gegen welchen Wert konvergiert $O(5n,f)$?

A 5.2.7 Sei $x > 1$ gegeben. Ermitteln Sie auf dem Intervall $[1,x]$ die Riemannsche Untersumme von $f(t) := \frac{1}{t}$ zu der durch $t_k^{(n)} = x^{\frac{k}{n}}$, $k = 0, \ldots, n$, gegebenen Unterteilung des Intervalls $[1,x]$.

Welcher Wert ergibt sich im Limes $n \to \infty$ für die Folge der Untersummen $U\left(\left\{t_k^{(n)}\right\}_{k=0}^{n}, \frac{1}{t}\right)$?

Welchen Wert besitzt das Integral $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$?

A 5.2.8 Die Funktion $\frac{1}{x}$ ist als stetige Funktion auf $[1,2]$ Riemann-integrierbar. Berechnen Sie die Riemannsche Untersumme des Integrals

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$

bzgl. der äquidistanten Unterteilung $x_k := 1 + \frac{k}{n}$, $k = 0, \ldots, n$, sowie unter Verwendung von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \;=\; \ln(2)$ den Wert des Riemann-Integrals durch den Grenzübergang $n \to \infty$.

A 5.2.9 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Bestimmen Sie das Integral

$$\int_a^b \sqrt{x}\, dx$$

als Grenzwert der Riemannschen Obersummen für die Funktion $\sqrt{x}$, $x \in [a,b]$, bzgl. der Unterteilung durch die Punkte $x_k = (\sqrt{a} + (\sqrt{b} - \sqrt{a})\frac{k}{n})^2$, $k = 0, \ldots, n$.

Leichte Variation:

Sei $0 < a < b < \infty$. Bestimmen Sie das Integral $\int_a^b \sqrt{x}\, dx$, indem Sie den Grenzwert der Riemannschen Untersummen für die Funktion $\sqrt{x}$ auf $[a,b]$, bzgl. der durch die Punkte $x_k = (\sqrt{a} + (\sqrt{b} - \sqrt{a})\frac{k}{n})^2$, $k = 0, \ldots, n$, gegebenen Unterteilung berechnen.

..................(Das Riemann-Integral als Grenzwert von Riemann-(Zwischen-)Summen)

A 5.2.10 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Bestimmen Sie als Grenzwertes von Riemann-Summen

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

den Wert des Integrales $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx$ wie folgt: Betrachten Sie die äquidistante Zerlegung Z_n mit $x_k := a + d\frac{k}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, $d := b - a$, und als $\xi_k := \sqrt{x_{k-1}x_k}$ das geometrische Mittel von x_{k-1} und x_k.

A 5.2.11 Die Funktion x^2 ist als stetige Funktion auf $[0, 1]$ Riemann-integrierbar.
Berechnen Sie die Riemann-Summe von $\int_0^1 x^2\,dx$ bezüglich der äquidistanten Zerlegung $x_k := \frac{k}{n}$, $k = 0, \ldots, n$, und den durch das geometrische Mittel gegebenen Stützstellen $\xi_k := \sqrt{x_{k-1}x_k}$, sowie durch Limesbildung $n \to \infty$ den Wert des Integrals.

A 5.2.12 Berechnen Sie die Riemann-Summe von $\int_0^1 c^x\,dx$, $c > 0$, bzgl. der äquidistanten Zerlegung $x_k := \frac{k}{n}$, $k = 0, \ldots, n$, und den rechten Knoten als Stützstellen, sowie durch Limesbildung $n \to \infty$ den Wert des Integrals.

A 5.2.13 Beweisen Sie mithilfe Riemannscher Summen

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1}{2}$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{2}{\pi}$.

....(Pathologische Beispiele)

A 5.2.14 Zeigen Sie die **Riemann**-Integrierbarkeit der Funktionen (2+3 P)

(a) $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) := \begin{cases} \operatorname{sign}(\sin(\frac{\pi}{x})) & \text{für } x \neq 0\ , \\ 0 & \text{für } x = 0\ . \end{cases}$

(b) $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch $g(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ oder } x = 0\ , \\ \frac{1}{n} & \text{für } x \in \mathbb{Q} \text{ mit } x = \frac{m}{n} (m, n \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd}). \end{cases}$

A 5.2.15 Geben Sie eine Funktion f auf $[0, 1]$ an, die nicht Riemann-integrierbar ist, deren Betrag $|f|$ aber Riemann-integrierbar ist.

A 5.2.16 Finden Sie ein Beispiel für eine **Riemann**-integrierbare Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, die keine Stammfunktion besitzt.

A 5.2.17 Finden Sie ein Beispiel für eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, die eine Stammfunktion besitzt, aber nicht **Riemann**-integrierbar ist.

A 5.2.18 Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt, die auf $]a, b[$ differenzierbar ist, deren Ableitung $f := F'$ jedoch unbeschränkt und somit nicht Riemann-integrierbar ist.

A 5.2.19 Ist die Funktion $f(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ auf dem Intervall $[0, 1]$ Riemann-integrierbar ?

A 5.2.20 Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

definiert ist, über keinem Intervall $[a, b]$, $a < b$, **Riemann**-integrierbar ist.

5.3 Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

A 5.3.1 Beweisen Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

A 5.3.2 Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung die **Trapezregel**:
Für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \frac{b-a}{2}\,(f(a) + f(b)) - f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{12}$$

Alternative Formulierung:

Für jede C^2-Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \frac{b-a}{2}\,(f(a) + f(b)) - f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{12}$$

A 5.3.3 Zeigen Sie mittels Berechnung des Limes des Differenzenquotienten, dass die Funktion

$F(x) := \displaystyle\int_0^x \sin(x+s)\,ds \qquad (x > 0)$ differenzierbar ist. Bestimmen Sie die Ableitung $F'(x)$.

.... (Differentiation nach Integrationsgrenzen – noch ohne Lsg)

A 5.3.4 Seien $u, v\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ differenzierbare Funktionen und sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$F\colon x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\; dt\ .$$

Verwenden Sie dies zur Bestimmung von $\lim\limits_{x\searrow 0} G(x)$ und $\lim\limits_{x\nearrow 0} G(x)$ für die Funktion

$$G\colon x \mapsto \frac{1}{x^3}\int_0^{x^2} \sin(\sqrt{t})\; dt\ .$$

5.4 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

A 5.4.1 Beweisen Sie den zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

A 5.4.2 Begründen Sie knapp, warum die Funktion $f(x) := \max(x^2, x)$ eine Stammfunktion besitzt. Finden Sie eine Stammfunktion von f und bestimmen Sie mit deren Hilfe das Integral

$$\int_{-3}^{5} f(x)\,dx\ .$$

A 5.4.3 Begründen Sie knapp, warum die Funktion

$$f(x) \ := \ \max(x^3, x^2, x) \ = \ \begin{cases} x^3\ , & \text{für } x^3 \geq \max(x^2, x)\ , \\ \max(x^2, x)\ , & \text{für } x^3 < \max(x^2, x)\ , \end{cases} \tag{5.7}$$

auf jedem beliebigen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ eine Stammfunktion besitzt.

Finden Sie eine Stammfunktion von f und bestimmen Sie mit deren Hilfe das Integral

$$\int_{-6}^{3} f(x)\,dx\ .$$

A 5.4.4 Finden Sie Stammfunktionen zu $f(x) = \max\{1, x^2\}$ und $g(x) = \min\{1, x^2\}$. Bestimmen Sie anschließend $\displaystyle\int_{-7}^{3} f(x)\,dx$ und $\displaystyle\int_{-7}^{3} g(x)\,dx$.

A 5.4.5 Warum besitzt die Funktion $f\colon\ ]0, \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ eine Stammfunktion? Existiert eine Stammfunktion von f, welche stetig in den Nullpunkt fortsetzbar ist?

A 5.4.6 Existiert auf $]-\pi, \pi[$ eine Stammfunktion zu $g(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{für } \ -\pi < x \leq 0, \\ \dfrac{x^2\cos(x)}{\sin(x)} & \text{für } \ 0 < x < \pi, \end{cases}$?

A 5.4.7 Ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-1}}$ Riemann-integrierbar auf $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$? Falls ja, dann berechnen Sie das Riemann-Integral.

A 5.4.8 Gegeben ist die Funktion

$$F(x) \ = \ \begin{cases} x\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Ist die Funktion $F'(x)$ Riemann-integrierbar auf $[0, b]$ $(b > 0)$?

.... (Existenz Riemann-integrierbarer Funktionen ohne Stammfunktion)

A 5.4.9 (a) Zeigen Sie die sogenannte **Darboux-Eigenschaft** differenzierbarer Funktionen: Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $c \in \mathbb{R}$ erfülle $f'(a) < c < f'(b)$ (oder alternativ $f'(b) < c < f'(a)$). Dann existiert ein $p \in\ ]a, b[$ mit $f'(p) = c$.

(b) Zeigen Sie mittels (a), dass nichtkonstante Treppenfunktionen keine Stammfunktion besitzen.

A 5.4.10 Besitzt jede Riemann-integrierbare Funktion eine Stammfunktion ?

A 5.4.11 Besitzt die Funktion $f(x) = \mathrm{sign}(x)$ eine Stammfunktion ?

A 5.4.12 Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\,dx}{\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx} = 1$ gilt.

Tipp: Siehe Seite 61

. . . . (Lehrer spezial!!!)

A 5.4.13 **Behandlung der Integrationstheorie im Unterricht**
Untersuchen Sie in einem Unterrichtswerk Ihrer Wahl die Behandlung der Integration.

(a) Formulieren Sie eine fachlich präzise Definition des dort verwendeten Integralbegriffes.

(b) Wie werden die grundlegenden Integraleigenschaften (Linearität, Monotonie, Beschränktheit) behandelt? Arbeiten Sie dabei genau heraus, welche Aspekte

  (i) vollständig begründet werden,

  (ii) durch Plausibilitätsbetrachtungen oder anschauliche Argumente vermittelt werden

  (iii) als Fakten (ohne Begründung oder Plausibilitätsbetrachtungen) mitgeteilt werden.

(c) Untersuchen Sie, welcher Anteil der bereitgestellten Aufgaben sich jeweils folgenden Lernzielen zuordnen lässt:

- Konzeptionelles Verständnis des Integralbegriffes
- Verständnis der inhaltlichen Bedeutung
  (i) Integration als Werkzeug zur Bestimmung von Flächeninhalten (und ggf. Volumina)
  (ii) Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation, insbesondere zum
    A. Zusammenhang zwischen partieller Integration und Produktregel
    B. Zusammenhang zwischen Substitutionsregel und Kettenregel
- Beherrschen des Integralkalküls (Berechnung konkret gegebener Integrale), insbesondere zur
  (i) Integration von Konstanten, Monomen bzw. Inversen von Monomen
  (ii) Integration von Produkten (Anwendung der partiellen Integration)
  (iii) Integration der Exponentialfunktion sowie trigonometrischer Funktionen
  (iv) Integration von design-ten verketteten Funktionen (Substitutionsregel)
  (v) Integration von design-ten rationalen Funktionen (Anwendung von Polynomdivision, Partialbruchzerlegung)

Nehmen Sie Stellung zum gefundenen Ergebnis.

(d) Finden Sie (oder recherchieren Sie in einem geeigneten Unterrichtswerk der 12. Jahrgangsstufe) einen „schülergerechten Beweis“ für den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. (Hinweis: Das übliche Argument mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung lässt sich durch die Aussage ersetzen, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervallen Maximum und Minimum annehmen. Letztere könnte man anschaulich plausibel machen.)

5.5 Substitutionsregel und Partielle Integration

A 5.5.1 Zeigen Sie: Ist $R(x,y)$ eine rationale Funktion in zwei Variablen, so kann man die Integration von $x \mapsto R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ durch Substitution von $y := \sqrt[n]{ax+b}$ auf die Integration einer rationalen Funktion in y zurückführen.

Alternative (erweiterte Formulierung):

Sei $R(u,v)$ eine rationale Funktion in zwei Variablen, $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Führen Sie das Integral $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\, dx$ mittels geeigneter Substitution auf das Integral einer rationalen Funktion in einer Variablen zurück.

Wenden Sie dies auf das unbestimmte Integral $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{2x+1}}\, dx$ an.

A 5.5.2 Zeigen Sie:
Ist R eine auf $[a,b] \subset]0,\infty[$ definierte rationale Funktion, so gilt

$$\int_{\ln(a)}^{\ln(b)} R(\mathrm{e}^x)\, dx = \int_a^b R(t)\, \frac{1}{t}\, dt \tag{5.8}$$

Alternative Formulierung:
Sei $R(t)$ eine rationale Funktion. Führen Sie durch eine geeignete Substitution das Integral $\int R(\mathrm{e}^{ax})\, dx$ auf das Integral einer rationalen Funktion von t zurück.
Wenden Sie dies auf das Integral $\displaystyle\int \frac{1+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{5x}}\, dx$ an.

....(Stammfunktionen von $\dfrac{f'}{f}$ und $f \cdot f'$ sowie $f^n \cdot f'$)

A 5.5.3 Sei $f\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

(a) Finden Sie eine Stammfunktion von $f \cdot f'$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, fest. Finden Sie eine Stammfunktion von $f^n \cdot f'$.

(c) Sei zusätzlich $f > 0$. Finden Sie eine Stammfunktion von $\dfrac{f'}{f}$.

.... (Stammfunktion der Umkehrfunktion)

A 5.5.4 Sei $f\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit echt positiver Ableitung und einer Stammfunktion F. Bestimmen Sie eine Stammfunktion zur Umkehrfunktion f^{-1}.

oder:

Sei $f\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit echt positiver Ableitung und einer Stammfunktion F. Berechnen Sie eine Stammfunktion zur Umkehrfunktion f^{-1}.

....(Rechenaufgaben)

A 5.5.5 Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale und führen Sie ggf. die Probe durch:

(a) $\displaystyle\int \tan(x)\ dx$ (b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin(x)\ dx,$ (c) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln(x))^2}\ dx$ (d) $\displaystyle\int (\sin(x))^2\ dx.$

A 5.5.6 Berechnen Sie (a) $\displaystyle\int x\sin(x)\ dx$ sowie (b) $\displaystyle\int x\sin(x^2)\ dx$ und führen Sie eine Probe durch.

A 5.5.7 Bestimmen Sie mit partieller Integration/Substitution Stammfunktionen zu (4 P)

(a) $(4x^3-1)\ln(x)$ (b) $\mathrm{e}^{2x}\cos(4x-3)$ (c) $x\sqrt{1-x}$ (d) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\cos(x)}{\mathrm{e}^x}$

Alternative Formulierung zu (c),(b):

Berechnen Sie (i) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x}\ dx$ und (ii) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\cos(4x-3)\ dx.$

A 5.5.8 Bestimmen Sie mit partieller Integration/Substitution Stammfunktionen zu (5 P)

(a) $x\sqrt{1+x^2}$ (b) $\dfrac{\ln(x)}{x}$ auf $\mathbb{R}^+$ (c) $\cos(x)\,(1-2x\sin(x))$

A 5.5.9 Bestimmen Sie Stammfunktionen zu (i) $a(x)=\exp(x^2)2x^3$ und (ii) $b(x)=9^x\cos(3^x)$.

A 5.5.10 Bestimmen Sie Stammfunktionen von: (i) $(x^3+2x+1)^{11}\cdot(3x^2+2)$ (ii) $x\ln(x)$

A 5.5.11 Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^n}\,dx$ für jedes $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

A 5.5.12 Berechnen Sie das bestimmte Integral $\displaystyle\int_{-1}^3 (x^2+10x+9)\sqrt{x+1}\,dx.$

oder (grösserer Integrationsbereich):
Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^9 (x^2+10x+9)\sqrt{x+1}\,dx\ .$$

Tipp: Substitution $y:=x+1$

....(Flächenberechnungen)

A 5.5.13 Berechnen Sie die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von $g(t)=(t-t^3)\mathrm{e}^{-t^2}$ im Intervall $[-2,2]$.

A 5.5.14 Kann man die Funktion $f\colon\,]0,\infty[\,\to\mathbb{R}$, $f(x):=x\ln(x)$, stetig nach $x=0$ fortsetzen?

Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ für die Funktion f aus (b).

Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse.

A 5.5.15 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse $E\ :=\ \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$.

A 5.5.16 Lösen Sie $\int\limits_{-1}^{s}\sqrt{1-x^2}\,dx$, $s\in[-1,1]$, mit Hilfe der Substitution $x=\sin(t)$ und berechnen Sie anschließend daraus die Fläche einer Kreisscheibe mit Radius 1?

. . . . (Herleitung von Rekursionsformeln)

A 5.5.17 Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $a \neq 0$. Finden Sie eine Rekursionsformel zur Bestimmung einer Stammfunktion $H_n(x)$ von $h_n(x) = x^n \mathrm{e}^{ax}$.
Geben Sie mit deren Hilfe eine Stammfunktion von $h_3(x)$ an.

Leichte Variation/Spezialisierung]:

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $a \neq 0$. Finden Sie eine Rekursionsformel zur Bestimmung der Stammfunktion $H_n(x)$ von $h_n(x) = x^n \mathrm{e}^{ax}$ mit $H_n(0) = 0$.
Geben Sie mit deren Hilfe eine Stammfunktion von $h_3(x)$ an.

A 5.5.18 Gegeben sei $b \neq 0$. Finden Sie eine Rekursionsformel zur Berechnung von

$$J_n \;=\; \int x^{2n} \sinh(bx)\, dx \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Leichte Variation:

Führen Sie mittels partieller Integration die Berechnung von $J_n := \int x^{2n} \sinh(x)\, dx$ für $n \in \mathbb{N}$ auf die Berechnung von J_{n-1} zurück.

Geben Sie eine Stammfunktion zu $f(x) := x^4 \sinh(x)$ an.

A 5.5.19 (a) Beweisen Sie für die Stammfunktion $I_n(x)$ von $(\cos(x))^n$ mit $I_n(0) = 0$ die Rekursionsformel

$$I_n(x) \;=\; \frac{1}{n}\,(\cos(x))^{n-1} \sin(x) + \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x) \quad .$$

(b) Folgern Sie aus (a) die Beziehungen

$$c_{2n} \;:=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^{2n}\; dx \;=\; \frac{2n-1}{2n} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

und

$$c_{2n+1} \;:=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^{2n+1}\; dx \;=\; \frac{2n}{2n+1} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{3}\;.$$

(c) Beweisen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = 1$ mit Hilfe der Integraldarstellung von c_n aus (b) und folgern Sie, dass das Wallissche Produkt $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$ gegen $\dfrac{\pi}{2}$ konvergiert.

