# Funktionalanalysis

# Skript mit Aufgaben

Prof. Dr. K.P. Rybakowski

Universität Rostock[1]

Sommersemester 2000/2011/2016/2017

zuletzt aktualisiert am 15. September 2017

[1]erstellt von Dr. Katja Ihsberner

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Wiederholung grundlegender Begriffe

Aus der Analysis bzw. Linearen Algebra sollten die folgenden Begriffe bekannt sein.

## 1.1 Topologische, metrische und normierte Räume

**Definition 1.1** (Gruppen/Körper/Vektorräume (lineare Räume))**.**

(a) Ein Tupel $(M, *)$ mit einer nichtleeren Menge $M$, auf der eine Abbildung $* : M \times M \longrightarrow M$, $(m, n) \mapsto m * n$, definiert ist, heißt **Gruppe**, falls die folgenden Axiome erfüllt sind:

(i) $\forall k, l, m \in M \colon k * (l * m) = (k * l) * m$ (Assoziativität)

(ii) $\exists m_0 \; \forall m \in M \colon m * m_0 = m = m_0 * m$ (Existenz eines neutralen Elementes)

(iii) $\forall m \in M \; \exists n \in M \colon m * n = m_0 = n * m$ (Existenz von Inversen)

Wir sprechen von einer **kommutativen** oder **abelschen** Gruppe, falls zusätzlich gilt:

(iv) $\forall k, l \in M \colon k * l = l * k$ (Kommutativität)

(b) Ein **Körper** ist ein Tripel $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge $\mathbb{K}$, auf der zwei assoziative Verknüpfungen $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $(k_1, k_2) \mapsto k_1 + k_2$ und $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $(k_1, k_2) \mapsto k_1 \cdot k_2$ so definiert sind, dass

(1) $(\mathbb{K}, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $e_+$ ist,

(2) $(\mathbb{K} \setminus e_+, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist und zusätzlich

(3) $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ erfüllt wird. (Distributivität)

Falls klar ist, welche Operationen gemeint sind, schreiben wir einfach $\mathbb{K}$. Der Einfachheit halber sei im Folgenden $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mit den üblichen Operationen.

(c) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Menge $X$ zusammen mit einer Verknüpfung $+\colon X \times X \to X$, genannt die Addition auf $X$, und einer (äußeren) Operation $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$, genannt skalare Multiplikation, heißt ein $\mathbb{K}$**-Vektorraum** oder ein **linearer Raum über** $\mathbb{K}$, falls gilt:

(i) $(X, +)$ ist eine abelsche Gruppe und

(ii) für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $x, y \in X$ gilt

$$1_{\mathbb{K}} \cdot x = x, \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x, \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y, \quad (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x).$$

**Definition 1.2** (topologische, Hausdorffsche, metrische, normierte und Euklidische Räume)**.**

(a) Sei $M \neq \emptyset$. Ein System von Teilmengen $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(M)$ heißt **Topologie** auf $M$, falls:

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $M \in \mathcal{T}$
- Beliebige Vereinigungen sowie endliche Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{T}$ liegen in $\mathcal{T}$.

Das Paar $(M, T)$ nennt man einen **topologischen Raum**, die Elemente von $T$ **offen**.

(b) Ein topologischer Raum $(M, T)$ heißt **Hausdorff-Raum**, wenn er das **Hausdorffsche Trennungsaxiom** erfüllt, d.h., wenn zu je zwei (verschiedenen) Punkten $x, y \in M$ offene Mengen (sogenannte offene Umgebungen) $U, V \in T$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$ existieren.

(c) Sei $M \neq \emptyset$ beliebig. Eine Abbildung $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ heißt **Metrik** auf $M$, falls gilt

(i) $\forall x, y \in M\colon d(x, y) = 0 \iff x = y$ (Definitheit),

(ii) $\forall x, y \in M\colon d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),

(iii) $\forall x, y, z \in M\colon d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Ist $d$ eine Metrik auf $M$, so heißt das Paar $(M, d)$ **metrischer Raum**. Für je zwei Elemente $x, y \in M$ heißt die Zahl $d(x, y)$ der *Abstand* oder die *Distanz* von $x$ und $y$.

