Aufgabensammlung zur Vorlesung Differentialgleichungen

Dr. Katja Ihsberner[1] und Prof. Dr. habil. Jochen Merker[2]

zuletzt aktualisiert am 15. September 2017

[1]Universität Rostock, Institut für Mathematik, Ulmenstr. 69, Haus 3
[2]HTWK Leipzig, Fakultät Informatik, Mathematik u. Naturwissenschaften, Gustav-Freytag-Str. 42A

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Elementare Lösungsmethoden und allgemeine Existenzsätze

1.1 Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen

A 1.1.1 Sind die Kurvenscharen

(a) $4 \;=\; x^2 + cy$ (b) $4 \;=\; x^2 + cy^2$

für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Lösungen von linearen Differentialgleichungen? Wenn ja, dann geben Sie eine solche Differentialgleichung an. Was passiert bei $c = 0$?

A 1.1.2 Sei $\mathbb{R} \ni f(t,x) \neq 0$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Löst x die DGL

$$x' = f(t,x) \tag{1.1}$$

und löst y die DGL

$$y' = -\frac{1}{f(t,y)} \;, \tag{1.2}$$

dann stehen die Tangentialvektoren der Kurven $(t, x(t))$ und $(t, y(t))$ in Schnittpunkten senkrecht aufeinander.

A 1.1.3 Begründen Sie, warum das folgende Anfangswertproblem zur gegebenen impliziten Differentialgleichung zweiter Ordnung keine Lösungen besitzen kann:

$$(1+x^2)(y'')^2 \;+\; \big(\sin(x^2+y^2)\big)^2 \;+\; 1 \;=\; 0 \;, \qquad y(4) \;=\; 3 \;, \qquad y'(4) \;=\; 13 \;.$$

A 1.1.4 Welche der folgenden Gleichungen sind gewöhnliche Differentialgleichungen?
Bei allen gewöhnlichen Differentialgleichungen gebe man die Ordnung und die Form (implizit/explizit) an und entscheide, ob sie linear sind!

(a) $y'''(x) = y(x)(x^2 \cdot \cos(x)) \cdot y'(x)$

(b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = (t^2+7)u(x,t) + t^4$

(c) $x^2 \cdot y''(x) + x \cdot y'(x) + 2y(x) - \sin(x) = 0$

(d) $\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x} + \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t} = y(x,t)$

(e) $y''(x) = y'(x)(x^2+1)$

(f) $\dfrac{\partial y(r,s)}{\partial r} = (\sin(r) + s^2) \cdot y(r,s)$

(g) $(x''(t))^2 = x(t) \cdot \sin(x(t))$

(h) $y'(x) = x^2 \cdot y(x)$

Alternative Formulierung (ohne partielle DGL):

Klassifizieren Sie die folgenden eindimensionalen gewöhnlichen Differentialgleichungen (Ordnung, explizit/implizit, autonom/nichtautonom, linear/nichtlinear):

(a) $y'''(x) = y(x) \cdot y'(x)$

(b) $u''(t) = (t^2+7)u(t) + t^4$

(c) $x^2 \cdot y''(x) + x \cdot y'(x) + 2y(x) - \sin(x) = 0$

(d) $y''(x) = y'(x)(x^2+1)$

(e) $(x''(t))^2 = x(t) \cdot \sin(x(t))$

(f) $y'(x) = x^2 \cdot y(x)$

A 1.1.5 Klassifizieren Sie die folgenden eindimensionalen gewöhnlichen Differentialgleichungen (Ordnung, explizit/implizit, autonom/nichtautonom, linear/nichtlinear):

(a) $y'''(x) = y(x) \cdot y''(x)$

(b) $u''(t) = (t+1) \cdot u(t) + t^2$

(c) $x^2 \cdot y''(x) + x \cdot y'(x) + y(x) = 0$

(a) $y'(x) = (x^2+1) \cdot y(x)$

(b) $x'(t) \cdot x''(t) = x(t) \cdot \sin(x(t))$

(c) $y'(x) + x^2 \cdot y(x) = 0$

A 1.1.4 Zeigen Sie, dass autonome und nichtautonome Differentialgleichungen im folgenden Sinne äquivalent sind:
Definiert man zu $f\colon \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ das zeitunabhängige Vektorfeld $\tilde{f}(t,x) := (1, f(t,x))$ auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$, dann ist x genau dann eine Lösung von $x' = f(t,x)$, wenn $y(t) := (t, x(t))$ eine Lösung von $y' = \tilde{f}(y)$ mit $y_1(0) = 0$ ist.

. . . . (Äquivalenz zu Systemen)

A 1.1.5 Schreiben Sie die folgenden Differentialgleichungen höherer Ordnung in Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung um.

(a) $x'' = x' + \sin(x \cdot x')$

(b) $x''' = t \cdot x'' + x \cdot (x')^2$

1.2 Elementar lösbare Differentialgleichungen 1. Ordnung

. . . . (Modellierungsaufgaben)

A 1.2.1 Welche konstante Zerfallsrate in Mol pro Tag hat Jod-131, von dem innerhalb von 8 Tagen die Hälfte zerfallen ist?

A 1.2.2 Angenommen, nach einem Unfall in einem Atomkraftwerk gelangt zum Zeitpunkt $t = 0$ radioaktives Jod-131 mit der hohen relativen Rate b_1 für einen Tag in die Umwelt. Durch die nachfolgenden Reparaturen kann die relative Rate ab dem zweiten Tag auf die Hälfte des erlaubten Grenzwertes b_2 gesenkt werden, eine weitere Absenkung gelingt aber nicht. Ab welchem Zeitpunkt liegt die Menge des sich in der Umwelt befindlichen Jod-131 wieder unter dem Grenzwert b_2?

A 1.2.3 Finden Sie alle Kurven $t \mapsto (t, x(t))$ in der Ebene mit der Eigenschaft, dass der Schnittpunkt der Tangente in $(t, x(t))$ mit der t-Achse vom Ursprung denselben Abstand hat wie vom Punkt $(t, x(t))$.

A 1.2.4 Zu einer vorgegebenen Kurve $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sind diejenigen Kurven x gesucht, deren Tangentialvektor zum Zeitpunkt t die Summe aus den Ortsvektoren $x(t)$ und $b(t)$ ist. Stellen Sie eine Differentialgleichung für x auf und lösen Sie diese.

A 1.2.5 Ein Hundebesitzer geht auf einer geraden Straße und zerrt seinen erschöpften Hund seitlich an einer straff gespannten Leine der Länge $a > 0$ hinter sich her. Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Kurve auf, entlang derer der Hund gezogen wird, und lösen Sie diese.

. . . . (Isoklinen – Richtungsfelder)

A 1.2.6 Bestimmen Sie exemplarisch einige Isoklinen (Linien gleichen Anstiegs) und zeichnen Sie das Richtungsfeld zu folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung. Bestimmen Sie anschließend die Lösungen und tragen Sie einige spezielle Lösungskurven in das Richtungsfeld ein.

$$\text{(a)} \quad y' = x \ , \qquad \text{(b)} \quad y' = 1 + y^2 \ .$$

Eingeschränkte Alternative zu (b):

Zeichnen Sie das Richtungsfeld und ermitteln Sie anschließend alle Lösungen der folgenden autonomen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$y' = 1 + y^2$$

A 1.2.7 (a) Zeichnen Sie das Richtungsfeld zur Differentialgleichung $y' = 2\sqrt{|y|}$ und bestimmen Sie (z.B. mittels Trennung der Variablen) die allgemeine Lösung.

(b) Warum ist hier das entsprechende Anfangswertproblem für ein $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}$ nicht eindeutig lösbar?

A 1.2.8 (a) Lösen Sie die lineare Differentialgleichung $5y' + x^2 y = 0$ mittels Trennung der Variablen.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' \; = \; \frac{x^2}{y(1+x^3)} \tag{1.3}$$

mittels Trennung der Variablen. Auf welchem Intervall existiert die Lösung? Für welches x_0 besitzt das Anfangswertproblem keine Lösung?

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung $y'(x^2+1) = xy + 2x$.

(d) Lösen Sie jeweils für die Differentialgleichungen aus (a),(b) und (c) das Anfangsproblem mit $y(0) = -1$ und geben Sie das entsprechende Intervall an, auf dem die Lösung existiert.

A 1.2.9 Bestimmen Sie zunächst alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

$$\text{(a)} \quad y' \; = \; \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} \cdot y \qquad \text{(b)} \quad y' \; = \; 2xy + 5x$$

Lösen Sie anschließend das jeweilige Anfangswertproblem mit $y(1) = 3\mathrm{e}$.

A 1.2.10 Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen zum Anfangswert $x(0) = 1$.

(a) $x' = \frac{5}{3}\sqrt[3]{t^2} \cdot x$ (b) $x' = 2tx + t$ (c) $x' = tx(x+1)$

A 1.2.11 Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen zum Anfangswert $x(0) = 1$.

(a) $x' = -(t^2+1) \cdot x$ (ii) $x' = \cos(t) \cdot x + \cos(t)$ (iii) $x' = t \cdot x(x-1)$

Lösen Sie (iii) auch für den Anfangswert $x(0) = \frac{1}{2}$.

A 1.2.12 Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme

(a) $\dot{x}(t) \; = \; (\cos(x(t)))^2,\ x(0) = \dfrac{\pi}{4}$,

(b) $\dot{x}(t) \; = \; 3t^2 x(t),\ x(0) = 1$,

(c) $\dot{x}(t) \; = \; (x(t))^2,\ x(0) = 1$.

Geben Sie einen möglichst großen Definitionsbereich für die Lösung an.
Lsg:

(a) Die singulären Lösungen $x \equiv \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ erfüllen augenscheinlich nicht die Anfangsbedingung. Per Trennung der Variablen ergibt sich zunächst mit $C \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung (für $C \pm \infty$ wären auch die singulären Lösungen dabei)

$$\tan(x(t)) \; = \; \int \frac{\dot{x}(t)}{(\cos(x(t)))^2}\, dt \; = \; \int dt \; = \; t + C \quad \Longrightarrow \quad x(t) \; = \; \arctan(t+C)\ .$$

Die Anfangsdaten liefern nun $x(t) = \arctan(t+1)$, wobei x auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

(b) Die singuläre Lösung $x \equiv 0$ erfüllt offenkundig nicht die Anfangsbedingung. Trennung der Variablen liefert mit $C \in \mathbb{R}$ (inklusive der singulären Lösung für $C = 0$) die allgemeine Lösung

$$\ln|x(t)| \;=\; \int \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}\,dt \;=\; \int 3t^2 dt \;=\; t^3 + \ln|C| \quad\Longrightarrow\quad x(t) \;=\; C\mathrm{e}^{t^3}\ .$$

Die Anfangsdaten liefern nun $x(t) = \mathrm{e}^{t^3}$, wobei x auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

(c) Die singuläre Lösung $x \equiv 0$ erfüllt offenkundig nicht die Anfangsbedingung. Trennung der Variablen liefert mit $C \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung (für $C = \pm\infty$ wäre auch die singuläre Lösung dabei)

$$C - \frac{1}{x(t)} \;=\; \int \frac{\dot{x}(t)}{(x(t))^2}\,dt \;=\; \int dt \;=\; t \quad\Longrightarrow\quad x(t) \;=\; \frac{1}{C-t}\ .$$

Die Anfangsdaten liefern nun $x(t) = \dfrac{1}{1-t}$, wobei x auf $]-\infty, 1[$ definiert ist.

.... (Inhomogone lineare DGL erster Ordnung)

A 1.2.13 Lösen Sie die Differentialgleichung $y'(x) = 2xy + x^3$ mittels der Methode der VdK.

A 1.2.14 Lösen Sie die inhomogene lineare Differentialgleichung $ay' + y = b \quad (a, b \in \mathbb{R})$. Unter welchen Bedingungen an a konvergiert $y(x)$ für $x \to \infty$ bzw. divergiert $y(x)$ für $x \to \infty$ bestimmt und gegen welchen Wert?

A 1.2.15 Lösen Sie die inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y' + ay = b \qquad (a, b \in \mathbb{R})\ .$$

Unter welchen Bedingungen an $a \neq 0$ konvergiert $y(x)$ für $x \to \infty$ bzw. divergiert $y(x)$ für $x \to \infty$ bestimmt und gegen welchen Wert?

A 1.2.16 Lösen Sie die Differentialgleichung $y' + \cos(x)y \;=\; (\cos(x))^3$.

. . . . (Substitution – $\boxed{y'(x) = f(ay(x) + bx + c)}$)

A 1.2.17 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = 3x + y.$

A 1.2.18 Lösen Sie mittels geeigneter Substitution die Differentialgleichung $y' = x + 5y.$

A 1.2.19 Lösen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung $y' \;=\; (x + y)^2.$

A 1.2.20 Lösen Sie mittels geeigneter Substitution die Differentialgleichung $x' = (3x - 6t + 2)^2 + 6.$

Leichte Variation:

Lösen Sie mittels geeigneter Substitution die Differentialgleichung $y' - 6 \;=\; (6x - 3y + 2)^2.$

. . . . (Substitution – $\boxed{y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)}$)

A 1.2.21 Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' \;=\; \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}\,, \quad y(1) = 1.$

A 1.2.22 Lösen Sie die folgende Differentialgleichung homogener Art: $x^2(y' - 1) - xy - y^2 = 0.$

Alternative Formulierung:

Lösen Sie die folgende Ähnlichkeitsdifferentialgleichung $x^2 + xy + y^2 - x^2y' \;=\; 0.$

Alternative Formulierung:

Lösen Sie mittels geeigneter Substitution $t^2x' - tx - t^2 = x^2$ für $t \neq 0.$

Leichte Variation:

Lösen Sie mittels Substitution die Differentialgleichung $x^2y' - xy - 5x^2 \;=\; y^2$ für $x > 0.$

A 1.2.23 Lösen Sie mittels geeigneter Substitution $tx' = x(\ln(x) - \ln(t))$ für $t, x > 0$

A 1.2.24 Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichungen

(a) $y' = \frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3}$ (b) $y' = \frac{y}{x} + \exp\left(-\frac{y}{x}\right)$

Tipp: Substitution und Trennung der Variablen.

. . . . (Substitution – $\boxed{y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)\,,\ \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0}$)

A 1.2.25 Lösen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung $y' \;=\; \frac{y + 1}{x + 2} - \exp\left(\frac{y + 1}{x + 2}\right).$

Gibt es eine Lösung, welche durch den Ursprung verläuft?

. . . . (Substitution – $\boxed{xy'(x) = f\left(\frac{y(x)}{\ln(x)}\right)}$)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$xy^2y' \;=\; (\ln(x))^2 \;+\; \frac{y^3}{\ln(x)}\,, \qquad y(\mathrm{e}) \;=\; -3\,.$$

A 1.2.26 Lösen Sie die folgende Differentialgleichung

$$y' - 4y \cdot \frac{1}{x} \; = \; x \cdot y^{\frac{1}{2}} \; , \qquad x > 0 \; .$$

A 1.2.27 Lösen Sie die Bernoulli-Differentialgleichung $\quad y' \; + \; \dfrac{y}{1+x} \; + \; (1+x)y^4 \; = \; 0 \; .$

Gibt es eine Lösung, welche durch den Punkt $(0, -\sqrt[3]{2})$ verläuft?

A 1.2.28 Lösen Sie die Bernoulli-Differentialgleichung $\quad y' - y + xy^3 = 0 \; .$

A 1.2.29 Lösen Sie die Bernoulli-Differentialgleichung $\quad xy' + y - y^5 \; = \; 0.$

A 1.2.30 Lösen Sie die Riccati-Differentialgleichung $\quad x' + (1 - 2t^2)x + tx^2 = t - t^3 + 1$
mit spezieller Lösung $x_p(t) = t$.

Alternative Formulierung:

Lösen Sie die Riccati-Differentialgleichung $\quad y' + (1 - 2x^2)y + xy^2 \; = \; x - x^3 + 1$
mit der speziellen Lösung $\; y_1(x) = x \; .$

A 1.2.31 Finden Sie die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen

(a) $y' + y - xy^2 = 0,$

(b) $y' - x^4 y - x^4 y^4 = 0,$

(c) $y' - y - \mathrm{e}^x y^2 = -3\mathrm{e}^{-x}$ mit der speziellen Lösung e^{-x}.

. . . . (Implizite DGL – Linienelemente)

A 1.2.32 Untersuchen Sie die Differentialgleichung $(y')^2 = 4x^2$ auf singuläre Linienelemente bzw. Punkte.

A 1.2.33 Finden Sie eine implizite Differentialgleichung, für die alle Linienelemente regulär sind, obwohl $F(x_1, y_1, p_1) = F_p(x_1, y_1, p_1) = 0$ für alle Linienelemente (x_1, y_1, p_1) gilt.

. . . . (Einhüllende – – Clairaut-Differentialgleichung $\boxed{y = xy' + g(y')}$)

A 1.2.34 Die Punkte der Parabel $y = x^2$ seien die Mittelpunkte von Kreisen mit festem Radius R. Geben Sie die zugehörige Gleichung der Kreisschar an (verwenden Sie den Parameter c für die x-Koordinate). Skizzieren Sie die Kreisschar und die entsprechenden Hüllkurven für $R = \frac{1}{4}$.

A 1.2.35 Bestimmen Sie die Gleichungen für die Hüllkurven und entscheiden Sie, ob es sich bei den Hüllkurven um Parabeln handelt.

A 1.2.36 (a) Bestimmen Sie die Einhüllende (Enveloppe) der Kurvenschar

$$\sin(c)x + \cos(c)y = 1 . \tag{1.4}$$

(b) Formen Sie die Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)(y')^2 - 2xyy' + y^2 - 1 = 0 \tag{1.5}$$

in eine Clairaut-Differentialgleichung um und lösen Sie sie. Vergleichen Sie anschließend mit Aufgabenteil (a) und ziehen Sie Schlussfolgerungen bezüglich der singulären Lösung.

A 1.2.37 Lösen Sie die Clairaut-Differentialgleichung

$$y = xy' + e^{y'} . \tag{1.6}$$

A 1.2.38 Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y = (x - 1)y' + (y')^2 .$$

Welches ist die singuläre Lösung? Ist sie eine Hüllkurve?

. . . . (d'Alembert-Differentialgleichung $\boxed{y = xf(y') + g(y')}$)

A 1.2.39 Bestimmen Sie in Parameterform die Lösungen der d'Alembert-Differentialgleichung

$$y = x(y')^2 + \ln\left((y')^2\right) . \tag{1.7}$$

A 1.2.40 Sei $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und seien

$$g := \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,, \quad h := \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,.$$

Zeigen Sie, dass $y\colon I \to \mathbb{R}$ genau dann die Differentialgleichung $g(x,y) + h(x,y)y' = 0$ löst, wenn $\Phi(x, y(x)) = C$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$ für alle $x \in I$ gilt.

A 1.2.41 Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung $(2y^2 + 6xy - x^2) + (y^2 + 4xy + 3x^2)y' = 0$ exakt ist und geben Sie die Lösung implizit in der Form $\Phi(x,y) = C$ an.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$(2y^2 + 6xy - x^2)\ dx + (y^2 + 4xy + 3x^2)\ dy = 0.$$

exakt ist und geben Sie dann die Lösung implizit in der Form $\varphi(x,y) = c$ an!

A 1.2.42 Lösen Sie die exakte Differentialgleichung $xdx + ydy \ = \ 0$.

A 1.2.43 Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$2y\ dx \ + \ x\ dy \ = \ 0$$

nicht exakt ist, jedoch ein integrierender Faktor der speziellen Gestalt $\mu = \mu(x)$ oder $\mu = \mu(y)$ existiert, und geben Sie entsprechende Lösungen in impliziter Form an.

A 1.2.44 Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen, indem Sie sie mittels eines integrierenden Faktors in eine exakte Differentialgleichung überführen.

(a) $(x^2 + y) - xy' = 0$

(b) $xy^3\ dx \ + \ (1 + 2x^2y^2)\ dy \ = \ 0$

Alternative Formulierung (a):
Lösen Sie die Differentialgleichung $(x^2{+}y)dx{-}xdy \ = \ 0$, indem Sie sie mittels integrierendem Faktor auf eine exakte Differentialgleichung überführen und diese dann lösen.

A 1.2.45 Lösen Sie die Differentialgleichung $ydx{-}(x{+}y^2)dy \ = \ 0$, indem Sie sie mittels integrierendem Faktor auf eine exakte Differentialgleichung überführen und diese dann lösen.

A 1.2.46 (a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $(xy^2 + 4x^3y) \ + \ (x^4 + x^2y) \cdot y' \ = \ 0, \qquad y(1) = 4.$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $(y^2 + 4x^2y) \ + \ (x^3 + xy) \cdot y' \ = \ 0, \qquad y(1) = -2.$

(c) Welche Lösung erhalten wir für das Anfangswertproblem aus (a), wenn wir die Anfangsbedingung zu $y(1) = 0$ abändern? Was passiert, wenn wir stattdessen nur $y(0) = 0$ fordern?

1.3 Elementar lösbare Differentialgleichungen 2. Ordnung

A 1.3.1 Überführen Sie das System erster Ordnung

$$\dot{y}(t) \;=\; z(t)\;, \qquad \dot{z} \;=\; \frac{(z(t))^2}{y(t)}$$

mit Anfangswerten $y(0) = 1$, $z(0) = 2$, auf eine DGL zweiter Ordnung für y und lösen Sie das entsprechende Anfangswertproblem.

A 1.3.2 Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme für Differentialgleichungen 2. Ordnung:

$$\text{(i)} \begin{cases} \ddot{x}(t) & = \dfrac{t+2}{\dot{x}}, \\ x(0) & = 5, \\ \dot{x}(0) & = -2\;. \end{cases} \qquad \text{(ii)} \begin{cases} \ddot{x}(t) & = x(t)+1, \\ x(0) & = -2, \\ \dot{x}(0) & = 1\;. \end{cases} \qquad \text{(iii)} \begin{cases} \ddot{x}(t) & = x(t)\,(\dot{x}(t))^3\,, \\ x(0) & = 2, \\ \dot{x}(0) & = -\frac{1}{2}\;. \end{cases}$$

Alternative Formulierung:

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\quad \ddot{x} \;=\; \dfrac{t+2}{\dot{x}} \qquad x(0) = 5\;, \qquad \dot{x}(0) = -2\;.$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\quad \ddot{x} \;=\; x+1 \qquad x(0) = -2\;, \qquad \dot{x}(0) = 1\;.$

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\quad \ddot{x} \;=\; x\,(\dot{x})^3 \qquad x(0) = 2\;, \qquad \dot{x}(0) = -\frac{1}{2}\;.$

A 1.3.3 Bestimmen Sie die Lösungen $x(t)$ der folgenden autonomen nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu den gegebenen Anfangswerten mit Hilfe der Substitution $y(x) := x'(t(x))$, wobei $t(x)$ die Umkehrfunktion zu $x(t)$ bezeichnet.

(a) $x'' = \dfrac{(x')^2}{x}$ zu den Anfangswerten $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$,

(b) $x'' = (x')^2 x$ zu den Anfangswerten $x(0) = \sqrt{2}$, $x'(0) = \mathrm{e}$.

A 1.3.4 Diskutieren Sie die Lösbarkeit der folgenden autonomen nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

(a) $y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$ (b) $y'' = -y^3$

A 1.3.5 Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\left.\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{4\sqrt{y}}, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Tipp: Multiplizieren Sie die DGL mit y' und integrieren Sie.
Tipp: Verwenden Sie frühzeitig die Anfangsdaten, um etwaige Konstanten zu bestimmen.

. . . . (Laguerre-Differentialgleichung)

A 1.3.6 Zeigen Sie: Bezüglich des Maßes $e^{-x}\,dx$ auf $]0,\infty[$ sind die Laguerre-Polynome

$$L_n(x) := \frac{e^x}{n!}(e^{-x}x^n)^{(n)} \tag{1.9}$$

orthogonal. Desweiteren lösen sie die Laguerre-Differentialgleichung

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0\ . \tag{1.10}$$

Bonus: Zeigen Sie: Die Laguerre-Polynome erfüllen für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichungen:

(a) $xL_n'(x) \;=\; nL_n(x) - nL_{n-1}(x)$ (b) $L_n'(x) - L_{n-1}'(x) + L_{n-1}(x) \;=\; 0$?

Zeigen Sie nun mittels (i) und (ii), dass $L_n(x)$ die Laguerre-Gleichung erfüllt.

. . . . (Anwendungsaufgaben)

A 1.3.7 Die Höhe $x(t)$ einer senkrecht gestarteten Rakete über der Erdoberfläche kann (bis auf Konstanten) durch die Differentialgleichung $x'' = -\dfrac{1}{x^2}$ beschrieben werden.

(a) Ermitteln Sie $x(t)$ für eine Rakete, deren Triebwerk in der Höhe $x(0) = 2$ bei Geschwindigkeit $x'(0) = 1$ abgeschaltet wird, und zeigen Sie $x(t) \to +\infty$ für $t \to +\infty$.

(b) Beweisen Sie, dass $x(t)$ bei $x'(0) < 1$ beschränkt bleibt.

(c) Müssten nach unseren Resultaten über nichtlineare Schwingungen die Lösungen nicht eigentlich periodisch sein?

1.4 Der Existenz- & Eindeutigkeitssatz v. Picard-Lindelöf

A 1.4.1 Zeigen Sie, dass eine Lipschitz-stetige Funktion auch stetig ist.

A 1.4.2 Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem beliebigen Intervall I.
Beweisen **oder** widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist I kompakt und f gleichmäßig stetig, so ist f auch Lipschitz-stetig.

(b) Ist f stetig differenzierbar, so ist f auch Lipschitz-stetig.

(c) Ist I kompakt und f stetig differenzierbar, so ist f auch Lipschitz-stetig.

A 1.4.3 Sei $0 < a < b < \infty$. Zeigen Sie: Die Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \dfrac{1}{x}$ ist Lipschitz-stetig.