. . . . (Schnittstellenaufgabe – siehe Abschnitte 5.7 und 6.1)

(d) Beweisen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \;=\; \sqrt{\pi}$.

Anleitung: Zeigen Sie zunächst, dass $\exp(-x^2) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}$ gleichmäßig auf jedem Intervall $[-R, R]$, und schließen Sie danach auf die Konvergenz der uneigentlichen Integrale.
Verwenden Sie anschließend, dass mit der Folge c_n aus Aufgabe (b) die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx \;=\; 2\sqrt{n}\, c_{2n-2}$$

gilt (Substitution von $x = \sqrt{n}\tan(t)$), und berechnen Sie den Grenzwert mittels (c).

5.6 Integration rationaler Funktionen

....(Vorbereitung – Rechnen mit Polynomen)

A 5.6.1 Überprüfen Sie, ob die Menge $\{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ mit sinnvollen Verknüpfungen einen linearen Raum bildet.

A 5.6.2 Zeigen Sie, dass der aus der Schule bekannte Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die von uns eingeführte Definition eines linearen Raumes erfüllt.[1]

A 5.6.3 Gegeben seien die Polynome $p(x) = x^3 - 4x^2 + 1$, $q(x) = -4x^5 + x^4 - 13x$ sowie $u(x) = 4$.

(a) Bestimmen Sie die Polynome $p(x) + q(x)$, $p(x) + u(x)$ sowie $p(x)q(x)$, $p(x)u(x)$ und $p(x)p_0(x)$, wobei p_0 das neutrale Element der Addition im Raum der Polynome sei.

(b) Geben Sie jeweils den Grad der Polynome aus (a) an.

(c) Bestimmen Sie jeweils das additive Inverse der Polynome aus (a).

(d) Geben Sie eine Grad-Formel für die Summe zweier Polynome an.

A 5.6.4 Führen Sie die Polynomdivisionen $(x^4 - 1) : (x - 1)$ und $(x^4 - 36) : (x^2 - 2x + 3)$ durch.

A 5.6.5 Finden Sie jeweils die Menge aller Nullstellen über dem Körper $\mathbb{K}$ und bestimmen Sie die Vielfachheit jeder Nullstelle. Verwenden Sie auch die Methode der quadratischen Ergänzung.

(a) $x + \pi$ über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(b) $x^2 - 2$ sowie $x^2 + 2x - 8$ über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(c) $x^3 - x^2 + x - 1$ und $x^3 - x^2 - x + 1$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(d) $x^4 - 8x^2 - 9$ über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(e) $x^5 - 9x^4 + 27x^3 - 27x^2$ über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ (vi) $x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 6$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Hinweis: Besitzt ein Polynom mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ eine Nullstelle $a \in \mathbb{Q}$, so ist $a \in \mathbb{Z}$.

....(Partialbruchzerlegung allgemein)

A 5.6.6 Ist die Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion eindeutig ?

A 5.6.7 Gegeben ist die rationale Funktion $r(z) = \frac{q(z)}{p(z)}$, mit $p(z) = (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$ und $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$. Zeigen Sie: Die Partialbruchzerlegung von r besitzt die Gestalt

$$r(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{q(z_k)}{p'(z_k)} \cdot \frac{1}{z - z_k} \ .$$

A 5.6.8 Finden Sie eine Stammfunktion von

(a) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}\, dx$ für $k \in \mathbb{N}$. (b) $\displaystyle\int \frac{Ex + F}{(x^2 + px + q)^\ell}\, dx$ für $\ell \in \mathbb{N}$, falls $q - \frac{p^2}{4} > 0$ gilt.

[1] Dieser kann mit dem Raum der Polynome höchstens zweiten Grades über deren Koeffizienten identifiziert werden und somit als Unterraum von $\{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ interpretiert werden.

Alternative Formulierung für (b.i):

Integrieren Sie $\displaystyle\int \frac{Ex+F}{x^2+px+q}\,dx$, falls $D := q - \dfrac{p^2}{4} > 0$ gilt.

A 5.6.9 Zeigen Sie, dass für $\ell > 1$ und $D > 0$

$$\int \frac{1}{(t^2+D)^\ell}\,dt \;=\; \frac{1}{2(\ell-1)D}\left[\frac{t}{(t^2+D)^{\ell-1}} + (2\ell-3)\int \frac{1}{(t^2+D)^{\ell-1}}\,dt\right].$$

Spezialfall bzw. Anwendung:

Bestimmen Sie $\displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+D)^2}, \quad D > 0.$

. . . . (Schmunzelecke)

A 5.6.10 Die rationale Zahl $\dfrac{22}{7}$ ist eine hervorragende Näherung für die Zahl π. Viele Leute behaupten sogar $\pi = \dfrac{22}{7}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$$

und argumentieren Sie mit dessen Hilfe sowie mittels qualitativer Eigenschaften des Integranden sowie des allgemeinen Integrals, warum $\pi \neq \dfrac{22}{7}$ gelten muss.

Langfassung – Ein verbreiteter Irrglaube
Die rationale Zahl $\frac{22}{7}$ ist eine hervorragende Näherung für die Zahl π. Viele Leute glauben sogar $\pi = \frac{22}{7}$. Der Durchschnitt der Menge dieser Menschen mit der Menge der streng bibeltreuen Gläubigen ist angeblich relativ groß. In diesem Zusammenhang erzählt der israelische Mathematiker Gil Kalai folgende Geschichte:

> Eine israelische Tageszeitung veröffentlichte einmal einen Artikel über eine Person, die die ersten 2000 Stellen der Dezimaldarstellung von π im Kopf hat. Der Artikel enthielt die ersten 200 Stellen. Eine Woche später musste die Zeitung folgende Gegendarstellung bringen: „Einige unserer Leser bemerkten, dass $\pi = \frac{22}{7}$ ist. Hier ist die korrekte Version der ersten 200 Stellen von π =
>
> $$\begin{aligned}\frac{22}{7} \;=\;& 3.142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857\\ & 14285714285714285714285714285714285714285714285714285714285714285714\\ & 28571428571428571428571428571428571428571428571428571428571428571\end{aligned}$$
>
> Wir bitten um Verzeihung.“

Sich 2000 Stellen von π zu merken bekommt eine ganz andere Dimension unter der Voraussetzung $\pi = \frac{22}{7}$.

Berechnen Sie

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx \tag{5.9}$$

und beweisen Sie damit den Irrtum der Journalisten!

A 5.6.11 Berechnen Sie

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x^4)}{1+x^2}\,dx \tag{5.10}$$

A 5.6.12 Bestimmen Sie eine Stammfunktion der rationalen Funktion $f(x) := \dfrac{x^2+2}{x^3+1}$.

A 5.6.13 Zerlegen Sie $\dfrac{7x^4+12x^3-4x^2+4x+8}{x^3+3x+14}$ und integrieren Sie anschließend.

A 5.6.14 Ermitteln Sie den Definitionsbereich und eine Stammfunktion von

$$\frac{4x^2+8x+10}{x^4+4x^3+5x^2+4x+4} \tag{5.11}$$

Hinweis: Der Nenner besitzt die doppelte Nullstelle -2.

A 5.6.15 Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion der rationalen Funktionen

(a) $f(x) := \dfrac{3x^2+6x+5}{x^3+x^2+x+1}$ (b) $g(x) := \dfrac{2x^3+2x^2+2x+1}{x^4+x^2}$

A 5.6.16 Ermitteln Sie eine Stammfunktion von $\dfrac{4x^6+x^5+6x^4+15x^3+2x^2+6x+2}{x(x^2+1)^2(x-1)^2}$.

A 5.6.17 Finden Sie Stammfunktionen zu

(a) $f(x) = \dfrac{-x^3+10x^2-31x+31}{x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108} \left(= \dfrac{-x^3+10x^2-31x+31}{(x-2)^2(x-3)^3}\right)$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{x^3-2x^2+x}$ (c) $h(x) = \dfrac{2x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}$

A 5.6.18 Bestimmen Sie die Zerlegung der folgenden reellen rationalen Funktionen

(a) $R(x) = \dfrac{x^5+2x^4+2x^3+x^2}{x^3-2x^2+x}$ (b) $S(x) = \dfrac{x^4}{(x^2-1)^2}$ (c) $T(x) = \dfrac{x+1}{x^4-x}$

Bonus: Finden Sie Stammfunktionen zu $R(x), S(x), T(x)$.

Alternative Formulierung von (c+Bonus):

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der rationalen Funktion $f(x) := \dfrac{x+1}{x^4-x}$ und ermitteln Sie eine Stammfunktion von f.

A 5.6.19 Bestimmen Sie Stammfunktionen von

(a) $r(x) = \dfrac{x-4}{x^2-5x+6}$ (b) $s(x) = \dfrac{1}{x^4-1}$. (c) $t(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^4-1}$

(d) $u(x) = \dfrac{3-x}{(x-1)(x^2+1)}$ (e) $v(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+1}$

A 5.6.20 Bestimmen Sie für die folgenden rationalen Funktionen

(a) $\dfrac{1}{x^3-x}$, (b) $\dfrac{1}{1+x^4}$, (c) $\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$, (d) $\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$, (e) $\dfrac{1}{x^2(x+1)}$.

den Definitionsbereich in $\mathbb{R}$, die reelle Partialbruchzerlegung und eine Stammfunktion. Führen Sie ggf. eine Probe durch.

Alternative Formulierung für (c)

Bestimmen Sie den Definitionsbereich und eine Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

Nur Partialbruchzerlegung

Zerlegen Sie die folgenden rationalen Funktionen in Partialbrüche:

(a) $\dfrac{1}{x^3-x}$, (b) $\dfrac{1}{1+x^4}$, (c) $\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$, (d) $\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$, (e) $\dfrac{1}{x^2(x+1)}$.

.... (Substitution in eine rationale Funktion einer Variablen)

A 5.6.21 (a) Sei $R(t,s)$ eine rationale Funktion in zwei Variablen. Führen Sie das Integral

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx$$

durch die Substitution $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ für $-\pi < x < \pi$ auf das Integral einer rationalen Funktion von t zurück.

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktionen von $\dfrac{1}{4+\cos(x)}$ mittels (a).

(c) Zeigen Sie: Ist $R(x,y)$ eine rationale Funktion in zwei Variablen und ist $f\colon x \mapsto R(\cos(x), \sin(x))$ sogar π-periodisch, dann kann man die Integration von f durch die Substitution $y := \tan(x)$ auf die Integration einer rationalen Funktion zurückführen.

(d) Sei $a \neq 0 \neq b$. Bestimmen Sie mittels (c) eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{a^2(\sin(x))^2 + b^2(\cos(x))^2}\,.$$

(e) Führen Sie zur Berechnung einer Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{1}{1+(\sin(x))^2} \tag{5.12}$$

in einem ersten Schritt die beiden Substitutionen $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ bzw. $t = \tan(x)$ durch. Entscheiden Sie dann, welche von beiden die effektivere ist und berechnen Sie auf dieser Grundlage eine Stammfunktion von f. (noch ohne Lsg)

.... (Substitution inklusive Partialbruchzerlegung)

A 5.6.22 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$ mit Hilfe der **ersten** EULER**schen Substitution**

$$\sqrt{ax^2+bx+c} =: t - \sqrt{a}x, \quad (a > 0)\,.$$

A 5.6.23 Finden Sie eine Stammfunktion von $\dfrac{2e^{3x}+5e^{2x}-3e^{x}}{e^{3x}+e^{2x}-e^{x}-1}$. **Tipp:** Siehe auch (5.8)

A 5.6.24 Finden Sie Stammfunktionen zu

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}-x}$ (ii) $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ (iii) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

A 5.6.25 Bestimmen Sie (etwa mithilfe einer geeigneten Substitution) Stammfunktionen von

(a) $\dfrac{e^x}{(1-e^x)^2}$, (b) $\dfrac{1}{\sqrt{4x-1}}$, (c) $\dfrac{1}{\cos(x)}$, (d) $\dfrac{x^4}{(4x-8)^2}$.

A 5.6.26 Finden Sie eine Stammfunktion von $\dfrac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}$.

A 5.6.27 Bestimmen Sie Stammfunktionen von $f(x) := 2x^3\sin(x^2)$ und $g(x) := \dfrac{3x^2-4x+3}{x^3-x^2-x-2}$.

A 5.6.28 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) := \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ und berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

A 5.6.29 Ermitteln Sie Stammfunktionen von

(a) $u(x) = \dfrac{1}{16-x^4}$, (b) $v(x) = \dfrac{1}{x^2+6x+34}$, (c) $w(x) = \dfrac{x^3}{x^8-2}$ für $x > 0$.

A 5.6.30 Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale

(a) $\displaystyle\int_1^e \ln(x)\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin(x))^2\, dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cosh(x)}{1+\cosh(x)}\, dx$ (d) $\displaystyle\int_{e^{-1}}^e (\ln(x))^2\, dx$

. . . . (bisher ohne Lsg)

A 5.6.31 Berechnen Sie das bestimmte Integral $\displaystyle\int_0^{1000} \frac{x^3}{x^2+25x+250}\, dx$.

A 5.6.32 Ermitteln Sie Stammfunktionen von

(a) $f(x) = x(1-x)^{10}$, $g(x) = \sin(5x-a) - \sin(5a-x)$, $h(x) = \dfrac{\cos(2x)}{\cos(x)-\sin(x)}$

(b) $u(x) = \dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$, $v(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+5}}$, $w(x) = \dfrac{x^2}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}$, $y(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

A 5.6.33 Ermitteln Sie jeweils den Wert der folgenden eigentlichen Riemann-Integrale

(a) $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{1}{2\sin(x)-\cos(x)+5}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos(x)}\, dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos(2x)}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx$

A 5.6.34 Berechnen Sie (a) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-x^2-7x+2}{x^4-2x^2+1}\, dx$ (b) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\, dx$

A 5.6.35 Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(\sin(x))^2(\cos(x))^4}\, dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1+\sin(x)}{1-\cos(x)}\, dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)\cos(2x)}\, dx$

HINWEIS: Substitution mit $x = \arctan(t)$, $x = 2\arctan(t)$, $t = \cos(x)$ für 1./2./3. Integral.

5.7 Uneigentliche Riemann-Integrale

.... (Majorantenkriterium und Anwendung)

A 5.7.1 Beweisen Sie das folgende **Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale**: Sind die Funktionen $f, g\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ für jedes $a < u < b$ über $[a, u]$ Riemann-integrierbar, gilt $|f| \leq g$ und existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b g(x)\,dx$, so existiert auch das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

A 5.7.2 Zeigen Sie:
Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ konvergiert, jedoch divergiert $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,dx$.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie, dass $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ existiert (es hat den Wert $\frac{\pi}{2}$, was z.B. mit dem DIRICHLETschen Lemma gezeigt werden kann). Beweisen Sie auch, dass dieses uneigentliche Integral nicht absolut konvergiert, also $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx$ nicht existiert.

A 5.7.3 Überprüfen Sie die Existenz des uneigentlichen Integrals $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)}}\,dx$.

A 5.7.4 Zeigen Sie:
Aus der Existenz des uneigentlichen Integrals $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ folgt nicht $\lim\limits_{x \nearrow \infty} f(x) = 0$.
Hinweis: Betrachte $f(x) := \cos(x^2)$.

A 5.7.5 Überprüfen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx \tag{5.13}$$

auf Existenz. Geben Sie eventuell den Wert an.

Lösungsvorschlag:

Zunächst halten wir fest, dass wegen $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$ mit Hilfe der Substitutionsregel

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx \;=\; \int_0^\infty f(x) \cdot f'(x)\,dx \;=\; \lim_{R \to \infty} \left[\frac{(f(x))^2}{2}\right]_0^R \;=\; \lim_{R \to \infty} \left[\frac{(\arctan(x))^2}{2}\right]_0^R \;=\; \frac{\pi^2}{8}$$

folgt. Da nun einerseits der Integrand aus (5.13) stetig und nichtnegativ ist sowie andererseits wegen $\forall \zeta \geq 1\colon \zeta^{\frac{3}{2}} \geq \zeta^{\frac{2}{2}} = \zeta \geq 1$ auch

$$\forall x \geq 0\colon 0 \leq \frac{\arctan(x)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{\arctan(x)}{1+x^2}$$

gilt, folgt nun die Existenz des uneigentlichen Integrals (5.13) nach dem Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale.

A 5.7.6 Für welche $a \in \mathbb{R}$ existiert $\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx$, für welche $\int_1^\infty \frac{1}{x^a} dx$, für welche $\int_0^\infty \exp(ax) dx$?
Berechnen Sie bei Existenz auch den Wert des Integrals.

A 5.7.7 Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$?

A 5.7.8 Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\, dx$ und $\displaystyle\int_0^1 x \ln(x)\, dx$.

A 5.7.9 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) := \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ auf dem Intervall $]0, +\infty[$.
Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx$?
Bestimmen Sie gegebenenfalls den Wert dieses uneigentlichen Integrals.

A 5.7.10 Überprüfen Sie die Existenz und bestimmen Sie ggf. den Wert der uneigentlichen Integrale

$$\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx,\quad \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx,\quad \int_{\mathrm{e}}^\infty \frac{1}{x}\, dx,\quad \int_0^3 \frac{1}{x^2}\, dx,\quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx,\quad \int_1^\infty \frac{1}{x^4}\, dx,\quad \int_0^\infty \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\, dx.$$

. . . . . . (Beispielintegrale inklusive Partialbruchzerlegung/Substitution/partielle Integration)

A 5.7.11 Überprüfen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

(a) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(x)}{(\sin(x))^2}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx$

A 5.7.12 Bestimmen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\, dx$

A 5.7.13 Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\, dx$? Bestimmen Sie es gegebenenfalls.

Alternative Formulierung:
Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\, dx$.

A 5.7.14 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) := \dfrac{x+2}{x^3+x}$ und berechnen Sie das uneigentliche Riemann-Integral $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\, dx$. Existiert das uneigentliche Riemann-Integral $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\, dx$?

A 5.7.15 Berechnen Sie das uneigentliche Riemann-Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2x^2+1}{x^4+x^2}\, dx$.

A 5.7.16 Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_2^\infty \frac{3x}{x^4-x^3-x+1}\, dx$?

A 5.7.17 Überprüfen Sie, ob das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2x^2+4x+5}{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}\, dx$ existiert, und berechnen Sie es gegebenenfalls.

Hinweis: Der Nenner besitzt die doppelte Nullstelle -2. (Siehe auch (5.11))

A 5.7.18 Gegeben seien die beiden Funktionen $f(x) := \dfrac{1}{x\ln(x)}$ und $g(x) := \dfrac{1}{x\,(\ln(x))^2}$. Zeigen Sie:

(a) Es gelten $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \;=\; \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \;=\; 0.$

(b) Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\infty} g(x)\,dx$ existiert, während $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\infty} f(x)\,dx$ nicht existiert.

. . . . (Integralvergleichskriterium)

A 5.7.19 Beweisen Sie Satz 20.1:
Für eine monoton fallende, nichtnegative Funktion $f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ genau dann, wenn die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert.

Nur eine Richtung:

Beweisen Sie das Integralvergleichskriterium:
Existiert für eine monoton fallende, nichtnegative Funktion $f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, so existiert auch $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$.

A 5.7.20 Warum konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ für $k > 1$? Warum divergiert sie für $0 < k \leq 1$?

Alternative Formulierung für $k = 1$:

Beweisen Sie die bestimmte Divergenz der harmonischen Reihe alternativ mittels Satz 20.1.

A 5.7.21 Überprüfen Sie mittels Integralvergleichskriterium, ob die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}}$ konvergiert.

A 5.7.22 Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx$.

Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^3}$?

. . . . (Kombi-Aufgaben)

A 5.7.23 Die Funktion $F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei definiert durch $F(x) \;:=\; \begin{cases} |x|^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung f von F.

Ist f Riemann-integrierbar über $[0,1]$?

Ist $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar über $]0,1]$?

. . . . (Anwendungen der Gamma-Funktion)

A 5.7.24 Beweisen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx \;=\; \sqrt{\pi}$ auf alternative Weise mit Hilfe von

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \;=\; \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} \exp(-t)dt \;=\; \sqrt{\pi}$$

und einer geeigneten Substitution.

Kapitel 6

Approximierbarkeit von Funktionen

6.1 Funktionenfolgen

Punktweise und Gleichmäßige Konvergenz

....(Spezielle Beispiele)

A 6.1.1 Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Funktionen $f_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \begin{cases} 1\ , & x\geq \frac{1}{n}, \\ nx\ , & x\in]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[, \\ -1\ , & x\leq -\frac{1}{n}. \end{cases}$

(a) Zeigen Sie: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen die Funktion:

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} 1\ , & x>0, \\ 0\ , & x=0, \\ -1\ , & x<0. \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie: Die Konvergenz in (a) ist nicht gleichmäßig.

A 6.1.2 Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n\colon [0,1]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \begin{cases} 0\ , & x\ <\ 1-\frac{2}{n} \\ n(x-1)+2\ , & 1-\frac{2}{n}\ \leq\ x\ \leq\ 1-\frac{1}{n} \\ 1\ , & 1-\frac{1}{n}\ <\ x \end{cases}$

punktweise auf $[0,1]$? Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[0,1]$?

A 6.1.3 Zeigen Sie, dass die durch $f_n(x)=x^n$ definierte Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n\colon [0,1[\to\mathbb{R}$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, jedoch nicht gleichmäßig.

Versteckte Darstellung:

Konvergiert die Funktionenreihe

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n-1}) \tag{6.1}$$

auf $[0,1[$ gleichmäßig?

Alternative Formulierung:

Untersuchen Sie die Funktionenreihe (6.1) auf gleichmäßige Konvergenz auf $[0,1[$.

A 6.1.4 Zeigen Sie, dass die durch $f_n(x) := x^n(1-x^n)$ definierte Folge von Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ punktweise, jedoch auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.

A 6.1.5 Untersuchen Sie die durch $f_n(x) := 2x^n(1-x^n)$ definierte Folge von Funktionen $f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

A 6.1.6 Auf $[0,1]$ seien die Funktionen f_n durch $f_n(x) = nx(1-x)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ gegeben.

(a) Berechnen Sie für jedes $x \in [0,1]$ jeweils den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x) \right)$.

(c) Ist die Folge $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent ?

A 6.1.7 Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) \ := \begin{cases} -1 & \text{für } x < -\frac{\pi}{n}\ , \\ \sin\left(\frac{nx}{2}\right) & \text{für } x \in \left[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right], \\ 1 & \text{für } x > \frac{\pi}{n}\ . \end{cases}$

(a) Untersuchen Sie die Funktionen f_n auf Differenzierbarkeit.

(b) Existiert der punktweise Grenzwert $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$? Konvergiert f_n gleichmäßig ?

Alternative Formulierung:

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1\ , & x > \frac{\pi}{n}, \\ \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\ , & -\frac{\pi}{n} \le x \le \frac{\pi}{n}, \\ -1\ , & x < -\frac{\pi}{n}. \end{cases}$

(a) Untersuchen Sie die Funktionen auf Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}$.

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

(c) Ist die Folge $\big(f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{R}$?

.... (weitere Beispiele)

A 6.1.8 Die Funktionen $g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien durch $\quad g_n(x) = \dfrac{nx}{1+|nx|}\quad$ definiert. (2+2 P)

(a) Zeigen Sie, dass alle Funktionen g_n stetig sind.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\quad g(x) \ := \ \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) \quad$ definiert bzw. stetig ?

A 6.1.9 Prüfen Sie nachstehende Folgen jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto n\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$ (b) $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin\left(\pi x^n\right)$ (5 P)

A 6.1.10 Konvergiert die Folge der Funktionen $f_n(x) := \sqrt{\dfrac{1}{n} + x^2}$ punktweise auf $\mathbb{R}$? Auch gleichmäßig?

A 6.1.11 Konvergiert die Funktionenfolge $f_k\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) := \left(\frac{|x-\pi|}{\pi}\right)^k$, punktweise? Konvergiert f_k gleichmäßig?

A 6.1.12 Konvergiert die Funktionenfolge $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ punktweise?

........................(Auswirkung einer wesentlichen Variation des Definitionsbereiches)

A 6.1.13 Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Funktionen $f_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \dfrac{x}{n}$. Zeigen Sie:

(a) Die Folge f_n konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion,

(b) Die Folge f_n konvergiert jedoch auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

(c) $\forall c>0$ konvergiert die eingeschränkte Folge $f_n|_{[0,c]}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

A 6.1.14 Konvergiert die durch $g_n(x) \ := \ \mathrm{e}^{-\frac{n}{x}}$ definierte Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf $]0,\infty[$?

Sei $b>0$. Konvergiert die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $]0,b]$? Und auf $]0,\infty[$?

A 6.1.15 Sei $b>0$. Konvergiert die durch $f_n(x):=\ln\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ definierte Folge von Funktionen $f_n\colon [1,b]\to\mathbb{R}$ auf dem Intervall $[1,b]$ punktweise? Konvergiert f_n auf $[1,b]$ gleichmäßig? Auch auf $[1,\infty[$?

A 6.1.16 Konvergiert die durch $f_n(z):=z^n$ definierte Folge komplexwertiger Funktionen f_n auf jeder Kreisscheibe $D_r:=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|\le r\}$ mit Radius $r<1$ punktweise?

Konvergiert f_n auch gleichmäßig auf D_r ?

Konvergiert die Funktionenfolge f_n punktweise oder gleichmäßig auf der Kreisscheibe D_1 ?

....(Allgemein gehaltene Aussagen)

A 6.1.17 Angenommen, es konvergieren f_n gegen f und g_n gegen g jeweils gleichmäßig auf D.

(a) Zeigen Sie: Dann konvergiert f_n+g_n gleichmäßig gegen $f+g$ auf D.

(b) Zeigen Sie: Sind f_n, g_n beschränkt, so konvergiert $f_n\cdot g_n$ gleichmäßig gegen $f\cdot g$ auf D.

(c) Gilt (b) auch ohne die Beschränktheitsvoraussetzung ?

A 6.1.18 Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen f konvergiere. Beweisen Sie die gleichmäßige Konvergenz der Folge $f_n^2-f^2$.

A 6.1.19 Seien die Funktionen $f_n\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ und $g_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig.

Beweisen Sie, dass bei gleichmäßiger Konvergenz $f_n\to f$ auf $[0,1]$ und $g_n\to g$ auf $\mathbb{R}$ auch die Folge $g_n\circ f_n$ gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen $g\circ f$ konvergiert.

A 6.1.20 Sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie: Bei gleichmäßiger Konvergenz von $y_n\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ auf $[a,b]$ gegen $y\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ konvergieren auch die Integrale $\displaystyle\int_a^b f(y_n(x))\,dx$ für $n\to\infty$ gegen $\displaystyle\int_a^b f(y(x))\,dx$, falls alle Integrale existieren und endlich sind.

A 6.1.21 Sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie: Bei gleichmäßiger Konvergenz von stetigen $y_n\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ auf $[a,b]$ gegen $y\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ konvergieren die Integrale $\displaystyle\int_a^b f(y_n(x))\,dx$ gegen $\displaystyle\int_a^b f(y(x))\,dx$.

Spezialfälle:

Konvergiere die Folge der stetigen Funktionen $y_n\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ gleichmäß ig gegen die Funktion $y\colon [a,b]\to\mathbb{R}$.

(a) Beweisen Sie $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b y_n(x)\,dx=\int_a^b y(x)\,dx$.

(b) Beweisen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_a^b (y_n(x))^2\,dx = \int_a^b (y(x))^2\,dx$.

A 6.1.22 Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $I = [a, b]$. Weiter sei (f_n) eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen $f_n\colon I \to \mathbb{R}$, die gegen ein $f\colon I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergieren, d.h.,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0 \ .$$

Zeigen Sie, dass auch f Riemann-integrierbar ist und $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

.... (Allgemein gehaltene Aussagen – bisher oL)

A 6.1.23 Sei (f_n) eine Folge von Funktionen, die auf dem Intervall $[a, b], a < b; a, b \in \mathbb{R}$, gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert und sei g eine Funktion, definiert durch $g(x) := 2\sin(2x)\cos(2x)$.

(a) Zeigen Sie die punktweise Konvergenz der Folge $(f_n \cdot g)$.

(b) Konvergiert die Folge $(f_n \cdot g)$ auch gleichmäßig auf [a,b]?

A 6.1.24 Eine Funktionenfolge $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f_0(t) := \sin(t)$, $f_{n+1}(t) := \frac{2}{3} f_n(t) + 1$ definiert.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergiert.
Bestimmen Sie die Grenzfunktion.

(b) Was lässt sich sagen, falls als Startfunktion $f_0(t) := t^2$ gewählt wird ?

.... (Kuriositätenkabinett)

A 6.1.25 Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ und $1_y(x)$ die Funktion, welche durch

$$1_y(x) := \begin{cases} 1 \ , & x = y \\ 0 \ , & x \neq y \end{cases}$$

definiert wird. Zeigen Sie, dass durch $f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} 1_{a_k}(x)$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen definiert ist, die auf $[0, 1]$ punktweise gegen eine nicht-Riemann-integrierbare Funktion f konvergiert.

A 6.1.26 Zeigen Sie: Die Folge der Funktionen $f_n(x) := \dfrac{x}{n^2} \mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}$ konvergiert auf $[0, \infty[$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion, aber für das uneigentliche Integral ist $\int_0^{\infty} f_n(x)\ dx = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Warum ist dies kein Widerspruch zu Satz 21.4 ?

A 6.1.27 Wir definieren Funktionen $f_n, g_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) \ := \ \left(x^2 - \frac{x}{2}\right)^n \qquad \text{und} \qquad g_n(x) \ := \ \begin{cases} n\sin(n\pi x) \ , & \text{falls } 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \ , \\ 0 \ , & \text{falls } \dfrac{1}{n} \le x \le 1 \ . \end{cases}$$

(a) Gibt es $f, g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, so dass die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f bzw. g konvergieren? Wenn ja, ist diese Konvergenz dann auch gleichmäßig?

(b) Falls mindestens einer der beiden Grenzwerte existiert:
Konvergiert die entsprechende Folge der Integrale dann auch gegen das Integral des Grenzwertes?
D.h., gilt beispielsweise $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f dx$?

.... (Kombi-Aufgaben)

A 6.1.28 Konvergiert die Funktionenfolge $f_n(x) := \dfrac{nx^4}{1+nx^2}$ punktweise auf $\mathbb{R}$?

Konvergiert f_n gleichmäßig auf $\mathbb{R}$?

Zeigen Sie: Die Funktionen $g_n := \sqrt{f_n}$ sind beliebig oft differenzierbar und konvergieren gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, jedoch ist die Grenzfunktion nicht differenzierbar.

Alternative Funktionenbezeichnung:

(a) Konvergiert die Funktionenfolge $u_n(x) := \dfrac{nx^4}{1+nx^2}$ punktweise/gleichmäßig auf $\mathbb{R}$?

(b) Zeigen Sie: Die Funktionen $v_n := \sqrt{u_n}$ sind beliebig oft differenzierbar und konvergieren gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, jedoch ist die Grenzfunktion nicht differenzierbar.

A 6.1.29 Konvergiert die durch $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(nx)$ definierte Folge von Funktionen punktweise auf $\mathbb{R}$?

Auch gleichmäßig ?

Konvergiert die Folge der Ableitungen $f_n'(x)$ punktweise auf ganz $\mathbb{R}$?

Auch gleichmäßig ?

A 6.1.30 (a) Bestimmen Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ die Stammfunktion F_n von $f_n(x) := \dfrac{n}{n^2+x^2}$ mit $F_n(0) = 0$. **Hinweis:** Es gilt $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(b) Konvergieren die Funktionenfolgen f_n und F_n (aus Aufgabenteil (a)) punktweise auf $\mathbb{R}$?

Konvergieren f_n und F_n gleichmäßig auf $\mathbb{R}$?

Approximation nach Bernstein/Jackson

A 6.1.28 **(Bernsteinpolynome)**

(a) Für $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, ist durch $B_k^{(n)}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ das k-te Bernstein-Polynom vom Grad n definiert. Zeigen Sie mit Hilfe von $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, dass die folgenden Identitäten erfüllt werden:

(i) $\sum\limits_{k=0}^{n} B_k^{(n)}(x) = 1$ und $B_k^{(n)}(x) \geq 0$ in $[0,1]$ (nichtneg. Zerlegung der Einheit),

(ii) $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot B_k^{(n)}(x) = nx$,

(iii) $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1) \cdot B_k^{(n)}(x) = n(n-1)x^2$,

(iv) $\sum\limits_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \cdot B_k^{(n)}(x) = nx(1-x)$.

(b) Sei f eine auf dem Intervall $[0,1]$ stetige Funktion. Zeigen Sie mit Hilfe der Aussagen von (a), dass für jedes $\varepsilon \geq 0$ ein Polynom $p_\varepsilon(x)$ mit $\| p_\varepsilon - f \| < \varepsilon$ exitsiert.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die durch $p_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_k^{(n)}(x)$ definierte Polynom-Folge $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen f konvergiert.

(c) Verallgemeinern Sie die Aussage von (b) auf reellwertige stetige Funktionen über einem beliebigen kompakten Intervall $[a,b]$.
Hinweis: Nach dem Satz von Heine-Borel (wird in der Analysis 2 bewiesen) ist eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ genau dann kompakt, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.

6.2 Potenzreihen

A 6.2.1 Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf (abs.)Konvergenz in Abhängigkeit von $x \in [-1, 1]$:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Erweiterung von (i):

(a) Zeigen Sie, dass für die Identität $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass sich für $|x| < 1$ aus (a) die Identität $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ herleiten lässt. Weiterhin finde man damit eine Darstellung von $\ln(2)$.

A 6.2.2 Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und a_n eine Folge reeller Zahlen.

In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ stetig ?

A 6.2.3 Ermitteln Sie die Grenzfunktion der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

A 6.2.4 Stellen Sie e^{-x^2} für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ als Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dar.

A 6.2.5 Stellen Sie $\dfrac{x^5}{(x+1)^2}$ und $\dfrac{1}{x^2+1}$ für beliebige $x \in\ ]0, 1[$ jeweils als Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dar.

.... (Bestimmung des Konvergenzbereiches in $\mathbb{R}$)

A 6.2.6 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} x^n$, (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} x^n$.

A 6.2.7 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n^3 + 2n - 1) x^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} (x+7)^n$, (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + (-1)^{n-1}\right)^n}{n^2} x^n$

und geben Sie für jede Potenzreihe alle $x \in \mathbb{R}$ an, in denen Konvergenz vorliegt.

A 6.2.8 Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+5)^n}{n^2}$ konvergiert.

A 6.2.9 Wo konvergieren die Potenzreihen (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}(x-1)^n$ und (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x+1)^{2n}$?

Leichte Variation:

Wo konvergieren die Potenzreihen (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}(x+2)^n$ und (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-3)^{2n}$?

A 6.2.10 Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$?

A 6.2.11 Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k} x^k$.

. . . . (gliedweise Differentiation und Integration)

A 6.2.12 Bestimmen Sie die Grenzfunktion der Potenzreihe $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^n$ auf $]-1,1[$.

Alternative Formulierung:

Bestimmen Sie für die auf $]-1,1[$ durch $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^n$ gegebene Funktion eine explizite Formel.

A 6.2.13 Ermitteln Sie die Grenzfunktion der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n$, dort wo sie existiert.

Alternative Formulierung:

Ermitteln Sie den Konvergenzradius und ggf. die Grenzfunktion der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n$.

Alternative Formulierung:

Für welche x konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n$. Finden Sie eine explizite Formel.

. . . . (Bestimmung des Konvergenzbereiches in $\mathbb{C}$)

A 6.2.14 Beweisen Sie: Wenn die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert, dann auch in jedem Punkt z mit $|z| < |z_0|$.

A 6.2.15 (a)* Zeigen Sie das verallgemeinerte Leibniz-Kriterium:
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine nichtnegative, monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert

$$P \colon z \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

für alle $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \setminus \{1\}$, insbesondere gilt $R \geq 1$.

Hinweis: Schätzen Sie

$$(1-z)\sum_{k=m}^{n} a_k z^k = \sum_{k=m}^{n}(a_k - a_{k-1})z^k + a_{m-1}z^m - a_n z^{n+1}$$

ab und wenden Sie das Konvergenzkriterium von CAUCHY an.