A 1.4.4 Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $J := [a,b]$. Weiterhin sei $f\colon J \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit $f(a) = f(b) = 0$ und $\tau \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest. Beweisen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) \;=\; f(x(t)) \;, \qquad x(\tau) = \xi$$

zu beliebigem $\xi \in J$ eine eindeutig bestimmte (globale) Lösung $x_\xi\colon \mathbb{R} \to J$ besitzt.

A 1.4.5 Sei I ein Intervall und $t_0 \in I$. Beweisen Sie:

Das Anfangswertproblem $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, besitzt eine eindeutige globale Lösung $x\colon I \to \mathbb{R}^n$, falls $f\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion ist, die mit einer Konstanten $L < \infty$ der globalen Lipschitzbedingung $|f(t,x) - f(t,\tilde{x})| \le L|x - \tilde{x}|$ für alle $t \in I$, $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, genügt.

. . . . (Lipschitz-Bedingungen)

A 1.4.6 Zeigen Sie den Satz (Kriterium für lokale Lipschitz-Bedingung):
Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $F\colon G \to \mathbb{R}^n$, $(t,x) \mapsto F(t,x)$, eine Funktion, welche bezüglich der Variablen $x = (x_1, \ldots, x_n)$ stetig partiell differenzierbar ist. Dann genügt F in G lokal einer Lipschitz-Bedingung.

A 1.4.7 (a) Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen $f(t,x)$ auf dem Rechteck R eine Lipschitz-Bedingung erfüllen:

(i) $f(t,x) \;=\; \mathrm{e}^{t^2 x}\cos(tx), \quad R = [0,1] \;\times\; [-\pi,\pi]$;
(ii) $f(t,x) \;=\; \sqrt{1+t+x^2}, \quad R = [1,\infty[\;\times\; \mathbb{R}$;
(iii) $f(t,x) \;=\; t\sqrt{|x|}, \quad R = [0,\infty[\;\times\; \mathbb{R}$.

Alternative Formulierung zu (ii,iii):

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f(t,x)$ auf $[0,\infty[\times\mathbb{R}$ einer Lipschitz-Bedingung genügen:

(i) $f(t,x) \;=\; \sqrt{1+t+x^2}$, (ii) $f(t,x) \;=\; t\sqrt{|x|}$.

(b) Betrachten Sie zu den Funktionen aus (a) die Anfangswertprobleme $\dot{x} = f(t,x)$ mit den Anfangswerten (i) $x(0) = 0$; (ii) $x(1) = 1$; (iii) $x(0) = 0$ und entscheiden Sie, ob diese Probleme eindeutige Lösungen besitzen. Wie groß können die Lösungsintervalle gegebenenfalls gewählt werden? (Satz von Picard-Lindelöf)

Leichte Variation zur Alternative (ii,iii):

Diskutieren Sie mit den Funktionen aus (a) die Differentialgleichungen $\dot{x} = f(t,x)$ zum

Anfangswert $x(0) = 0$ und entscheiden Sie, ob diese Probleme eindeutige Lösungen besitzen. Wie groß können die Lösungsintervalle gegebenenfalls gewählt werden (Satz von Picard-Lindelöf)?

A 1.4.8 (a) Bestimmen Sie alle Lösungen von $y'(x) = |x|\sqrt{|y|}$ zum Anfangswert $y(0) = 0$.

(b) Auf welchem maximalen Intervall ist die Lösung von $y'(x) = |x|\sqrt{|y|}$ zum Anfangswert $y(0) = -1$ eindeutig?

(c) Sind alle Lösungen von $y'(x) = -|x|\,\mathrm{sign}(y)\sqrt{|y|}$ eindeutig durch ihren Anfangswert bestimmt?

A 1.4.9 (a) Bestimmen Sie eine Lösung der Differentialgleichung $y'+y+\sqrt[3]{y^2} = 0$ zum Anfangswert $y(0) = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass die Lösung auf dem Intervall $0 \le t \le 3\ln(2)$ eindeutig ist (Satz von Picard-Lindelöf).

(c) Zeigen Sie durch Angabe einer zweiten Lösung, dass die Lösung der obigen Anfangswertaufgabe auf jedem Intervall $0 \le t \le b$ mit $b > 3\ln(2)$ nicht mehr eindeutig ist.

Leichte Variation:

(a) Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung $y' + 3y + \sqrt[3]{y^2} = 0$ zum Anfangswert $y(0) = 1$.

(b) Zeigen Sie:

(i) Die Lösung aus (a) ist auf dem Intervall $0 \le x \le \ln(4)$ eindeutig (Satz von Picard-Lindelöf).

(ii) Die Lösung der Anfangswertaufgabe aus (a) ist auf jedem Intervall $0 \le x \le b$ mit $b > \ln(4)$ nicht mehr eindeutig. Geben Sie insbesondere eine zweite Lösung an.

A 1.4.10 (a) Für welche Anfangswerte $y(0) = y_0$ gibt es lokal genau eine Lösung von $y' = \sqrt[3]{y^2}$? Bestimmen Sie diese lokal eindeutige Lösung.

(b) Wann wird die Lösung zum Anfangswert $y(0) = y_0^3 \neq 0$ frühestens uneindeutig ?

(c) Geben Sie alle Lösungen auf $[0, \infty)$ mit $y(0) = -1$ an.

A 1.4.11 Betrachten Sie für $t \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) \;=\; t\,(x(t))^2\;, \qquad x(0) = x_0\;. \tag{1.11}$$

Zeigen Sie, dass für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ lokal genau eine Lösung des Anfangswertproblems existiert. Bestimmen Sie für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems mit maximalem Definitionsbereich und skizzieren Sie den qualitativen Verlauf der Lösungen für $x_0 = -2, -1, 0, 1, 2$ in einem gemeinsamen Schaubild.

A 1.4.12 Betrachten Sie für $a, b > 0$ das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) \;=\; (a - bx(t))\,x(t)\;, \qquad x(0) = x_0\;, \quad x_0 \ge 0\;. \tag{1.12}$$

(a) Zeigen Sie zunächst, dass für beliebiges $x_0 \ge 0$ eine eindeutige, maximal definierte Lösung existiert, indem Sie – falls die Wahl von x_0 dies zulässt – die Funktion $y(t) := (x(t))^{-1}$ einführen und obiges Anfangswertproblem in ein äquivalentes Anfangswertproblem für $y(t)$ umformen.

(b) Für welche Werte von $x_0 \geq 0$ ist

(i) $\dot{x}(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ oder

(ii) $\dot{x}(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$,

(iii) $\dot{x}(t) < 0$ für alle $t \in D$?

(c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von x_0 den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ und skizzieren Sie für verschiedene Anfangswerte x_0 den qualitativen Verlauf der Lösungen in einem gemeinsamen Schaubild.

.... (Systeme)

A 1.4.13 (a) Bestimmen Sie die optimalen Lipschitz-Konstanten des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) + z(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + y(t) \\ \dot{z}(t) &= z(t) - x(t) \end{aligned}$$

bezüglich der Euklidischen Metrik, der Manhattan-Metrik und der Maximumsmetrik, indem Sie die entsprechenden Operatornormen ermitteln.

(b) Bestimmen Sie auf $D := \{(t, x, y) \ : \ x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^3$ bzgl. $\|\cdot\|_2$ eine Lipschitz-Konstante für das System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) - (y(t))^2 \\ \dot{y}(t) &= \sin(x(t) \cdot y(t)) \end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Schrankensatz und $\|A\|_2 \leq \|A\|_F := \sqrt{\sum\limits_{j,k=1}^{n} a_{jk}^2}$.

.... (Picard-Iterationen)

A 1.4.14 (a) Zeigen Sie: Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = t^2 + x^2 , \qquad x(0) = 0 , \tag{1.13}$$

besitzt eine eindeutige Lösung auf $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, und dieses Lösungsintervall ist das größtmögliche, welches der Satz von Picard-Lindelöf garantieren kann.

(b) Berechnen Sie die ersten 3 Picard-Iterierten $x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t)$, $x^{(3)}(t)$.

Alternative Formulierung:

Führen Sie die ersten 3 Schritte des Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahrens zur Gewinnung einer Näherungslösung für das Anfangswertproblem $x'(t) = t^2 + \big(x(t)\big)^2$, $x(0) = 0$, durch.

A 1.4.15 Führen Sie jeweils die ersten n Schritte des Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahrens zur Gewinnung einer Näherungslösung für die nachfolgenden Anfangswertprobleme durch:

$y'(t) = \sin(t) + \big(y(t)\big)^2$, $y(0) = 0$, $n = 2$.

Hinweis: Verwenden Sie für die Integrale $I_n := \int (\sin(x))^n dx$ die Rekursionsformel

$$\boxed{I_n = -\frac{\cos(x) \cdot (\sin(x))^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} , \qquad I_0 = x , \qquad I_1 = -\cos(x)}$$

Alternative Formulierung:

Berechnen Sie die ersten zwei PICARD-LINDELÖF-Iterationen zum Anfangswertproblem

$$y' \;=\; \sin(t) + y^2 \;, \qquad y(0) = 0 \;.$$

A 1.4.16 Auf dem Intervall $I = [0, a]$, $a > 0$, betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) \;=\; -\,2tx(t) \;, \qquad x(0) = 1 \;. \tag{1.14}$$

(a) Berechnen Sie die Picard-Iterierten $x_0(t), \ldots, x_4(t)$.

(b) Sei T_{2n} das Taylor-Polynom der Ordnung $2n$ der Lösung von (1.14) zum Entwicklungspunkt $t_0 = 0$. Zeigen Sie per Induktion für die Picard-Iterierten die Beziehung

$$x_n(t) \;=\; T_{2n}(t) \;, \qquad t \in I \;, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

1.5 Allgemeinere Existenz- und Eindeutigkeitsresultate

.... (Gleichgradige Stetigkeit)

A 1.5.1 (a) Ist die Menge der Funktionen x^n, $n \in \mathbb{N}$, gleichgradig stetig auf dem Intervall $[0, b]$, $b < 1$?

(b) Gilt dasselbe auch für das Intervall $[0, 1]$?

A 1.5.2 Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall. Zeigen Sie, dass für jedes $L \in]0, \infty[$ die Menge

$$M_L \;:=\; \left\{ f \in C([a,b],\mathbb{R}) \;\middle|\; \forall x, y \in [a,b] \;:\; |f(x) - f(y)| \;\leq\; L|x-y| \right\}$$

der in $[a, b]$ einer Lipschitz-Bedingung mit einer einheitlichen Lipschitz-Konstante L genügenden stetigen Funktionen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichgradig stetig ist.

A 1.5.3 Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und die Folge $(f_n(x))_n$ in $[a, b]$ gleichgradig stetig. Weiterhin sei $A \subset [a, b]$ dicht (also $\bar{A} = [a, b]$) und in A existiere der punktweise Grenzwert von $f_n(x)$. Zeigen Sie, dass der punktweise Grenzwert von $f_n(x)$ dann auch im ganzen Intervall $[a, b]$ existiert und die Folge $(f_n(x))$ auf $[a, b]$ sogar gleichmäßig konvergiert.

A 1.5.4 Zeigen Sie den Satz von Arzelà-Ascoli:
Sei $M := \{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset C([a, b], \mathbb{R})$ eine gleichgradig stetige und gleichmäßig beschränkte Folge. Dann gibt es eine auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_k$ mit $f_{n_k} \in M$.

.... (Fixpunkte & Integralgleichungen)

A 1.5.5 Zeigen Sie den **Fixpunktsatz von Banach**

Sei (M, d_M) ein vollständiger metrischer Raum und $f\colon M \to M$ eine Kontraktion, d.h., es existiere ein $L < 1$, so dass

$$\forall x, y \in M\colon d_M(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_M(x, y) \;. \tag{1.15}$$

Dann existiert genau ein $x \in M$ mit $f(x) = x$. Insbesondere konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in M$ die durch $x_{k+1} := f(x_k)$ rekursiv definierte Folge gegen diesen Fixpunkt x von f.

A 1.5.6 Zeigen Sie: Für $\gamma > 0$ gilt die Abschätzung

$$\int_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} \mathrm{e}^{\gamma|s-t_0|}\, ds \;\leq\; \frac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma|t-t_0|} \tag{1.16}$$

A 1.5.7 Sei $f\colon [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und erfülle eine globale Lipschitzbedingung im dritten Argument, d.h., es gäbe ein $L < \infty$ mit

$$|f(t, s, u) - f(t, s, v)| \;\leq\; L|u - v| \quad \text{für alle } t, s \in [0, T], u, v \in \mathbb{R} \;. \tag{1.17}$$

(a) Zeigen Sie: Ist g stetig, $r > 0$ und ist $T > 0$ klein genug, so besitzt die (nichtlineare) **Volterra-Integralgleichung**

$$x(t) \;=\; \int_0^t f(t, s, x(s))ds + g(t) \qquad (t \in [0, T]) \tag{1.18}$$

eine eindeutige Lösung x in

$$K_r(g) := \{x \in C([0, T])\colon \|x - g\|_\infty \leq r\}, \tag{1.19}$$

wobei

$$\|x\|_\infty \ := \ \max_{t\in[0,T]} |x(t)|. \tag{1.20}$$

Für Anwendungen ist wichtig, dass man für den Beweis die Lipschitzbedingung tatsächlich nur für diejenigen (t,s,u,v) mit $|u-g(t)|\le r$, $|v-g(t)|\le r$ braucht.

Bemerkung: Ein Spezialfall der Volterra-Gleichung ist das Anfangswertproblem

$$x'(s) \ = \ f(s,x(s)), \qquad x(0)=x_0 \ . \tag{1.21}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Fixpunktsatz von Banach im Raum $X = K_r(g)$.

(b) Zeigen Sie: Falls die Lipschitzbedingung tatsächlich global ist, kann man $r=\infty$ setzen, und die Voraussetzung, dass $T>0$ klein genug ist, ist überflüssig.

Hinweis: Verwenden Sie den Fixpunktsatz von Banach im Raum $X := C([0,T])$, wobei die Maximumsnorm $\|.\|_\infty$ mit der Funktion $w_\gamma(t) := \mathrm{e}^{-\gamma t}$ ($\gamma > 0$ geeignet gewählt) gewichtet wird, d.h., versehen mit der Norm

$$\|x\|_\gamma \ := \ \|w_\gamma \cdot x\|_\infty \ = \ \max_{t\in[0,T]} |\mathrm{e}^{-\gamma t}x(t)|. \tag{1.22}$$

A 1.5.8 Zeigen Sie, dass $X := C([0,T])$ mit (1.22) vollständig ist.

A 1.5.9 Gegeben seien eine im Intervall $[0,1]$ stetige Funktion $g(x)$ und ein auf der Menge

$$S \ := \ \{(t,x,z) \ : \ 0\le t\le x\le 1, \ -\infty < z < \infty\}$$

stetiger Integralkern $k(t,x,z)$, der auf S der Wachstumsbedingung $|k(t,x,z)| \ \le \ L(1+|z|)$ genügt. Zeigen Sie, dass dann die VOLTERRA-Integralgleichung

$$y(x) \ = \ g(x) \ + \ \int_0^x k(t,x,y(t))\,dt \qquad \text{mindestens eine in } [0,1] \text{ stetige Lösung besitzt.}$$

Hinweis: Lösen Sie zunächst auf $[0,1]$ das AWP $\dot\rho = L(1+\rho)$, $\rho(0) = C+1$ mit $C := \max|g(x)|$ und betrachten Sie obige Integralgleichung auf $D := \{v \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid |v(x)| \le \rho(x)\}$ als Fixpunktproblem $u = Tu$. Zeigen Sie $T(D)\subset D$ sowie T kompakt und verwenden Sie den SCHAUDERschen Fixpunktsatz.

A 1.5.10 Sei $\alpha > 0$. Weiter sei f in $[0,1]\times\mathbb{R}$ stetig und genüge einer Abschätzung $|f(x,y)| \le L(1+|y|)$. Zeigen Sie: In $[0,1]$ existiert mindestens eine Lösung für das Anfangswertproblem

$$y'' \ + \ \frac{\alpha}{x}y' \ = \ f(x,y) \ , \quad y(0)=\mu \ , \quad y'(0)=0 \ . \tag{1.23}$$

Hinweis: Siehe vorige Aufgabe

A 1.5.11 Sei $(X,\|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $D\subset X$ abgeschlossen und beschränkt. Weiter sei $T\colon D\to X$ ein in D stetiger und kompakter Operator, für den zu jedem $\varepsilon>0$ ein $x\in D$ existiert, so dass $\|x-Tx\|<\varepsilon$ gilt. Zeigen Sie, dass T einen Fixpunkt in D besitzt.

. . . . (**Eulersches Polygonzugverfahren**)

A 1.5.12 Berechnen Sie für die unten angegebenen Anfangswertprobleme $y'(t) = f(t,y(t))$, $y(0)=y_0$ auf dem Intervall $[0,1]$ Näherungslösungen durch Polygonzüge in der folgenden beschriebenen Weise:

$$t_k \ := \ \frac{k}{n} \ , \qquad k=0,\dots,n, \qquad \hat y_n(t)\Big|_{[t_k,t_{k+1}]} \ := \ \hat y_n(t_k) + (t-t_k)f(t_k,\hat y_n(t_k)) \ .$$

Geben Sie jeweils $\hat y_n(1)$ für $n=1,\dots,5$ an und stellen Sie die Näherungslösungen zusammen mit der exakten Lösung in einem Schaubild dar.

(a) $y'(t) = 2ty(t)$, $\qquad y(0)=1$ $\qquad$ (b) $y'(t) = t\,(y(t))^2$, $\qquad y(0)=2.$

. . . . (Monotone Vektorfelder/Lemma von Gronwall)

A 1.5.13 Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Warum ist eine stetige Funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, ds \tag{1.24}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ automatisch stetig differenzierbar?

A 1.5.14 Begründen Sie, warum die Lösung einer Differentialgleichung $y' = f(y)$ zu einem Anfangswert $y(0) = y_0$ auf $[0, \infty)$ eindeutig ist, falls es zu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein $L < \infty$ mit

$$(f(y) - f(\tilde{y}))(y - \tilde{y}) \leq L(y - \tilde{y})^2 \tag{1.25}$$

für alle $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ gibt.

Hinweis: Welcher Differentialungleichung genügt das Quadrat der Differenz zweier Lösungen?

Bem.: Die Ungleichung (1.25) ist ein Spezialfall der in Definition 1.51 eingeführten einseitigen Lipschitz-Bedingung.

1.6 Stetige Abhängigkeit

A 1.6.1 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = 1 - (y(x))^2$, sowie die speziellen Lösungen zu den fünf Anfangswerten $y(0) = -3, -1, 0, 1, 3$.

Für welche $x \in \mathbb{R}$ existieren die speziellen Lösungen ?

A 1.6.2 (a) Beweisen Sie, dass jede Lösung y der Differentialgleichung

$$y' \;=\; 2xy \tag{1.26}$$

von der Form $y(x) = C\mathrm{e}^{x^2}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass zwei Lösungen $y, \tilde{y}$ der Differentialgleichung aus (a) zu (beliebig nahe beieinander gelegenen) Anfangswerten $y_0 \neq \tilde{y}_0$ in $x = 0$ die Eigenschaft $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |y(x) - \tilde{y}(x)| = \infty$ haben.

Warum widerspricht dies nicht dem Satz über die stetige Abhängigkeit vom Anfangswert?

A 1.6.3 (a) Ermitteln Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ die maximale Lösung $y_n(t)$ der Differentialgleichung

$$y'(t) \;=\; \mathrm{e}^{y(t)} \cos(t) \tag{1.27}$$

zum Anfangswert $y_n(0) = -\frac{1}{n}$.

(b) Zeigen Sie, dass jede der Lösungen y_n aus Teil (a) auf ganz $\mathbb{R}$ existiert, dass aber die Lösung zum Anfangswert $y(0) = 0$ nur auf $]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ existiert.

Warum widerspricht dies nicht dem Satz über die stetige Abhängigkeit vom Anfangswert?

A 1.6.4 (a) Ermitteln Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ die Lösung $y_n(t)$ der Differentialgleichung

$$y'(t) \;=\; \mathrm{e}^{y(t)} \sin(t) \tag{1.28}$$

zum Anfangswert $y_n(0) = -\ln(2) - \frac{1}{n}$.

(b) Zeigen Sie, dass jede der Lösungen y_n aus Teil (a) auf ganz $\mathbb{R}$ existiert, dass aber die Lösung zum Anfangswert $y(0) = -\ln(2)$ nur auf $]-\pi, \pi[$ existiert.

Warum widerspricht dies nicht dem Satz über die stetige Abhängigkeit vom Anfangswert?

A 1.6.5 (a) Ermitteln Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ die Lösung $y_n(t)$ der Differentialgleichung

$$y'(t) \;=\; (1 + (y(t))^2)\cos(t) \tag{1.29}$$

zum Anfangswert $y_n(0) = \tan(\frac{\pi}{2} - 1 - \frac{1}{n})$.

(b) Zeigen Sie, dass jede der Lösungen y_n aus (a) auf ganz $\mathbb{R}$ existiert, dass aber die Lösung zum Anfangswert $y(0) = \tan(\frac{\pi}{2} - 1)$ maximal bis zur Zeit $t = \frac{\pi}{2}$ existiert.

Widerspricht dies nicht der Aussage, dass die Lösungen stetig vom Anfangswert abhängen?

A 1.6.6 (a) Bestimmen Sie die Lösung $y(t; y_0)$ der Differentialgleichung

$$y' = -t^2 y^2 \tag{1.30}$$

zu einem beliebigen Anfangswert $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie in Abhängigkeit von y_0 das maximale Existenzintervall der Lösung $y(t; y_0)$ an.

(c) Warum gibt es in (a) zu jedem Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}$ nur eine Lösung?

(d) Zeigen Sie $\lim\limits_{t \nearrow \sqrt[3]{\frac{3}{|y_0|}}} y(t; y_0) = -\infty$ für die Lösung $y(t; y_0)$ aus (a) zum Anfangswert $y_0 < 0$.

(e) Hängen die Lösungen $y(t; y_0)$ stetig vom Anfangswert y_0 ab?

Verkürzte zusammengefasste Formulierung:

(a) Bestimmen Sie die Lösung $y(t; y_0)$ der Differentialgleichung $y' = -t^2 y^2$ zu einem beliebigen Anfangswert $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$. Geben Sie in Abhängigkeit von y_0 das maximale Existenzintervall der Lösung $y(t; y_0)$ an.

(b) Warum gibt es in (a) zu jedem Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}$ nur eine Lösung?
Zeigen Sie $\lim\limits_{t \nearrow \sqrt[3]{\frac{3}{|y_0|}}} y(t; y_0) = -\infty$ für die Lösung $y(t; y_0)$ aus (a) zum Anfangswert $y_0 < 0$.

(c) Hängen die Lösungen $y(t; y_0)$ stetig vom Anfangswert y_0 ab?

Kapitel 2

Lineare Differentialgleichungen

2.1 Lineare Systeme

A 2.1.1 Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''' = -y + y' + y''\,.$$

(a) Überführen sie diese Gleichung in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

(b) Geben Sie dieses System in Matrix–Vektor–Schreibweise an.

A 2.1.2 (a) Stellen Sie ein zur Gleichung

$$t^3 y'' \;=\; ty' + y''' - y^2$$

äquivalentes System von Differentialgleichungen auf.

(b) Entwickeln Sie daraus wieder die Differentialgleichung.

Alternative Formulierung:

(a) Stellen Sie ein zur Gleichung

$$x^3 y'' = xy' + y''' - y^2$$

äquivalentes System von Differentialgleichungen auf.

(b) Entwickeln Sie daraus wieder die Differentialgleichung.

A 2.1.3 (a) Stellen Sie ein zur Gleichung

$$y'' = xy' + y^2$$

äquivalentes System von Differentialgleichungen auf.

(b) Entwickeln Sie daraus wieder die Differentialgleichung.

A 2.1.4 Seien die Funktionen $A(t), B(t), \mathbf{x}(t)$ (bei t_0) differenzierbar. Bestimmen Sie

(a) $\dfrac{d}{dt}(A(t)B(t))$ (ii) $\dfrac{d}{dt}(A(t)\mathbf{x}(t))$ (iii) $\dfrac{d}{dt}(\det A(t))$

A 2.1.5 Überführen Sie ein **komplexes System** $\dot{\mathbf{z}}(t) = B(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}(t)$ von n Differentialgleichungen mit Aufspaltung in Real- und Imaginärteil der Gestalt

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + \mathrm{i}\mathbf{y}(t)\ , \qquad \mathbf{b}(t) = \mathbf{c}(t) + \mathrm{i}\mathbf{d}(t)\ , \qquad B(t) = C(t) + \mathrm{i}D(t)\ ,$$

in ein reelles System von $2n$ Differentialgleichungen.

. . . . (Wronski-Determinante)

A 2.1.6 (a) Gegeben seien die Funktionen $y_1, y_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $y_1(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x^2 \end{pmatrix}$, $y_2(x) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ x^2\mathrm{e}^x \end{pmatrix}$.
Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Vektoren $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear abhängig sind, während die Funktionen y_1, y_2 linear unabhängig sind.

(b) Kann eine stetige Funktion $A \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ existieren, so dass y_1 und y_2 aus (a) beides Lösungen von $y'(x) = A(x)y(x)$ sind ?

A 2.1.7 (a) Zeigen Sie, dass das reelle lineare System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a(t)x(t) - b(t)y(t) \\ \dot{y}(t) &= b(t)x(t) + a(t)y(t) \end{aligned}$$

auf eine komplexe lineare DGL $\dot{z}(t) = c(t)z(t)$ für $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ zurückgeführt werden kann, und stellen Sie eine lineare DGL für $v(t) := |z(t)|^2$ auf.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie, dass das reelle lineare System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a(t)x(t) - b(t)y(t) \\ \dot{y}(t) &= b(t)x(t) + a(t)y(t) \end{aligned}$$

auf eine einzige komplexe lineare Differentialgleichung $\dot{z}(t) = c(t)z(t)$ für $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ zurückführbar ist. Leiten Sie weiterhin eine lineare Differentialgleichung ab für

$$v(t) = z(t)\overline{z(t)} = \big(x(t)\big)^2 + \big(y(t)\big)^2\ .$$

(b) Lösen Sie das System in (a) für $a(t) := \cos(t)$ und $b(t) := \sin(t)$. Bestimmen Sie insbesondere ein Fundamentalsystem $X(t)$ mit $X(0) = \mathrm{Id}$ und die zugehörige Wronski-Determinante $\det(X(t))$.