(b) Es gelte nun **zusätzlich** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$. Dann gilt $R = 1$ und auf dem Rand der Kovergenzkreisscheibe konvergiert P für alle $z \neq 1$, aber nicht für $z = 1$.

A 6.2.16 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^4 z^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} z^n$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(n^4 + \frac{2^n}{n^4}\right) z^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$ (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^{n^2}$

A 6.2.17 Ermitteln Sie den Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k} z^k$ und geben Sie (im Fall der Konvergenz) eine explizite Formel für $f(z)$ an.

A 6.2.18 Ermitteln Sie den Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{k\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} z^k$ und geben Sie (im Fall der Konvergenz) eine explizite Formel für $f(z)$ an.

A 6.2.19 Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{4n}$?

Zeigen Sie die Gleichung $f\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{16}{17}$.

.... (Teleskopreihen)

A 6.2.20 Untersuchen Sie die Funktionenreihen

(i) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$, (ii) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^n}{n}\right)$

auf gleichmäßige Konvergenz auf dem Intervall $[0, 1]$. Zu (i) siehe auch (6.1).

A 6.2.21 Zeigen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergiert, wobei $\binom{\frac{1}{2}}{0} := 1$ und $\binom{\frac{1}{2}}{n} := \dfrac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1) \cdot \cdots \cdot (\frac{1}{2} - (n-1))}{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1}$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert ist.

A 6.2.22 Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6 + \sin(n)}{8} \right)^n x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{8}{7}$ absolut konvergiert. Beweisen Sie weiterhin die Abschätzung

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6 + \sin(n)}{8} \right)^n x^n \right| < 7 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad |x| \leq 1.$$

A 6.2.23 Zu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiere ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $\forall n \in \mathbb{N}$: $|a_n| \leq M$. Zeigen Sie: (2+2 P)

(a) Für jedes $x \in \,]-1, 1[$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

(b) Für die durch $f(x) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ gegebene (nach Aufgabenteil (a) existierende) Funktion $f\colon \,]-1, 1[\, \to \mathbb{R}$ gilt

$$\forall x \in \,]-1, 1[\; : \; \left(|x| < \frac{1}{1 + M} \Longrightarrow f(x) > 0 \right) .$$

6.3 Taylor-Reihen

A 6.3.1 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $g(x) := T_2 f(x;a)$ das Taylorpolynom zweiten Grades von f zum Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie:
Hat g ein strenges lokales Extremum in a, dann hat f ein lokales Extremum in a.

.... (Taylor-Polynome)

A 6.3.2 Bestimmen Sie das Taylorpolynom ersten Grades von $f(x) := \operatorname{arsinh}(x)$ im Punkt $x_0 := 0$.

A 6.3.3 Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades von $f(x) := \operatorname{arsinh}(x)$ im Punkt $x_0 := 0$.

A 6.3.4 Bestimmen Sie $T_2 f(x;0)$ und $T_3 g\left(x; \frac{\pi}{2}\right)$ für $f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)}$ und $g(x) = \ln(\sin(x))$.

A 6.3.5 Bestimmen Sie das 3. Taylor-Polynom von $\tan\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ an der Entwicklungsstelle $a = 0$.

A 6.3.6 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x \ln(1 + x^2)$ definiert. Bestimmen Sie das Taylorpolynom ersten und zweiten Grades von f zum Entwicklungspunkt $a := 0$.
Begründen Sie, warum f in $a = 0$ keine lokale Extremalstelle besitzt.

.... (Taylor-Reihe)

A 6.3.7 Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) := \ln(1 + x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Alternative Formulierung:
Zeigen Sie, dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ die Taylorreihe von $f(x) := \ln(1+x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ ist.

Prüfen Sie nach, ob die Taylorreihe von f auf dem Intervall $[0,1]$ gleichmäßig konvergiert.

A 6.3.8 Berechnen Sie die Taylor-Reihe der Funktion $f = \dfrac{1}{x^2 + x - 1}$.

A 6.3.9 Berechnen Sie die Taylor-Reihe von $\arcsin\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ im Entwicklungspunkt 0 durch Integration der Taylor-Reihe der Ableitung von arcsin.

A 6.3.10 Entwickeln Sie $f(x) := \dfrac{1}{(1-x)^2}$ um den Punkt $a := 0$ in eine Potenzreihe.

A 6.3.11 Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der Funktion $f\colon\ ]-2,2[\to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{4x - 9}{x^2 - 5x + 6}$, um den Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ und überprüfen Sie, ob die Taylorreihe auf $]-2,2[$ gegen f konvergiert.

A 6.3.12 Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von $\cosh(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 := 0$.

A 6.3.13 Geben Sie eine stetige Funktion auf einem Intervall $]x_0 - R, x_0 + R[$ an, die sich dort nicht in eine Potenzreihe entwickeln lässt.

A 6.3.14 Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$, keine Potenzreihenentwicklung um den Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ besitzt, jedoch um den Entwicklungspunkt $x_0 := 1$ in eine Potenzreihe entwickelt werden kann.

Wo konvergiert diese Potenzreihenentwicklung gegen f ?
. . . . (Lagrangesches Restglied)

A 6.3.15 Approximieren Sie die Funktion $f(x) = x\mathrm{e}^x$ durch ein Taylor-Polynom geeigneter Ordnung an der Stelle $a = \frac{1}{2}$, so dass der maximale Fehler auf dem Intervall $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ kleiner als 10^{-3} ist.

A 6.3.16 Zeigen Sie mittels Restglied-Darstellung von Lagrange:
Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar, so gilt für jedes $x_0 \in \,]a,b[$ die Beziehung

$$f''(x_0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}.$$

A 6.3.17 Geben Sie das Taylorpolynom 1. und 2. Grades der Funktion $f(x) = \sqrt[4]{x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 := 1$ an. Bestimmen Sie das Lagrangesche Restglied zum Taylorpolynom 1. Grades, und schätzen Sie ab, wie weit dieses Taylorpolynom auf $[\frac{9}{10}, \frac{11}{10}]$ von f maximal abweicht.

A 6.3.18 (a) Geben Sie das Taylorpolynom erster und zweiter Ordnung der Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ an. Bestimmen Sie das Lagrangesche Restglied zum Taylorpolynom erster Ordnung, und schätzen Sie ab, wie weit dieses Taylorpolynom auf $[0,1]$ von f maximal abweicht.

(b) Beweisen Sie mittels (a) die Beziehung $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right) = \frac{1}{2}$.

Kurzfassung:

Nutzen Sie für den Beweis von $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$ die Taylor-Entwicklung der Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$ um den Punkt $x_0 = 0$.

A 6.3.19 Zeigen Sie direkt mit der Definition des Grenzwertes und unter Verwendung des Restgliedes, dass $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$ gilt.

A 6.3.20 Verwenden Sie den Satz von Taylor (Restglied-Darstellung), um die folgende Abschätzung zu zeigen.

$$|x| \leq \frac{1}{10} \implies \left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right| < \frac{1}{2000}.$$

Lsg: In einer vorigen Aufgabe haben wir gesehen, dass $T_{2,\ln(1+.),0}(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$ gilt. Für $f(x) = \ln(1+x)$ erhalten wir wegen $f^{(3)}(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$ nun nach dem Satz von Taylor

$$\begin{aligned} |x| \leq \frac{1}{10} &\implies \exists \xi \in B_{\frac{1}{10}}(0)\colon f(x) - T_{2,f,0}(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-0)^3 \\ &\implies |f(x) - T_{2,f,0}(x)| \leq \max_{\xi\in\left[-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right]} |f^{(3)}(\xi)| \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{2}{\left(\frac{9}{10}\right)^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{3^7} \end{aligned}$$

und aufgrund von $3^7 = 2187$ somit die Behauptung.

6.4 Fourier-Reihen

. . . . (Vorbereitung)

A 6.4.1 Zeigen Sie, dass man eine P-periodische Funktion durch Variablentransformation auf eine 2π-periodische Funktion zurückführen kann.

. . . . (Skalarprodukte)

A 6.4.2 Beweisen Sie, dass mit der vom Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle \;:=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)\,dx$$

induzierten (Halb-)Norm $\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ die sogenannte Parallelogrammgleichung

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right) \tag{6.2}$$

für beliebige 2π-periodische Riemann-integrierbare Funktionen f, g gilt.

A 6.4.3 Wir betrachten das Skalarprodukt, definiert durch

$$\langle f, g\rangle \;:=\; \int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)dx\;, \tag{6.3}$$

auf der Menge $\prod_2 := \left\{a_2x^2 + a_1x + a_0 \;\middle|\; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}$ der Polynome von höchstens zweitem Grad.

(a) Zeigen Sie, dass die Polynome $P_0(x) = x + 1$, $P_1(x) = 3x - 1$ und $P_2(x) = 3x^2 - 1$ bezüglich (6.3) ein Orthogonalsystem bilden (d.h., das Skalarprodukt von P_i und P_j ist Null für $i \neq j$, $i, j = 0, 1, 2$) und berechnen Sie $\|P_i\| := \sqrt{\langle P_i, P_i\rangle}, i = 0, 1, 2$.

(b) Stellen Sie das Polynom $P(x) = x^2 + 4x + 1$ als Linearkombination von $P_i, i = 0, 1, 2$ dar. Die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 sind mit Hilfe des Skalarproduktes zu bestimmen.

. . . . (Allgemeine theoretische Aussagen)

A 6.4.4 Zeigen Sie, dass für ungerades $N \in \mathbb{N}$ das Skalarprodukt $\langle u, v\rangle := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \bar{u}v\,dx$ der Funktionen $u(x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ und $v(x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ verschwindet.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt $\langle u, v\rangle := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \bar{u}v\,dx$ der Funktionen $u(x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ und $v(x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ für ungerades N verschwindet.

A 6.4.5 Beweisen Sie:

(a) Für die (komplexen) Fourier-Koeffizienten $c_k := \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, f(x)\rangle$ einer stückweise stetigen Funktion $f\colon]0, 2\pi[\; \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\left\|\sum_{k=-n}^{n} c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right\|_2^2 \;=\; \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2. \tag{6.4}$$

(b) Für beliebige über $[0,2\pi]$ Riemann-integrierbare 2π-periodische Funktionen f und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelten die Besselsche Gleichung

$$\|f - S_n f\|_2^2 \;=\; \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \tag{6.5}$$

und die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \;\leq\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx\;. \tag{6.6}$$

A 6.4.6 (a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\{1, \cos(kx), \sin(kx) \mid k \in \mathbb{N}\} \subset C([0,2\pi],\mathbb{R})$ bzgl. des (reellwertigen) Skalarproduktes $\langle f,g\rangle := \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$ orthogonal zueinander sind.

(b) Konstruieren Sie mittels (a) ein Orthonormalsystem bezüglich

$$\langle f,g\rangle \;:=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)\,dx \tag{6.7}$$

(c) Zeigen Sie, dass die reelle Fourier-Reihe einer geraden (bzw. ungeraden) 2π-periodischen Funktion f die Form $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx)$ (bzw. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kx)$) besitzt.

(d) Zeigen Sie: Ist f eine reelle 2π-periodische Funktion, so erfüllen die Koeffizienten c_k der komplexen Fourierreihe die Gleichung $c_{-k} = \overline{c_k}$.

(e) Leiten Sie die Vollständigkeitsrelation

$$\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \tag{6.8}$$

für die reelle Fourier-Reihe aus

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx \tag{6.9}$$

her.

(f) Zeigen Sie: Aufgrund der 2π-Periodizität folgt aus (6.8) ebenso

$$\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx\;. \tag{6.10}$$

A 6.4.7 (a) Zeigen Sie: Besitzt die Fourierreihe einer stückweise stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktion f die Koeffizienten c_k, so besitzt die Fourierreihe von f' die Koeffizienten $\mathrm{i}kc_k$.

oder:

Beweisen Sie: Besitzt die komplexe Fourier-Reihe einer stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktion f die Koeffizienten c_k, so hat die Fourierreihe von f' die Koeffizienten $\mathrm{i}kc_k$.

(b) Zeigen Sie mittels (a): Die Fourierreihe von f'' einer stückweise zweimal stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktion f mit Fourier-Koeffizienten c_k besitzt die Gestalt

$$(Sf'')(x) \;=\; -\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \, .$$

A 6.4.8 **(Satz von Riemann-Lebesgue)**

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion mit $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0.$$

. . . . (Dirichlet-Kern)

A 6.4.9 (a) Zeigen Sie, dass das Fourierpolynom

$$(S_n f)(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{6.11}$$

mit den Koeffizienten $c_k := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}\,dy$, einer 2π-periodischen Funktion f die Darstellung $(S_n f)(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-y)f(y)\,dy$ mit dem Dirichlet-Kern $D_n(x) := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ besitzt.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie, dass das Fourierpolynom $(S_n f)(x) := \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$, $c_k := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}\,dy$, einer 2π-periodischen Funktion f die Darstellung $(S_n f)(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-y)f(y)\,dy$ mit dem Dirichlet-Kern $D_n(x) := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass der Dirichlet-Kern $D_n(x)$ aus Aufgabenteil (a) für jedes n eine gerade, 2π-periodische Funktion ist, welche $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1$ erfüllt.

(c) Beweisen Sie

$$D_n(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{falls } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ \dfrac{2n+1}{2\pi} & \text{falls } x \in 2\pi\mathbb{Z}\, . \end{cases}$$

(d) Begründen Sie jede einzelne Gleichung in

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_{-(2n+1)\frac{\pi}{2}}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(y)}{y}\,dy = \lim_{n\to\infty} \pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\frac{y}{2})}{\frac{y}{2}}\, D_n(y)\,dy = \pi.$$

(e) Beweisen Sie, dass $\displaystyle\int_0^{\pi} f(y)D_n(y)\,dy \to \frac{f(0+)}{2}$ für jede in 0 rechtsseitig differenzierbare Funktion f bei $n \to \infty$ gilt.

A 6.4.10 Auf dem Intervall $]0,\pi]$ sei die folgende Funktion gegeben: $f(x) := \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$

Setzen Sie diese Funktion auf das Intervall $[-\pi, 0]$ so fort, dass f auf $[-\pi,\pi]$

(i) gerade u. stetig ist; (ii) ungerade u. stetig ist; (iii) eine π-periodische Funktion ist.

Skizzieren Sie jeweils den Funktionenverlauf.

A 6.4.11 Setzen Sie die Funktion $f(x) := x$, $x \in [0,\pi[$, auf ganz $\mathbb{R}$ zu einer

(a) ungeraden 2π-periodischen (b) geraden 2π-periodischen (c) π-periodischen

Funktion fort und bestimmen Sie jeweils die reelle Fourierreihe. Wogegen konvergiert sie ?

A 6.4.12 (a) Entwickeln Sie die 2π-periodische Funktion f mit $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ für $x \in [-\pi,\pi[$, $a \in \mathbb{R}$, in eine reelle Fourierreihe.

(b) Berechnen Sie unter Verwendung von (a) den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$.

Alternativer Integrationsbereich:

(a) Sei $0 \neq a \in \mathbb{R}$ gegeben. Entwickeln Sie die 2π-periodische Funktion f mit $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ für $x \in [0, 2\pi[$ in eine reelle Fourierreihe.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + k^2}$ mittels Aufgabenteil (a).

A 6.4.13 (a) Seien $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $\beta \neq 0$. Bestimmen Sie jeweils die Fourier-Reihe der Funktionen

(i) $f(x) = \sin(\alpha x)$ (ii) $f(x) = |\sin(x)|$ (iii) $f(x) = \cosh(\beta x)$, $\beta \neq 0$.

(b) Finden Sie jeweils den Grenzwert der Reihen $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^2 + \beta^2}$ und $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \frac{1}{k^2 + \beta^2}$.

(c) Ermitteln Sie die Fourier-Reihen zu den 2π-periodischen Fortsetzungen von $f, g \colon [-\pi,\pi[\to \mathbb{R}$, definiert durch

(i) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } -\pi \le x \le 0, \\ x, & \text{für } 0 \le x < \pi, \end{cases}$ (ii) $g(x) = |x|$.

(d) Durch $f(x) = x^2$ für $-\pi \le x \le \pi$ sei eine 2π-periodische Funktion gegeben.

(i) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe $(Sf)(x)$.

(ii) Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert der Reihen $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^2}$ und $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2}$.

(iii) Finden Sie mittels (i) und Parsevalscher Gleichung den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^4}$.

A 6.4.14 (a) Ermitteln Sie die reelle Fourier-Reihe von $f(x) := 2(\cos(x))^2$.

(b) Zu vorgegebenen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sei die 2π-periodische Funktion g definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} c_1 & \text{für } -\pi < x \le 0\ , \\ c_2 & \text{für } 0 < x \le \pi\ . \end{cases}$$

Ermitteln Sie die reelle Fourier-Reihe von g und zeigen Sie mit Hilfe der (reellen) Parsevalschen Gleichung (bzw. Vollständigkeitsrelation) die Konvergenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad .$$

Alternative Formulierung:

(i) Ermitteln Sie die reelle Fourier-Reihe von g.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe der (reellen) Parsevalschen Gleichung (bzw. Vollständigkeitsrelation) die Konvergenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \;=\; \frac{\pi^2}{8} \quad . \tag{6.12}$$

Alternative Formulierung:

Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten für diejenige 2π-periodische Funktion f, welche auf dem Intervall $]-\pi,\pi]$ die Werte

$$f(x) \;=\; \begin{cases} c_1 & -\pi < x \leq 0 \\ c_2 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, besitzt. Beweisen Sie anschließend mit Hilfe der (reellen) Parsevalschen Gleichung für eine stückweise stetige Funktion $f(x)$ die Gültigkeit der Gleichung (6.12).

A 6.4.15 Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion f mit $f(x) = \pi^2 - x^2$ für $|x| \leq \pi$. Welchen Wert erhält man für die Reihen

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm ... \quad \text{und} \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... \;?$$

A 6.4.16 Die 2π-periodische Funktion $f(x)$ sei im Intervall $[0, 2\pi]$ wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{\pi}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} - x & \text{für } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

(b) Geben Sie eine (integralfreie) Formel für die Fourier-Koeffizienten von $f(x)$ an !

(c) Wie lautet die Fourier-Summe $S_3 f(x)$?

Leichte Abwandlung – Verschiebung nach unten:

Die 2π-periodische Funktion $f(x)$ sei im Intervall $[-\pi, \pi]$ wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{für } 0 \leq |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

(b) Geben Sie eine (integralfreie) Formel für die Fourier-Koeffizienten von $f(x)$ an !

(c) Wie lautet die Fourier-Summe $S_3 f(x)$?

A 6.4.17 Bestimmen Sie die Fourier-Reihe für die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \;=\; \sinh(x)\;, \quad (-\pi \;<\; x \;\leq\; \pi).$$

A 6.4.18 Bestimmen Sie durch Fourieranalyse der ungerade ergänzten Funktion $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \\ 1, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$

am Punkt $x = \frac{\pi}{2}$ den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\left((2k+1)t\right) dt$.

A 6.4.19 Bestimmen Sie die Fourierreihe der 2π-period. Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -\frac{2}{\pi}(x-\pi), & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \\ \frac{2}{\pi}(x-2\pi), & \frac{3}{2}\pi \le x \le 2\pi. \end{cases}$

Zeigen Sie, dass $f(\pi - x) = -f(\pi + x)$ gilt und verwenden Sie diese Gleichung zur Berechnung der Fourierkoeffizienten.

.... (Kombi)

A 6.4.20 Zeigen Sie:

(a) Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und

$$F(x) := \int_a^b f(t)\sin(xt)dt\ ,$$

so folgt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x) = 0$.

(b) Für alle $0 < x < 2\pi$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}\ . \tag{6.13}$$

Hinweis: $\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}\colon \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} - \frac{1}{2}$

(c) Für jedes $\delta \in]0, \pi[$ konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ gleichmäßig auf dem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$.

(d) Verwenden Sie Sätze aus der Vorlesung sowie (b) und (c) zur Bestimmung des Grenzwertes der Funktionenreihe

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\ . \tag{6.14}$$

Bonus: **(+10 ZP)**

(i) Zeigen Sie die Gültigkeit von $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(ii) Berechnen Sie je den Grenzwert der Reihen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^4}$, $(x \in \mathbb{R})$.

.... (Konvergenz im quadratischen Mittel)

A 6.4.21 Konvergiert die Funktionenfolge $f_k\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) := \left(\frac{|x-\pi|}{\pi}\right)^k$, punktweise?

Konvergiert f_k gleichmäßig?

Konvergiert die 2π-periodische Fortsetzung der Folge (f_k) im quadratischen Mittel?

Kapitel 7

Klausurfragen – Fachwissen

7.1 Theoriefragen zu Kapitel 2

A 7.1.1 Gegeben sei ein beliebiger Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Zeigen Sie die Eindeutigkeit der neutralen Elemente.

A 7.1.2 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $x, y \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie:

Aus $xy = 0$ folgt zwingend $x = 0$ oder $y = 0$, d.h., ein Körper ist **nullteilerfrei**.

A 7.1.3 Wie lautet das Archimedische Axiom ? **oder:** Was besagt das Archimedische Axiom ?

.... (Folgen)

A 7.1.4 Was verstehen wir unter einer (Zahlen-)Folge ?

oder: Was versteht man unter einer Folge reeller Zahlen?

A 7.1.5 Geben Sie die Definition der Konvergenz einer Folge an.

oder: Wann nennt man eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergent ?

oder: Wann nennt man eine Folge a_n reeller Zahlen konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$?

oder: Wann nennt man eine Folge x_n reeller Zahlen konvergent gegen x?

oder: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Was versteht man darunter, dass a_n gegen a konvergiert (Definition)?

.... (Anwendung der ε-N-Definition)

A 7.1.6 Beweisen Sie mittels Definition, dass $a_n := \dfrac{1}{n^2 - n + 2}$ gegen Null konvergiert.

A 7.1.7 Beweisen Sie, dass die durch $a_n := \dfrac{1}{n^2+1}$ gegebene Folge gegen Null konvergiert, indem Sie zu $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ angeben, mit dem $\forall n \geq N(\varepsilon)\colon |a_n| \leq \varepsilon$ gilt.

A 7.1.8 Bestimmen Sie für die gegen Null konvergente Folge $a_n := \dfrac{n}{2n^2 - 30}$ zu $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$, mit dem $|a_n| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt.

A 7.1.9 Bestimmen Sie für die gegen Null konvergente Folge $a_n := \dfrac{n}{3n^2 - 42}$ zu $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$, mit dem $|a_n| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt.

. . . . (Weitere Eigenschaften von Folgen)

A 7.1.10 Zeigen Sie, dass der Grenzwert einer Folge eindeutig ist.

A 7.1.11 Unter welchen Voraussetzungen gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n) - (\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$?

A 7.1.12 Zeigen Sie für konvergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Rechenregeln

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \pm \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right).$$

A 7.1.13 Wie ist der Begriff einer Nullfolge definiert ?

A 7.1.14 Wie ist der Ausdruck $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ bzw. $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ mathematisch präzise definiert ?

A 7.1.15 Wann heißt eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$?

A 7.1.16 Wie ist der Begriff einer Cauchy-Folge in den reellen Zahlen definiert?

oder: Wie ist der Begriff der Cauchy-Folge definiert ?

oder: Wann nennt man eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen eine Cauchy-Folge?

A 7.1.17 Zeigen Sie, dass jede konvergente Folge auch eine Cauchy-Folge ist.

A 7.1.18 Zeigen Sie: $\left(\forall k \in \mathbb{N}\colon |a_k - a_{k+1}| < 2^{-k} \implies (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Cauchy-Folge}\right)$.

Alternative Formulierung unter Verwendung des Vollständigkeitsaxioms:

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit der Eigenschaft, dass für alle natürlichen Zahlen k die Ungleichung

$$|a_k - a_{k+1}| < 2^{-k}$$

gilt. Zeigen Sie die Konvergenz der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. **Tipp:** Vollständigkeitsaxiom

A 7.1.19 Wie lautet das Vollständigkeitsaxiom in $\mathbb{R}$?

oder: Wie lautet das Vollständigkeitsaxiom ? / Was besagt das Vollständigkeitsaxiom?

oder: Gibt es eine Cauchy-Folge reeller Zahlen, die nicht konvergiert?

A 7.1.20 Was ist ein Häufungspunkt einer Folge a_n reeller Zahlen?

oder: Wann nennt man eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt einer Folge a_n ?

oder: Wann nennen wir eine reelle Zahl a Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

A 7.1.21 Wann heißt eine Folge reeller Zahlen monoton wachsend ?

oder: Wann heißt eine Folge monoton wachsend ?

A 7.1.22 Wann heißt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen monoton fallend ?

A 7.1.23 Formulieren Sie den Satz von Bolzano-Weierstraß.

oder: Wie lautet der Satz von Bolzano-Weierstraß ?

A 7.1.24 Wann heißt eine nichtleere Menge $A \subset \mathbb{R}$ abzählbar ?

oder: Wann heißt eine nichtleere Menge A abzählbar ?

. . . . (Reihen)

A 7.1.25 Geben Sie zu einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Folge der Partialsummen an.

oder:

Wie ist der Begriff der Reihe mathematisch präzise definiert?

oder:

Wie ist die zu einer Folge a_n reeller Zahlen gehörige Reihe, die man üblicherweise durch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ symbolisiert, mathematisch präzise definiert ?

oder:

Wie ist die zu einer Folge a_n reeller Zahlen gehörige Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mathematisch präzise definiert?

A 7.1.26 Wann heißt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent?

oder:

Wann nennt man eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent ?

. . . . (Konvergenzkriterien)

A 7.1.27 Beweisen Sie mittels Cauchyschem Konvergenzkriterium für Reihen, dass aus der absoluten Konvergenz einer Reihe die Konvergenz einer Reihe folgt.

Geben Sie ein weiteres hinreichendes Konvergenzkriterium für Reihen an.

A 7.1.28 Geben Sie ein hinreichendes Konvergenzkriterium für Reihen an.

A 7.1.29 Formulieren Sie das Leibnizsche Konvergenzkriterium für alternierende Reihen.

Beweisen Sie dieses.

A 7.1.30 Formulieren Sie das Majorantenkriterium für Reihen.

oder:

Was besagt das Majorantenkriterium ?

A 7.1.31 Beweisen Sie das Majorantenkriterium.

A 7.1.32 Formulieren Sie das Quotientenkriterium für Reihen und beweisen Sie es.

A 7.1.33 Zeigen Sie, dass das Quotientenkriterium nicht notwendig für die Konvergenz einer Reihe ist.

A 7.1.34 Formulieren Sie das Wurzelkriterium und beweisen Sie dieses.

A 7.1.35 Zeigen Sie, dass das Wurzelkriterium nicht notwendig für die Konvergenz einer Reihe ist.

A 7.1.36 Formulieren Sie ein notwendiges (jedoch nicht hinreichendes) Kriterium für die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Geben Sie eine Reihe an, die dieses notwendige Kriterium erfüllt und trotzdem nicht konvergiert.

7.2 Theoriefragen zu Kapitel 3

. . . . (Stetigkeit)

A 7.2.1 Wann nennt man eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $a \in \mathbb{R}$?

A 7.2.2 Wann nennen wir eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig ?

A 7.2.3 Geben Sie das Folgenkriterium für die Stetigkeit einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in D \subset \mathbb{R}$ an.

A 7.2.4 Geben Sie das ε-δ-Kriterium für die Stetigkeit einer Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in [a,b]$ an.

oder:
Geben Sie die ε-δ-Definition für eine im Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an.

oder:
Geben Sie die ε-δ-Definition für die Stetigkeit einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in D \subset \mathbb{R}$ an.

oder:
Geben Sie das ε-δ-Kriterium für die Stetigkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $a \in \mathbb{R}$ an.

A 7.2.5 Zeigen Sie anhand des ε-δ-Kriteriums die Stetigkeit der Funktion $f(x) = x^2 + x$ in $a > 0$.

A 7.2.6 Zeigen Sie, dass aus der Stetigkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ schon ihre Konstanz folgt.

A 7.2.7 Zeigen Sie, dass aus der Lipschitz-Stetigkeit schon die Stetigkeit einer Funktion folgt.
oder:
Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion stetig ist.

A 7.2.8 Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I heißt **Hölder-stetig mit Exponent** $\alpha > 0$, falls es ein $L < \infty$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha$ für alle $x, y \in I$ gibt.

Beweisen Sie, dass jede Hölder-stetige Funktion f auf einem Intervall I mit Exponent $\alpha > 0$ gleichmäßig stetig auf I ist.

A 7.2.9 Formulieren Sie den Satz vom Maximum und Minimum.

A 7.2.10 Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Welche Voraussetzungen an f und I garantieren, dass f auf I ein Maximum und ein Minimum annimmt ?

A 7.2.11 Begründen Sie, dass eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

A 7.2.12 Formulieren Sie den Zwischenwertsatz.

A 7.2.13 Beweisen Sie den Zwischenwertsatz für eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ unter Verwendung des Nullstellensatzes.

A 7.2.14 Welche Eigenschaft hat nach dem Zwischenwertsatz eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$?

A 7.2.15 Wie ist a^b für reelle Zahlen $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, definiert?

A 7.2.16 Formulieren Sie den Satz über die Existenz einer stetigen Umkehrfunktion.

A 7.2.17 Geben Sie ein Folgenkriterium dafür an, dass eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in $a \in \mathbb{C}$ unstetig ist.

A 7.2.18 Wie sind Realteil $\mathrm{Re}(z)$ und Imaginärteil $\mathrm{Im}(z)$ einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ definiert?

A 7.2.19 Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von $\frac{1}{z^2}$ für $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$.

A 7.2.20 Wie lautet die Eulersche Formel ?
oder:
Wie lautet die Eulersche Formel bzw. wie sind Sinus und Cosinus definiert ?

A 7.2.21 Zeigen Sie mittels Eulerscher Formel für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$(1 + \cos(x)) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(x) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad . \tag{7.1}$$

A 7.2.22 Wieso gilt $\cos(kx) + \mathrm{i}\sin(kx) = (\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$?

A 7.2.23 Berechnen Sie das multiplikative Inverse von $z := a + \mathrm{i}b \neq 0$ in $\mathbb{C}$.

Erweiterung:

Geben Sie das konjugiert Komplexe und das multiplikative Inverse von $z := a + \mathrm{i}b \neq 0$ in $\mathbb{C}$ an.

A 7.2.24 Wie ist das Produkt $z_1 \cdot z_2$ zweier komplexer Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ definiert?

A 7.2.25 Wie ist der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl $z = a + \mathrm{i}b$, $a, b \in \mathbb{R}$, definiert?

A 7.2.26 Sei $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$.

Beweisen Sie: Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, dann ist auch $\bar{z}$ eine Nullstelle von p.

A 7.2.27 Wie ist der Begriff der Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ definiert?

A 7.2.28 Wie ist die komplexe Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert?

A 7.2.29 Geben Sie zu beliebigem $n \in \mathbb{N}$ die n-ten Einheitswurzeln an, d.h. alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^n = 1$.

7.3 Theoriefragen zu Kapitel 4

A 7.3.1 Wann heißt eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $a \in \mathbb{R}$?
oder:
Wann heißt eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar? **oder:**
Wann heißt eine Funktion $f\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in\ ]a,b[$?

A 7.3.2 Wie ist die Ableitung einer differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x \in \mathbb{R}$ definiert?
oder:
Wie ist die Ableitung einer differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ definiert ?

A 7.3.3 Wann nennt man eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ?

A 7.3.4 Zeigen Sie, dass eine in a differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch stetig in a sein muss.

A 7.3.5 Gibt es eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche nicht stetig ist?

A 7.3.6 Gibt es eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche nicht differenzierbar ist?

. . . . (Differentiationsregeln)

A 7.3.7 Formulieren Sie die Produktregel sowie die Quotientenregel.

A 7.3.8 Beweisen Sie die Produktregel (4.2) für die Ableitung mit Hilfe der Definition.

A 7.3.9 Wie lautet die Kettenregel?
oder
Formulieren Sie die Kettenregel für differenzierbare Funktionen $f\colon V \to W$ und $g\colon U \to V$.

A 7.3.10 Wie lautet die Regel zur Differentiation von Umkehrfunktionen ?
oder
Wie lautet der Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion?

A 7.3.11 Leiten Sie die Regel zur Differentiation der Umkehrfunktion aus der Kettenregel her.

Erweiterung/mehrfache Anwendung:

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal differenzierbar mit $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} = g \circ f$ Geben Sie die Ableitungen $g'(y)$, $g''(y)$ und $g'''(y)$ in Abhängigkeit von $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ an.

Lsg: Mit der Regel zur Differentiation der Umkehrfunktion und der Kettenregel folgen

$$\begin{aligned}
g'(y) &= \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{f'(x)}\,, \\
g''(y) &= -\frac{1}{(f'(g(y)))^2} \cdot f''(g(y)) \cdot g'(y) = -\frac{f''(g(y))}{(f'(g(y)))^3} = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}\,, \\
g'''(y) &= -\frac{f'''(g(y))}{(f'(g(y)))^3} \cdot g'(y) + 3\frac{f''(g(y))}{(f'(g(y)))^4} \cdot f''(g(y)) \cdot g'(y) \qquad (7.2) \\
&= -\frac{f'''(g(y))}{(f'(g(y)))^4} + 3\frac{(f''(g(y)))^2}{(f'(g(y)))^5} = 3\frac{(f''(x))^2}{(f'(x))^5} - \frac{f'''(x)}{(f'(x))^4}
\end{aligned}$$

A 7.3.12 Nennen Sie ein hinreichendes Kriterium dafür, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 ein lokales Extremum besitzt.
oder:
Geben Sie ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Extremum von f in a an.
oder:
Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, dass f im Punkt a ein lokales Extremum annimmt!

A 7.3.13 Begründen Sie, warum für eine differenzierbare Funktion $f\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ an einer lokalen Maximalstelle $x \in\,]a,b[$ die Ableitung verschwindet.

A 7.3.14 Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

A 7.3.15 Unter welcher Bedingung ist eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend?

Verschärfung/Verallgemeinerung:

Geben Sie ein hinreichendes Kriterium für die strenge Monotonie einer stetig differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an.

A 7.3.16 Geben Sie die Definition der Konvexität einer Funktion $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ an.

oder:

Wann nennt man eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex ?

A 7.3.17 Unter welcher Bedingung ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex?

A 7.3.18 Was ist ein hinreichendes Kriterium für die Konkavität einer zweimal differenzierbaren Funktion?

A 7.3.19 Wann nennt man eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konkav ?

7.4 Theoriefragen zu Kapitel 5

A 7.4.1 Wie ist das Unterintegral definiert ?
oder:
Wie ist das Unterintegral einer beschränkten Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert ?
oder:
Wie ist das Unterintegral einer beschränkten Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert?

A 7.4.2 Wann heißt eine Funktion Riemann-integrierbar?
oder:
Wann nennt man eine Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar?
oder:
Wann nennt man eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ (eigentlich Riemann-)integrierbar ?

A 7.4.3 Sind stetige Funktionen auf kompakten Intervallen (eigentlich Riemann-)integrierbar?

.... (Stammfunktionen)

A 7.4.4 Wie ist der Begriff einer Stammfunktion definiert ?
oder:
Wann bezeichnet man eine Funktion $F\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ als Stammfunktion zu $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$?
oder:
Wann nennt man eine Funktion F Stammfunktion zu $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I ?

A 7.4.5 Nennen Sie ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer Stammfunktion.

A 7.4.6 Besitzt jede Riemann-integrierbare Funktion eine Stammfunktion ?

A 7.4.7 Welche Eigenschaft besitzt die Differenz zweier Stammfunktionen zu einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

.... (Hauptsatz)

A 7.4.8 Formulieren Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (2 Teile).

A 7.4.9 Wie kann man mit Hilfe einer Stammfunktion F zu einer stetigen Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ das Riemann-Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ berechnen?

.... (Integrationsregeln)

A 7.4.10 Formulieren Sie die Substitutionsregel für die Integration.

oder:

Formulieren Sie die Substitutionsregel.

A 7.4.11 Was hat die Kettenregel mit der Substitutionsregel zu tun ?

A 7.4.12 Formulieren Sie die Regel zur partiellen Integration.

A 7.4.13 Was hat die Produktregel mit partieller Integration zu tun ?

oder:

Leiten Sie die Regel zur partiellen Integration aus der Produktregel her.

oder:

Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie:

$$f(b)g(b) \;-\; f(a)g(a) \;=\; \int_a^b f'(x)g(x)\;dx \;+\; \int_a^b f(x)g'(x)\;dx \tag{7.3}$$

Erweiterung auf einen Spezialfall:

Sei $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

$$x\varphi(x) - a\varphi(a) \;=\; \int_a^x \varphi(t)\;dt \;+\; \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} \varphi^{-1}(t)\;dt\;. \tag{7.4}$$

Tipp: Wähle $f(x) \equiv x$ in der vorigen Aufgabe und verwende die Substitutionsregel.