Alternative Formulierung:

Lösen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (a) das System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \cos(t)x(t) - \sin(t)y(t) \\ \dot{y}(t) &= \sin(t)x(t) + \cos(t)y(t) \end{aligned}$$

und bestimmen Sie insbesondere ein Fundamentalsystem $X(t)$ mit $X(0) = I$ und die zugehörige Wronski-Determinante $\det(X(t))$.

(c) Zeigen Sie, dass jede Lösung von (b) periodisch ist und bestimmen Sie die Periode. Skizzieren Sie zum Anfangswert $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ die Bahnkurve $z(t) = (x(t), y(t))$ in der (x, y)-Ebene. Bestimmen Sie für die Lösung dieses Anfangswertproblems $|z(t)|^2$ und Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha \leq |z(t)|^2 \leq \beta$.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie, dass jede Lösung von (b) periodisch ist und bestimmen Sie die Periode. Skizzieren Sie zum Anfangswert $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ die Bahnkurve $z(t) = (x(t), y(t))$ in der (x, y)-Ebene. Bestimmen Sie für die Lösung dieses Anfangswertproblems $v(t) = |z(t)|^2$ und Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass $0 < \alpha \le v(t) \le \beta$ gilt.

2.2 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

A 2.2.1 (a) Überführen Sie $y'''(t) - y''(t) - y'(t) + y(t) \;=\; f(t)$ in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung (in Matrix–Vektor–Schreibweise).

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^t, \mathrm{e}^t)$, $(t\mathrm{e}^t, (1+t)\mathrm{e}^t, (2+t)\mathrm{e}^t)$ und $(\mathrm{e}^{-t}, -\mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^{-t})$ ein Fundamentalsystem für das in (a) ermittelte System bei $f = 0$ bilden.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie, dass

$$Y(t) \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^t & (1+t)\mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^t & (2+t)\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

ein Fundamentalsystem für das in (a) ermittelte lineare System bei $f = 0$ ist.

Alternative Formulierung mit $\boxed{\textbf{Vorgriff auf Stoff aus Abschnitt 2.4.2}}$:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'''(t) \;=\; f(t) - y(t) + y'(t) + y''(t)\ . \tag{2.2}$$

(a) Überführen Sie Gleichung (2.2) in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung.

(b) Geben Sie das in (a) bestimmte System in Matrix–Vektor–Schreibweise an.

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (2.2) mit $f \equiv 0$.

(d) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (2.2) mit $f(t) = 8\sin(t) + 6\mathrm{e}^{2t} + 4t^2 - 1$.

(e) Lösen Sie zu den Anfangswerten $y(0) = 2, y'(0) = 3, y''(0) = 4$ das Anfangswertproblem zur Differentialgleichung (2.2) jeweils mit $f(t)$ aus (c) und (d).

.... (aus der Ingenieur-Vorlesung – z.T. noch o.L.)

A 2.2.2 Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= (3x-1)y_1 - (1-x)y_2 + xe^{x^2} \\ y_2' &= -(x+2)y_1 + (x-2)y_2 - \tfrac{1}{2}e^{x^2}\ . \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie (durch Einsetzen bzw. mit der Wronski-Determinante), dass

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{x^2}\,, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 2-3x \\ 7+3x \end{pmatrix} e^{x^2-3x}$$

zwei linear unabhängige Lösungen des zugehörigen homogenen Systems sind.

(b) Berechnen Sie eine Partikulärlösung $\vec{y}_p$ des inhomogenen Systems und geben Sie die allgemeine Lösung dieses Systems an.

Alternative Formulierung:

(a) Zeigen Sie (durch Einsetzen bzw. mittels der Wronski-Determinante), dass

$$\vec{y}^{\,(1)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{x^2}\,, \qquad \vec{y}^{\,(2)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-3x \\ 7+3x \end{pmatrix} e^{x^2-3x}$$

zwei linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems sind, welches dem folgenden Differentialgleichungssystem zugrunde liegt:

$$y_1' \;=\; (3x-1)y_1 - (1-x)y_2 + xe^{x^2}, \;\; y_2' \;=\; -(x+2)y_1 + (x-2)y_2 - \frac{1}{2}e^{x^2}\;. \quad (2.3)$$

(b) Geben Sie eine Partikulärlösung $\vec{y}_p$ und anschließend die allgemeine Lösung von (2.3) an.

A 2.2.3 Überprüfen Sie (durch Einsetzen/mittels Wronski-Determinante), ob die Funktionen

(a) $y_1(x) \;=\; 3x^2,\; y_2(x) \;=\; 4x,\; y_3(x) \;=\; x^2-2x$

(b) $y_1(x) \;=\; x,\; y_2(x) \;=\; x^2-x,\; y_3(x) \;=\; \mathrm{e}^x - x$

jeweils ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$y''' \;-\; \frac{x^2}{x^2-2x+2}\,y'' \;+\; \frac{2x}{x^2-2x+2}\,y' \;-\; \frac{2}{x^2-2x+2}\,y \;=\; 0 \qquad (2.4)$$

bilden. Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

Leichte Variation von (b):

(a) Zeigen Sie (durch Einsetzen bzw. mit der Wronski-Determinante), dass die Funktionen $y_1 = x\,,\; y_2 = x^2\,,\; y_3 = e^x$ ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$y''' - \frac{x^2}{x^2-2x+2}\,y'' + \frac{2x}{x^2-2x+2}\,y' - \frac{2}{x^2-2x+2}\,y = 0$$

bilden.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

2.3 Die Reduktionsmethode von d'Alembert

. . . . (Reduktion der Dimension)

A 2.3.1 Sei $I =]0, \infty[$. Finden Sie auf I eine zu $\mathbf{x}(t)$ linear unabhängige Lösung von $\dot{\mathbf{y}}(t) = A(t)\mathbf{y}(t)$ mit

$$A(t) := \begin{pmatrix} \frac{2}{t} & \frac{1}{t^2} \\ -1 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \end{pmatrix} .$$

A 2.3.2 Bestimmen Sie mit dem Reduktionsverfahren von d'Alembert ein Fundamentalsystem für

$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{t+1}{t-1} \end{pmatrix} \mathbf{y}(t)$ auf $I = \ ]1, \infty[$. Zeigen Sie dazu: Eine Lösung ist $\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}$.

Alternative Formulierung:

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des homogenen linearen Systems

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{t+1}{t-1} \end{pmatrix} y$$

auf dem Intervall $(1, \infty)$, indem Sie nachprüfen, dass $y(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}$ eine Lösung ist, und anschließend die Dimension reduzieren.

. . . . (Legendre-Differentialgleichung)

A 2.3.3 Lösen Sie die Legendre-Differentialgleichung

$$(1-t^2)\ddot{x}(t) - 2t\dot{x}(t) + 2x(t) = 0 \tag{2.5}$$

auf $I =]-1, 1[$, indem Sie sie in ein System 1. Ordnung überführen und anschließend mittels der Reduktionsmethode von d'Alembert $\mathbf{u}(t) = (t, 1)^T$ zu einem Fundamentalsystem auffüllen.

Alternative Formulierung:

Lösen Sie die Legendre-Differentialgleichung $(1-t^2)\ddot{x}(t) - 2t\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$ auf $I =]-1, 1[$, indem Sie sie in ein System 1. Ordnung überführen und anschließend mittels der Reduktionsmethode von d'Alembert $\mathbf{u}(t) = (t, 1)^T$ zu einem Fundamentalsystem auffüllen.

. . . . (Reduktion der Ordnung)

A 2.3.4 (a) Gegeben seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $\frac{p^2}{4} - q = 0$ und die Differentialgleichung

$$y'' + py' + qy \;=\; 0. \tag{2.6}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode von d'Alembert die allgemeine Lösung von (2.6).

(b) Gegeben seien die Funktionen $p(t), q(t)$. Weiter sei y_1 eine (l.u.) Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + p(t)y' + q(t)y \;=\; 0. \tag{2.7}$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (2.7).

A 2.3.5 Reduzieren Sie die Ordnung der folgenden homogenen linearen Differentialgleichungen mit Hilfe der angegebenen nichttrivialen Lösung und geben Sie die allgemeine Lösung an.

(a) $(t+1)x'' + (t-1)x' - 2x = 0$ mit der nichttrivialen Lösung $\tilde{x}(t) = \mathrm{e}^{-t}$

(b) $x''' + \dfrac{3}{t}x'' + x' + \dfrac{1}{t}x = 0$ mit der nichttrivialen Lösung $\tilde{x}(t) = \dfrac{1}{t}$

Alternative Formulierung:

Reduzieren Sie die Ordnung der folgenden homogenen linearen Differentialgleichungen mit Hilfe der angegebenen nichttrivialen Lösung und geben Sie die allgemeine Lösung an.

(a) $(x+1)y'' + (x-1)y' - 2y = 0$ mit der nichttrivialen Lösung $\tilde{y}(x) = \mathrm{e}^{-x}$

(b) $y''' + \dfrac{3}{x}y'' + y' + \dfrac{1}{x}y = 0$ mit der nichttrivialen Lösung $\tilde{y}(x) = \dfrac{1}{x}$

A 2.3.6 Verwenden Sie die Methode der Reduktion der Ordnung (Methode von d'Alembert), um eine weitere Lösung der Differentialgleichung zu finden:

$$x^2y'' - (x - 0{,}1875)\,y = 0, \quad x > 0, \quad y_1(x) = \sqrt[4]{x}\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}.$$

A 2.3.7 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$ty''(t) - y'(t) + 4t^3y(t) \;=\; 0\,, \qquad t > 0 \tag{2.8}$$

unter der Kenntnis, dass $y_1(t) = \sin(t^2)$ bereits eine Lösung (überprüfen!) ist. Verwenden Sie beim Integrieren die übliche Substitution für rationale Funktionen in Sinus und Cosinus.

. . . . (Reduktion der Ordnung inklusive Variation der Konstanten/AWP)

A 2.3.8 (a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' - \cos(x)y' + \sin(x)y = 0$, indem Sie nachprüfen, dass $\tilde{y}(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$ eine Lösung ist, und anschließend die Ordnung reduzieren.

Alternative Formulierung:

Finden Sie zu $v(t) = \mathrm{e}^{\sin(t)}$ eine weitere linear unabhängige Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{u}(t) - \cos(t)\dot{u}(t) + \sin(t)u(t) \;=\; 0\,.$$

(b) Ermitteln Sie mittels Variation der Konstanten eine partikuläre Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' - \cos(x)y' + \sin(x)y = \sin(x)$.

A 2.3.9 (a) Bestimmen Sie auf $[2, \infty[$ ein Fundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung $(t-1)x'' - tx' + x = 0$, indem Sie nachprüfen, dass $x(t) = \mathrm{e}^t$ eine Lösung ist, und anschließend die Ordnung reduzieren. Berechnen Sie auch die Wronski-Determinante.

Bonus: **(+3 ZP)**
Erfüllt die Wronski-Determinate $W(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$?
Warum widerspricht Ihre Feststellung in diesem Fall nicht Satz 2.3 aus der Vorlesung?

(b) Lösen Sie das AWP $(t-1)\ddot{x}(t) - t\dot{x}(t) + x(t) \;=\; (t-1)^2\mathrm{e}^t,\;\; x(2) = \dot{x}(2) = \mathrm{e}^2 \;\; (t \geq 2)$, indem Sie auf das in (a) gefundene Fundamentalsystem zurückgreifen.

Alternative Formulierung:

Lösen Sie für $t \geq 2$ das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{array}{rcl} (t-1)\ddot{x}(t) - t\dot{x}(t) + x(t) & = & (t-1)^2\mathrm{e}^t \;, \\ x(2) & = & \mathrm{e}^2 \;, \\ \dot{x}(2) & = & \mathrm{e}^2 \;. \end{array}\right\} \tag{2.9}$$

.... **Alternative zusammenfassende Formulierung:**

Lösen Sie für $t \geq 2$ das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{array}{rcl} (t-1)\ddot{x}(t) - t\dot{x}(t) + x(t) & = & (t-1)^2\mathrm{e}^t \;, \\ x(2) & = & \mathrm{e}^2 \;, \\ \dot{x}(2) & = & \mathrm{e}^2 \;, \end{array}\right\} \tag{2.10}$$

indem Sie eine Lösung der homogenen Differentialgleichung „raten“ und anschließend die Ordnung reduzieren.

.... (aus der Ingenieur-Vorlesung – z.T. noch o.L.)

A 2.3.10 Finden Sie mit Hilfe der Reduktionsmethode eine zu $y_1(x) = x$ linear unabhängige Lösung der Differentialgleichung

$$y'' \;=\; \frac{y}{x^2} - \frac{y'}{x}, \quad x > 0$$

und geben Sie die allgemeine Lösung an. Führen Sie eine Probe durch.

Alternative Formulierung:

Die Differentialgleichung

$$y'' \;=\; \frac{y}{x^2} - \frac{y'}{x}\,, \quad x > 0$$

besitzt eine Lösung $y_1(x) = x$.

(a) Finden Sie mit der Reduktionsmethode eine zweite, linear unabhängige Lösung.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung an und machen Sie die Probe!

2.4 Lineare Systeme/DGLen mit konstanten Koeffizienten

2.4.1 Lineare Systeme mit konstanter System-Matrix

. . . . (Matrixwertige Funktionen)

A 2.4.1 Zeigen Sie, dass für die Matrizen $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ wirklich die Ungleichheit $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$ gilt.

A 2.4.2 Bestimmen Sie e^{tA} für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit (i) $A^2 = I_n$ (ii) $A^2 = A$ (iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

A 2.4.3 Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der matrixwertigen Exponentialfunktion

(a) $AB = BA \implies \mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B$ (b) $\det C \neq 0 \implies \mathrm{e}^{C^{-1}AC} = C^{-1}\mathrm{e}^A C$

(c) $\mathrm{e}^{\mathrm{diag}(\kappa_1,\ldots,\kappa_n)} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\kappa_1},\ldots,\mathrm{e}^{\kappa_n})$ (d) $\left(\mathrm{e}^A\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}$ (e) $\mathrm{e}^{(s+t)A} = \mathrm{e}^{sA}\cdot\mathrm{e}^{tA}$

A 2.4.4 Wie sieht die Matrix e^{tJ} zu einem Jordan-Block $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ aus?

. . . . (Homogene DGL-Systeme mit konstanten Matrizen)

A 2.4.5 Gegeben sei die konstante Matrix A.

(a) Geben Sie mit Hilfe der Exponentialfunktion für Matrizen ein Fundamentalsystem $X(t)$ mit $X(0) = I_n$ für das System $\dot{\mathbf{y}}(t) = A\mathbf{y}(t)$ an.

(b) Wie sieht das Fundamentalsystem aus (a) konkret aus, wenn A diagonalisierbar ist, also falls eine reguläre Matrix C mit $C^{-1}AC = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ existiert?

(c) Wie sieht das Fundamentalsystem aus (a) konkret aus, wenn A nicht diagonalisierbar ist, also falls lediglich eine reguläre Matrix C mit $C^{-1}AC = J$ mit einer Matrix in (nichttrivialer) Jordan-Normalform existiert?

A 2.4.6 Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass das System $\dot{\mathbf{y}}(t) = A\mathbf{y}(t)$ genau dann eine konstante Lösung ungleich der Nulllösung besitzt, wenn $\det A = 0$ gilt.

A 2.4.7 Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind $\sin(A)$ und $\cos(A)$ definiert durch

$$\sin(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1} \quad \text{und} \quad \cos(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}A^{2k}.$$

Zeigen Sie, dass $\cos(tA)$ (bzw. $\sin(tA)$) die Matrix-Differentialgleichung $X'' = -A^2X$ zum Anfangswert $X(0) = \mathrm{Id}$, $X'(0) = 0$ (bzw. $X(0) = 0$, $X'(0) = A$) löst.

A 2.4.8 Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und das Differentialgleichungssystem $\ddot{\mathbf{x}}(t) + A^2\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$.

(a) Definieren Sie $\sin(A)$ mit Hilfe der Exponentialreihe. Für welche A konvergiert $\sin(A)$?

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}(t) \;=\; \sin(tA)\mathbf{c},\;\; \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ fest, eine Lösung des Systems ist.

A 2.4.9 Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass jede Lösung der n-dimensionalen homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung $x'' = -Ax$ die Form

$$x(t) \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(\sqrt{\lambda_k}t)v_k + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k}t)v_k$$

mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}^n$ besitzt, wobei v_k Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_k ist.

.... (Konkrete homogene DGL-Systeme)

A 2.4.10 Finden Sie die allgemeine Lösung von $y'(x) = Ay(x)$ für $A := \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

A 2.4.11 Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{y}}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t)$.

A 2.4.12 Geben Sie die allgemeine reelle Lösung von $\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t)$ an.

A 2.4.13 Geben Sie die allgemeine reelle Lösung von $\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t)$ an.

Alternative Formulierung:

Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\dot{\mathbf{y}}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t)$ an.

A 2.4.14 Geben Sie die allgemeine reelle Lösung von $\dot{\mathbf{y}}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t)$ an.

A 2.4.15 Lösen Sie die Differentialgleichung $\dot{\mathbf{y}}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t)$.

.... (aus der MaBau-Vorlesung)

A 2.4.16 Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für

$$\vec{y}\,' \;=\; \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{5} & 0 \\ \sqrt{5} & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \vec{y}$$

und geben Sie die allgemeine Lösung an.

.... (Anfangswertprobleme mir konkret gegebenen konstanten Matrizen)

A 2.4.17 (a) Lösen Sie die Differentialgleichung $\dot{\mathbf{y}}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 5 & -2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -2 & 5 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t)$.

(b) Welche Lösung erfüllt $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$?

A 2.4.18 Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

. . . . (Konkrete inhomogene DGL-Systeme)

A 2.4.19 Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t) + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ t\mathrm{e}^{2t} \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie dazu mittels der Exponentialfunktion für Matrizen das ausgezeichnete Fundamentalsystem des homogenen Systems und verwenden Sie zur Berechnung einer partikulären Lösung des inhomogenen Systems die Methode der Variation der Konstanten.

A 2.4.20 (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \mathbf{b}$ im Fall $\mathbf{b} = 0$.

(b) Bestimmen Sie in (a) eine partikuläre Lösung für $\mathbf{b} = (3, 2, 1)^T$.

A 2.4.21 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $y'(x) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} y(x) + b(x)$ zunächst im homogenen Fall $b(x) := 0$ und dann für die Inhomogenität $b(x) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ -\mathrm{e}^x \end{pmatrix}$.

Alternative Formulierung inklusive alternativer Inhomogenität:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Systems $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{y} + f$ bei $f := 0$.

Wie lautet die Lösung im Fall $f := \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$?

Alternative Formulierung:

Wie lautet die allgemeine Lösung von $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{y} + f$ bei (i) $f := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und (ii) $f := \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$?

. . . . (Systeme höherer Ordnung)

A 2.4.22 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) &= -3x_1(t) + x_2(t) \\ \ddot{x}_2(t) &= x_1(t) - 3x_2(t) \end{aligned}$$

mit $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 0)$. **Hinweis:** Verwenden Sie den Ansatz $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathbf{v}$.

2.4.2 Lineare DGLen mit konstanten Koeffizienten

A 2.4.22 Beweisen Sie, dass bei $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ aus der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $t^{q-1}e^{\lambda t}$, $t^{q-1}e^{\overline{\lambda}t}$, $q = 1, \ldots, k$, auch die lineare Unabhängigkeit der Funktionen

$$t^{q-1}e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}\cos(\mathrm{Im}(\lambda)t),\ t^{q-1}e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}\sin(\mathrm{Im}(\lambda)t),\ \ q = 1, \ldots, k,$$

folgt.

. . . . (Umformung: System → DGL inkl. Lösen)

A 2.4.23 Lösen Sie das folgende System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - 2x_2(t), \end{aligned}$$

indem Sie dieses System auf eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung zurückführen.

. . . . (Umformung: DGL → System inkl. Lösen)

A 2.4.24 Formen Sie die Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) + y(t) \ = \ t^3 - t^2 + 2t + \pi \tag{2.11}$$

in ein System um und lösen Sie das zugehörige homogene System.

A 2.4.25 Für die Konstanten $a, b > 0$ sei die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) \ = \ a\dot{x}(t) + bx(t)$ gegeben.

(a) Überführen Sie diese lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung.

(b) Zeigen Sie, dass beim Ursprung ein Sattelpunkt des Systems vorliegt.

(c) Lösen Sie das System und geben Sie die allgemeine Lösung der Gleichung an.

. . . . (Umformung: DGL → System inkl. beide Lösungswege)

A 2.4.26 Überführen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 2y(t) \ = \ t \tag{2.12}$$

in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung und lösen Sie anschließend (unabhängig voneinander) sowohl das Systems erster Ordnung als auch die Differentialgleichung zweiter Ordnung. Geben Sie dabei jeweils die reellen Lösungen an.

. . . . (Anwendungen)

A 2.4.27 Betrachten Sie für $\omega, \rho > 0$ und $\rho^2 < 4\omega$ die Differentialgleichungen eines ungedämpften Oszillators

$$\text{(a)} \qquad \ddot{x} + \omega x \ = \ 0$$

und eines gedämpften harmonischen Oszillators

$$\text{(b)} \qquad \ddot{x} + \rho\dot{x} + \omega x \ = \ 0\ .$$

A 2.4.28 (a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung $x'' + 2\mu x' + \omega_0^2 x = 0$ im Fall $0 < \mu < \omega_0$ einer schwach gedämpften Schwingung.

(b) Ermitteln Sie in (a) die Lösungen zu den Anfangswerten $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, sowie zu $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

A 2.4.29 Die Bewegung zweier linearisierter Pendel der Masse m, die an Stäben der Länge l hängen und durch eine Feder mit Federkonstante k gekoppelt sind, kann mit der Schwerebeschleunigung g durch das lineare System

$$mx'' = -\frac{mg}{l}x - k(x-y) \qquad my'' = -\frac{mg}{l}y - k(y-x)$$

aus zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung modelliert werden. Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung dieses Systems.

.... (Lineare DGL höherer Ordnung)

A 2.4.30 (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $x'' = 2ax' + bx$ für Konstanten $a, b > 0$ mittels des Ansatzes $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$.

(b) Wie verhält sich $x(t)$ asymptotisch für $t \to \pm\infty$?

(c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung von $x'' = 2ax' + bx + \mathrm{e}^{at}$ mittels Variation der Konstanten.

.... (Homogene DGL mit konstanten Koeffizienten)

A 2.4.31 Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von $\quad x(t) - \frac{1}{2}\ddot{x}(t) + \frac{1}{16}x^{(4)}(t) = 0.$

A 2.4.32 Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von $\quad x(t) = x^{(5)}(t) + x^{(4)}(t) - \dot{x}(t).$

A 2.4.33 Wie lauten die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen?

(a) $3y'' - 24y' + 48y = 0$, (b) $y^{(4)} - y = 0$, (c) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$

A 2.4.34 Wie lauten die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen?

(a) $2y'' - 16y' + 32y = 0$, (b) $y''' + y' = 0$, (c) $y''' + y = 0$.

A 2.4.35 Bestimmen Sie alle reellen Lösungen von

$$x''''(t) + 4x'''(t) + 14x''(t) + 20x'(t) + 25x(t) = 0 \tag{2.13}$$

Hinweis: Das charakteristische Polynom besitzt eine doppelte komplexe Nullstelle.

.... (Inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten)

A 2.4.36 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $\quad \ddot{x}(t) = \dot{x}(t) + 2x(t) + \cos(t) + \sin(t).$

A 2.4.37 Lösen Sie die Differentialgleichungen

(a) $y''' + 2y'' + y' = 2\sin(t)$, (b) $8y'' + 6y' + y = 2t + 3$, (c) $y''' + 4y' = 4t - 8$.

A 2.4.38 Finden Sie die allgemeine Lösung von

(a) $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2t}$, (b) $y'' - 3y' - 4y = 2\sin(t)$.

Alternative Formulierung:

Bestimmen Sie je die allgemeine reelle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung ...

A 2.4.39 Finden Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

(a) $y'' + y' + 4y = 2\sinh(t)$; (b) $y'' + 9y = t^2 + \mathrm{e}^{3t} + 6$.

A 2.4.40 Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung von

$$x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) \;=\; b(t) \tag{2.14}$$

für $b(t) = 0$ sowie mit den Inhomogenitäten $b(t) = 17\sin(2t)$ und $b(t) = 4\mathrm{e}^{-t}\sin(2t)$.

.... (Anfangswertprobleme)

A 2.4.41 Lösen Sie das Anfangswertproblem $x^{(3)}(t) - 6\ddot{x}(t) + 12\dot{x}(t) - 8x(t) = 0$

zu den Anfangswerten $x(1) = 0,\ \dot{x}(1) = 1,\ \ddot{x}(1) = 2.$

Alternative Formulierung:
Lösen Sie die homogene lineare Differentialgleichung $x'''(t) - 6x''(t) + 12x'(t) - 8x(t) = 0$
zu den Anfangswerten $x(1) = 0$, $x'(1) = 1$, $x''(1) = 2$.

A 2.4.42 Lösen Sie das Anfangswertproblem $\ddot{x}(t) + 8\dot{x} + 17x(t) - 51 = 0$

zu den Anfangswerten $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1.$

A 2.4.43 Lösen Sie das Anfangswertproblem $8y'' + 6y' + y \;=\; 2x + 5$

zu den Anfangswerten $y(0) \;=\; y'(0) \;=\; 0.$

A 2.4.44 Lösen Sie das Anfangswertproblem $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$

zu den Anfangswerten $y(0) = 1,\ y'(0) = y''(0) = 0.$

.... (Kombi: Homogene/Inhomogene DGL inkl. Anfangswertproblem)

A 2.4.45 (a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung von $y''' + y'' + y' + y = f$ im homogenen Fall $f := 0$.

(b) Wie lautet die allgemeine Lösung der in (a) gegebenen Differentialgleichung im inhomogenen Fall $f(t) := 4\mathrm{e}^t + 4\mathrm{e}^{-t}$?

A 2.4.46 Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung

$$y''' \;-\; 3y'' + 2y' \;=\; \cos x\ . \tag{2.15}$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und seine Nullstellen. Leiten Sie daraus ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung her.

(b) Berechnen Sie eine Partikulärlösung und finden Sie mit ihrer Hilfe eine Darstellung für die allgemeine Lösung von (2.15).

(c) Bestimmen Sie die Lösung von (2.15), falls die Anfangswerte $(y(0), y'(0), y''(0)) = (0, 1, 2)$ vorgegeben sind.

Alternative Formulierung mit Variation:
Berechnen Sie eine Partikulärlösung der Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x\,.$$

Verwenden Sie dabei, dass die Funktionen $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ und $y_2(x) = \mathrm{e}^{2x}$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung bilden.

.... (Homogene Euler-Differentialgleichungen)

A 2.4.47 Lösen Sie die folgenden homogenen EULERschen Differentialgleichungen:

(a) $x^2y'' - 2y = 0\,,\quad (x > 0)\,,$ (b) $x^3y''' + 3x^2y'' - 2xy' - 2y = 0\,,\quad (x > 0)\,.$

A 2.4.48 Lösen Sie die Euler-Differentialgleichung $t^3x^{(3)}(t) - 3t^2\ddot{x}(t) + 6t\dot{x}(t) - 6x(t) \;=\; 0.$

Alternative Formulierung:

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung von $t^3x'''(t) - 3t^2x''(t) + 6tx'(t) - 6x(t) = 0.$

A 2.4.49 Lösen Sie die Euler-Differentialgleichung $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0,\ x > 0.$

A 2.4.50 Lösen Sie die Euler-Differentialgleichung $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0,\ x > 0.$

.... (Inhomogene Euler-Differentialgleichungen)

A 2.4.51 Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung von $t^4x''(t) - 4t^3x'(t) + 6t^2x(t) = -12t - 20.$

Leichte Variation inkl. anderer Inhomogenität:

Lösen Sie die Differentialgleichung $-6t^2x(t) + 4t^3\dot{x}(t) - t^4\ddot{x}(t) \;=\; t + 1.$

Kapitel 3

Qualitative Theorie

3.1 Grundlegende Begriffe

A 3.1.1 Sei Φ der vom autonomen System

$$x' = f(x) \tag{3.1}$$

generierte lokale Fluss und $x_0 \in \Omega$ ein Punkt, für den es ein $T > 0$ mit $\Phi(t+T, x_0) = \Phi(t, x_0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gibt.
Zeigen Sie: Kann man $T > 0$ beliebig klein wählen, dann ist der Orbit durch x_0 eine Ruhelage, ansonsten gibt es ein minimales $T > 0$ mit der obigen Eigenschaft und die Lösung durch x_0 ist periodisch mit Periode T.

A 3.1.2 Zeigen Sie: Existiert für $t \geq t_0$ die Lösung $\mathbf{y}$ eines autonomen Differentialgleichungssystems mit auf einer offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetigen rechten Seite f und besitzt $\mathbf{y}$ für $t \to \infty$ einen in G gelegenen Grenzwert $\mathbf{a} = \lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{y}(t)$, so ist $\mathbf{a}$ ein kritischer Punkt.

A 3.1.3 Skizzieren Sie Beispiele von ebenen Vektorfeldern f, die eine stabile, aber nicht attraktive (bzw. eine attraktive, aber nicht stabile) Ruhelage besitzen.

A 3.1.4 Finden Sie die stationären Punkte und untersuchen Sie deren Typus sowie Stabilität für

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \delta & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t) + \begin{pmatrix} \alpha \\ -\gamma \end{pmatrix} \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0) \qquad \text{und lösen Sie das System.}$$

3.2 Lineare Flüsse

A 3.2.1 Zeigen Sie, dass zwei lineare Flüsse $\exp(tA)$ und $\exp(tB)$ genau dann C^1-äquivalent sind, wenn sie linear äquivalent sind.

A 3.2.2 Diskutieren Sie die Stabilität des Systems $\dot{x} = Ax$ im Fall $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ in Abhängigkeit der möglichen Eigenschaften der Eigenwerte λ, μ bzw. der Jordan-Normalform

$$J \;=\; S^{-1}AS\;. \tag{3.2}$$

Geben Sie jeweils die allgemeine Lösung in den neuen Koordinaten $y = h(x) := S^{-1}x$ an.

Bem.: Bezeichnet $B = S^{-1}AS$ die Jordansche Normalform von A, dann ist der Fluss $\exp(tA)$ zum Fluss $\exp(tB)$ topologisch äquivalent, indem man die Zeit unverändert lässt ($a = 1$) und als topologische Konjugation die lineare Abbildung $h(x) := S^{-1}x$ wählt, denn es gilt

$$S^{-1}\exp(tA)x \;=\; \exp(tB)S^{-1}x\;. \tag{3.3}$$

Alternative Formulierung für den regulären Fall:

Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0\;. \tag{3.4}$$

Führen Sie eine qualitative Diskussion über die beim System (3.4) möglichen Phasenportraits.

A 3.2.3 Finden Sie die kritischen Punkte und untersuchen Sie deren Typus sowie Stabilität für das System

$$\dot{\mathbf{y}}(t) \;=\; \begin{pmatrix}3 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\mathbf{y}(t)$$

und lösen Sie das System. Bestimmen Sie weiterhin e^{tA} für $A \;=\; \begin{pmatrix}3 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

A 3.2.4 Skizzieren Sie jeweils die Phasenportraits (inklusive Charakterisierung der Ruhelagen) und bestimmen Sie jeweils mittels e^{tA} die allgemeine reelle Lösung für die Systeme

$$\dot{\mathbf{y}}(t) \;=\; A_k\mathbf{y}(t) \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{y}(t) \;=\; \begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix} \qquad (k = 1,\dots,5)$$

und

$$A_1 \;=\; \begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix},\quad A_2 \;=\; \begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 0\end{pmatrix},\quad A_3 \;=\; \begin{pmatrix}0 & -2\\ 8 & 0\end{pmatrix},\quad A_4 \;=\; \begin{pmatrix}8 & 1\\ -4 & 4\end{pmatrix},\quad A_5 \;=\; \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Alternative verkürzte Formulierung für die Matrizen A_2, A_4, A_5 :

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der ebenen homogenen linearen Systeme

(a) $x' = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 0\end{pmatrix}x$, (b) $x' = \begin{pmatrix}8 & 1\\ -4 & 4\end{pmatrix}x$, (c) $x' = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}x$.

Klassifizieren Sie die Ruhelage 0 und skizzieren Sie den Fluß in der Nähe von 0.

A 3.2.5 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems $\dot{\mathbf{y}}(t) \;=\; \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\mathbf{y}(t).$

Bonus: Besitzt das System einen stationären Punkt? Falls ja, welchen?

3.3 Linearisierung nichtlinearer Flüsse

A 3.3.1 **Linearisierung autonomer Systeme**: Sei $D \in \mathbb{R}^n$ offen mit $\mathbf{0} \in D$. Weiter sei $\mathbf{f} \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ mit $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und bezeichne A die Jacobi-Matrix von $\mathbf{f}$ an der Stelle $\mathbf{0}$. Dann nennen wir $\dot{\mathbf{y}}(t) = A\mathbf{y}(t)$ die **linearisierte Gleichung** des autonomen Systems $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t))$.

Der Nullpunkt wird **hyperbolische Ruhelage** von $\mathbf{f}$ genannt, falls $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ gilt und alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix von $\mathbf{f}$ an der Stelle $\mathbf{0}$ einen Realteil $\neq 0$ besitzen.

(a) Zeigen Sie: Die stationäre Lösung $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ ist für das oben definierte autonome System asymptotisch stabil, wenn sie es für die linearisierte Gleichung ist.

(b) Zeigen Sie: Die stationäre Lösung $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ ist für das oben definierte autonome System sicher instabil, wenn die Jacobi-Matrix von $\mathbf{f}$ an der Stelle $\mathbf{0}$ mindestens einen Eigenwert λ mit $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ besitzt.

(c) Überprüfen Sie, ob der Nullpunkt bei den autonomen Systemen (3.4) eine hyperbolische Ruhelage ist.

A 3.3.2 Gegeben seien $v_k \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ mit $v_k(\mathbf{0}) = 0,\ k = 1, 2, 3$, und das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -x(t) - y(t) + z(t) + v_1(x(t), y(t), z(t)) \cdot x(t) \\
\dot{y}(t) &= x(t) - 2y(t) + 2z(t) + v_2(x(t), y(t), z(t)) \cdot y(t) \\
\dot{z}(t) &= x(t) + 2y(t) + z(t) + v_3(x(t), y(t), z(t)) \cdot z(t)
\end{aligned}$$

Überprüfen Sie die Nulllösung auf Stabilität.

A 3.3.3 (a) Überführen Sie die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = ay' + by$ für Konstanten $a, b > 0$ in ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung.

Zeigen Sie, dass der Ursprung für das System ein instabiler Sattelpunkt ist.

(b) Beweisen Sie, dass das zu $y'' = ay' + by + f(y)$ gehörige System für Konstanten $a, b > 0$ und eine differenzierbare Funktion f im Ursprung einen instabilen Sattel besitzt, falls $f(0) = 0 = f'(0)$ gilt.

A 3.3.4 (a) Überführen Sie die Gleichung zweiter Ordnung $y'' = -y' - y - \sinh(y)$ in das zugehörige System erster Ordnung, und ermitteln Sie die Linearisierung dieses Systems im Nullpunkt.

(b) Ist die Nulllösung aus (a) asymptotisch stabil?

Alternative Formulierung:

Gegeben sei die Gleichung zweiter Ordnung $y'' = -y' - y - \sin(y)$.

(a) Überführen Sie die Gleichung in das zugehörige System erster Ordnung.

(b) Ermitteln Sie die Linearisierung dieses Systems im Nullpunkt und lösen Sie dieses lineare System.

(c) Ist die Ruhelage 0 des nichtlinearen Systems asymptotisch stabil?

A 3.3.5 Finden Sie alle Ruhelagen und diskutieren Sie die Nulllösung als Ruhelage (Stabilität, Typus) für die folgenden Systeme

(a) $\begin{cases} \dot{x}(t) &= \ln(1 + y(t) - (x(t))^3) \\ \dot{y}(t) &= 3x(t) \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x}(t) &= -5y(t) \\ \dot{y}(t) &= (1 + y(t))\sin(x(t)) \end{cases}$

A 3.3.6 Überprüfen Sie, ob es sich bei dem autonomen System

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} -y_1^2 - y_1 y_2 \\ -0.75 y_1 y_2 - 0.25 y_2^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},$$

um ein gestörtes lineares System handelt.

A 3.3.7 Die Bewegung eines schwingenden Pendels wird durch die Differentialgleichung

$$ml^2 \frac{d\theta}{dt^2} = -cl\frac{d\theta}{dt} - mgl\sin(\theta)$$

beschrieben. Formen Sie diese Differentialgleichung in ein autonomes System der Gestalt $\dot{\mathbf{u}}(t)$ um und bestimmen Sie dessen Ruhelagen. Zeigen Sie, dass es sich in der Nähe des Ursprungs um ein gestörtes lineares System handelt. Lassen sich Aussagen über die Stabilität und den Typ der Ruhelage 0 treffen? Wie verhält es sich im Fall $c = 0$?

Leichte Variation:

Bestimmen Sie für $m, l, g > 0$ und $c \geq 0$ alle Ruhelagen des zu $m\theta'' + \frac{c}{l}\theta' + \frac{mg}{l}\sin(\theta) = 0$ gehörigen ebenen Systems

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\frac{g}{l}\sin(x) - \frac{c}{ml} y \end{pmatrix}$$

und diskutieren Sie mittels des Prinzips der linearisierten Stabilität/Instabilität sowie des Satzes von Hartman-Grobman den Typ dieser Ruhelagen (wobei sie annehmen dürfen, dass sogar eine C^1-Äquivalenz zur Linearisierung vorliegt).

A 3.3.8 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von den Parametern $\beta, \rho, \sigma > 0$ die Ruhelagen der Lorenz-Gleichungen

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ \rho x - y - xz \\ xy - \beta z \end{pmatrix}$$

und überprüfen Sie deren Stabilität mittels des Prinzips der linearisierten Stabilität/Instabilität.

A 3.3.9 Beweisen Sie: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, dann ist der lokale Fluss zu $x' = f(x)$ in der Nähe jedes Punktes x_0 mit $f(x_0) \neq 0$ zum vom konstanten Vektorfeld $x' = (1, 0, \ldots, 0)$ nahe 0 erzeugten Fluss C^1-äquivalent.

3.4 Lyapunov-Funktionen

A 3.4.1 Beweisen Sie die folgende Umkehrung des Stabilitätssatzes von Lyapunov:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Ist 0 eine exponentiell stabile Ruhelage des von $x' = f(x)$ generierten lokalen Flusses Φ, dann gibt es ein genügend kleines $r > 0$ und Konstanten $\alpha, c, \tilde{c} > 0$, so dass durch

$$V(x) := \int_0^\infty |\Phi(s,x)|^2 \, ds \tag{3.5}$$

eine Lyapunov-Funktion zu $x' = f(x)$ auf $B_r(0)$ mit

$$\dot{V}(x) \leq -2\alpha V(x) \tag{3.6}$$

und

$$c\|x\|^2 \leq V(x) \leq \tilde{c}\|x\|^2 \tag{3.7}$$

für $x \in B_r(0)$ definiert wird.

A 3.4.2 Zeigen Sie:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, $V\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion für (3.1), $A := V^{-1}(]-\infty, 0]) \subset \Omega$ kompakt und nicht leer. Dann ist A positiv invariant und stabil.

.... (**Gradientensysteme**)

A 3.4.3 Zeigen Sie, dass die Linearisierung eines Gradientensystems in einer Ruhelage nur reelle Eigenwerte besitzt.

A 3.4.4 Zeigen Sie:

(a) Für f stetig differenzierbar ist (3.1) genau dann ein Gradientensystem, wenn gilt:

$$\forall j,k = 1,\ldots,n\colon \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) \,.$$

(b) Die Funktion V ist eine Lyapunov-Funktion für das Gradientensystem $f(x) = -(\operatorname{grad} V)(x)$. Desweiteren gilt $\dot{V}(x) = 0$ nur in den Punkten x mit $(\operatorname{grad} V)(x) = 0$.

A 3.4.5 Zeigen Sie, dass die folgenden ebenen Systeme Gradientensysteme sind, und finden Sie die Ruhelagen. Welche der Ruhelagen sind asymptotisch stabil?

(a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - 2x^3 \\ x - 2y \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(x^2+y^2-1) \\ -y(x^2+y^2-1) \end{pmatrix}$

.... (**Hamilton-Systeme**)

A 3.4.6 Zeigen Sie, dass die Linearisierung eines Hamiltonschen Systems in einer Ruhelage mit einem Eigenwert λ auch immer $-\lambda$ als Eigenwert besitzt.

A 3.4.7 Bestimmen Sie die Ruhelagen des durch

$$H(x_1,x_2,y_1,y_2) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + x_2\left(x_1^2 - \frac{1}{3}x_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right) \tag{3.8}$$

gegebenen Hamiltonschen Systems auf $\mathbb{R}^4$. Ist eine der Ruhelagen stabil?

A 3.4.8 Bestimmen Sie alle Ruhelagen des ebenen Systems

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 - x^3 \\ (x^2 - 1)y \end{pmatrix}$$

und überprüfen Sie, ob man das Prinzip der linearisierten Stabilität/Instabilität anwenden kann. Finden Sie in den Ruhelagen, wo dies nicht der Fall ist, Lyapunov-Funktionen der Form $V(x, y) = ax^2 + by^2$ mit $a, b > 0$ und im Fall der asymptotischen Stabilität eine möglichst große Teilmenge des Einzugsbereiches.

Alternative verkürzte Formulierung (ohne Einzugsbereich):

Bestimmen Sie alle Ruhelagen des ebenen Systems $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 - x^3 \\ (x^2 - 1)y \end{pmatrix}$

und überprüfen Sie, ob man das Prinzip der linearisierten Stabilität/Instabilität anwenden kann. Finden Sie in den Ruhelagen, wo dies nicht der Fall ist, Lyapunov-Funktionen der Form $V(x, y) = ax^2 + by^2$ mit $a, b > 0$.

A 3.4.9 (a) Bestimmen Sie die Ruhelagen des Systems

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f(x, y) := \begin{pmatrix} -x^3 + y \\ -x - y^5 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

und zeigen Sie, dass man das Prinzip der linearisierten Stabilität nicht anwenden kann.

(b) Finden Sie für das System (3.9) eine Lyapunov-Funktion der Form $V(x, y) := ax^2 + by^2$ mit $a, b > 0$ und zeigen Sie mit Hilfe von V die asymptotische Stabilität der gefundenen Ruhelagen.

A 3.4.10 Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen mit $g(0) = 0$ und $g(x) \neq 0$ für $x \neq 0$, und bezeichne F, G die Stammfunktionen zu f, g mit $F(0) = 0 = G(0)$.

(a) Zeigen Sie, dass man die **Liénard-Gleichung** $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$ in das ebene System $x' = y - F(x)$, $y' = -g(x)$, umschreiben kann.

(b) Diskutieren Sie die Stabilität der Ruhelage $(0, 0)$ des Systems im Fall $f(0) \neq 0$.

(c) Geben Sie Bedingungen an, unter denen $V(x, y) := G(x) + \frac{1}{2}y^2$ eine Lyapunov-Funktion des Systems ist und gewinnen Sie so Bedingungen für die Stabilität der Ruhelage $(0, 0)$ im Fall $f(0) = 0$ bzw. $g'(0) = 0$.

Kapitel 4

Rand- und Eigenwertprobleme

4.1 Sturm-Liouvillesche Randwertprobleme

A 4.1.1 **Bemerkung:**

Jede lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$ mit stetigen Koeffizientenfunktionen a_1, a_2 und einer stetigen Inhomogenität b auf einem Intervall $[a, b]$ kann man in die selbstadjungierte Form

$$Ly := (p(x)y')' + q(x)y = g \tag{4.1}$$

mit stetigen Funktionen p, q, g auf $[a, b]$ umschreiben, wobei p stetig differenzierbar ist und $p > 0$ auf $[a, b]$ erfüllt.

Zeigen Sie, dass $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$ durch Multiplikation mit $p(x) := \mathrm{e}^{\int a_1(x)\,dx} > 0$ in die Form (4.1) übergeht.

A 4.1.2 **Einteilung Randwertbedingungen**: Für (reelle) lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf dem Intervall $I = [a, b]$ nennen wir die Randwertbedingungen im Fall

$$\left.\begin{aligned} u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) &= g(x) \\ u(a) &= \eta_1 \\ u(b) &= \eta_2 \end{aligned}\right\} \quad \textbf{erster Art}$$

$$\left.\begin{aligned} u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) &= g(x) \\ u'(a) &= \eta_1 \\ u'(b) &= \eta_2 \end{aligned}\right\} \quad \textbf{zweiter Art}$$

$$\left.\begin{aligned} u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) &= g(x) \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) &= \eta_1 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) &= \eta_2 \end{aligned}\right\} \quad \textbf{dritter Art (Sturmsche Randbed.)}$$

$$\left.\begin{aligned} u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) &= g(x) \\ u(a) &= u(b) \\ u'(a) &= u'(b) \end{aligned}\right\} \quad \textbf{periodische Randbedingung}$$

Sturmsches RWP (Jacques Charles François Sturm (1803-1855)):
Gegeben seien $p \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ mit $p > 0$ und $q, g \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ sowie $\alpha := (\alpha_1,\alpha_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $\beta := (\beta_1,\beta_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\alpha\|, \|\beta\| > 0$. Dann heißt für ein $u \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ das Randwertproblem

$$\left.\begin{array}{rcllcl} Lu(x) & := & (p(x)u'(x))' + q(x)u(x) & = & g(x) \\ R_1u(x) & := & \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a)u'(a) & = & \eta_1 \\ R_2u(x) & := & \beta_1 u(b) + \beta_2 p(b)u'(b) & = & \eta_2 \end{array}\right\} \quad \textbf{Sturmsche Randwertaufgabe}$$

Das zugehörige **homogene Randwertproblem** ist dann $\boxed{Lu = 0,\ R_1u = 0,\ R_2u = 0}$. Es gilt

(i) Jede (endliche) Linearkombination von Lösungen u_k des zugehörigen homogenen Randwertproblems ist wiederum Lösung der homogenen Randwertaufgabe.

(ii) Die Differenz zweier Lösungen $v_1,\ v_2$ der (inhomogenen) Sturmschen Randwertaufgabe ist Lösung des zugehörigen homogenen Randwertproblems.

(iii) Ist u eine Lösung der homogenen Aufgabe und v Lösung der inhomogenen Aufgabe, dann ist auch $u + v$ Lösung der inhomogenen Aufgabe.

(iv) Ist v_* eine fest gewählte Lösung der inhomogenen Aufgabe, dann besitzt jede Lösung v der inhomogenen Aufgabe die Gestalt $v = v_* + u$, wobei u alle Lösungen der homogenen Aufgabe durchläuft.

Für die **inhomogene Randwertaufgabe** sucht man zunächst $\varphi \in C^2([a,b],\mathbb{R})$, welches die Randbedingungen $R_k\varphi(x) = \eta_k$ $(k = 1,2)$ erfüllt, und verwendet den Ansatz $u(x) = \varphi(x) + v(x)$ und erhält wegen $g = Lu = L\varphi + Lv$ und $\eta_k = R_ku = R_k\varphi + R_kv$ dann in $v(x)$ das **halbhomogene Randwertproblem**

$$Lv(x) \;=\; h(x)\ , \qquad R_1v(x) \;=\; R_2v(x) \;=\; 0 \qquad \text{mit} \qquad h(x) = g(x) - L\varphi(x)\ . \tag{4.2}$$

(a) Unter welchen Bedingungen an η_1, η_2 (bzw. auch $\alpha_i, \beta_i,\ i = 1,2$) besitzt das Randwertproblem (erster, zweiter und dritter Art) zur Differentialgleichung $u''(x) = 0$ eine eindeutige Lösung?

(b) Gegeben sei das Sturmsche Randwertproblem (s.o.). Zeigen Sie (i) und (ii).

(c) Zeigen Sie die Äquivalenz von $Lu(x) = g(x)$ zu einer inhomogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, indem Sie jeweils die eine in die andere Darstellung überführen.

(d) Zeigen Sie die **Lagrange-Identität**

$$(vLu - uLv)(x) \;=\; \Big(p(x)\big[u'(x)v(x) - v'(x)u(x)\big]\Big)'\ .$$

(e) Zeigen Sie: Erfüllen u, v die homogenen Randbedingungen $R_ku = R_kv = 0,\ k = 1,2$, dann gilt

$$\int_a^b (vLu - uLv)(x)dx \;=\; 0\ . \tag{4.3}$$

(f) Für welche $p \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ gilt (4.3) im Falle periodischer Randbedingungen an u und v?

(g) Drücken Sie die Beziehung (4.3) mit Hilfe des Innenproduktes $\boxed{(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx}$ aus.

(h) Überführen Sie $Lu = g$ in ein lineares System erster Ordnung. Wie lauten nun $R_1u,\ R_2u$?

Alternative Formulierung zu (e,f):

Sei p eine stetig differenzierbare und q eine stetige Funktion auf $[a,b]$. Sei L der durch $Ly := (p(x)y')' + q(x)y$ definierte lineare Differetialoperator zweiter Ordnung, und sei R der für $(\alpha_1,\alpha_2) \neq (0,0)$, $(\beta_1,\beta_2) \neq (0,0)$ durch $R_1y := \alpha_1 y(a) + \alpha_2 p(a)y'(a)$ und $R_2y := \beta_1 y(b) + \beta_2 p(b)y'(b)$ definierte Randwertoperator.

(a) Beweisen Sie $\displaystyle\int_a^b \tilde{y} \cdot Ly\,dx = \int_a^b y \cdot L\tilde{y}\,dx$ für alle $y, \tilde{y} \in C^2([a,b])$ mit $Ry = 0 = R\tilde{y}$.

(b) Überprüfen Sie, dass die in (a) genannte Gleichung auch unter periodischen Randbedingungen gültig ist, d.h. wenn man R durch $R_1y := y(a) - y(b)$, $R_2y := y'(a) - y'(b)$, ersetzt und $p(a) = p(b)$ annimmt.

A 4.1.3 (a) Bestimmen Sie die GREENsche Funktion für die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} u''(x) + \frac{1}{4x^2}u(x) = 0 & \text{in } [1,2] \\ u(1) = u(2) = 0. \end{cases}$$

(b) Lösen Sie mittels (a) die inhomogene Randwertaufgabe $\begin{cases} u''(x) + \frac{1}{4x^2}u(x) = x^{-\frac{3}{2}} & \text{in } [1,2] \\ u(1) = u(2) = 0. \end{cases}$

A 4.1.4 Auf $[0,M]$ sei die Differentialgleichung $u''(x) - 4u(x) = f(x)$ gegeben.