. . . . (Partialbruchzerlegung)

A 7.4.14 Gegeben seien reelle Zahlen $0 \neq a \neq b$ sowie die rationale Funktion $\dfrac{1}{(x-a)^2(x-b)(x^2+a^2)^2}$. Welcher Ansatz zur Partialbruchzerlegung führt hier zum Ziel?

. . . . (Uneigentliche Integrale)

A 7.4.15 Wie ist das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ einer stetigen Funktion $f\colon\ ]a,b] \to \mathbb{R}$ definiert, für die $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = +\infty$ gilt ?

A 7.4.16 Wie ist das uneigentliche Riemann-Integral $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ einer stetigen Funktion $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ definiert?

A 7.4.17 Wie ist das uneigentliche Riemann-Integral $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ einer stetigen Funktion $f\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$ definiert?

A 7.4.18 Wann nennt man eine stetige Funktion $f\colon\ ]0,1] \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar?

7.5 Theoriefragen zu Kapitel 6

A 7.5.1 Wann nennt man eine Folge von über $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbaren 2π-periodischen Funktionen $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im quadratischen Mittel gegen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergent?

A 7.5.2 Wann heißt eine Folge von Funktionen $f_n\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent ?
oder:
Wann heißt eine Folge von Funktionen $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I gleichmäßig konvergent?
oder:
Wann heißt eine Folge von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ auf $D \subset \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$?
oder: Wann nennt man eine Folge von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent auf $D \subset \mathbb{R}$ (oder $D \subset \mathbb{C}$) ?
oder:
Wann sagt man, die Funktionenfolge $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?
oder:
Wann nennt man eine Folge von Funktionen $f_k\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent?

A 7.5.3 Welche Eigenschaft hat die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen auf einem Intervall ?

A 7.5.4 Wann heißt eine Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ von Funktionen $f_k\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I gleichmäßig konvergent gegen $f\colon I \to \mathbb{R}$?

A 7.5.5 In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$?

A 7.5.6 Wie kann man den Konvergenzradius einer Potenzreihe in $\mathbb{C}$ berechnen?

A 7.5.7 Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und a_n eine Folge reeller Zahlen. Wie kann man den Konvergenzradius R einer Potenzreihe $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ bestimmen ?

In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f stetig ?

A 7.5.8 Wie sieht das Taylorpolynom ersten Grades von f zum Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{R}$ aus?

A 7.5.9 Wie lautet die Taylorreihe einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 \in]a, b[$?

Kapitel 8

Klausuraufgaben – Anwendung

8.1 Aufgaben zur Konvergenz von Folgen und Reihen

. . . . (Körper- und Anordnungsaxiome)

A 8.1.1 Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

(i) $x < x^2$, (ii) $\frac{10}{x} - 3 < \frac{4}{x} + 1$, (iii) $3x^2 + 6x - 8 > 1$.

A 8.1.2 Lösen Sie über dem Körper der reellen Zahlen die folgenden Ungleichungen und skizzieren Sie die Lage der jeweiligen Lösungsmenge auf der x-Achse:

(i) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x \leq x - \frac{7}{6}$ (ii) $\frac{5}{2}(x-3) \leq (x-3)$ (iii) $|x^2 - 4| - |x+2|(x^2 + x - 6) > 0$

. . . . (Vollständige Induktion)

A 8.1.3 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) \; = \; \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \; .$$

A 8.1.4 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k(k^2+1) \; = \; \frac{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n}{4}$$

A 8.1.5 Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \left(n \geq 2 \;\; \Longrightarrow \;\; \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \; = \; \frac{n+1}{2n} \right)$$

A 8.1.6 Zeigen Sie per Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ die Gleichung

$$\prod_{k=0}^{n} (1 + x^{(2^k)}) = \frac{1 - x^{\left(2^{n+1}\right)}}{1 - x} \; .$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge $a_n := \prod_{k=0}^{n} (1 + x^{(2^k)})$?

A 8.1.7 Bestimmen Sie den Grenzwert von $a_n := \dfrac{3n^2 + [24\sin(n) + 7]n + 30\sin(n) + 2}{4n^2 + 13n + 10}$

A 8.1.8 Konvergiert die Folge $\dfrac{n + \frac{1}{4n+2}}{3n + \frac{2n^2}{n+1}}$, und wenn ja, gegen welchen Wert ?

A 8.1.9 Konvergiert die Folge $a_n := \sqrt{n^2 + n + 1} - n$? Falls ja, gegen welchen Wert?

A 8.1.10 Sei $a > 0$ beliebig.

Bestimmen Sie die (gegebenenfalls uneigentlichen) Grenzwerte der durch $a_n := \sqrt{n+a} - \sqrt{n}$, $b_n := \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$ und $c_n := \sqrt{n + \frac{n}{a}} - \sqrt{n}$ definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Zeigen Sie, dass dennoch für alle $n < a^2$ die Ungleichungskette $a_n > b_n > c_n$ erfüllt ist.

A 8.1.11 Bestimmen Sie die (gegebenenfalls uneigentlichen) Grenzwerte a, b, c der durch $a_n := \sqrt{n + 1000} - \sqrt{n}$, $b_n := \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$ und $c_n := \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n}$ definierten Folgen.

Zeigen Sie, dass für alle $n < 1000000$ die Ungleichung $a_n > b_n > c_n$ gilt, obwohl für die Grenzwerte $a < b < c$ gilt.

A 8.1.12 Untersuchen Sie die Existenz des Grenzwertes $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 2\right)$.

A 8.1.13 Berechnen Sie den Grenzwert der unten angegebenen Zahlenfolgen!

(i) $\dfrac{2n^3 + n^2 - 5}{(n+1)^3}$ (ii) $\sqrt{n^2 - 3} - \sqrt{n^2 + 3}$ (iii) $\sqrt[n]{4^n + 5^n}$

A 8.1.14 Seien $0 < a < b < \infty$ beliebige reelle Zahlen. Berechnen Sie $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$.

A 8.1.15 Bestimmen Sie den Grenzwert der durch $a_n := \dfrac{n}{2} - \dfrac{n^2}{2n+3}$ gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

A 8.1.16 Konvergiert die Folge $x_n := \dfrac{n^2 + 2}{n + 1} - \dfrac{n^2 - 3}{n + 4}$? Wenn ja, gegen welchen Wert ?

.... (Anwendung des Satzes von Bolzano-Weierstraß)

A 8.1.17 Beweisen Sie, dass durch $a_0 := 1$ und $a_{n+1} := \dfrac{1}{4} + \dfrac{a_n^2}{2}$ eine Cauchy-Folge rationaler Zahlen definiert wird, die gegen eine irrationale Zahl konvergiert.

A 8.1.18 Die Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv durch $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{1+a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

(a) Weisen Sie nach, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $1 \le a_n \le 2$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge monoton ist.

(c) Begründen Sie nun, warum die Folge konvergieren muss.

(d) Gegen welchen Wert konvergiert die Folge ? (Begründung)

A 8.1.19 Die Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv durch $a_{n+1} := a_n(2-a_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ zu einem beliebigen, jedoch festen Startwert $0 < a_1 < 2$ definiert.

(a) Weisen Sie nach, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$ die Ungleichung $0 < a_n \le 1$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge für $n \ge 2$ monoton ist.

(c) Begründen Sie nun, warum die Folge konvergieren muss.

(d) Gegen welchen Wert konvergiert die Folge ? (Begründung)

Kurzfassung:

Beweisen Sie, dass die durch $a_{n+1} := a_n(2 - a_n)$ für jeden Startwert $0 < a_0 < 2$ rekursiv definierte Folge konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Spezialfall mit konkretem Startwert:

Konvergiert die durch $b_0 := \dfrac{1}{3}$ und $b_{n+1} := b_n(2 - b_n)$ rekursiv definierte Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$? Falls ja, gegen welchen Wert?

Erweiterung/Verallgemeinerung:

Sei $a > 0$. Beweisen Sie, dass für jeden Startwert $0 < x_0 < \frac{1}{a}$ die durch

$$x_{n+1} := x_n(2 - ax_n)$$

rekursiv definierte Folge x_n gegen $\frac{1}{a}$ konvergiert.

A 8.1.20 Zeigen Sie, dass die zu einem beliebigen Startwert $x_1 \ge 0$ durch $x_{n+1} = x_n \cdot (\cos(x_n))^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, indem Sie nachweisen, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton ist.

Zeigen Sie weiterhin, dass der Grenzwert der Folge $\left(\dfrac{x_n}{\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ganze Zahl sein muss.

A 8.1.21 Beweisen Sie, dass jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge reeller Zahlen eine Cauchy-Folge ist.

A 8.1.22 Zeigen Sie, dass die rekursiv durch $a_0 := 2$ und $a_{n+1} := 2 - \dfrac{1}{a_n}$ definierte Folge a_n konvergiert.

A 8.1.23 Bezeichne a_n die durch $a_0 := 1$, $a_{n+1} := 1 + \dfrac{1}{a_n}$, rekursiv definierte Kettenbruchfolge und $g := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ den goldenen Schnitt, der die positive Lösung von $g^2 - g - 1 = 0$ ist. Beweisen Sie per Induktion für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung $|a_n - g| \leq \dfrac{1}{g^n}$. Konvergiert a_n gegen g?

A 8.1.24 Die durch $g^2 = 1 + g$ eindeutig bestimmte positive reelle Zahl g heißt **goldener Schnitt**.

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Wurzeln $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$, welche präziser durch die Rekursionsvorschrift $a_1 := 1$, $a_{n+1} := \sqrt{1+a_n}$ definiert ist, gegen g konvergiert. **Tipp:** Zeigen Sie zunächst per Induktion $|a_n - g| \leq \frac{1}{g^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und danach $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

A 8.1.25 Beweisen Sie, dass für jeden Startwert $0 < a_0 < 2$ die durch

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n + 2}$$

rekursiv definierte Folge (a_n) konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

A 8.1.26 Untersuchen Sie die rekursiv durch $a_1 := 6$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + 2$, definierte Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

. . . . (*b*-adische Brüche)

A 8.1.27 Beweisen Sie, dass für jede Folge von Ziffern $x_n \in \{0, 1, 2\}$ die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n 3^{-n}$ gegen eine reelle Zahl $x \in [0, 1]$ konvergiert.

Bestimmen sie den Grenzwert x der Reihe, die zur Ziffernfolge $x_{2n-1} := 2$ und $x_{2n} := 0$ gehört.

A 8.1.28 Begründen Sie, warum die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}$ für jede Wahl von $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ gegen eine Zahl $a \in [0, 1]$ konvergiert.

. . . . (Häufungspunkte/Abzählbarkeit)

A 8.1.29 Gibt es eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass jede rationale Zahl q aus dem Intervall $[0, 1]$ ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ?

A 8.1.30 Gibt es eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass jede Zahl x aus dem Intervall $[0, 1]$ Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ?

„Konstruktive Formulierung“:

Zeigen Sie: Ist a_n eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, dann ist jede reelle Zahl $x \in [0, 1]$ ein Häufungspunkt der Folge a_n.

A 8.1.31 Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $a_n := \cos(n\pi) + \frac{1}{n}$ und geben Sie Teilfolgen an, die gegen diese Häufungspunkte konvergieren.

A 8.1.32 Beweisen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \left(\limsup\limits_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\limsup\limits_{n\to\infty} b_n\right)$ und geben Sie Beispielfolgen an, für die eine echte Ungleichung vorliegt.

. . . . (Standardreihen)

A 8.1.33 Ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ konvergent? Falls ja, gegen welchen Wert ?

A 8.1.34 Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}\right)$? Falls ja, wogegen ?

A 8.1.35 Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{n!} + \frac{(-1)^n}{2^n}\right)$ auf Konvergenz.

Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

A 8.1.36 Zeigen Sie die Gültigkeit von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$. **Tipp:** Partialbruchzerlegung.

A 8.1.37 Ermitteln Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Tipp: Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $k \mapsto \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ und überprüfen Sie, welche Terme sich in der entstehenden Teleskopsumme aufheben.

A 8.1.38 Untersuchen Sie die Reihen $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^2-1}$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$ auf Konvergenz.

A 8.1.39 Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi)\frac{k}{k^2+1}$?

A 8.1.40 Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ die Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k}x^k$.

A 8.1.41 Konvergieren die Reihen $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k^k}$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^k}{2k^k}$?

A 8.1.42 Zeigen Sie:

Gilt $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ und konvergiert $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut, dann konvergiert auch $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut.

A 8.1.43 Untersuchen Sie die Reihen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{(-1)^k}{k}\right)$ auf Konvergenz.

A 8.1.44 Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^7 \mathrm{e}^{-k^2}$ auf Konvergenz.

A 8.1.45 Konvergiert $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$?

A 8.1.46 Für welche $a > 0$ konvergiert bzw. divergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} a^{\ln(k)}$?

Tipp: Zeigen Sie zunächst $a^{\ln(k)} = k^{\ln(a)}$.

A 8.1.47 Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6+\sin(n)}{8}\right)^n x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{8}{7}$ absolut konvergiert. Beweisen Sie weiterhin die Abschätzung

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6+\sin(n)}{8}\right)^n x^n\right| < 7 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad |x| \leq 1.$$

8.2 Aufgaben zur Stetigkeit/Sätze ü. stetige Funktionen

. . . . (Stetigkeit/ stetige Fortsetzbarkeit)

A 8.2.1 Beweisen Sie mittels der ε-δ-Definition, dass die Wurzelfunktion $f(x) := \sqrt{x}$ im Punkt $a := 1$ stetig ist.

A 8.2.2 Gegeben seien Funktionen $u, v, w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichungskette $u(x) \leq v(x) \leq w(x)$ erfüllt sei. Desweiteren seien die Funktionen u und w stetig in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $u(x_0) = w(x_0)$. Zeigen Sie, dass dann auch v in x_0 stetig ist.

A 8.2.3 Zu welchen Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ existiert eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2}{|1-x|} & \text{für } x \leq -1 \text{ oder } x \geq 2 \text{ ,} \\ ax + b & \text{für } -1 < x < 2 \text{ ?} \end{cases}$$

A 8.2.4 Bestimmen Sie die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$, bei denen die Funktion

$$f(x) \ := \ \begin{cases} ax + bx^2 & \text{falls } x > 1 \text{ oder } x < -2 \\ |x| & \text{falls } -2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

stetig wird.

A 8.2.5 Für welche Konstanten $c \in \mathbb{R}$ lässt sich die durch $f(x) := \begin{cases} (x-c)^2 & \text{bei } x < 1 \\ x & \text{bei } x > 1 \end{cases}$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ stetig in den Punkt $x = 1$ fortsetzen?

A 8.2.6 Für welche Konstanten $c \in \mathbb{R}$ lässt sich die durch $f(x) := \begin{cases} (x-c)^4 & \text{bei } x < 1 \\ x & \text{bei } x > 1 \end{cases}$ definierte Funktion f auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ stetig in den Punkt $x = 1$ fortsetzen?

A 8.2.7 Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 - ax & \text{für } x < 1, \\ a - x^2 & \text{für } x \geq 1, \end{cases}$ stetig ?

A 8.2.8 Für welche Konstanten $a, b > 0$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \sqrt{ax+b} & \text{für } x > 0, \\ \dfrac{1}{a - bx} & \text{für } x < 0, \end{cases}$ gegeben ist, stetig in den Punkt 0 fortsetzbar?

. . . . (Vorgriff: L'Hospital)

A 8.2.9 Kann man die Funktion $f\colon\ ]0, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) := x \ln(x)$, stetig nach $x = 0$ fortsetzen?

A 8.2.10 Ist die Funktion $f(x) := \dfrac{\arctan(x)}{x}$ stetig in den Punkt $a := 0$ fortsetzbar ? Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

. . . . (Beschränktheit vs. Existenz globaler Extrema)

A 8.2.11 Hat zu gegebenen $c, d \in \mathbb{R}$ die Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R},\ f(x) := cx + d$ ein Minimum ? Wenn ja, wie lautet es ?

A 8.2.12 Lässt sich die durch $g(x) := \sqrt{|x|}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ definierte Funktion stetig in den Punkt $x = 0$ fortsetzen?

oder:

Warum lässt sich die durch $g(x) := \sqrt{|x|}\sin(\frac{1}{x})$ für $x \neq 0$ definierte Funktion stetig in den Punkt $x = 0$ fortsetzen ?

Hat die stetige Fortsetzung von g auf dem Intervall $\left]-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right[$ ein Maximum/Minimum ?

A 8.2.13 Ist die durch

$$f(x) := \frac{x^2-1}{x^2+1} \tag{8.1}$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt? Besitzt f ein Maximum?

A 8.2.14 Begründen Sie, dass eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

A 8.2.15 Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \mathrm{e}^{-x^2}$, zwar $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ erfüllt und ein Maximum besitzt, aber kein Minimum hat.

. . . . (Zwischenwertsatz)

A 8.2.16 Formulieren Sie den Zwischenwertsatz und zeigen Sie anschließend, dass eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $a < f(a) < b$ und $a < f(b) < b$ gilt, einen Fixpunkt $\xi \in \left]a,b\right[$ besitzt.

A 8.2.17 Formulieren Sie den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen und beweisen Sie, dass die Funktion $g(x) := x^3 + x + 1$ eine reelle Nullstelle besitzt.

A 8.2.18 Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) := x^3 - 3x + 1$ genau drei reelle Nullstellen besitzt.

A 8.2.19 Zeigen Sie: Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ besitzt $f(x) \;=\; \dfrac{x^2+1}{x-a} + \dfrac{x^6+1}{x-b}$ eine Nullstelle in $\left]a,b\right[$.

A 8.2.20 Sei $f\colon\ \left]a,b\right[\to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

Zu vorgegebenen Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left]a,b\right[$ existiert ein $\xi \in \left]a,b\right[$ mit $nf(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$.

Hinweis: Für eine Teilmenge E eines angeordneten Körpers mit Elementen $e_1, \ldots, e_n$ gilt

$$\min E \;\leq\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k \;\leq\; \max E\ .$$

. . . . (Satz von der stetigen Umkehrfunktion)

A 8.2.21 Sei $y > 0$ gegeben. Lösen Sie die Gleichung $2^x = y$ mittels der Exponentialfunktion und des natürlichen Logarithmus nach x auf.

Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \left]0,\infty\right[$, $f(x) := 2^x$, stetig?

Ist auch die Umkehrfunktion von f stetig?

A 8.2.22 Beweisen Sie, dass die Umkehrfunktion jeder stetigen bijektiven Funktion $f\colon \mathbb{R} \to I$ auf dem Intervall $I := f(\mathbb{R})$ stetig ist.

8.3 Aufgaben zum Rechnen in $\mathbb{C}$/Eulersche Formel

A 8.3.1 Zeigen Sie, dass $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt.

A 8.3.2 Berechnen Sie $\left|\left(\frac{3+\mathrm{i}4}{5}\right)^n\right|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

A 8.3.3 Zeigen Sie mittels Eulerscher Formel für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung (7.1).

A 8.3.4 Beweisen Sie mit Hilfe von $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$ $(z_1, z_2 \in \mathbb{C})$ die Formel $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

A 8.3.5 Zeigen Sie, dass $|\exp(\mathrm{i}t)| = 1$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt.

A 8.3.6 Skizzieren Sie die Teilmenge $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \right\}$ von $\mathbb{C}$.

A 8.3.7 Bestimmen Sie sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von

(a) $\bar{z} = z^3$

(b) $|z| - z = 1 + 2\mathrm{i}$

.... (Nullstellenprobleme/Lösen von Gleichungen)

A 8.3.8 Sei $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$.

Beweisen Sie: Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, dann ist auch $\bar{z}$ eine Nullstelle von p.

A 8.3.9 Geben Sie zu beliebigem $n \in \mathbb{N}$ die n-ten Einheitswurzeln an, d.h. alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^n = 1$.

A 8.3.10 Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 = 1 + \mathrm{i}$.

A 8.3.11 Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 = \mathrm{i}$.

A 8.3.12 Lösen Sie die Gleichung $z^3 = \frac{\mathrm{i}}{8}$ in $\mathbb{C}$.

A 8.3.13 Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = -1 + \mathrm{i}$.

oder:
Lösen Sie die Gleichung $z^3 = -1 + \mathrm{i}$ in $\mathbb{C}$.

A 8.3.14 Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 = 16\mathrm{i}$.

A 8.3.15 Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 = \mathrm{i}z$ in $\mathbb{C}$.

A 8.3.16 Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 = z$.

A 8.3.17 Ermitteln Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 = -1$ und skizzieren Sie diese in der Ebene.

A 8.3.18 Lösen Sie die Gleichung $z^5 = \mathrm{i}$ in $\mathbb{C}$.

. . . . (komplexwertige Folgen und (Teleskop-)Reihen)

A 8.3.19 Bestimmen Sie den Grenzwert $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+4\mathrm{i}}{6}\right)^n$.

A 8.3.20 Geben Sie die Häufungspunkte der Folge $\mathrm{i}^n \sqrt[n]{n}$ in $\mathbb{C}$ an.

A 8.3.21 Sei $-z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$ beliebig, fest. Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+n)(z+n+1)}$.

Tipp: Führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch.

. . . . (Kombi mit Stetigkeit)

A 8.3.22 Sei $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ stetig und $a\in\mathbb{C}$ Häufungspunkt der komplexen Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Zeigen Sie, dass dann $f(a)$ Häufungspunkt der Folge $\big(f(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

A 8.3.23 Warum existiert für ein Polynom p von ungeradem Grad mit reellen Koeffizienten mindestens eine reelle Lösung der Gleichung $p(z)=0$?

8.4 Aufgaben zur Differentialrechnung/Kurvendiskussion

.... (Anwendung der Definition)

A 8.4.1 Prüfen Sie mit Hilfe der Definition, ob die Funktion $f(x) := \dfrac{1}{x^2+1}$ differenzierbar ist.

A 8.4.2 Beweisen Sie, dass jede in $a \in \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch stetig in a ist.
oder:
Zeigen Sie, dass eine in a differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch stetig in a sein muss.

A 8.4.3 Prüfen Sie die durch

$$g(x) \ := \begin{cases} \exp(-2x) & \text{für } x \leq 0\ , \\ 1 + x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{für } x > 0\ , \end{cases}$$

definierte Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

A 8.4.4 Bestimmen Sie mittels Definition die erste und zweite Ableitung von $f(x) := |x^3|$ auf $\mathbb{R}$.

A 8.4.5 Untersuchen Sie die folgende Funktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Punkt $a = 1$:

$$g(x) \ = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1}\ , & \text{falls } 0 < x < 1, \\ \dfrac{3-x}{4}\ , & \text{falls } x \geq 1\ . \end{cases}$$

A 8.4.6 Bestimmen Sie Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass die zusammengesetzte Funktion

$$f(x) \ := \begin{cases} \dfrac{1}{ax+b} & \text{für } x < 1\ , \\ \ln(x^2) + x & \text{für } x \geq 1\ , \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar wird.

A 8.4.7 Zeigen Sie die Differenzierbarkeit der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) \ = \begin{cases} \sin(\sin(x))\ , & \text{falls } x \geq 0, \\ \mathrm{e}^x - 1\ , & \text{falls } x < 0\ . \end{cases}$$

.... (Nachweis von Ableitungsregeln)

A 8.4.8 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und bijektiv. Leiten Sie aus der Gleichung $x = f(f^{-1}(x))$ mittels Kettenregel die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion her.

A 8.4.9 Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für das Produkt von n differenzierbaren Funktionen $f_1, \ldots, f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gültigkeit der **verallgemeinerten Produktregel**

$$\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_k' \cdot \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} f_j\right)\ .$$

A 8.4.10 Beweisen Sie mittels Eulerscher Formel, dass der Kosinus die Ableitung vom Sinus ist.

A 8.4.11 Berechnen Sie die Ableitung von $f\colon\ ]0,\infty[\to\mathbb{R}$, $f(x) := (2x)^x$.

A 8.4.12 Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon\ ]0,\infty[\ \to\mathbb{R}$ mit $f(x) := (x^\alpha)^x$, wobei α eine positive reelle Konstante sei.

A 8.4.13 Berechnen Sie die Ableitung von $\quad f(x) \ := \ \tan\left(x^{\left(3x^2\right)}\right)$.

oder:

Berechnen Sie $\quad \left(\tan\left(x^{\left(3x^2\right)}\right)\right)'$.

A 8.4.14 Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion

$$f(x) = x^{\ln x},\ x\in\ ]0,\infty[\ ,$$

und die erste Ableitung der Funktion

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{2+\mathrm{e}^x\left(\cos(x)\right)^2}},\ x\in\mathbb{R}\ .$$

A 8.4.15 Differenzieren Sie die Funktionen

$$\text{(i)}\ f(x)\ :=\ (\ln(x))^{\ln(x)},\quad x\in\,]1,\infty[\ ,\qquad \text{(ii)}\ g(x)\ :=\ \sqrt[3]{1+\frac{(\sin(x))^2}{x}},\quad x\in\,]0,\infty[\ .$$

A 8.4.16 Begründen Sie knapp, warum die Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := x+\mathrm{e}^x$, eine stetige Umkehrfunktion besitzt.

Sei nun $f^{-1}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die entsprechende Umkehrfunktion von f. Berechnen Sie die Ableitung von f^{-1} an der Stelle 1.

A 8.4.17 Differenzieren Sie $\sinh(x) := \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$ und $\cosh(x) := \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$.

A 8.4.18 Wie lautet die Ableitung von $f(x) := \operatorname{arsinh}(x^2-x)$ im Punkt $x_0 := 1$?

A 8.4.19 Differenzieren Sie $f(x) := \arctan(\sinh(x))\cosh(x)$.

A 8.4.20 Gegeben seien die Funktionen $f,g\colon\ ]0,\infty[\ \to\mathbb{R}$, definiert durch $f(x)=x^4$ und $g(y)=\sqrt[4]{y}$. Berechnen Sie die Ableitungen g' und g'' einerseits mittels Kettenregel und andererseits mittels der per Regel zur Differentiation der Umkehrfunktion erhaltenen Ergebnisse.

. . . . (Monotonie/Mittelwertsatz)

A 8.4.21 Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ auf $]0, \infty[$ streng monoton wachsend ist.

Tipp:
Logarithmisches Ableiten ist hier günstig, d.h., untersuchen Sie zunächst $g(x) = \ln(f(x))$.

A 8.4.22 Beweisen Sie:

Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem offenen Intervall $]a, b[$ sowie stetig in den Randpunkten a, b und gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in\,]a, b[$, dann ist f auf $[a, b]$ monoton wachsend.

A 8.4.23 Zeigen Sie, dass eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist.

A 8.4.24 Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und zeigen Sie anschließend:

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 1$ gegeben und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$, so ist f konstant.

Alternative (etwas verallgemeinerte) Formulierung:
Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I heißt **Hölder-stetig mit Exponent** $\alpha > 0$, falls es ein $L < \infty$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha$ für alle $x, y \in I$ gibt.

Zeigen Sie, dass jede Funktion f auf einem Intervall, die Hölder-stetig mit Exponent $\alpha > 1$ ist, schon konstant ist.

Alternative versteckte Formulierung:
Begründen Sie, warum man im Allgemeinen keine Hölder-stetigen Funktionen zum Exponenten $\alpha > 1$ betrachtet.

A 8.4.25 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die gerade ist und in $a > 0$ Null wird. Beweisen Sie, dass es dann einen Punkt $x \in]-a, a[$ mit $f'(x) = 0$ gibt.

A 8.4.26 Zeigen Sie, dass bei einer 2π-periodischen differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ableitung f' an mindestens zwei Stellen im Intervall $[0, 2\pi[$ verschwindet.

. . . . (Kombi: stetige Umkehrfunktion/Ableitungsregel/Mittelwertsatz)

A 8.4.27 Die Funktion $f\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := 5x + \tan(x)$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f besitzt eine differenzierbare Umkehrabbildung $g\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(b) Für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt $|g'(y)| \leq \frac{1}{5}$ und für alle $y, z \in \mathbb{R}$ gilt $|g(y) - g(z)| \leq \frac{1}{5}|y - z|$.

A 8.4.28 Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^4$, konvex ist.
Beweisen Sie $(x+y)^4 \leq 8(x^4+y^4)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Leichte Abwandlung:

Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^4$, konvex ist.
Beweisen Sie $\frac{1}{9}(x+2y)^4 \leq 3(x^4+2y^4)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

A 8.4.29 Ist die Funktion $g\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) := x\ln(x)$, konvex ?
Besitzt g ein globales Minimum ?

A 8.4.30 Gegeben sei eine streng konvexe Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass f höchstens zwei Nullstellen besitzen kann.
Hinweis: Über die Differenzierbarkeit von f sei nichts bekannt.

A 8.4.31 Berechnen Sie den Grenzwert $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(x-3)^2}$.

A 8.4.32 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\cos(x)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin(x)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos(x)} = \frac{1}{4}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x\ln(x)-(x-1)}{(x-1)\ln(x)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\ln(x)+\frac{x-1}{x}}$
$\displaystyle\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{x-(x-1)}{x^2}} = \frac{1}{2}$

A 8.4.33 Berechnen Sie den Grenzwert $\displaystyle\lim_{x\nearrow 1} \ln(x)\ln(1-x)$.

A 8.4.34 Berechnen Sie die Grenzwerte (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$.

A 8.4.35 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung von $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und in x selbst zweimal differenzierbar. Zeigen Sie mittels der Regel von L'Hospital die Gültigkeit von

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = f''(x)\,.$$

Zeigen Sie, dass für die durch $f(x) := |x|x$ definierte Funktion der Limes auf der linken Seite bei $x=0$ existiert, obwohl die Funktion nicht zweimal differenzierbar im Nullpunkt ist.

A 8.4.36 Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{-1}{\ln(x)} & \text{für } 0 < x \leq \frac{1}{2}\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,, \end{cases}$$

definierte Funktion $f\colon [0,\frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ stetig ist, jedoch kein $\alpha > 0$ existiert, für das f Hölder-stetig mit Exponent α ist.

A 8.4.37 Bestimmen Sie alle Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$, für die die durch $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowohl ein lokales Maximum als auch ein lokales Minimum besitzt.

A 8.4.38 Bestimmen Sie das Maximum und Minimum der Funktion $f(x) := x^3 - 3x + 1$ auf dem Intervall $[0, 2]$.

A 8.4.39 Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f\colon\ ]0, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) := x^{\frac{1}{x}}$.

A 8.4.40 Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gegeben. Für welchen Punkt x ist die Summe der Quadrate der Abstände $|x - a_i|$ am geringsten ?

A 8.4.41 Wo ist die auf $]0, \infty[$ definierte Funktion $f(x) := x^{\ln(x)}$ konvex bzw. konkav ?

A 8.4.42 Diskutieren Sie die Funktion $f(x) := \exp(x^2 - x) - 1$, d.h. ermitteln Sie Nullstellen, lokale Extrema, Wendepunkte sowie die Intervalle, in denen f positiv / negativ, monoton wachsend / fallend bzw. konvex / konkav ist.

A 8.4.43 Bestimmen Sie die lokalen Extrema der durch $f(x) := \dfrac{x}{1 + x^2}$ definierten Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

A 8.4.44 Diskutieren Sie die Funktion $f(x) := \ln(1 + x^2) - 1$, d.h. ermitteln Sie Nullstellen, lokale Extrema, Wendepunkte sowie die Intervalle, in denen f positiv / negativ, monoton wachsend / fallend bzw. konvex / konkav ist.

Bestimmen Sie außerdem $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ und skizzieren Sie die Funktion f.

A 8.4.45 Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := (x + 1)^2 \mathrm{e}^{-x}$

(a) Wo ist die Funktion monoton fallend und wo ist die Funktion monoton wachsend ?

(b) Wo ist die Funktion konkav und wo ist die Funktion konvex ?

(c) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen und Extrema der Funktion sowie die Wendepunkte der Funktion. Stellen Sie fest, ob globale Extremstellen vorliegen und bestimmen Sie diese und die zugehörigen globalen Extrema gegebenenfalls.

A 8.4.46 Diskutieren Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) := \dfrac{\arctan(x)}{x}$, d.h.:

(a) Berechnen Sie die Grenzwerte in der Definitionslücke und für $x \to \pm\infty$.

(b) Bestimmen Sie die offenen Intervalle, auf denen f positiv bzw. auf denen f negativ ist.

(c) Bestimmen Sie die offenen Intervalle, auf denen f monoton wachsend bzw. monoton fallend ist.

(d) Welche Rückschlüsse hinsichtlich lokaler/globaler Extrema von f lässt dies zu ?

Fertigen Sie aufgrund der gewonnenen Informationen eine Skizze an.

A 8.4.47 Diskutieren Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$, d.h.: (vgl. auch (8.1))

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x)$, sofern dieser existiert.

(b) Ermitteln Sie die offenen Intervalle, auf denen f positiv bzw. auf denen f negativ ist.

(c) Bestimmen Sie die offenen Intervalle, auf denen f monoton wächst bzw. monoton fällt.

(d) Ermitteln Sie die offenen Intervalle, auf denen f konvex bzw. auf denen f konkav ist.

Welche Rückschlüsse hinsichtlich Nullstellen, lokaler/globaler Extrema sowie Wendepunkten von f lässt dies jeweils zu ?
Fertigen Sie aufgrund der gewonnenen Informationen eine Skizze an.

Bonus:

Führen Sie beginnend bei $x_0 := \dfrac{1}{2}$ einen Schritt des Newton-Verfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle von f' durch.

.... (Kombi)

A 8.4.48 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $g(x) := T_2 f(x;a)$ das Taylorpolynom zweiten Grades von f zum Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie: Hat g ein strenges lokales Extremum in a, dann hat f ein lokales Extremum in a.

A 8.4.49 Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \mathrm{e}^{-x^2}$, zwar $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ erfüllt und ein Maximum besitzt, aber kein Minimum hat.

A 8.4.50 Zeigen Sie, dass die durch $f(0) := 0$ und $f(x) := \dfrac{\sin(x^2)}{x}$ für $x \neq 0$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwar $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ erfüllt, aber nicht $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$.

A 8.4.51 Zeigen Sie die Stetigkeit der Funktion $\quad f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{bei } x = 0, \\ x^x & \text{bei } x \in \,]0,1]. \end{cases}$

Begründen Sie, ohne zu rechnen, dass f ein globales Maximum und ein globales Minimum hat.

Berechnen Sie alle globalen Maximumstellen und alle globalen Minimumstellen sowie das globale Maximum und das globale Minimum von f.

oder:

Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $\qquad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{im Fall } x = 0\ , \\ \mathrm{e}^{x\ln(x)} & \text{im Fall } 0 < x \leq 1\ . \end{cases}$

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist!

(b) Begründen Sie (ohne Rechnung), dass die Funktion f auf $[0,1]$ sowohl ein Minimum als auch ein Maximum besitzt.

(c) Bestimmen Sie $\min\limits_{x\in[0,1]} f(x)$ und $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$!

A 8.4.52 Es sei a eine beliebige reelle Zahl.
Wieviele reelle Lösungen besitzt die Gleichung $2x + \sin(x) = a$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Warum nimmt die Funktion $g(x) = 2x + \sin(x)$ auf jedem Intervall $[c,d]$ sowohl ihr globales Maximum als auch ihr globales Minimum an? Bestimmen Sie diese.

A 8.4.53 Zeigen Sie, dass die durch $f(0) := 0$ und $f(x) := \dfrac{\sin(x^2)}{x}$ für $x \neq 0$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwar $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ erfüllt, dagegen aber die durch $g(x) := 2\cos(x^2) - \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$ gegebene Ableitung von f nicht $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ erfüllt.

Kurzfassung:

Zeigen Sie, dass die durch $f(0) := 0$ und $f(x) := \dfrac{\sin(x^2)}{x}$ für $x \neq 0$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwar $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ erfüllt, aber nicht $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$.

A 8.4.54 Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x) \ := \ \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(0) = \frac{1}{2}$ ist, jedoch kein Intervall $]a, b[$, $a < 0 < b$, existiert, auf dem f monoton wächst.

In etwa vom gleichen Typ: (Lsg(?): $f(x) = -x^6 \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$)

Konstruieren Sie eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f \ : \ ]-1, 1[\ \to \mathbb{R}$, mit den folgenden Eigenschaften:

(a) f besitzt in 0 ein lokales Maximum;

(b) Es gibt kein $\varepsilon > 0$, so dass f im Intervall $[0, \varepsilon]$ monoton fallend ist;

(c) Es gibt kein $\varepsilon > 0$, so dass f im Intervall $[-\varepsilon, 0]$ monoton wachsend ist.