(a) Überprüfen Sie, ob die RWA für $f \equiv 0$ mit den folgenden Randbedingungen eindeutig lösbar ist:

$$\begin{aligned} R_1u(x) &:= 2u(0) - u'(0) + 2\mathrm{e}^{2M}u'(M) &= \mathrm{e}^{2M} \\ R_2u(x) &:= 2u(M) + u'(M) &= 0 \end{aligned}$$

(b) Überprüfen Sie, ob die RWA für $f \equiv 1$ mit den folgenden Randbedingungen eindeutig lösbar ist:

$$\begin{aligned} R_1u(x) &:= u(0) &= 0 \\ R_2u(x) &:= u(M) &= 0 \end{aligned}$$

A 4.1.5 Seien $\alpha, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$. Auf dem Intervall $[0,1]$ sei die folgende Randwertaufgabe gegeben:

$$\left.\begin{aligned} u''(x) + 2u'(x) + u(x) &= g(x) \\ u(0) - u(1) &= \eta_1 \\ \alpha u'(0) + 2u(1) &= \eta_2 \end{aligned}\right\}$$

Für welche Werte von α ist die Randwertaufgabe für beliebige $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ und beliebige auf dem Intervall $[0,1]$ stetige Funktionen $g(x)$ eindeutig lösbar?

A 4.1.6 Sei $A(x)$ eine $(n \times n)$-matrixwertige Funktion. Wann ist das folgende RWP eindeutig lösbar?

$$\left.\begin{aligned} L\mathbf{u}(x) &= \dot{\mathbf{u}}(x) - A(x)\mathbf{u}(x) &&= \mathbf{h}(x) \\ R_j\mathbf{u}(x) &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\alpha_{jk}u_k(a) + \beta_{jk}u_k(b)\Big) &&= \eta_j \quad (j = 1,\dots,k) \end{aligned}\right\}$$

A 4.1.7 Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$\left\{\begin{array}{rcl@{\quad}rcr} u_1'(x) &=& 7u_1(x)+4u_3(x), & u_1(0)-u_1(b) &=& 2\\ u_2'(x) &=& 8u_1(x)+3u_2(x)+8u_3(x), & u_2(0)+2u_2(b) &=& -1\\ u_3'(x) &=& -8u_1(x)-5u_3(x), & u_3(0)-u_3(b) &=& 1 \end{array}\right.$$

(a) Formulieren sie das Randwertproblem in Matrixschreibweise und bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

(b) Für welche $b \neq 0$ ist die Randwertaufgabe eindeutig lösbar?

Tipp: Schreiben Sie die Randbedingung als $B_0\mathbf{u}(0) + B_b\mathbf{u}(b) = \mathbf{c}$.

A 4.1.8 Gegeben seien $p \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ mit $p > 0$ und $\alpha := (\alpha_1,\alpha_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $\beta := (\beta_1,\beta_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\alpha\|, \|\beta\| > 0$. Zeigen Sie, dass das homogene Randwertproblem

$$(p(x)u'(x))' \;=\; 0 \qquad \text{mit RB} \qquad \left.\begin{array}{rcl} \alpha_1 u(a)+\alpha_2 p(a)u'(a) &=& 0\\ \beta_1 u(b)+\beta_2 p(b)u'(b) &=& 0 \end{array}\right\} \tag{4.4}$$

im Fall $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ nur die triviale Lösung und im Fall $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ unendlich viele Lösungen besitzt.

A 4.1.9 Gegeben sei die Sturmsche Randwertaufgabe $\quad Lu(x) = g(x),\ R_1u(x) = \eta_1,\ R_2u(x) = \eta_2.$ Zeigen Sie: Die inhomogene Randwertaufgabe ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die homogene Randwertaufgabe $Lu(x) = 0,\ R_1u(x) = 0,\ R_2u(x) = 0$ nur die triviale Lösung $u \equiv 0$ besitzt. Dies ist äquivalent zu

$$\det\begin{pmatrix} R_1u_1 & R_1u_2\\ R_2u_1 & R_2u_2\end{pmatrix} \neq 0$$

für ein Fundamentalsystem $\{u_1,u_2\}$ von $Lu = 0$.

A 4.1.10 Gegeben sei $f \in C^1([1,\mathrm{e}],\mathbb{R})$. Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist die Randwertaufgabe

$$x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) \;=\; f(x)\,, \qquad y(1) \;=\; 0\,, \qquad y(\mathrm{e}) - cy'(\mathrm{e}) \;=\; 0$$

eindeutig lösbar?

A 4.1.11 Lösen Sie die folgenden Randwertaufgaben:

(a) $u''(x) - u(x) = 0$, $u(0) = 1$, $u(1) = 2$,

(b) $u''(x) + x^2 = 0$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$,

(c) $u''(x) - u'(x) - 2u = 0$, $u(0) + u'(0) = 1$, $u(1) = 0$.

Alternative Formulierung zu (a):

Lösen Sie $u''(x) - u(x) = 0$ unter den Randbedingungen $u(0) = 1$, $u(1) = 2$.

Alternative Formulierung zu (c):

Lösen Sie $u''(x) - u'(x) - 2u = 0$ unter den Randbedingungen $u(0) + u'(0) = 1$, $u(1) = 0$.

A 4.1.12 Gegeben seien die beiden „halbhomogenen“ Randwertaufgaben

$$\left.\begin{array}{rcl} u''(x) &=& f(x)\\ u(0) &=& 0\\ u(1) &=& 0 \end{array}\right\} \quad (1) \qquad \text{und} \qquad \left.\begin{array}{rcl} u''(x)+u(x) &=& f(x)\\ u(0) &=& 0\\ u\left(\frac{\pi}{2}\right) &=& 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

(a) Bestimmen Sie die GREENsche Funktion $\Gamma(x,\xi)$ für das RWP (1).

(b) Bestimmen Sie die GREENsche Funktion $\Gamma(x,\xi)$ für das RWP (2).

(c) Lösen Sie (1) und (2) jeweils mit $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $\Gamma(x,\xi)$ aus (a) bzw. (b).

Alternative Formulierung zu (c.ii):

Bestimmen Sie die GREENsche Funktion $\Gamma(x,\xi)$ für das (halb)homogene Randwertproblem

$$u''(x) + u(x) = g(x) \quad \text{unter} \quad u(0) = 0\,,\; u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,,$$

und berechnen Sie für $g(x) = \mathrm{e}^x$ die Lösung u.

. . . . (Maximumprinzip)

A 4.1.13 (a) Zeigen Sie das **Maximumprinzip (einfachster Fall)**:
Sei $g(x)$ eine beschränkte Funktion. Ist für $u \in C^2([a,b])$ in $]a,b[$ die Ungleichung

$$Lu(x) \;:=\; u''(x) + g(x)u'(x) \;>\; 0 \tag{4.5}$$

erfüllt, dann kann $u(x)$ sein Maximum nur am Rand annehmen.

(b) Zeigen Sie das **Maximumprinzip in 1D**:
Angenommen, $g\colon\;]a,b[\to \mathbb{R}$ sei beschränkt, $u \in C^2([a,b])$ genüge der Differentialgleichung

$$Lu(x) \;:=\; u''(x) + g(x)u'(x) \;\geq\; 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in]a,b[\tag{4.6}$$

und es gelte $\sup\limits_{x\in]a,b[} u(x) = M$. Existiert nun ein $c \in]a,b[$ mit $u(c) = M$, dann gilt $u \equiv M$.

(c) In welcher Weise folgt aus dem Maximumprinzip (b) das **Minimumprinzip**:
Angenommen, $g\colon\;]a,b[\to \mathbb{R}$ sei beschränkt, $u \in C^2([a,b])$ genüge der Differentialgleichung

$$Lu(x) \;:=\; u''(x) + g(x)u'(x) \;\leq\; 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in]a,b[\tag{4.7}$$

und es gelte $\inf\limits_{x\in]a,b[} u(x) = M$. Existiert nun ein $c \in]a,b[$ mit $u(c) = M$, dann gilt $u \equiv M$.

(d) Inwieweit kann die Beschränktheitsbedingung an $g(x)$ abgeschwächt werden?

(e) Zeigen Sie den folgenden Satz:
Angenommen, $g\colon\;]a,b[\to \mathbb{R}$ sei auf jedem Intervall $[s,t] \subset [a,b]$ beschränkt, $u \in C^2([a,b])$ genüge der Differentialgleichung (4.7) und sei nicht konstant.

(1) Gilt $M := \max\limits_{x\in[a,b]} u(x) = u(a)$ und ist g bei $x = a$ nach unten beschränkt, dann ist $u'(a) < 0$.

(2) Gilt $M := \max\limits_{x\in[a,b]} u(x) = u(b)$ und ist g bei $x = b$ nach oben beschränkt, dann gilt $u'(b) > 0$.

A 4.1.14 Gegeben seien $g, h\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ beschränkt für jedes $[s,t] \subset]a,b[$ und $h \leq 0$.

(a) Zeigen Sie: Erfüllt $u \in C^2([a,b])$ die Differentialungleichung

$$(L+h)u(x) \;:=\; u''(x) + g(x)u'(x) + h(x)u(x) \geq 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in]a,b[\tag{4.8}$$

und existiert ein $c \in]a,b[$ mit $0 \leq M := \max\limits_{x\in[a,b]} u(x) = u(c)$, dann ist $u \equiv M$ (konstant!).

(b) Erfüllt $u \in C^2([a,b])$ die Differentialungleichung (4.8) und sind $u(a) \leq 0, u(b) \leq 0$, dann gilt $u < 0$ in $]a,b[$ oder $u \equiv 0$.

(c) (*optional*) Sei $u \in C^2([a,b])$ nicht konstant und erfülle (4.8). Zeigen Sie:

(i) Gilt $M := \max\limits_{x\in[a,b]} u(x) = u(a) \geq 0$ und ist die Funktion $g(x) + (x-a)h(x)$ bei $x = a$ nach unten beschränkt, dann ist $u'(a) < 0$.

(ii) Gilt $M := \max\limits_{x\in[a,b]} u(x) = u(b) \geq 0$ und ist die Funktion $g(x) - (b-x)h(x)$ bei $x = a$ nach oben beschränkt, dann ist $u'(b) > 0$.

4.2 Sturm-Liouvillesche Eigenwertprobleme

A 4.2.1 Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenfunktionen von $Lu(x) = -u''(x)$ unter den Randbedingungen $u(0) = u(\pi) = 0$, also alle Paare (λ, u_λ), welche $Lu(x) = \lambda u(x)$ erfüllen.

Alternative Formulierung/Einschränkung der Aufgabenstellung:

Zeigen Sie, dass das Randwertproblem $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$, $y(0) = 0 = y(\pi)$, für alle $\omega \in [0,\infty) \setminus \mathbb{N}$ nur die triviale Lösung besitzt.

Alternative Formulierung mit variiertem Gebiet:

Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$\left.\begin{aligned} y''(x) + \omega^2 y(x) &= 0\,, \\ y(0) &= 0\,, \\ y(1) &= 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

für alle $\omega \in [0,\infty) \setminus \mathbb{N}\pi$ nur die triviale Lösung besitzt.

A 4.2.2 Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenfunktionen von $Lu(x) = -u''(x)$ auf dem Raum $D = \{u \in C^2([0,\pi]) \colon u(0) = u'(\pi) = 0\}$.

A 4.2.3 Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenfunktionen von $Lu(x) = -u''(x) + 2u'(x)$ auf dem Raum $D = \{u \in C^2([0,\pi]) \colon u(0) = u(\pi) = 0\}$.

Kapitel 5

Elementare Lösungsmethoden für partielle Differentialgleichungen

A 5.0.1 Welche Ordnung haben die folgenden PDE? Sind sie lineare PDE?

(a) $u_x + u_y = 0$	(c) $u_x + uu_y = 0$	(e) $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$	(g) $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
(b) $u_x + yu_y = 0$	(d) $u_{xx} + u_{yy} = 0$	(f) $u_t - \mathrm{i}u_{xx} = 0$	(h) $u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$

.... (Parameterabhängige Integrale)

Ist $f(x,y)$ stetig auf dem Rechteck $[a,b] \times [c,e]$ und existiert dort überall $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$, dann existiert nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aufgrund der Stetigkeit von f zu beliebigem $\eta \in [c,e]$ eine Stammfunktion $F_\eta(\xi) = F(\xi,\eta)$ von $f_\eta(\xi) := f(\xi,\eta)$ mit $F_\eta(\xi) = \int_a^\xi f_\eta(s)ds = \int_a^\xi f(s,\eta)ds$. Sind darüber hinaus $\alpha\colon [c,e] \to [a,b]$ und $\beta\colon [c,e] \to [a,b]$ differenzierbare Kurven, so gilt

$$\frac{d}{dy}\left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\right) = f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y) + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(s,y)ds\ . \quad (5.1)$$

A 5.0.2 Beweisen Sie (5.1).

A 5.0.3 Berechnen Sie $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, für die folgenden Funktionen:

(i) $F(x) := \displaystyle\int\limits_{[1,2]} \frac{\mathrm{e}^{xy}}{y} d\lambda_1(y)$; (ii) $F(x) := \displaystyle\int\limits_{[0,x]} \mathrm{e}^{(x-y)^2} d\lambda_1(y)$.

A 5.0.4 Berechnen Sie $F(a) = \displaystyle\int_{]0,\infty[} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-x}}{x} d\lambda_1(x)$, $a > 0$, durch Differentiation von F nach a, $a > 0$.

A 5.0.5 Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion
$$u(t,x) := \begin{cases} \dfrac{tx^3}{(x^2+t^2)^2}\ , & \text{falls } (t,x) \neq (0,0)\ , \\ 0\ , & \text{falls } (t,x) = (0,0)\ . \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Integrale $f(x) := \displaystyle\int_0^1 u(t,x)dt$ und $g(x) := \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} u(t,x)dt$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert sind, die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, jedoch $f'(0) \neq g(0)$ gilt.

Methode der Charakteristiken

Spezielle Typen linearer Differentialgleichungen erster Ordnung:

(a) $\boxed{\text{mit konstanten Koeffizienten:}}$ Für einen Vektor $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$ mit $\prod_{j=1}^{\ell} \alpha_j \neq 0$ (oder mindestens $a_\ell \neq 0$) gilt

$$Lu(\mathbf{x}) \;:=\; \sum_{j=1}^{\ell} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} u((x)) \;=\; 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \partial_{\mathbf{a}} u(\mathbf{x}) \;=\; \langle \operatorname{grad} u(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle \;=\; 0\;. \tag{5.2}$$

(b) $\boxed{\text{hom. lineare PDE erster Ordnung in zwei Variablen mit nicht-konstanten Koeffizienten:}}$

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y \;=\; 0\;. \tag{5.3}$$

(c) $\boxed{\text{inhom. lin. PDE erster Ordnung in zwei Variablen mit nicht-konstanten Koeffizienten:}}$

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y \;=\; c(x,y)\;. \tag{5.4}$$

(d) $\boxed{\text{hom. lineare PDE erster Ordnung mit variablen Koeffizienten } (\ell \geq 3)\text{:}}$

$$Lu(x_1, \ldots, x_\ell) := \sum_{j=1}^{\ell} a_j(x_1, \ldots, x_\ell) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x_1, \ldots, x_\ell) \;=\; 0 \tag{5.5}$$

A 5.0.6 Lösen Sie die Differentialgleichung (5.2).

A 5.0.7 Führen Sie die Differentialgleichungen (5.3) und (5.5) auf gewöhnliche DGlen/Systeme zurück.

A 5.0.8 Behandeln Sie die Differentialgleichung (5.4).

A 5.0.9 Bestimmen Sie alle Funktionen $u(x,y)$, welche $u_{xx} = 0$ erfüllen.

A 5.0.10 Lösen Sie die partielle Differentialgleichung $u_{xx} + u = 0$.

A 5.0.11 Welche Gestalt besitzt die allgemeine Lösung von $u_{xy} = 0$?

A 5.0.12 Zeigen Sie, dass $u(x,y) = f(x)g(y)$ für jedes Paar von (mindestens einmal differenzierbaren) Funktionen f und g einer Veränderlichen Lösung von $uu_{xy} = u_x u_y$ ist.

A 5.0.13 Lösen Sie die Differentialgleichung $5u_x - 2u_y = 0$ unter der Zusatzbedingung $u(0,y) = y^3$.

A 5.0.14 Lösen Sie die Transportgleichung

$$\begin{cases} u_t(x,t) - 5u_x(x,t) \;=\; 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \,]0,\infty[, \\ \qquad\quad u(x,0) \;=\; \sin(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Alternative Formulierung:

Lösen Sie die Differentialgleichung $u_t - 5u_x = 0$ unter der Zusatzbedingung $u(x,0) = \sin(x)$.

A 5.0.15 Lösen Sie die Differentialgleichung $u_x + yu_y = x$.

A 5.0.16 Lösen Sie die Differentialgleichung $2x^2yu_x + u_y = 0$.

A 5.0.17 Lösen Sie die nichtlineare Differentialgleichung $u_t + uu_x = 0$ zum Anfangswert $u(0,x) = x$. Wie lange existiert die Lösung? Skizzieren Sie dazu die Charakteristiken.

A 5.0.18 Lösen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

(a) $2u_x + 3u_y = 0$ (b) $yu_x - xu_y = 0$ (c) $u_x + u_y = xy$

A 5.0.19 Lösen Sie die folgenden nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung:

(a) $u_t - uu_x = 0$ zum Anfangswert $u(0,x) := x$. Wie lange existieren die Lösungen?

(b) $u_t + uu_x = 0$ zum Anfangswert $u(0,x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$. Ist die Lösung wohldefiniert?

....(Zusammenhang zu Zweiter-Ordnung PDEs)

A 5.0.20 Gegeben seien $u, v \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Bestimmen Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung, die dem folgenden System von Differentialgleichungen erster Ordnung entspricht:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_x + v_y & = & 0 \\ v_x + u_y & = & 0 \end{array} \right. \qquad (2) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_x + v_y & = & 0 \\ v_x - u_y & = & 0 \end{array} \right. \qquad (3) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_x + v_y & = & 0 \\ v_x + u & = & 0 \end{array} \right.$$

....(Stetige Abhängigkeit von den Daten)

A 5.0.21 Angenommen, die Funktionen u und v genügen dem Anfangswertproblem

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t(x,t) - c_1 u_x(x,t) & = & 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \,]0,\infty[, \\ v_t(x,t) - c_2 v_x(x,t) & = & 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \,]0,\infty[, \\ u(x,0) = v(x,0) & = & \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

mit (unterschiedlichen) Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und einer Lipschitz-stetigen Anfangsbedingung φ. Zeigen Sie die Existenz einer Konstanten $C > 0$, mit welcher

$$|u(x,t) - v(x,t)| \;\leq\; Ct$$

für alle $(x,t) \in \mathbb{R} \times \,]0,\infty[$ erfüllt wird.

5.1 Die Laplace-Gleichung (elliptisch)

Laplace-Operator: Eine PDE zweiter Ordnung ist die **Laplace-Gleichung**

$$\Delta u = 0 \tag{5.6}$$

für eine Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, wobei der **Laplace-Operator** Δ für zweimal stetig differenzierbares u definiert ist durch

$$\Delta u := \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \ . \tag{5.7}$$

Gleichung (5.6) lautet im Spezialfall $n = 2$ in Polarkoordinaten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \ = \ 0 \ . \tag{5.8}$$

A 5.1.1 Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $u_n(x, y) = \sin(nx)\sinh(ny)$. Zeigen Sie: u_n löst die Laplace-Gleichung.

A 5.1.2 Lösen Sie die Laplace-Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ auf dem Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ unter den Randbedingungen $u(0, y) = 0 = u(1, y)$, $u(x, 0) = 0$ und $u(x, 1) = \sin(2\pi x)$ mit Hilfe des Ansatzes $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

Alternative Formulierung:

Lösen Sie die partielle Differentialgleichung $u_{xx}+u_{yy} = 0$ auf dem Quadrat $[0, 1]\times[0, 1]$ unter den Randbedingungen $u(0, y) = 0 = u(1, y)$, $u(x, 0) = 0$ und $u(x, 1) = \sin(2\pi x)$ mit Hilfe des Ansatzes $u(x, y) = X(x)Y(y)$ (Trennung der Variablen).

Variation der Randdaten und des Gebietes

Lösen Sie die Laplace-Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ auf dem Rechteck $[0, \pi] \times [0, 1]$ unter den Randbedingungen $u(0, y) = 0 = u(\pi, y)$, $u(x, 0) = 0$ und $u(x, 1) = \sin(5x)$ mit Hilfe des Separationsansatzes $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

A 5.1.3 Zeigen Sie Lemma 5.4:

Ist die Funktion u auf $\Omega \setminus \{0\}$ zweimal stetig differenzierbar und rotationssymmetrisch mit $u(x) = y(\|x\|)$ für alle $0 \neq x \in \Omega$, dann gilt

$$(\Delta u)(x) = y'(\|x\|) + \frac{n-1}{\|x\|} y'(\|x\|) \,.$$

A 5.1.4 Leiten Sie (5.8) aus der Laplace-Gleichung (5.6) durch Übergang zu Polarkoordinaten her.

Alternative Formulierung:

Wie lautet der Laplace-Operator $\Delta u := \partial_{xx} u + \partial_{yy} u$ in Polarkoordinaten (r, φ)?

A 5.1.5 Lösen Sie Gleichung (5.8) mittels Ansatz $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$.
Welches u erfüllt $u(1, \varphi) = g(\varphi)$?

A 5.1.6 Bestimmen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ die Lösungen der Laplace-Gleichung $Lu = \Delta u = 0$ auf dem Kreis mit Radius 1 unter der Randbedingung $u(1, \varphi) = 7\cos(3\varphi) - 5\sin(11\varphi) + 13$.

A 5.1.7 Lösen Sie die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ im Halbkreis $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\,,\, x^2 + y^2 < 1\}$ unter den Randbedingungen $u = 0$ bei $y = 0$ und $u = \sin(3\varphi)$ auf dem durch die Winkelvariable $\varphi \in (0, \pi)$ parametrisierten Halbkreis $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\,,\, x^2 + y^2 = 1\}$.

5.2 Die Diffusionsgleichung (parabolisch)

. . . . (Separationsansatz – Randbedingungen)

A 5.2.1 Lösen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $u(t,x) = T(t)X(x)$ die Wärmeleitungsgleichung $u_t - 5u_{xx} = 0$ unter den Randbedingungen $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ zu den Anfangsdaten $u(0,x) = \sin(2x) - 4\sin(3x)$.

Alternative Formulierung:

Lösen Sie das folgende Anfangsrandwertproblem für die Diffusionsgleichung:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - 5u_{xx}(x,t) = 0, & (x,t) \in \,]0,\pi[\, \times \,]0,\infty[\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0\,, \\ u(x,0) = \sin(2x) - 4\sin(3x), & x \in \,]0,\pi[\,. \end{cases}$$

Lsg.:
Gehen wir mit dem Ansatz $u(t,x) = T(t)X(x)$ in die Differentialgleichung hinein, so folgt nach Umstellen

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = c = 5\frac{X''(x)}{X(x)}$$

wonach sich einerseits $T(t) = \mathrm{e}^{ct}$ und andererseits – bereits unter Berücksichtigung der Randdaten – zum Einen $c = -5n^2$ und zum Anderen $X(x) = \sin(nx)$ mit $n \in \mathbb{N}$ ergibt. Also haben wir (ohne Berücksichtigung der Anfangsdaten) die allgemeine Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \mathrm{e}^{-5n^2 t} \sin(nx).$$

Setzen wir nun noch die Anfangsdaten ein, so ergeben sich $A_2 = 1$, $A_3 = -4$ sowie $A_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{2,3\}$. Somit ist die Lösung in diesem Fall

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-20t} \sin(2x) - 4\mathrm{e}^{-45t} \sin(3x)\,.$$

A 5.2.2 Lösen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $u(t,x) = T(t)X(x)$ die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx} - 2u_x$ unter den Randbedingungen $u(t,0) = 0$ und $u(t,\pi) = 0$ zu den Anfangsdaten $u(0,x) = \mathrm{e}^x\,(3\sin(5x) - 5\sin(3x))$.

. . . . (Wärmeleitungsgleichung in Polarkoordinaten)

A 5.2.3 Bestimmen Sie die stationäre Temperaturverteilung innerhalb der durch

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 < x^2 + y^2 < 4\}$$

gegebenen ringförmigen Platte unter den Annahmen, dass der äußere Rand der Platte perfekt isoliert ist und der innere Rand auf Temperatur $(\sin(\varphi))^2$ gehalten wird (φ ist die Winkelvariable auf dem inneren Rand).
Welche Temperatur muss die Isolation auf dem äußeren Rand aushalten?

. . . . (Das Gauß-Integral)

A 5.2.4 Bestimmen Sie das uneigentliche Integral $$I_x \; := \; \int_0^\infty e^{-x^2} dx,$$
indem Sie das Doppelintegral $I_x^2 \; = \; I_x \cdot I_y$ mit Hilfe des Transformationssatzes und des Satzes von Fubini berechnen.

Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.

Alternative Formulierung inklusive alternativem Lösungsweg:

Zeigen Sie die Gültigkeit von $$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2} dp \; = \; 1}.$$

Hinweis:

Berechnen Sie das Integral $$\int_{[0,\infty)} \left(\int_{[0,\infty)} y e^{-(1+x^2)y^2} \; d\lambda_1(y) \right) \; d\lambda_1(x).$$

Zeigen Sie dann mit Hilfe des Satzes von Fubini $$\int_{[0,\infty)} e^{-x^2} \; d\lambda_1(x) \; = \; \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

A 5.2.5 Beweisen Sie für eine integrierbare Funktion $u_0\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften der Lösung

$$u(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) u_0(y)\, dy \tag{5.9}$$

der Diffusionsgleichung $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ in $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$:

(a) Gilt $0 \leq u_0(x) \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit einer Konstanten $M < \infty$, dann gilt auch $0 \leq u(t,x) \leq M$ für alle $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Für jedes $t > 0$ gilt $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\, dx$.

A 5.2.6 (a) Lösen Sie die Diffusionsgleichung $u_t = k u_{xx}$ unter der Anfangsbedingung $u(0,x) = x^2$ mittels folgender Methode:

(i) Zeigen Sie zunächst, dass u_{xxx} eine Lösung der Diffusionsgleichung mit **homogener** Anfangsbedingung ist.

(ii) Nach dem Eindeutigkeitssatz muss dann $u_{xxx} \equiv 0$ gelten.

(iii) Dreimalige Integration liefert $u(t,x) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t)$.

(iv) Bestimmen Sie anschließend A, B und C.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus (a) das Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p^2 \mathrm{e}^{-p^2}\, dp$.

A 5.2.7 **Diffusion auf Halbgeraden (Dirichletproblem)**: Wir betrachten das Problem

$$\left.\begin{array}{lcll} v_t - k v_{xx} & = & 0 & (t,x) \in\ ]0,\infty[\ \times\ ]0,\infty[\quad \ldots\text{im Halbraum} \\ v(0,x) & = & \varphi(x) & x \in\ ]0,\infty[\quad \ldots\text{Anfangsvorgabe} \\ v(t,0) & = & 0 & t \in\ ]0,\infty[\quad \ldots\text{Dirichlet-Randvorgabe} \end{array}\right\} \tag{5.10}$$

Diffusion auf Halbgeraden (Neumannproblem): Wir betrachten das Problem

$$\left.\begin{array}{lcll} w_t - k w_{xx} & = & 0 & (t,x) \in\ ]0,\infty[\ \times\ ]0,\infty[\quad \ldots\text{im Halbraum} \\ w(0,x) & = & \varphi(x) & x \in\ ]0,\infty[\quad \ldots\text{Anfangsvorgabe} \\ w_x(t,0) & = & 0 & t \in\ ]0,\infty[\quad \ldots\text{Neumann-Randvorgabe} \end{array}\right\} \tag{5.11}$$

(a) Lösen Sie das Diffusions-Dirichlet-Problem (5.10) auf der Halbachse mit $\varphi(x) \equiv 1$.

(b) Lösen Sie das Diffusions-Neumann-Problem (5.11) auf der Halbachse mit $\varphi(x) \equiv 1$.

(c) Lösen Sie das Diffusions-Dirichlet-Problem (5.10) auf der Halbachse mit $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

(d) Lösen Sie auf der Halbachse sowohl das Diffusions-Dirichlet-Problem (5.10) als auch das Diffusions-Neumann-Problem (5.11) mit $\varphi(x) \equiv 0$.

Hinweis: Verwenden Sie gegebenenfalls abkürzend die Funktion $\boxed{\operatorname{Erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-p^2}\, dp}$.

A 5.2.8 Lösen Sie mit Hilfe der Greenschen Funktion (siehe Vorlesung):

(a) die Diffusionsgleichung $u_t = k u_{xx}$ auf $\mathbb{R}$ mit der Anfangsvorgabe $u(0,x) = \mathrm{e}^{-x}$;

(b) die Diffusionsgleichung $u_t = ku_{xx}$ auf $\mathbb{R}$ mit der Anfangsvorgabe $u(0,x) = \mathrm{e}^{3x}$;

(c) die Diffusionsgleichung $u_t = ku_{xx}$ auf $\mathbb{R}$ mit der Anfangsvorgabe $u(0,x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$.

Tipp: Drücken Sie die Lösung von (c) mit Hilfe der Funktion $\boxed{\mathrm{Erf}(s) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s \mathrm{e}^{-p^2} dp}$ aus.

..........................(Quellen/Inhomogene Diffusionsgleichungen + konkrete Daten)

Betrachten wir das Problem

$$\left.\begin{array}{rcll} u_t - ku_{xx} & = & f(t,x) & (t,x) \in \ ]0,\infty[\ \times \ ]-\infty,\infty[\\ u(0,x) & = & \varphi(x) & x \in \ ]0,\infty[\end{array}\right\} \tag{5.12}$$

mit beliebigen Funktionen $f(t,x)$ und $\varphi(x)$, dann ist die Lösung

$$u(t,x) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} S(t,x-y)\varphi(y)dy \ + \ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(t-s,x-y)f(s,y) \ dy \ ds$$

mit der **Greenschen Funktion** $\boxed{S(t,x) \ = \ \frac{1}{\sqrt{\pi 4kt}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4kt}} \quad (t > 0)}$.

A 5.2.9 **Tipp:** Im Folgenden verwenden können Sie die Fehlerfunktion $\mathrm{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \mathrm{e}^{-s^2} ds$.

(a) Wie lautet das Anfangswertproblem für die inhomogene Wellengleichung und die zugehörige Lösungsformel? **Lsg.:**

Das Problem ist genau das aus (5.12) und besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} u(t,x) \ &= \ \frac{1}{\sqrt{\pi 4kt}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4kt}\right) \varphi(y)dy \\ &\quad + \ \frac{1}{\sqrt{\pi 4k(t-s)}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4k(t-s)}\right) f(s,y) \ dy \ ds \end{aligned}$$

(b) Finden Sie die Lösung der homogenen Diffusionsgleichung $u_t(x,t) - 2u_{xx}(x,t) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ zu den Anfangsdaten

$$u(x,0) \ = \ \begin{cases} \mathrm{e}^{3x} \ , & x \geq 1, \\ 0 \ , & x < 1. \end{cases}$$

Lsg.:
Da hier keine Quelle f vorliegt, vereinfacht sich die Lösungsformel aus (a) wegen

$$\begin{aligned} -\frac{(x-y)^2}{8t} + 3y \ &= \ -\frac{1}{8t}\left[x^2 - 2xy + y^2 - 2\cdot 12ty + (12t)^2 - (12t)^2 + 2\cdot 12tx - 2\cdot 12tx\right] \\ &= \ -\frac{1}{8t}(x-y-12t)^2 + 18t + 3x \end{aligned}$$

in diesem Fall mittels Substitutionsregel zu

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi 8t}} \int_1^\infty \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{8t}\right) \mathrm{e}^{3y} dy \;=\; \frac{\mathrm{e}^{3x+18t}}{\sqrt{\pi 8t}} \int_1^\infty \exp\left(-\frac{(y-x-12t)^2}{8t}\right) dy \\
&= \frac{\mathrm{e}^{3x+18t}}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1-x-12t}{\sqrt{8t}}}^\infty \exp\left(-z^2\right) dz \;=\; \frac{\mathrm{e}^{3x+18t}}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1-x-12t}{\sqrt{8t}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

(c) Betrachten Sie das Dirichlet-Anfangsrandwertproblem (5.10) für $k = 3$ und

$$
v(0,x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ 1, & 1 \le x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}
$$

Alternative Formulierung:

Lösen Sie die homogene Diffusionsgleichung $u_t(x,t) - 3u_{xx}(x,t) = 0$ auf der Halbebene $(x,t) \in \,]0,\infty[^2$ mit der homogenen Dirichlet-Randbedingung $u(0,t) = 0$ für $t > 0$ und den Anfangsdaten

$$
u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ 1, & 1 \le x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}
$$

Lsg.:
Die ungerade Fortsetzung der Anfangsdaten lautet

$$
\tilde{u}(x,0) = \begin{cases} 0, & x < -3, \\ -1, & -3 \le x \le -1, \\ 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & 1 \le x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}
$$

Lösen wir nun die Diffusionsgleichung zu diesen Anfangsdaten, erhalten wir genau die gesuchte Lösung der Diffusionsgleichung für die Halbebene mit homogener Dirichlet-Randbedingung, also wieder mit (a) damit

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{12\pi t}} \int_1^3 \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{12t}\right) dy - \frac{1}{\sqrt{12\pi t}} \int_{-3}^{-1} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{12t}\right) dy \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1-x}{\sqrt{12t}}}^{\frac{3-x}{\sqrt{12t}}} \exp\left(-z^2\right) dz - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-3-x}{\sqrt{12t}}}^{\frac{-1-x}{\sqrt{12t}}} \exp\left(-z^2\right) dz \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{3-x}{\sqrt{12t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{1-x}{\sqrt{12t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{-1-x}{\sqrt{12t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{-3-x}{\sqrt{12t}}\right) \right] .
\end{aligned}
$$

. . . . (Poröse Medien)

A 5.2.10 Sei $n \in \mathbb{N}$, $m > 1$ und bezeichne $u^{m-1} := \|u\|^{m-2}u$ die vorzeichenbehaftete Potenz.

(a) Geben Sie Bedingungen für $\alpha, \beta, \gamma > 0$ an, unter denen gilt: Löst u die Gleichung $\dfrac{\partial u^{m-1}}{\partial t} = \Delta u$ in $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, so löst $\tilde{u}(t,x) := \gamma u(\alpha t, \beta x)$ dieselbe Gleichung.

(b) Finden Sie im Fall $1 < m < 2$ mittels des Ansatzes $u(t,x) = t^\alpha y(t^\beta |x|)$ rotationssymmetrische selbstähnliche Lösungen $u \geq 0$ von $\dfrac{\partial u^{m-1}}{\partial t} = \Delta u$ in $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, wobei $y\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

. . . . (Beispiel für unendl.-dim. Hamiltonsche DGL/wandernde Welle)

A 5.2.11 Eine Funktion $u\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Soliton, falls u eine wandernde Welle ist, d.h. es eine glatte Funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(t,x) = y(x - ct)$ für ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sowie zusätzlich $\lim_{\xi \to -\infty} y(\xi) = 0 = \lim_{\xi \to \infty} y(\xi)$, $y \geq 0$ und $y \neq 0$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass die Korteweg-de Vries Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{5.13}$$

unter dem Ansatz $u(t,x) = y(x - ct)$ in die gewöhnliche Differentialgleichung $y'' = a + cy - 3y^2$ für y mit einer Konstanten $a \in \mathbb{R}$ übergeht.

(b) Beweisen Sie, dass die gewöhnliche Differentialgleichung aus (a) für $a = 0$ mit $z = y'$ zum Hamiltonschen System mit $H(y,z) = \frac{1}{2}z^2 + y^3 - \frac{c}{2}y^2$ äquivalent ist.

(c) Überprüfen Sie, dass $y(\xi) = \frac{c}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi - b)\right)$ für jedes $c > 0$, $b \in \mathbb{R}$, eine Lösung in der Niveaumenge $H^{-1}(\{0\})$ liefert, die eine Soliton-Lösung der Korteweg-de Vries Gleichung induziert.

5.3 Die Wellengleichung (hyperbolisch)

A 5.3.1 Finden Sie die allgemeine Lösung der **Wellengleichung** $\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx}}$.

A 5.3.2 Leiten Sie die Formel von d'Alembert

$$u(t,x) \;=\; \frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\right] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\sigma)d\sigma \qquad \textbf{d'Alembert}\ (1746) \qquad (5.14)$$

her, die das **AWP für die Wellengleichung** $\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx},\ u(0,x)=\varphi(x),\ u_t(0,x)=\psi(x)}$ löst.

Alternative Formulierung:

Leiten Sie die Formel (5.14) von d'Alembert her, welche das homogene Anfangswertproblem

$$\left.\begin{array}{rcll} u_{tt}(x,t)-c^2u_{xx}(x,t) &=& 0, & (x,t)\in\mathbb{R}\ \times\ ]0,\infty[\\ u(x,0) &=& \varphi(x), & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0) &=& \psi(x), & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (5.15)$$

löst.

. . . . (Formel von d'Alembert – konkrete Daten)

A 5.3.3 Lösen Sie die folgenden Wellengleichungen auf $\mathbb{R}$ mittels Formel von d'Alembert.

(a) $u_{tt} = u_{xx}$ mit Anfangsbedingungen $u(0,x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $u_t(0,x) = 0$;
(b) $u_{tt} = 4u_{xx}$ mit Anfangsbedingungen $u(0,x) = \mathrm{e}^{x}$, $u_t(0,x) = \sin(x)$;
(c) $u_{tt} = 9u_{xx}$ mit Anfangsbedingungen $u(0,x) = 0$, $u_t(0,x) = \cos(x)$;
(d) $u_{tt} = 16u_{xx}$ mit Anfangsbedingungen $u(0,x) = x^2$, $u_t(0,x) = \cosh(x)$;
(e) $u_{tt} = 25u_{xx} + \mathrm{e}^{-x}$ mit Anfangsbedingungen $u(0,x) = 0$, $u_t(0,x) = 0$.

A 5.3.4 Sei $u(t,x)$ die Lösung des Anfangswertproblems (5.15) für die Wellengleichung $u_{tt} = c^2u_{xx}$ mit Anfangsbedingungen $u(0,x) = \varphi(x)$ und $u_t(0,x) = \psi(x)$. Zeigen Sie, dass $u(t,x)$ für jedes t eine gerade Funktion in x ist, wenn sowohl φ als auch ψ gerade Funktionen sind.

Variation: "ungerade" anstelle von "gerade":

Zeigen Sie, dass die Lösung $u(x,t)$ des Anfangswertproblems (5.15) für die Wellengleichung bezüglich der Raumvariablen x eine ungerade Funktion ist, sofern die Anfangsdaten φ und ψ ungerade Funktionen sind.

Lsg.:
Aus der Formel (5.14) von d'Alembert folgt sofort

$$\begin{aligned} u(x,t) &\overset{(5.14)}{=} \frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\right] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\sigma)d\sigma \\ &\overset{\text{SR}}{=} \frac{1}{2}\left[\varphi(-(-x-ct))+\varphi(-(-x+ct))\right] \;-\; \frac{1}{2c}\int_{-(x-ct)}^{-(x+ct)}\psi(-\sigma)d\sigma \\ &= \frac{1}{2}\left[-\varphi(-x-ct)-\varphi(-x+ct)\right] \;-\; \frac{1}{2c}\int_{-x-ct}^{-x+ct}\underbrace{-\psi(-\sigma)}_{=\psi(\sigma)}d\sigma \quad \overset{(5.14)}{=} \; -u(-x,t)\,. \end{aligned}$$

A 5.3.5 Lösen Sie $u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} = 0$ zu den Anfangsbedingungen $u(0,x) = x^2,\ u_t(0,x) = \mathrm{e}^x$.

A 5.3.6 Lösen Sie $u_{xx} + u_{xt} - 20u_{tt} = 0$ zu den Anfangsbedingungen $u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x)$.

. . . . (Wellen mit Quellen)

A 5.3.7 **Wellen mit einer Quelle**: Betrachten wir das Problem

$$\left.\begin{array}{lcll} u_{tt} - c^2 u_{xx} & = & f(t,x) & (t,x) \in\ ]0,\infty[\ \times\ ]-\infty,\infty[\\ u(0,x) & = & \varphi(x) & x \in\ ]0,\infty[\\ u_t(0,x) & = & \psi(x) & x \in\ ]0,\infty[\end{array}\right\} \tag{5.16}$$

mit beliebigen Funktionen $f(t,x)$ und Anfangsvorgaben $\varphi(x), \psi(x)$, dann ist die Lösung

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy + \frac{1}{2c}\iint_{\Delta_x} f(s,y)dyds \qquad (5.17) \\ &= \frac{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(s,y)dyds \end{aligned}$$

(a) Leiten Sie die Formel (5.17) her.

(b) Lösen Sie (5.16) mit $f(t,x) = xt$ und $\phi \equiv \psi \equiv 0$.

(c) Lösen Sie (5.16) mit $f(t,x) = \mathrm{e}^{ax}$ und $\phi \equiv \psi \equiv 0$.

Alternative (erweiterte) Formulierung von (a):

Leiten Sie die folgende Formel

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)dyds \tag{5.18}$$

von d'Alembert her, welche das inhomogene Anfangswertproblem

$$\left.\begin{array}{rcll} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) & = & f(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}\ \times\ ]0,\infty[\\ u(x,0) & = & \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) & = & \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \tag{5.19}$$

löst.

A 5.3.8 Lösen Sie auf der gesamten reellen Achse

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \cos(x)\ , \qquad u(0,x) = \sin(x)\ , \qquad u_t(0,x) = 1 + x\ .$$

A 5.3.9 Lösen Sie das folgende inhomogene Anfangswertproblem für die Wellengleichung

$$\left.\begin{array}{rcll} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) & = & x\sin(t), & (x,t) \in \mathbb{R}\ \times\ ]0,\infty[\ , \\ u(x,0) & = & \mathrm{e}^x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) & = & x^2, & x \in \mathbb{R}. \end{array}\right\}$$

A 5.3.10 **Wellen auf Halbgeraden (Dirichletproblem)**: Wir betrachten das Problem

$$\left.\begin{array}{llll} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & (t,x) \in \ ]0,\infty[\ \times \ ]0,\infty[& \ldots \text{im Halbraum} \\ u(0,x) = \varphi(x) & x \in \ ]0,\infty[& \ldots \text{Anfangsvorgabe} \\ u_t(0,x) = \psi(x) & x \in \ ]0,\infty[& \ldots \text{Anfangsvorgabe} \\ u(t,0) = 0 & t \in \ ]0,\infty[& \ldots \text{Dirichlet-Randvorgabe} \end{array}\right\} \quad (5.20)$$

(a) Lösen Sie das (homogene) **Dirichlet-Problem** (5.20) mit $c = 2$ und mit den Anfangsvorgaben $u(0,x) = 1$ und $u_t(0,x) = 0$.

(b) Formulieren Sie analog zum (homogenen) Dirichlet-Problem (5.20) das (homogene) **Neumann-Problem** für Wellen auf der Halbgeraden und leiten Sie eine Lösungsformel her.

(c) Lösen Sie das (homogene) **Neumann-Problem** für Wellen auf der Halbgeraden mit $c = 2$ und mit den Anfangsvorgaben $u(0,x) = \cos(x)$ und $u_t(0,x) = 4x - 1$.

Alternative Formulierung:

Finden Sie für die Fälle $0 < 2t < x$ und $0 < x < 2t$ auf der Halbebene die Lösung des folgenden homogenen **Neumann-Problems** für die Wellengleichung:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - 4u_{xx}(x,t) = 0, & (x,t) \in \ ]0,\infty[\ , \\ u(x,0) = \cos(x), & x > 0 \ , \\ u_t(x,0) = 4x - 1, & x > 0 \ , \\ u_x(0,t) = 0, & t > 0 \ . \end{cases}$$

Lsg.:
Zunächst setzen wir die Anfangsdaten gerade fort, d.h., wir setzen

$$\tilde{\varphi}(x) := \cos(x) \qquad \text{und} \qquad \tilde{\psi}(x) := \begin{cases} 4x - 1, & x \geq 0 \ , \\ -4x - 1, & x < 0 \ . \end{cases}$$

Mit der Formel (5.14) von d'Alembert erhalten wir nun

$$u(x,t) = \frac{\cos(x+2t) + \cos(x-2t)}{2} + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} \tilde{\psi}(\sigma) d\sigma$$

mit

$$\int_{x-2t}^{x+2t} \tilde{\psi}(\sigma) d\sigma = \begin{cases} \displaystyle\int_{x-2t}^{x+2t} (4\sigma - 1) d\sigma = 4t(4x-1), & 0 < x < 2t, \\ \displaystyle\left(\int_0^{x+2t} (4\sigma - 1) d\sigma - \int_{x-2t}^0 (4\sigma + 1) d\sigma \right) = 4(x^2 - t + 4t^2), & 0 < 2t < x. \end{cases}$$

A 5.3.11 Lösen Sie mittels Ansatz $u(t,x) = T(t)X(x)$ die Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ unter den Randbedingungen $u(t,0) = u'(t,\pi) = 0$ zu den Anfangsdaten $u(0,x) = 3\sin\left(\frac{5}{2}x\right)$ und $u_t(0,x) = 0$.

Alternative Formulierung:

Lösen Sie unter den Randbedingungen $u(t,0) = 0 = u'(t,\pi)$ die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

zu den Anfangsdaten $u(0,x) = 3\sin\left(\dfrac{5}{2}x\right)$ und $\dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0$.

Alternative Formulierung:

Lösen Sie das folgende Anfangsrandwertproblem für die Wellengleichung:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) \ - \ u_{xx}(x,t) = 0, & (x,t) \in \,]0,\pi[\, \times \,]0,\infty[\ , \\ u(0,t) = u'(\pi,t) = 0, & t > 0\ , \\ u(x,0) = 3\sin\left(\frac{5}{2}x\right), & x \in \,]0,\pi[\ , \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \,]0,\pi[\ . \end{cases}$$

A 5.3.12 Lösen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes die Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ unter den Randbedingungen $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ zu den Anfangsdaten $u(0,x) = 0$ und $u_t(0,x) = 5\sin(7x)$.

Alternative Formulierung:

Lösen Sie das folgende Anfangsrandwertproblem für die Wellengleichung:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) \ - \ u_{xx}(x,t) = 0, & (x,t) \in \,]0,\pi[\, \times \,]0,\infty[\ , \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0\ , \\ u(x,0) = 0, & x \in \,]0,\pi[\ , \\ u_t(x,0) = 5\sin(7x)\,, & x \in \,]0,\pi[\ . \end{cases}$$

A 5.3.13 Lösen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes die Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ unter den Randbedingungen $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ zu den Anfangsdaten $u_t(0,x) = 0$ und $u(0,x) = 3\sin(11x)$.

Alternative Formulierung:

Lösen Sie das folgende Anfangsrandwertproblem für die Wellengleichung:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) \ - \ u_{xx}(x,t) = 0, & (x,t) \in \,]0,\pi[\, \times \,]0,\infty[\ , \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0\ , \\ u(x,0) = 3\sin(11x)\,, & x \in \,]0,\pi[\ , \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \,]0,\pi[\ . \end{cases}$$

A 5.3.14 Lösen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $u(t,x) = T(t)X(x)$ die Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ unter den Randbedingungen $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ zu den Anfangsdaten $u_t(0,x) = 2x+1$ und $u(0,x) = \mathrm{e}^{2x}$.

Alternative Formulierung:

Lösen Sie das folgende Anfangsrandwertproblem für die Wellengleichung:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) \;-\; u_{xx}(x,t) \;=\; 0, & (x,t) \in\,]0,\pi[\, \times\,]0,\infty[\;, \\ u(0,t) \;=\; u(\pi,t) \;=\; 0, & t > 0\;, \\ u(x,0) \;=\; \mathrm{e}^{2x}, & x \in\,]0,\pi[\;, \\ u_t(x,0) \;=\; 2x+1, & x \in\,]0,\pi[\;. \end{cases}$$

Lsg.:
Gehen wir mit dem Ansatz $u(t,x) = T(t)X(x)$ in die Differentialgleichung hinein, so folgt nach Umstellen

$$\frac{T''(t)}{T(t)} \;=\; c \;=\; \frac{X''(x)}{X(x)}$$

wonach sich für die beiden entkoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungsscharen – bereits unter Berücksichtigung der Randdaten – mit $n \in \mathbb{N}$ einerseits für $c = -n^2$ die linear unabhängigen Lösungen $X_n(x) = \sin(nx)$ sowie – aufgrund der Einschränkung an c – dann ebenfalls die linear unabhängigen Lösungen $T(t) = C_n \cos(nt) + D_n \sin(nt)$ ergeben. Also haben wir (ohne Berücksichtigung der Anfangsdaten) die allgemeine Lösung

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} (C_n \cos(nt) + D_n \sin(nt)) \sin(nx).$$

Setzen wir nun noch die Anfangsdaten ein, so bleiben die Fourierkoeffizienten aus

$$u(x,0) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} C_n \sin(nx) \;=\; \mathrm{e}^{2x}$$

und aus

$$u_t(x,0) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} n\cdot D_n \sin(nx) \;=\; 2x+1$$

zu bestimmen (dabei setzen wir die beiden Anfangsdaten ungerade auf das Intervall $[-\pi,\pi]$ fort). Wir erhalten

$$\begin{aligned} C_n &= B_n\left([\mathrm{e}^{2x}]_{\text{ungerade fortgesetzt}}\right) \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{e}^{2x}\sin(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(2\sin(nx) - n\cos(nx)\mathrm{e}^{2x}}{n^2+4}\right]_0^\pi \;=\; \frac{2}{\pi}\frac{n}{n^2+4}\left[1-(-1)^n\mathrm{e}^{2\pi}\right] \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{n}B_n\left([2x+1]_{\text{ungerade fortgesetzt}}\right) \;=\; \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi (2x+1)\sin(nx)dx \\ &= \frac{2}{n\pi}\left[\frac{2}{n^2}\sin(nx) - \frac{2x+1}{n}\cos(nx)\right]_0^\pi \;=\; \frac{2}{n^2\pi}\left[1-(2\pi+1)(-1)^n\right] \end{aligned}$$

Somit ist die Fourierreihe der Lösung in diesem Fall

$$u(x,t) \;=\; \frac{2}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{n}{n^2+4}\left[1-(-1)^n\mathrm{e}^{2\pi}\right]\cos(nt) + \frac{1-(2\pi+1)(-1)^n}{n^2}\sin(nt)\right)\sin(nx)\;.$$

Kapitel 6

Weitere Lösungsmethoden für partielle Differentialgleichungen

6.1 Fourier-Methoden

A 6.1.1 (a) Zeigen Sie den **Satz von Plancherel:** $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt}$.

(b) Zeigen Sie die **Parsevalsche Gleichung:** $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt}$.

A 6.1.2 Für Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ definieren wir die **Faltung** durch

$$(f * g)(t) \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds \tag{6.1}$$

und die **(kontinuierliche) Fourier-Transformation** durch

$$\mathcal{F}[f](\omega) \;:=\; \hat{f}(\omega) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}dt \qquad (\omega \in \mathbb{R}). \tag{6.2}$$

Zeigen Sie: (a) Die Faltung ist kommutativ und assoziativ.
(b) Es gilt stets $(f * g)' = f' * g = f * g'$ und (c) den $\boxed{\textbf{Faltungssatz}\text{: } \widehat{f * g} \;=\; \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g}}$.