Sogar Striktes Maximum: (Lsg(?): $f(x) = -x^8 - x^6 \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$)

Konstruieren Sie eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f \ : \ ]-1, 1[\ \to \mathbb{R}$, mit den folgenden Eigenschaften:

(a) f besitzt in 0 ein striktes lokales Maximum;

(b) Es gibt kein $\varepsilon > 0$, so dass f im Intervall $[0, \varepsilon]$ monoton fallend ist;

(c) Es gibt kein $\varepsilon > 0$, so dass f im Intervall $[-\varepsilon, 0]$ monoton wachsend ist.

8.5 Aufgaben zur Integralrechnung

. . . . (Integral von Treppenfunktionen)

A 8.5.1 Bestimmen Sie jeweils das Integral der folgenden Treppenfunktionen $\varphi\colon [-4,7] \to \mathbb{R}$ und $\psi\colon [-2,1] \to \mathbb{R}$, welche durch

$$\varphi(t) := \begin{cases} 2 & \text{für } t \in [-4,-1], \\ 4 & \text{für } t \in [3,7], \\ -5 & \text{sonst}, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \psi(t) := \begin{cases} -3 & \text{für } t \in [-1,0], \\ 1 & \text{sonst}, \end{cases}$$

definiert sind.

. . . . (Riemann-Integrierbarkeit)

A 8.5.2 Ist die Funktion $f(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ auf dem Intervall $[0,1]$ Riemann-integrierbar ?

A 8.5.3 Sei $x > 1$ gegeben. Ermitteln Sie auf dem Intervall $[1,x]$ die Riemannsche Untersumme von $f(t) := \frac{1}{t}$ zu der durch $t_k^{(n)} = x^{\frac{k}{n}}$, $k = 0, \ldots, n$, gegebenen Zerlegung.

Welcher Wert ergibt sich im Limes $n \to \infty$ für die Folge der Untersummen $US\left(\frac{1}{t}, \left\{t_k^{(n)}\right\}_{k=0}^{n}\right)$?

Welchen Wert besitzt das Integral $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$?

. . . . (Hauptsatz & co.)

A 8.5.4 Begründen Sie knapp, warum die Funktion $f(x) := \max(x^2, x)$ eine Stammfunktion besitzt.

Finden Sie eine Stammfunktion von f und bestimmen Sie mit deren Hilfe das Integral $\int_{-3}^{5} f(x)\, dx$.

A 8.5.5 Berechnen Sie die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von $g(t) = (t - t^3)\mathrm{e}^{-t^2}$ im Intervall $[-2,2]$.

A 8.5.6 Besitzt die Funktion $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ eine Stammfunktion ?

A 8.5.7 Existiert auf $]-\pi,\pi[$ eine Stammfunktion zur Funktion $g(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{für } \; -\pi < x \le 0, \\ \dfrac{x^2\cos(x)}{\sin(x)} & \text{für } \; 0 < x < \pi, \end{cases}$?

A 8.5.8 Zeigen Sie, dass sich die durch $f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ nicht stetig in den Nullpunkt fortsetzen lässt, jedoch f bei beliebiger Festsetzung von $f(0) \in [-1,1]$ die „Zwischenwerteigenschaft“ besitzt, d.h., für beliebige $a < b$ mit $f(a) \neq f(b)$ existiert zu jedem $c \in]f(a), f(b)[$ (bzw. zu jedem $c \in]f(b), f(a)[$) ein $p \in]a,b[$ mit $f(p) = c$.

Warum hat die Funktion f auf $]0,\infty[$ eine Stammfunktion?

Existiert eine Stammfunktion von f, welche stetig in den Nullpunkt fortsetzbar ist?

A 8.5.9 Die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $F(x) := \begin{cases} |x|^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung f von F.

Ist f Riemann-integrierbar über $[0,1]$?

Ist $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar über $]0,1]$?

. . . . (Integralvergleichskriterium)

A 8.5.10 Geben Sie für eine monoton wachsende Funktion $f\colon [1,n] \to \mathbb{R}$ die Riemannsche Untersumme zur äquidistanten Zerlegung $1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$ des Intervalls $[1, n]$ an.

A 8.5.11 Geben Sie für eine monoton fallende Funktion $f\colon [0,n] \to \mathbb{R}$ die Untersumme zur äquidistanten Zerlegung $0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$ des Intervalls $[0, n]$ an.

A 8.5.12 Beweisen Sie das Integralvergleichskriterium:
Existiert für eine monoton fallende, nichtnegative Funktion $f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$, so existiert auch $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$.

A 8.5.13 Prüfen Sie mittels des Integralvergleichskriteriums, ob $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}}$ existiert.

A 8.5.14 Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx$. Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^3}$?

. . . . (Rekursion mittels partieller Integration)

A 8.5.15 Führen Sie mittels partieller Integration die Berechnung von $J_n := \displaystyle\int x^{2n}\sinh(x)\,dx$ für $n \in \mathbb{N}$ auf die Berechnung von J_{n-1} zurück.

Geben Sie eine Stammfunktion zu $f(x) := x^4 \sinh(x)$ an.

. . . . (Polynomdivision/Partialbruchzerlegung inkl. Stammfunktionen/best. Integral)

A 8.5.16 Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x^4)}{1+x^2}\,dx$

A 8.5.17 Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$.

A 8.5.18 Finden Sie eine Stammfunktion zu $u(x) = \dfrac{3-x}{(x-1)(x^2+1)}$

A 8.5.19 Bestimmen Sie auf $]0,\infty[$ eine Stammfunktion der rationalen Funktion $f(x) := \dfrac{x^2+2}{x^3+1}$.

A 8.5.20 Bestimmen Sie eine Stammfunktion der rationalen Funktion $f(x) := \dfrac{3x^2+6x+5}{x^3+x^2+x+1}$.

A 8.5.21 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{2x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}$ und $g(x) := \dfrac{3x^2-4x+3}{x^3-x^2-x-2}$.

A 8.5.22 Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu $\dfrac{3x^2+1}{x^4-1}$.

A 8.5.23 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der rationalen Funktion $f(x) := \dfrac{x+1}{x^4-x}$ und ermitteln Sie eine Stammfunktion von f.

A 8.5.24 Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu
$$f(x) \;=\; \frac{2x^3+2x^2+2x+1}{x^4+x^2}\;.$$

.................................(Partialbruchzerlegung inklusive uneigentliches Integral)

A 8.5.25 Berechnen Sie das uneigentliche Riemann-Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2x^2+1}{x^4+x^2}\,dx.$

A 8.5.26 Überprüfen Sie, ob das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2x^2+4x+5}{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}\,dx$ existiert, und berechnen Sie es gegebenenfalls.

Hinweis: Der Nenner besitzt die doppelte Nullstelle -2.

A 8.5.27 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) := \dfrac{x+2}{x^3+x}$ und berechnen Sie das uneigentliche Riemann-Integral $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$. Existiert das uneigentliche Riemann-Integral $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$?

A 8.5.28 Existiert $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

....(Substitutionsregel/partielle Integration)

A 8.5.29 Zeigen Sie: Ist R eine auf $[a,b]\subset\,]0,\infty[$ definierte rationale Funktion, so gilt
$$\int_{\ln(a)}^{\ln(b)} R(\mathrm{e}^x)\,dx = \int_a^b R(t)\,\frac{1}{t}\,dt\;. \tag{8.2}$$

A 8.5.30 Sei $f\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $n\in\mathbb{N}$ beliebig, fest.
Finden Sie jeweils eine Stammfunktion von

(a) $f\cdot f'$ (b) $f^n\cdot f'$ (c) $\dfrac{f'}{f}$, falls zusätzlich $f>0$ gilt.

Alternative Formulierung für (b):

Sei $f\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Berechnen Sie $\displaystyle\int (f(x))^n\cdot f'(x)\;dx$ für beliebiges $n\in\mathbb{N}$.

A 8.5.31 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $x\cos(x^2)$ auf $\mathbb{R}$.

A 8.5.32 Sei $f\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit echt positiver Ableitung und einer Stammfunktion F. Bestimmen Sie eine Stammfunktion zur Umkehrfunktion f^{-1}.

A 8.5.33 Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{-1}^0 x^2\sqrt{x^3+5}\;dx$

A 8.5.34 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) := 2x^3\sin(x^2)$.

Leichte Abwandlung: Bestimmtes statt unbestimmtes Integral

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x^3\sin(x^2)\;dx\;.$

A 8.5.35 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) := \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ auf dem Intervall $]0, +\infty[$.

Erweiterung:

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) := \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ und berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

A 8.5.36 Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\, dx \,. \tag{8.3}$$

.... (Substitution (8.2) und PBZ)

A 8.5.37 Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^{2x}+1}\, dx$.

A 8.5.38 Finden Sie eine Stammfunktion von $\dfrac{2e^{3x}+5e^{2x}-3e^x}{e^{3x}+e^{2x}-e^x-1}$.

.... (Uneigentliche Integrale mit Substitution/partielle Integration/L'Hospital)

A 8.5.39 Überprüfen Sie die Existenz des uneigentlichen Integrals $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)}}\, dx$.

A 8.5.40 Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx$?

A 8.5.41 Bestimmen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\, dx$.

Hinweis: Verwenden Sie das Integral (8.3).

A 8.5.42 Zeigen Sie, dass die beiden Funktionen $f(x) := \dfrac{1}{x\ln(x)}$ und $g(x) := \dfrac{1}{x\,(\ln(x))^2}$ für $x \to +\infty$ zwar gegen Null konvergieren, aber nur das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_e^\infty g(x)\, dx$ existiert, während $\displaystyle\int_e^\infty f(x)\, dx$ nicht existiert.

Alternative Formulierung (letzter Teil):

Zeigen Sie die Existenz des uneigentlichen Integrals $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^2}\, dx$. Wie ist sein Wert?

A 8.5.43 Existiert $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\, dx$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

.... (Kombi)

A 8.5.44 Kann man die Funktion $f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) := x\ln(x)$, stetig nach $x = 0$ fortsetzen?

Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)\, dx$.

oder:

Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ für die Funktion f.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse.

8.6 Aufgaben zu Potenz-,Taylor- & Fourier-Reihen

A 8.6.1 Zeigen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergiert, wobei $\binom{\frac{1}{2}}{0} := 1$ und $\binom{\frac{1}{2}}{n} := \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot\dots\cdot(\frac{1}{2}-(n-1))}{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot 1}$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert ist.

A 8.6.2 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x\ln(1+x^2)$ definiert. Bestimmen Sie das Taylorpolynom ersten und zweiten Grades von f zum Entwicklungspunkt $a := 0$.

Begründen Sie, warum f in $a = 0$ keine lokale Extremalstelle besitzt.

A 8.6.3 Entwickeln Sie $f(x) := \dfrac{1}{(1-x)^2}$ um den Punkt $a := 0$ in eine Potenzreihe.

A 8.6.4 Geben Sie eine stetige Funktion auf einem Intervall $]x_0 - R, x_0 + R[$ an, die sich dort nicht in eine Potenzreihe entwickeln lässt.

A 8.6.5 Untersuchen Sie die durch $f_n(x) := 2x^n(1-x^n)$ definierte Folge von Funktionen $f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

A 8.6.6 Konvergiert die Folge der Funktionen $f_n(x) := \sqrt{\frac{1}{n}+x^2}$ punktweise auf $\mathbb{R}$? Auch gleichmäßig?

A 8.6.7 Seien die Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ und $g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

Beweisen Sie, dass bei gleichmäßiger Konvergenz $f_n \to f$ auf $[0,1]$ und $g_n \to g$ auf $\mathbb{R}$ auch die Folge $g_n \circ f_n$ gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen $g \circ f$ konvergiert.

A 8.6.8 (a) Konvergiert die durch $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$ definierte Folge von Funktionen punktweise auf $\mathbb{R}$?

Auch gleichmäßig ?

Leichte Variation inklusive Erweiterung:

Bestimmen Sie den punktweisen Grenzwert der durch $f_k(x) := \dfrac{\sin(kx)}{k}$ definierten Folge von Funktionen $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Konvergiert die Folge f_k gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$?

Konvergiert die Folge f_k im quadratischen Mittel ?

(b) Konvergiert die Folge der Ableitungen $f_n'(x)$ punktweise auf ganz $\mathbb{R}$?

Auch gleichmäßig ?

A 8.6.9 Konvergiert die durch $f_n(x) := \ln(x^{\frac{1}{n}})$ definierte Folge von Funktionen $f_n\colon [1,b] \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[1,b]$ für ein festes $b > 1$ punktweise ?

Auch gleichmäßig ?

Konvergiert f_n auch auf $[1,\infty[$ gleichmäßig ?

A 8.6.10 Bestimmen Sie das Taylorpolynom ersten Grades von $f(x) := \operatorname{arsinh}(x)$ im Punkt $x_0 := 0$.

A 8.6.11 Geben Sie im Entwicklungspunkt $a = 0$ das Taylor-Polynom ersten Grades für die Funktion $f(x) := \arctan(\sinh(x))\cosh(x)$ mit $\sinh(x) := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ und $\cosh(x) := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ an.

A 8.6.12 Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) := \ln(1+x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
oder:
Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ die Taylorreihe von $f(x) := \ln(1+x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ ist.

Prüfen Sie nach, ob die Taylorreihe von f auf dem Intervall $[0,1]$ gleichmäßig konvergiert.

A 8.6.13 Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$?

A 8.6.14 Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$, keine Potenzreihenentwicklung um den Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ besitzt, jedoch um den Entwicklungspunkt $x_0 := 1$ in eine Potenzreihe entwickelt werden kann. Wo konvergiert diese Potenzreihenentwicklung gegen f ?

A 8.6.15 Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von $\cosh(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 := 0$.

A 8.6.16 (a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n(x) := \dfrac{nx}{1+|nx|}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Ist f_n beschränkt? Nimmt f_n Maximum oder Minimum an ?

(c) Bestimmen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(d) Ist die durch $x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ definierte Funktion f auf $\mathbb{R}$ stetig ?

A 8.6.17 Bestimmen Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ die Stammfunktion F_n von $f_n(x) := \dfrac{n}{n^2+x^2}$ mit $F_n(0) = 0$.

Hinweis: Es gilt $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Konvergieren die Funktionenfolgen f_n und F_n punktweise auf $\mathbb{R}$?

Konvergieren f_n und F_n gleichmäßig auf $\mathbb{R}$?

A 8.6.18 Konvergiert die Funktionenfolge $f_n(x) := \dfrac{nx^4}{1+nx^2}$ punktweise auf $\mathbb{R}$?

Konvergiert f_n gleichmäßig auf $\mathbb{R}$?

Zeigen Sie: Die Funktionen $g_n := \sqrt{f_n}$ mit f_n sind beliebig oft differenzierbar und konvergieren gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, jedoch ist die Grenzfunktion nicht differenzierbar.

A 8.6.19 Konvergiert die Funktionenfolge $f_k\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) := \left(\frac{|x-\pi|}{\pi}\right)^k$, punktweise?

Konvergiert f_k gleichmäßig?

Konvergiert die 2π-periodische Fortsetzung der Folge f_k im quadratischen Mittel?

A 8.6.20 Beweisen Sie: Wenn die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert, dann auch in jedem Punkt z mit $|z| < |z_0|$.

A 8.6.21 Konvergiert die durch $f_n(z) := z^n$ definierte Folge komplexwertiger Funktionen f_n auf jeder Kreisscheibe $D_r := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq r\}$ mit Radius $r < 1$ punktweise?

Konvergiert f_n auch gleichmäßig auf D_r ? Konvergiert die Funktionenfolge f_n punktweise oder gleichmäßig auf der Kreisscheibe D_1 mit Radius 1 ?

A 8.6.22 Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k$ absolut ?

A 8.6.23 Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{4n}$?

Zeigen Sie die Gleichung $f\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{16}{17}$.

A 8.6.24 Ermitteln Sie den Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{k\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} z^k$ und geben Sie (im Fall der Konvergenz) eine explizite Formel für $f(z)$ an.

A 8.6.25 Ermitteln Sie den Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k} z^k$ und geben Sie (im Fall der Konvergenz) eine explizite Formel für $f(z)$ an.

Sporadisches Fachwortverzeichnis

Äquivalenzrelation, 16, 32

Abbildung, 19
Anordnung, 33
Antipoden, 106
Arithmetik
  Uhrzeit-, 29
Assoziativität, 23

Beweis
  direkter, 9
  indirekter, 9
  Widerspruchs-, 9
Bild
  einer Abbildung, 19

Definitheit, 37
Dreieck
  Pascalsches, 46
Dreieckszahlen, 52

Element
  neutrales Gruppen-, 23

Folge
  $\mathbb{K}$-, 55
Formel
  Binomial, 46
  von Moivre, 116
Funktion
  Cosinus Hyperbolicus, 109
Funktionalgleichung
  der allgemeinen Potenz, 108
  linearer Funktionen, 101

Gruppe, 23
  abelsche, 23
  kommutative, 23

Inverse
  eines Gruppenelementes, 23

Körper, 24
  angeordneter, 33
Kettenregel, 128
Koeffizient
  Binomial-, 46
Kommutativität, 23

Lehrsatz
  Binomischer, 46

Menge
  induktive, 14
Multiplikativität, 37

nullteilerfrei, 25

Ordnungsrelation, 16, 32

Primzahl, 26
Produkt
  kartesisches, 15
Produktregel, 128

Quotientenregel, 128

Regel
  Ketten-, 128
  Produkt-, 128
  Quotienten-, 128
Relation, 16
  Äquivalenz-, 16
  antisymmetrische, 16
  Ordnungs-, 16
  reflexive, 16
  symmetrische, 16
  transitive, 16

Satz
  über algebraische Ableitungsregeln, 128
  über die Ableitung der Umkehrfunktion, 128

Antipoden-, 106
Fixpunkt-
Brouwersche, 107
Kettenregel, 128
von Binomi, 46
von Fermat, 26
Symbol
$-a$, 25
0, 25
1, 25
$\binom{n}{k}$, 46
$|$, 32
$\times$, 15
$a \bmod m$, 26
a^{-1}, 25

Ungleichung
Dreiecks-, 37
Unterteilung, 150
Urbild
einer Abbildung, 19