A 6.1.3 Überprüfen Sie:

	Funktion	Transform.
(1)	$af(x) + bg(x)$	$aF(t) + bG(t)$
(2)	$f(ax)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{t}{a}\right)$
(3)	$\frac{df}{dx}$	$\mathrm{i}tF(t)$
(4)	$xf(x)$	$\mathrm{i}\frac{dF}{dt}$
(5)	$f(x+a)$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}F(t)$
(6)	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}f(x)$	$F(t-a)$

A 6.1.4 Verifizieren Sie (1)-(4) und (6):

	Funktionenname	$f(x)$	$F(t)$
(1)	Gauß-Funktion	$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$	$\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$
(2)	Exponentialf.	$\mathrm{e}^{-a\|x\|}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2a}{a^2+t^2}$
(3)	Delta-Distr.	$\delta(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
(4)	Konstante	1	$\sqrt{2\pi}\delta(t)$
(5)	Heavyside-F.	$H(x)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(t) - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} P\frac{1}{t}$
(6)	Signum-Funktion	$\mathrm{sign}(x)$	$-\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} P\frac{1}{t}$

A 6.1.5 Wie sieht die Fourier-Transformierte von $\delta(x-a)$ und $\frac{1}{2}\delta(x+a) + \frac{1}{2}\delta(x-a)$ aus?

A 6.1.6 Wie sieht die Fourier-Transformierte des Rechteck-Impulses $H(R - |x|)$ aus?

A 6.1.7 Für $n = 3$ definieren wir die kontinuierliche Fourier-Transformation durch

$$F(\mathbf{t}) \ := \ \mathcal{F}[f(\mathbf{x})](\mathbf{t}) \ := \ \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle \mathbf{t}, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x} \ ,$$

wobei $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3)^T$ und $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$ sind. Die Rücktransformation ist entsprechend

$$f(\mathbf{x}) \ := \ \mathcal{F}^{-1}[F(\mathbf{t})](\mathbf{x}) \ := \ \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{t}) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \mathbf{t}, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{t} \ .$$

Wie sieht die Fourier-Transformierte für den Laplace-Operator im Fall $n = 3$ aus?

A 6.1.8 Die Durchbiegung einer „unendlichen langen Schiene“ unter einer spezifischen Last f genügt näherungsweise der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$u^{(4)}(x) + \alpha^4 u(x) \ = \ f(x) \ ,$$

wobei hier implizit angenommen wird, dass $\lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = 0$ und $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.
Lösen Sie diese ODE, indem Sie sie Fourier-transformieren, die Eigenschaften der Fourier-Transformation verwenden, um nach $\hat{u}(\omega)$ umzustellen, und dann zurücktransformieren.

A 6.1.9 Durch $u_1(t,s), \ldots, u_n(t,s)$ seien n Lösungen der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{ss}$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$u(t,x) \ := \ u(t, x_1, \ldots, x_n) \ = \ \prod_{k=1}^{n} u_k(t, x_k) \tag{6.3}$$

die Wärmeleitungsgleichung $\quad u_t - \Delta_n u \ = \ 0 \quad$ mit $\quad \Delta_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ erfüllt.

A 6.1.10 Lösen Sie mit Hilfe der Fourier-Transformation das (verallgemeinerte) Anfangswertproblem

$$\left.\begin{array}{rcll} u_t(t,x) & = & u_{xx}(t,x) & (t,x) \in \ ]0,\infty[\ \times \ ]-\infty,\infty[\\ u(0,x) & = & \delta(x) & \end{array}\right\} \tag{6.4}$$

Hinweis: Die Fourier-Transformierte der Delta-Distribution ist die Konstante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

A 6.1.11 Lösen Sie mit Hilfe der Fourier-Transformation das (verallgemeinerte) Anfangswertproblem

$$\left.\begin{array}{lcll} u_{tt}(t,x) & = & c^2 u_{xx}(t,x) & (t,x) \in \;]0,\infty[\;\times\;]-\infty,\infty[\quad (c>0) \\ u(0,x) & = & 0 & \\ u_t(0,x) & = & \delta(x) & \end{array}\right\} \tag{6.5}$$

Hinweis: Verwenden Sie $\mathcal{F}[\delta(x)](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ und Zusatzaufgabe 14.2 (b).

A 6.1.12 Lösen Sie mit Hilfe der Fourier-Transformation das (verallgemeinerte) Anfangswertproblem

$$\left.\begin{array}{lcll} u_{tt}(t,x) + u_{xx}(t,x) & = & 0 & (t,x) \in \;]0,\infty[\;\times\;]-\infty,\infty[\\ u(0,x) & = & \delta(x) & \end{array}\right\} \tag{6.6}$$

Hinweis: Verwenden Sie $\mathcal{F}[\delta(x)](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ und vergleichen Sie mit $\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-a|x|}](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2a}{a^2+s^2}$.

A 6.1.13 Leiten Sie die Formel von d'Alembert für das Anfangswertproblem der Wellengleichung

$$u_{tt}(t,x) \;=\; u_{xx}(t,x)\;, \qquad u(0,x) \;=\; f(x)\;, \qquad u_t(0,x) \;=\; g(x) \tag{6.7}$$

mittels der Methode der Fourier-Transformation her. Dabei seien f, g und (vgl. Kausalitätsprinzip) ebenso $u(t,\cdot)$ mindestens aus $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ angenommen.

Hinweis: Verwenden Sie die Eulersche Formel und $\mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}as}F(s)\right](x) \;=\; f(x+a)$ sowie den Faltungssatz (vgl. Aufgabe 14.1 (b)) und Zusatzaufgabe 14.2 (b).

A 6.1.14 Zeigen Sie für $f, g \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$:

$$g(x) = \overline{f(-x)} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{F}[g(x)](\omega) \;=\; \overline{\mathcal{F}[f(x)](\omega)}.$$

A 6.1.15 Zeigen Sie analog zum Faltungssatz

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left[(F*G)(k)\right](x) \;=\; \mathcal{F}^{-1}\left[F(r)\right](x) \cdot \mathcal{F}^{-1}\left[G(s)\right](x)\;. \tag{6.8}$$

Kapitel 7

Prüfungsvorbereitung – Theorie

7.1 Fragen zu elementaren Lösungsmethoden & Existenzsätzen

A 7.1.1 Wie sieht eine allgemeine explizite Differentialgleichung erster Ordnung aus?

A 7.1.2 Wie sieht eine allgemeine explizite autonome Differentialgleichung erster Ordnung aus?

Unter welchen Bedingungen hat solch eine Differentialgleichung zu einem Anfangswert lokal genau eine Lösung?

A 7.1.3 Beweisen Sie, dass jede Lösung y der Differentialgleichung $y' = \alpha y$ von der Form $y(x) = C\mathrm{e}^{\alpha x}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$ ist.

A 7.1.4 Beweisen Sie, dass jede Lösung y der Differentialgleichung $y' = 2xy$ von der Form $y(x) = C\mathrm{e}^{x^2}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$ ist.

Leichte Variation:

Zeigen Sie: Gilt für eine differenzierbare Funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gleichung $y'(x) = -x \cdot y(x)$, dann besitzt sie die Form $y(x) = C \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

A 7.1.5 Wie lautet die eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$ zum Anfangswert $x(t_0) = x_0$ mit stetigen $a, b\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I, $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}$?

. . . . (Trennung der Variablen)

A 7.1.6 Sei $y(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'(t) = f(t, y(t))$, und sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit differenzierbarer Umkehrabbildung.
Welche Differentialgleichung löst dann die Funktion $z(t) := h(y(t))$?

. . . . (Exakte Differentialgleichungen)

A 7.1.7 Für $\Phi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $\Phi(x, y(x)) = C$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.
Beweisen Sie, dass y dann die Differentialgleichung $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y(x))$ löst.

A 7.1.8 Bestimmen Sie alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die das Problem $\quad ye^{xy} + f(x,y)y' = 0$ eine exakte Differentialgleichung ist.

.... (Spezielle DGL 2. Ordnung)

A 7.1.9 Zeigen Sie: Erfüllt y die Differentialgleichung $y'' = -f'(y)$, so ist $\frac{1}{2}(y')^2 + f(y)$ konstant.

.... (Existenz & Eindeutigkeit)

A 7.1.10 Wann nennt man eine Funktion f Lipschitz-stetig?

A 7.1.11 Formulieren Sie den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf.

A 7.1.12 Geben Sie die Picard-Iteration an, die dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf zugrundeliegt.

A 7.1.13 Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Warum ist eine stetige Funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, ds$ für alle $t \in \mathbb{R}$ automatisch stetig differenzierbar?

A 7.1.14 Begründen Sie, warum die Lösung einer Differentialgleichung $y' = f(y)$ zum Anfangswert $y(0) = y_0$ auf $[0, \infty)$ eindeutig ist, falls es zu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein $L < \infty$ mit $(f(y) - f(\tilde{y}))(y - \tilde{y}) \leq L(y - \tilde{y})^2$ für alle $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ gibt.

Hinweis: Welcher Differentialungleichung genügt das Quadrat der Differenz zweier Lösungen?

A 7.1.15 Wie lautet der Existenzsatz von Peano?

oder:

Welche Eigenschaft muss die Differentialgleichung erster Ordnung $y' = f(t, y)$ erfüllen, um die Existenz einer Lösung zu garantieren? Formulieren Sie den entsprechenden Existenzsatz.

.... (Stetige Abhängigkeit)

A 7.1.16 Wann sagt man, die Lösungen einer expliziten Differentialgleichung erster Ordnung hängen stetig vom Anfangswert ab?

7.2 Fragen zu linearen Differentialgleichungen/Systemen

A 7.2.1 Wann bilden zwei Lösungen y_1, y_2 der linearen Differentialgleichung $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ zweiter Ordnung mit stetigen Koeffizientenfunktionen a_0, a_1 ein Fundamentalsystem?

Begründen Sie, dass unter den genannten Voraussetzungen ein Fundamentalsystem existiert.

A 7.2.2 Welche Eigenschaften hat die Menge aller Lösungen eines homogenen linearen Systems $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ mit stetigem $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$?

A 7.2.3 Wie sieht eine allgemeine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung aus?

Welche Eigenschaften hat die Menge der Lösungen solch einer Differentialgleichung?

Alternative Formulierung:

Welche Eigenschaften hat die Menge der Lösungen einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung?

A 7.2.4 Existieren Lösungen homogener linearer Systeme $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ mit stetigem $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ immer schon global auf ganz $\mathbb{R}$?

A 7.2.5 Beweisen Sie, dass für ein n-dimensionales homogenes lineares System $x' = A(t)x$ mit einer von $t \in \mathbb{R}$ stetig abhängenden Matrix $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die rechte Seite als Funktion $(t, x) \mapsto A(t)x$ stetig ist und einer lokalen Lipschitzbedingung genügt.

Begründen Sie, warum mindestens n linear unabhängige Lösungen von $x' = A(t)x$ existieren.

A 7.2.6 Wie sieht ein homogenes System von n linearen Differentialgleichungen erster Ordnung aus? Wie kann man jede Lösung eines solchen Systems mit Hilfe von n linear unabhängigen Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ angeben?

A 7.2.7 Wie ist $\exp(tA)$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert?

A 7.2.8 Warum löst $t \mapsto \exp(tA)x_0$ das lineare System $x' = Ax$ zum Anfangswert $x(0) = x_0$?

A 7.2.9 Wie sieht die allgemeine Lösung von $y'(x) = Ay(x)$ für ein $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ aus ?

A 7.2.10 Was versteht man unter einer Wronski-Determinante ?

A 7.2.11 Was verstehen wir unter der Fundamentallösung eines homogenen Differentialgleichungssystems erster Ordnung?

A 7.2.12 Was verstehen wir unter einem Fundamentalsystem einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung ?

A 7.2.13 Wie lautet der Ansatz zur Reduktion der Ordnung für eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung?

.... (Eulersche DGL und lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)

A 7.2.14 Welche Variablensubstitution verwenden wir bei der Lösung von Eulerschen Differentialgleichungen?

7.3 Fragen zur qualitativen Theorie

A 7.3.1 Formulieren Sie das Prinzip der linearisierten Stabilität.

A 7.3.2 Geben Sie ein hinreichendes Kriterium für die asymptotische Stabilität der Nulllösung des linearen Systems $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ an, wobei $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$ und A eine $(n \times n)$-Matrix ist.

Alternative Formulierung:

Geben Sie ein hinreichendes Kriterium für die asymptotische Stabilität der Nulllösung des linearen Systems $y'(t) = Ay(t)$ an, wobei $y(t) \in \mathbb{R}^n$ und A eine $(n \times n)$-Matrix ist.

Alternative Formulierung:

Geben Sie ein hinreichendes Kriterium für die asymptotische Stabilität der Nulllösung eines n-dimensionalen linearen Systems $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ an.

A 7.3.3 Wann heißt $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Gradientenvektorfeld?

A 7.3.4 Welche Eigenschaften verlangt man von einer Lyapunov-Funktion, mit der man die asymptotische Stabilität einer Ruhelage zeigen möchte?

7.4 Fragen zu Rand- und Eigenwertproblem

A 7.4.1 Unter welchen Bedingungen besitzt die lineare Differentialgleichung $(p(x)y'(x))'+q(x)y(x) = g(x)$ zweiter Ordnung unter den Randbedingungen $R_1y := r_{11}y(a) + r_{12}p(a)y'(a) = \eta_1$ und $R_2y := r_{21}y(b) + r_{22}p(b)y'(b) = \eta_2$ eine eindeutige Lösung $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$?

Alternative Formulierung:

Wann besitzt die lineare Differentialgleichung $(p(x)y'(x))'+q(x)y(x) = g(x)$ zweiter Ordnung unter den Randbedingungen $R_1y := r_{11}y(a) + r_{12}p(a)y'(a) = \eta_1$ und $R_2y := r_{21}y(b) + r_{22}p(b)y'(b) = \eta_2$ eine eindeutige Lösung $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$?

A 7.4.2 Unter welchen Bedingungen besitzt die lineare Differentialgleichung $(p(x)y'(x))'+q(x)y(x) = g(x)$ zweiter Ordnung unter den Randbedingungen $y(a) = \eta_1$ und $y(b) = \eta_2$ eine eindeutige Lösung $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$?

A 7.4.3 Unter welchen Voraussetzungen besitzt die Differentialgleichung $y'' + a_0(x)y = b(x)$ mit den Randbedingungen $y'(0) = \eta_1$, $y'(\pi) = \eta_2$, eine eindeutige Lösung?

A 7.4.4 Was verstehen wir unter einem Eigenwertproblem eines linearen Differentialoperators ?

7.5 Fragen zu partiellen Differentialgleichungen

A 7.5.1 Wie ist der Laplace-Operator $u \mapsto \Delta u$ für zweimal stetig differenzierbare Funktionen u auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert?

A 7.5.2 Wie lautet die Wellengleichung für eine Funktion $u(t,x)$?

A 7.5.3 Wie lautet der Laplace-Operator Δ auf dem $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten (r,φ) ?

Kapitel 8

Prüfungsvorbereitung – Anwendung

8.1 Aufgaben zu elementaren Lösungsmethoden & Existenzsätzen

.... (**Nicht**lineare 1. Ordnung: Trennung der Variablen)

A 8.1.1 Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' = y^2x^2$.

A 8.1.2 Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' = 4\mathrm{e}^{-y}x^3$.

A 8.1.3 Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' = y(1-y)$.

.... (**Nicht**lineare 1. Ordnung: TdV + AWP)

A 8.1.4 Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' &= \frac{y^2}{x} \,, \\ y(\mathrm{e}^2) &= 1 \,. \end{cases}$$

A 8.1.5 Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme

(a) $y' = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{y^2}{1+x^2}, \quad y(1) = -3.$

Lsg.: $y(x) = \tan\left(\arctan(x) + \arctan(-3) - \frac{\pi}{4}\right)$

A 8.1.6 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = 1 - y(x)^2$, sowie die speziellen Lösungen zu den fünf Anfangswerten $y(0) = -3, -1, 0, 1, 3$.

Für welche $x \in \mathbb{R}$ existieren diese speziellen Lösungen?

Alternative Formulierung:

Bestimmen Sie Lösungen der Differentialgleichung $y' = 1 - y^2$ zu den drei vorgegebenen Anfangswerten $y(0) = -3, 0, 3$.

Warum gibt es zu jedem der genannten Anfangswerte nur eine Lösung?

Wie lautet das maximale Existenzintervall der Lösungen zu den genannten Anfangswerten?

. . . . (Lineare 1. Ordnung: TdV/Variation der Konstanten)

A 8.1.7 Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' + x^2 y = 2x^2$.

A 8.1.8 Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichungen

(a) $y' = y\cos(x) + \cos(x)$ **Lsg.:** $y(x) = C\mathrm{e}^{\sin(x)} - 1$

A 8.1.9 Gegeben sei die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y'(x) = \cos(x)y(x) + x\mathrm{e}^{\sin(x)}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mittels Variation der Konstanten.

. . . . (Lineare 1. Ordnung: TdV/Variation der Konstanten + AWP)

A 8.1.10 Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme

(a) $y' = \dfrac{y}{4x - x^2}$ für $x \geq 8$, $y(8) = \sqrt{2}$. **Lsg.:** $y(x) = \sqrt[4]{\dfrac{2x}{x-4}}$

(b) $y' - 2xy = x$, $y(0) = 0$. **Lsg.:** $\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x^2} - 1\right)$

A 8.1.11 Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = 2xy + x\mathrm{e}^{x^2} . \tag{8.1}$$

zum Anfangswert $y(0) = 1$ und geben Sie das maximale Lösungsintervall an.

A 8.1.12 Lösen Sie die Differentialgleichung $y'(x) = 3x^2 y(x) + \dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{x^3}$ mit $y(1) = 2\mathrm{e}$.

. . . . (Substitutionen)

A 8.1.13 Lösen Sie zum Anfangswert $y(1) = 2$ die homogene Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} - \frac{x^2}{(y(x))^2} .$$

A 8.1.14 (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = 2(x + y + \pi)^2 + 1 . \tag{8.2}$$

(b) Geben Sie die spezielle Lösung von (8.2) zum Anfangswert $y(\pi) = 0$ an und bestimmen Sie das maximale Lösungsintervall.

A 8.1.15 Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$xy^2y' = (\ln(x))^2 + \frac{y^3}{\ln(x)} , \qquad y(\mathrm{e}) = -3 .$$

Tipp: Beim Differentialgleichungstyp $xy'(x) = f\left(\dfrac{y(x)}{\ln(x)}\right)$ substituiert man $z(x) := \dfrac{y(x)}{\ln(x)}$.

. . . . (Weitere Substitutionen)

(a) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' \;=\; \frac{y^2}{2} - \frac{3}{2x^2} \qquad (x > 0).$$

Tipp: Verwenden Sie die Substitution $\boxed{y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{z(x)}}$.

Lsgsskizze.:

- Substitution liefert nach Ableiten und Umstellen in $z(x)$ die DGL $z'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{z(x)}{x}$
- Trennung der Variablen und Variation der Konstanten liefern $z(x) \;=\; \frac{C}{x} - \frac{x}{4}$
- Rücksubstitution liefert $y(x) = \frac{1}{x} + \frac{4x}{4C - x^2}$

(b) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^3 y' \;=\; x^4 - 3y^2 \qquad (x > 0).$$

Tipp: Verwenden Sie die Substitution $\boxed{y(x) = \frac{1}{z(x)} - x^2}$.

Lsgsskizze.:

- Substitution liefert nach Ableiten und Umstellen $z'(x) = -\frac{6z(x)}{x} + \frac{3}{x^3}$
- Trennung der Variablen und Variation der Konstanten liefern $z(x) \;=\; \frac{C}{x^6} + \frac{3}{4x^2}$
- Rücksubstitution liefert $y(x) = \frac{4x^6}{C + 3x^4} - x^2$

. . . . (Bernoulli-Differentialgleichungen)

A 8.1.16 Lösen Sie die Bernoulli-Differentialgleichung $y' = y + 2xy^2$. **Tipp:** Substituieren Sie $z = \frac{1}{y}$.

A 8.1.17 Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Bernoulli-Differentialgleichung

$$\begin{cases} y' + xy - (2x+2)\mathrm{e}^{-x}y^2 & = \; 0 \; , \\ y(0) & = \; \frac{1}{4} \; . \end{cases}$$

A 8.1.18 Lösen Sie die Bernoulli-Differentialgleichung $y' = xy - (4x^2+2)y^3$ zum Anfangswert $y(0) = 4$.

Hinweis: Substituieren Sie $z(x) = (y(x))^{-2}$.

A 8.1.19 Lösen Sie die Bernoulli-Gleichung $y'(t) + ty(t) + t(y(t))^2 = 0$ zum Anfangswert $y(0) = \frac{1}{2}$, indem Sie diese durch Multiplikation mit $-\frac{1}{(y(t))^2}$ und anschließende Substitution von $\frac{1}{y(t)}$ auf eine lineare Differentialgleichung zurückführen.

A 8.1.20 Besitzt die Bernoulli-Differentialgleichung $y'(x) = x\sqrt{y(x)} - y(x)$ zum Anfangswert $y(0) = 4$ eine eindeutige Lösung?

Ist auf das obige Anfangswertproblem der Satz von Picard-Lindelöf anwendbar?

A 8.1.21 Lösen Sie die Bernoulli-Differentialgleichung $y' - y + \operatorname{sign}(y)\sqrt{|y|} = 0$ mit Hilfe der Substitution $z := \operatorname{sign}(y)\sqrt{|y|}$ zum Anfangswert $y(0) = \frac{1}{4}$.

Ist die Lösung zum Anfangswert $y(0) = \frac{1}{4}$ auf ganz $[0, \infty)$ eindeutig ?

.... (Exakte Differentialgleichungen)

A 8.1.22 Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung $(2xy - x^2)y'(x) = 2xy - y^2$ eine exakte Differentialgleichung ist, und bestimmen Sie die Lösung zum Anfangswert $y(1) = 1$.

A 8.1.23 Bestimmen Sie die Lösung der exakten Differentialgleichung $y^2 - x^2 + 2xyy' = 0$ zum Anfangswert $y(1) = 1$.

A 8.1.24 Bestimmen Sie für die Gleichung

$$(2\sin(xy) + xy\cos(xy)) \ + \ x^2\cos(xy)y' \ = \ 0$$

einen integrierenden Faktor $\mu \equiv \mu(x)$ und geben Sie die allgemeine Lösung an.

A 8.1.25 Prüfen Sie, ob die Differentialgleichung

$$(x^2y\mathrm{e}^{xy} + 2x\mathrm{e}^{xy}) + (x^3\mathrm{e}^{xy} + 6y^2)y' \ = \ 0$$

exakt ist und ermitteln Sie gegebenenfalls die Lösungen der Form $\Phi(x, y) = C$.

A 8.1.26 Prüfen Sie, ob die Differentialgleichung

$$x^2y\mathrm{e}^{xy} + (x^3\mathrm{e}^{xy} + 6y^2)y' \ = \ 0$$

exakt ist und ermitteln Sie gegebenenfalls die Lösungen der Form $\Phi(x, y) = C$.

Lsg.:

Die Differentialgleichung ist exakt, wenn sie von der Form $\Phi_x + \Phi_y \cdot y' = 0$ mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion Φ ist, wenn also $(\Phi_x)_y = (\Phi_y)_x$ gilt. Dies ist hier **nicht** der Fall, denn es sind

$$\begin{aligned} (x^2y\mathrm{e}^{xy})_y &= x^2\mathrm{e}^{xy} \ + \ x^3y\mathrm{e}^{xy}, \\ (x^3\mathrm{e}^{xy} + 6y^2)_x &= 3x^2\mathrm{e}^{xy} \ + \ x^3y\mathrm{e}^{xy}. \end{aligned}$$

Somit suchen wir einen integrierenden Faktor aus dem Ansatz

$$\frac{\mu_y}{\mu} \ = \ \frac{(x^3\mathrm{e}^{xy} + 6y^2)_x - (x^2y\mathrm{e}^{xy})_y}{x^2y\mathrm{e}^{xy}} \ = \ \frac{2x^2\mathrm{e}^{xy}}{x^2y\mathrm{e}^{xy}} \ = \ \frac{2}{y} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(y) \ = \ y^2 \ .$$

In der Tat ist die Differentialgleichung

$$x^2y^3\mathrm{e}^{xy} + (x^3y^2\mathrm{e}^{xy} + 6y^4)y' \ = \ 0$$

nun exakt, denn es sind

$$\begin{aligned} (x^2y^3\mathrm{e}^{xy})_y &= 3x^2y^2\mathrm{e}^{xy} \ + \ x^3y^3\mathrm{e}^{xy}, \\ (x^3y^2\mathrm{e}^{xy} + 6y^4)_x &= 3x^2y^2\mathrm{e}^{xy} \ + \ x^3y^3\mathrm{e}^{xy}. \end{aligned}$$

Somit muss einerseits $\Phi(x, y) \ = \displaystyle\int (x^3y^2\mathrm{e}^{xy} + 6y^4)dy \ = \ c(x) + [x^2y^2 - 2xy + 2]\mathrm{e}^{xy} + \frac{6}{5}y^5$ und andererseits $c'(x) + x^2y^3\mathrm{e}^{xy} = x^2y^3\mathrm{e}^{xy}$, also $c'(x) = 0$ gelten. Demnach sind die Lösungen von der Gestalt

$$[x^2y^2 - 2xy + 2]\mathrm{e}^{xy} + \frac{6}{5}y^5 \ = \ C \ .$$

A 8.1.27 Zeigen Sie, dass die folgenden Differentialgleichungen exakt sind. Ermitteln Sie die Lösungen:

(a) $(2x^3 + 3y) + (3x + y - 1)y' \; = \; 0$ zum Anfangswert $y(0) = 2$.

(b) $(y^2 \mathrm{e}^{xy^2} + 4x^3) + (2xy\mathrm{e}^{xy^2} - 3y^2)y' \; = \; 0$

A 8.1.28 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (oL)

$$y^2 + 4x^2 y + (x^3 + xy)y' \; = \; 0$$

A 8.1.29 Gegeben seien die Differentialgleichungen (oL)

$$xy^2 + y - xy' \; = \; 0, \tag{8.3}$$

$$x + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}y' \; = \; 0 \tag{8.4}$$

(a) Zeigen Sie, dass genau eine der beiden Differentialgleichungen exakt ist.

(b) Finden Sie einen geeigneten integrierenden Faktor, um aus der nicht-exakten Differentialgleichung eine exakte zu machen.

(c) Geben Sie die Lösungen beider Differentialgleichungen an. Unterscheiden sich diese?

A 8.1.30 Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\left.\begin{array}{rcl} y'' &=& \dfrac{1}{4\sqrt{y}}, \\ y(0) &=& 1, \\ y'(0) &=& 1. \end{array}\right\} \tag{8.5}$$

Tipp: Verwenden Sie frühzeitig die Anfangsdaten, um etwaige Konstanten zu bestimmen.

A 8.1.31 Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Welche der folgenden Behauptungen über das Anfangswertproblem

$$y'(x) \;=\; f(x,y)\;, \qquad y(0) \;=\; a$$

treffen zu? Geben Sie eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Es gibt ein $\varepsilon > 0$ und eine Lösung $y\colon\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\to \mathbb{R}$.

(b) Falls f eine lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt, so existiert eine Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(c) Falls f stetig differenzierbar ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass keine zwei verschiedenen Lösungen $y_1, y_2\colon\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\to \mathbb{R}$ existieren.

(d) Wenn f eine lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt, so gibt es keine zwei verschiedenen Lösungen $y_1, y_2\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$

A 8.1.32 Gegeben sei die Differentialgleichung $y'(x) = \mathrm{e}^{x^2+(y(x))^2}$ und der Anfangswert $y(0) = c \in \mathbb{R}$. Begründen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen.

(a) Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $y\colon\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\to \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem löst.

(b) Die Lösung $y\colon\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\to \mathbb{R}$ aus (i) ist eindeutig.

Spezialfall:

Begründen Sie, warum das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' &= \mathrm{e}^{x^2+y^2}\;, \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

A 8.1.33 Geben Sie eine Differentialgleichung $y'(x) = f(y(x))$ mit stetig differenzierbarer rechter Seite $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und einen Anfangswert $y(0)$ an, zu dem die Lösung $y(x)$ nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert.

A 8.1.34 Bestimmen Sie mindestens zwei verschiedene Lösungen von $y'(x) = |x|\sqrt{|y|}$ zum Anfangswert $y(0) = 0$.

Warum widerspricht dies nicht dem Satz von Picard-Lindelöf?

A 8.1.35 Führen Sie die ersten beiden Schritte der Picard-Iteration für die DGL $y'(t) = -(y(t))^2$ und den Startwert $y(0) = 1$ durch.

Wie lautet die exakte Lösung? Was hat die durch Picard-Iteration gewonnene Näherungslösung mit der exakten Lösung zu tun?

A 8.1.36 Bestimmen Sie das maximale Intervall $[0,T]$, $T>0$, auf dem die Lösung von $y' = \sqrt{|y|}$ zum Anfangswert $y(0) = -\frac{1}{4}$ eindeutig ist.

Geben Sie zwei verschiedene Lösungen zum Anfangswert $y(0) = -\frac{1}{4}$ auf $[0,\infty)$ an.

Alternativer Anfangswert:

Bestimmen Sie das maximale Intervall $[0,T]$, $T>0$, auf dem die Lösung von $y' = \sqrt{|y|}$ zum Anfangswert $y(0) = -1$ eindeutig ist.

Geben Sie zwei verschiedene Lösungen zum Anfangswert $y(0) = -1$ auf $[0,\infty)$ an.

A 8.1.37 Geben Sie eine Differentialgleichung $y' = f(y)$ mit stetiger rechter Seite an, für die es zu einem Anfangswert mehrere Lösungen gibt.

Ermitteln Sie mindestens zwei verschiedene Lösungen zu diesem Anfangswert und begründen Sie, warum dies nicht dem Satz von Picard-Lindelöf widerspricht.

.... (Stetige Abhängigkeit)

A 8.1.38 (a) Beweisen Sie, dass jede Lösung y der Differentialgleichung $y' = 2xy$ von der Form $y(x) = C\mathrm{e}^{x^2}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass zwei Lösungen $y, \tilde{y}$ der Differentialgleichung aus Aufgabenteil (a) zu (beliebig nahe beieinander gelegenen) Anfangswerten $y_0 \neq \tilde{y_0}$ in $x=0$ die Eigenschaft $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |y(x) - \tilde{y}(x)| = \infty$ haben.

(c) Warum widerspricht (b) nicht dem Satz über die stetige Abhängigkeit vom Anfangswert?

A 8.1.39 (a) Bestimmen Sie die Lösung $y(t;y_0)$ der Differentialgleichung $y' = -t^2y^2$ zu einem beliebigen Anfangswert $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie in Abhängigkeit von y_0 das maximale Existenzintervall der Lösung $y(t;y_0)$ an.

(c) Warum gibt es zu jedem Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}$ nur eine Lösung?

(d) Zeigen Sie $\lim\limits_{t \nearrow \sqrt[3]{\frac{3}{|y_0|}}} y(t;y_0) = -\infty$ für die Lösung $y(t;y_0)$ zum Anfangswert $y_0 < 0$.

(e) Hängen die Lösungen $y(t;y_0)$ stetig vom Anfangswert y_0 ab?

A 8.1.40 Ermitteln Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ die Lösung $y_n(t)$ der Differentialgleichung $y'(t) = \mathrm{e}^y \sin(t)$ zum Anfangswert $y_n(0) = -\ln(2) - \frac{1}{n}$.

Zeigen Sie, dass jede der Lösungen y_n auf ganz $\mathbb{R}$ existiert, dass aber die Lösung zum Anfangswert $y(0) = -\ln(2)$ nur auf $]-\pi,\pi[$ existiert.

Warum widerspricht dies nicht dem Satz über die stetige Abhängigkeit vom Anfangswert?

A 8.1.41 Ermitteln Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ die maximale Lösung $y_n(t)$ der Differentialgleichung $y'(t) = \mathrm{e}^{y(t)}\cos(t)$ zum Anfangswert $y_n(0) = -\frac{1}{n}$.

Zeigen Sie, dass jede der Lösungen y_n auf ganz $\mathbb{R}$ existiert, dass aber die Lösung zum Anfangswert $y(0) = 0$ nur auf $\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ existiert.

Warum widerspricht dies nicht dem Satz über die stetige Abhängigkeit vom Anfangswert?

8.2 Aufgaben zu linearen Differentialgleichungen/Systemen

.... (Reduktion nach d'Alembert – lineare DGL)

A 8.2.1 Die lineare Differentialgleichung $y'' - \frac{2}{x^2}y = 0$ zweiter Ordnung hat die Lösung $y_1 = x^2$. Bestimmen Sie eine zweite Lösung y_2, so dass y_1, y_2 ein Fundamentalsystem ist.

.... (Eigenschaften von Fundamentalsystemen)

A 8.2.2 Gegeben seien die Funktionen $y_1, y_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $y_1(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad y_2(x) := \begin{pmatrix} e^x \\ x^2 e^x \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Vektoren $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear abhängig sind, während die Funktionen y_1, y_2 linear unabhängig sind.

(b) Kann eine stetige Funktion $A \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ existieren, so dass y_1 und y_2 beides Lösungen von $y'(x) = A(x)y(x)$ sind ?

Variation:

Es seien die Funktionen $y_1, y_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $y_1(x) := \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_2(x) := \begin{pmatrix} x e^x \\ e^x \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Vektoren $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear abhängig sind, während die Funktionen y_1, y_2 linear unabhängig sind.

(b) Kann eine stetige Funktion $A \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ existieren, so dass y_1 und y_2 beides Lösungen von $y'(x) = A(x)y(x)$ sind ?

.... (**Konstante Koeffizienten:** Lineare DGL 2. Ordung)

A 8.2.3 Zeigen Sie, dass jede Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y'' + 9y = 0$ beschränkt bleibt, jedoch die Lösungen der inhomogenen Gleichung

$$y'' + 9y = \sin(3x)$$

unbeschränkt sind.

A 8.2.4 Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 5y = e^{3x} .$$

Alternative Inhomogenität:

Finden Sie die allgemeine Lösung von $y'' - 4y' + 5y = 8\cos(x) + e^{2x}$.

A 8.2.5 Finden Sie die allgemeine Lösung von $y'' - 2y' + y = e^{-x}$.

A 8.2.6 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

(a) $2y'' - 2y' - 12y = 5e^{1-2x}$. **Lsg.:** $y(x) = c_1 e^{3x} + \left(c_2 - \frac{x}{2}e\right) e^{-2x}$

(b) $2y'' + 6y' - 8y = 2e^{x+1}$. (oL)

(c) $y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$. **Lsg.:** $y(x) = \left(C_1 x + C_2 + \frac{x^3}{6}\right) e^{-2x}$

(d) $y'' + 4y' + 4y \;=\; x^{-2}\mathrm{e}^{-2x},\; x > 0.$ **Lsg.:** $y(x) \;=\; (C_1 x + C_2 - \ln(x))\mathrm{e}^{-2x}$

. . . . (**Konstante Koeffizienten:** Lineare DGL 2. Ordung + AWP)

A 8.2.7 Lösen Sie $y'' + 4y \;=\; \mathrm{e}^x$ zu den Anfangsdaten $y(0) = 0, y'(0) = 1.$ (oL)

. . . . (**Konstante Koeffizienten:** Lineare DGL 3. Ordung)

A 8.2.8 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $y''' - y'' - y' + y = f$ im homogenen Fall $f := 0$.

Wie lautet die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung im inhomogenen Fall $f(t) := 2\sin(t) + 4\mathrm{e}^t$?

Alternative Inhomogenität inklusive lin. Unabh.:

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung von $y'''(t) - y''(t) - y'(t) + y(t) = b(t)$ zunächst im homogenen Fall $b(t) := 0$ und dann für die Inhomogenität $b(t) := \mathrm{e}^{-t}$.

Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit Ihrer gefundenen Fundamentallösungen.

A 8.2.9 Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung von $y''' + y'' + y' + y = f$ im homogenen Fall $f := 0$.

Wie lautet die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung im inhomogenen Fall $f(t) := 4\mathrm{e}^t + 4\mathrm{e}^{-t}$?

Alternative Inhomogenität:

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung von $y'''(t) + y''(t) + y'(t) + y(t) = b(t)$ zunächst im homogenen Fall $b(t) := 0$ und dann für die Inhomogenität $b(t) := \mathrm{e}^{-t}$.

Berechnen Sie die Wronski-Determinante $W(t)$ des gefundenen Fundamentalsystems.

Was besagt $W(t) \neq 0$?

A 8.2.10 Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der inhomogenen Differentialgleichungen

(a) $y''' - 11y' + 20y \;=\; \sin(2t) - 8\cos(2t).$

(b) $y''' - 2y'' + y' - 2y \;=\; x\mathrm{e}^{2x}.$

Lsg.: $y(x) \;=\; C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + \dfrac{1}{50}\left(5x^2 - 8x + C_3\right)\mathrm{e}^{2x}$

. . . . (**Konstante Koeffizienten:** Lineare DGL 3. Ordung + AWP)

A 8.2.11 Lösen Sie die Gleichung $y''' - 2y'' - 5y' + 6y \;=\; 0$

mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ und $y''(0) = 0$.

A 8.2.12 Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$y''' - 6y'' + 11y' - 6y \;=\; -24$ zu den Anfangsdaten $\left\{\begin{array}{rcl} y(0) &=& 10, \\ y'(0) &=& 14, \\ y''(0) &=& 36. \end{array}\right.$

Alternative Inhomogenität:

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$y''' - 6y'' + 11y' - 6y \;=\; 24$ zu den Anfangsdaten $\left\{\begin{array}{rcl} y(0) &=& 10, \\ y'(0) &=& 14, \\ y''(0) &=& 36. \end{array}\right.$

A 8.2.13 Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$y''' + y'' + 9y' + 9y \;=\; 100\mathrm{e}^x \qquad \text{zu den Anfangsdaten} \qquad \begin{cases} y(0) &= \;\; 7, \\ y'(0) &= \;\; 7, \\ y''(0) &= -3. \end{cases}$$

....(**Euler**sche Differentialgleichungen)

A 8.2.14 Finden Sie die allgemeine Lösung der Euler-Differentialgleichung $x^2y'' - 2y \;=\; x^2 + \dfrac{1}{x}$, $x > 0$.

A 8.2.15 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Eulerschen Differentialgleichung

$$x^3y''' - 2xy' + 4y \;=\; 0\ .$$

....(**Konstante Koeffizienten:** Systeme 2. Ordung)

A 8.2.16 Finden Sie die allgemeine Lösung von $y'(x) = Ay(x)$ für $A := \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

A 8.2.17 (a) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem (oL)

$$\begin{aligned} x'(t) &= 6x(t) + 9y(t) \\ y'(t) &= 4x(t) - 3y(t)\ . \end{aligned}$$

(b) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem (oL)

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + 8y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + y(t)\ . \end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen des Systems: (oL)

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) - 4y(t) \\ y'(t) &= 4x(t) - 7y(t)\ . \end{aligned}$$

A 8.2.18 Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y' \;=\; \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} y \;+\; \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x} \\ -2\mathrm{e}^x - 5\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}\ .$$

A 8.2.19 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $y'(x) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} y(x) + b(x)$ zunächst im homogenen Fall $b(x) := 0$ und dann für die Inhomogenität $b(x) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ -\mathrm{e}^x \end{pmatrix}$.

Alternative Formulierung inklusive alternativer Inhomogenität:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Systems $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{y} + f$ bei $f := 0$.

Wie lautet die Lösung im Fall $f := \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$?

A 8.2.20 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Systems $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y} + f$ bei $f := 0$.

Wie lautet die Lösung im Fall $f := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$?

. . . . (**Konstante Koeffizienten:** Systeme 2. Ordung + AWP)

A 8.2.21 Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'(t) = Ay(t)$, $y(0) = y_0$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} , \quad y_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

A 8.2.22 Lösen Sie das Anfangswertproblem (oL)

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

. . . . (**Konstante Koeffizienten:** Systeme 3. Ordung)

A 8.2.23 Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -7 & 4 & 5 \\ -3 & -3 & 12 \end{pmatrix} y .$$

A 8.2.24 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$.

A 8.2.25 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $x' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} x$.

Alternative Formulierung:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \mathbf{b}$ im Fall $\mathbf{b} = 0$.

Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung für $\mathbf{b} = (3, 2, 1)^{\mathrm{T}}$.

8.3 Aufgaben zur qualitativen Theorie

.... (Stabilität linearer Systeme)

A 8.3.1 Überführen Sie die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = ay' + by$ für Konstanten $a, b > 0$ in ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung.

Zeigen Sie, dass der Ursprung für dieses System ein instabiler Sattelpunkt ist.

A 8.3.2 Gegeben sei das lineare System

$$y'(t) \;=\; Ay(t) \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & \gamma & 2 & 3 \\ -1 & 0 & \gamma & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} y(t)$$

(a) Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten des stationären Punktes $(0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ in Abhängigkeit vom Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems für $\gamma = 0$.

.... (Prinzip der linearisierten Stabilität)

A 8.3.3 Beweisen Sie, dass ebenso das zu $y'' = ay' + by + f(y)$ gehörige System im Ursprung einen instabilen Sattel besitzt, falls $f(0) = 0 = f'(0)$ gilt.

A 8.3.4 Überführen Sie die Gleichung zweiter Ordnung $y'' = -y' - y - \sinh(y)$ in das zugehörige System erster Ordnung, und ermitteln Sie die Linearisierung dieses Systems im Nullpunkt.

Ist die Nulllösung asymptotisch stabil?

A 8.3.5 Überführen Sie die Gleichung zweiter Ordnung $y'' = -y' - y - \sin(y)$ in das zugehörige System erster Ordnung, und ermitteln Sie die Linearisierung dieses Systems im Nullpunkt.

Ist die Nulllösung asymptotisch stabil?

A 8.3.6 Gegeben sei das System (oL)

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(1.5 - 0.5y) \\ y'(t) &= y(-0.5 + x)\ . \end{aligned}$$

(a) Geben Sie die kritischen Punkte des Systems an.

(b) Formen Sie das System zu einem fastlinearen in der Nähe der kritischen Punkte um.

(c) Bestimmen Sie Typus und Stabilität des kritischen Punktes $(0,0)$.

(d) Was kann man über den anderen Punkt sagen?
Zeigen Sie, dass die Trajektorien zu einer Kurvenschar $H(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, gehören.

A 8.3.7 In dieser Aufgabe zeigen wir, wie kleine Änderungen in den Koeffizienten eines linearen Differentialgleichungssystems den kritischen Punkt beeinflussen können. (oL)

(a) Bestimmen Sie den Typ und die Stabilität des kritischen Punktes $(0,0)$ für das System:

$$Y' \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Y.$$

(b) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ beliebig klein. Diskutieren Sie den Typ und die Stabilität des kritischen Punktes $(0,0)$ in Abhängigkeit vom Parameter $\varepsilon \in \mathbb{R}$ für das System

$$Y' \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \varepsilon & -1 \end{pmatrix} Y.$$

A 8.3.8 Sei $f(x,y) := (y^2 - x^2, 2xy)$. Ist f ein Gradientenvektorfeld auf $\mathbb{R}^2$?

A 8.3.9 Bestimmen Sie die Ruhelagen des Systems $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^3 + y \\ -x - y^5 \end{pmatrix}$ und zeigen Sie, dass man das Prinzip der linearisierten Stabilität nicht anwenden kann.

Finden Sie für das System eine Lyapunov-Funktion der Form $V(x,y) := ax^2 + by^2$ mit $a, b > 0$ und zeigen Sie mit Hilfe von V die asymptotische Stabilität der gefundenen Ruhelagen.

A 8.3.10 Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha - \beta y)x \\ (\delta x - \gamma - \epsilon z)y \\ (\zeta y - \eta)z \end{pmatrix}$$

in $[0,\infty)^3$ für Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta > 0$ mit $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\eta}{\zeta}$ und untersuchen Sie deren Stabilität mittels des Prinzips der linearisierten Stabilität/Instabilität.

Alternative Formulierung:

Zeigen Sie, dass das nichtlineare System

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha - \beta y)x \\ (\delta x - \gamma - \varepsilon z)y \\ (\zeta y - \eta)z \end{pmatrix}$$

für Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta > 0$ mit $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\eta}{\zeta}$ in $[0,\infty)^3$ nur die Ruhelagen $(0,0,0)$ und $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}, 0)$ besitzt, und untersuchen Sie deren Stabilität mit Hilfe des Kriteriums aus (a).

Zeigen Sie, dass $V(x,y,z) := \delta x - \gamma \log(x) + \beta y - \alpha \log(y) + \beta \frac{\varepsilon}{\eta} z^2$ auf einer Umgebung der Ruhelage $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}, 0)$ in $[0,+\infty)^3$ eine Lyapunov-Funktion ist.

A 8.3.11 Gegeben sei das folgende System **S** von Differentialgleichungen erster Ordnung (oL)

$$\left.\begin{array}{rcl} x' &=& -x + y - x^3 - xy^2, \\ y' &=& -y - x - x^2 y - y^3. \end{array}\right\} \tag{8.6}$$

(a) Zeigen Sie, dass der Ursprung der einzig kritische Punkt ist.

(b) Konstruieren Sie eine geeignete Lyapunov-Funktion der Form $V(x,y) = ax^2 + cy^2$, wobei a und c zu bestimmen sind. Zeigen Sie mit Hilfe der so erhaltenen Lyapunov-Funktion, dass der Ursprung asymptotisch stabil ist.

(c) Geben Sie die Linearisierung von **S** in der Nähe des Ursprungs an.
Geben Sie dann den Typ und die Stabilität des Ursprungs an.

8.4 Aufgaben zu Rand- und Eigenwertproblemen

. . . . (Randwertprobleme)

A 8.4.1 Wir betrachten die Randwertprobleme

(a)
$$\left.\begin{array}{lcl} y''-2y'-3 &=& f(x)\ , \\ y'(0) &=& \eta_1\ , \\ y(b)+2y'(b) &=& \eta_2\ . \end{array}\right\}$$

(b)
$$\left.\begin{array}{lcl} y''-2y'-3y &=& f(x)\ , \\ y'(0) &=& \eta_1\ , \\ y(b)+2y'(b) &=& \eta_2\ . \end{array}\right\}$$

Für welche $b > 0$ besitzt das jeweilige Randwertproblem eine eindeutige Lösung für alle stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und alle $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$.

A 8.4.2 (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$x^2y''-3xy'+3y \;=\; 0\ , \quad x \in \,]1,2[$$

mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = x^\lambda$.

(b) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Randwertaufgabe

$$\left.\begin{array}{rcll} x^2y''-3xy'+3y &=& h(x)\ , & x \in \,]1,2[\\ y(1)+y'(1) &=& \gamma_1\ , & \\ y(2)+\alpha y'(2) &=& \gamma_2\ , & \alpha,\gamma_1,\gamma_2 \in \mathbb{R}, \end{array}\right\} \tag{8.7}$$

für beliebige $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ und beliebige auf $[1,2]$ stetige Funktionen $h(x)$ eindeutig lösbar ?

(c) Lösen Sie für $\alpha = 3$ das obige Randwertproblem (8.7) mit der Inhomogenität $h(x) = 2x^3$ und für die Randwerte $\gamma_1 = 9$, $\gamma_2 = 44\ln(2) + 66$.

A 8.4.3 Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $y(x) := x^k$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $(x^2y'(x))' - 2y(x) = 0$ zweiter Ordnung.

Wie lautet die Lösung zu den Randbedingungen $y(1) = 2$ und $y(2) = \frac{9}{4}$?

Lösen Sie die inhomogene lineare Differentialgleichung $(x^2y'(x))'-2y(x) = 4$ zweiter Ordnung auf dem Intervall $[1,2]$ unter den Randbedingungen $y(1) + y'(1) = 2$ und $y(2) = 2$.

. . . . (Greensche Funktionen)

A 8.4.4 Finden Sie jeweils die Greensche Funktion für die Randwertprobleme (oL)

(a) $\left\{\begin{array}{rcll} (\mathrm{e}^x u'(x))' &=& 0, & \text{für } 0<x<1, \\ u'(0) &=& 0, & \\ u(1) &=& 0. & \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rcll} (\mathrm{e}^{-x} u'(x))' &=& 0, & \text{für } 0<x<1, \\ u(0) &=& 0, & \\ u'(1) &=& 0. & \end{array}\right.$

A 8.4.5 Auf dem Intervall $[0,\pi]$ sei mit einer stetigen Funktion g das folgende Randwertproblem gegeben: (oL)

$$\left.\begin{array}{rcl} y''+9y &=& g(x), \\ y(0)\ +\ y'(0) &=& 1, \\ y(\pi) &=& 0. \end{array}\right\} \tag{8.8}$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Randwertaufgabe eindeutig lösbar ist.

(b) Bestimmen Sie die Lösung für den Fall $g(x) = \mathrm{e}^x$.

. . . . (Eigenwertprobleme)

A 8.4.6 Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des linearen Differentialoperators $Ly = -y''$ unter den Randbedingungen $y(0) = 0 = y(1)$.

A 8.4.7 Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des linearen Differentialoperators $Ly = -y'' + 5y$ unter den Randbedingungen $y'(0) = 0 = y(3)$.

A 8.4.8 Zeigen Sie, dass das Randwertproblem $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$, $y(0) = 0 = y(\pi)$, für alle $\omega \in [0, \infty) \setminus \mathbb{N}$ nur die triviale Lösung besitzt.

Alternative Randbedingungen:

Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$ unter den Randbedingungen $y'(0) = 0 = y'(\pi)$ für alle $\omega \in [0, \infty) \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})$ nur die triviale Lösung besitzt.

8.5 Aufgaben zu partiellen Differentialgleichungen

A 8.5.1 Lösen Sie mit Hilfe der Formel von d'Alembert die Wellengleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ $(c > 0)$ zu den Anfangswerten $u(0, x) = \exp(-x^2)$ und $u_t(0, x) = \cos(x)$.

. . . . (Separationsansatz)

A 8.5.2 Lösen Sie die partielle Differentialgleichung (Laplace-Gleichung) $u_{xx} + u_{yy} = 0$ auf dem Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ unter den Randbedingungen $u(0, y) = 0 = u(1, y)$, $u(x, 0) = 0$ und $u(x, 1) = \sin(2\pi x)$ mit Hilfe des Ansatzes $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

Variation der Randdaten und des Gebietes

Lösen Sie die Laplace-Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ auf dem Rechteck $[0, \pi] \times [0, 1]$ unter den Randbedingungen $u(0, y) = 0 = u(\pi, y)$, $u(x, 0) = 0$ und $u(x, 1) = \sin(5x)$ mit Hilfe des Separationsansatzes $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

A 8.5.3 Lösen Sie die partielle Differentialgleichung $u_t = u_{xx}$ auf $\mathbb{R} \times [0, \pi]$ unter den Randbedingungen $u(t, 0) = 0 = u(t, \pi)$ zum Anfangswert $u(0, x) = \sin(2x)$ mittels des Ansatzes $u(t, x) = T(t)X(x)$ (Trennung der Variablen).

A 8.5.4 Lösen Sie die partielle Differentialgleichung (Diffusionsgleichung) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ unter den Randbedingungen $\dfrac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, \pi)$ für alle $t > 0$

(a) zum Anfangswert $u(0, x) = 1 + \cos(2x)$;

(b) zum Anfangswert $u(0, x) = \cos(3x)$;

(c) zum Anfangswert $u(0, x) = 3\cos(5x) - 4$;

mit Hilfe des Separationsansatzes $u(t, x) = T(t)X(x)$.

. . . . (Polarkoordinaten)

A 8.5.5 Lösen Sie die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ im Halbkreis $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\,,\ x^2 + y^2 < 1\}$ unter den Randbedingungen $u = 0$ bei $y = 0$ und $u = \sin(3\varphi)$ auf dem durch die Winkelvariable $\varphi \in (0, \pi)$ parametrisierten Halbkreis $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\,,\ x^2 + y^2 = 1\}$.

Sporadisches Fachwortverzeichnis