(d) Sei $X$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|.\|\colon X \to [0, \infty[$ heißt eine **Norm** auf $X$, wenn für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ folgende drei Eigenschaften[1] erfüllt sind:

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (Definitheit),

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (Homogenität),

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung).

Ein Vektorraum $X$, versehen mit einer Norm $\|.\|$, heißt ein **normierter Raum** $(X, \|.\|)$.

(e) Auf einem reellen Vektorraum $X$ heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon X \times X \to \mathbb{R}$ **Skalarprodukt** oder **Innenprodukt**, falls für alle $x, y, z \in X$ und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ (Linearität in erster Komponente)

(ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (Symmetrie)

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ (Positiv-Definitheit)

**Bem.:** Durch Eigenschaft (ii) haben wir auch Linearität in der zweiten Komponente. Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $X$, dann nennen wir $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einen **Euklidischen $\mathbb{R}$-Vektorraum**.

**Definition 1.3** (offene Menge, offene Kugel, Einheitskugel)**.**

(a) In einem metrischen Raum $(M, d)$ nennen wir eine Menge $U \subset M$ genau dann **offen**, wenn zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die offene Kugel $B_\varepsilon(x)$ um $x$ von Radius $\varepsilon$ bezüglich der Metrik $d$ vollständig in $U$ enthalten ist; mit anderen Worten, wenn

$$\forall x \in U\ \exists \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(x) \subset U, \qquad \text{wobei} \quad B_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

[1] Sind nur die Eigenschaften (ii) und (iii) erfüllt, reden wir von einer **Halbnorm**.

(b) Unter der **Einheitskugel** eines normierten Raumes $(X, \|.\|)$ versteht man die bezüglich der durch die Norm induzierten Metrik offene Kugel um den Ursprung von Radius 1, d.h. die Menge

$$B_1^{\|.\|}(0) \;:=\; \{x \in X \mid d_{\|.\|}(0,x) < 1\} \;=\; \{x \in X \mid \|x\| < 1\}.$$

**Satz 1.4.** *In jedem Euklidischen Vektorraum $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt für alle $x, y \in X$ die Cauchy-Schwarz-Ungleichung*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \quad .$$

**Beweis:** Für $y = 0$ ist die Ungleichung trivial, für $y \neq 0$ setze man $\lambda := \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$ und berechne

$$0 \leq \|x - \lambda y\|^2 = \|x\|^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 = \|x\|^2 - \frac{(\langle x, y\rangle)^2}{\|y\|^2} \quad ,$$

woraus $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ folgt. □

**Bemerkung 1.5.**

(a) Jeder Euklidische Raum ist auch ein normierter Raum, denn die durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ definierte Abbildung $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ erfüllt auf einem Euklidischen Raum $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ die Eigenschaften einer Norm und wird eine **von einem Skalarprodukt induzierte Norm** genannt.

(b) Insbesondere gilt in einem linearen Raum $X$ die **Parallelogramm-Gleichung**

$$\forall x, y \in X\colon \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \;=\; 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \;, \tag{1.1}$$

falls die Norm $\|.\|$ von einem Skalarprodukt induziert wird.

(c) Jeder normierte Raum ist auch ein metrischer Raum, denn die durch $d_{\|.\|}(x, y) := \|x - y\|$ definierte Abbildung $d_{\|.\|}\colon X \times X \to \mathbb{R}$ erfüllt auf einem normierten Raum $(X, \|.\|)$ die Eigenschaften einer Metrik und wird **norminduziert** genannt.

(d) Jeder metrische Raum ist auch ein topologischer Raum, da die Menge

$$\mathcal{T}_d \;:=\; \{A \subset M \mid A \text{ offen }\}$$

aller offenen Teilmengen von $M$ in einem metrischen Raum $(M, d)$ alle Eigenschaften einer Topologie erfüllt. Daher bezeichnet man $\mathcal{T}_d$ als die **von der Metrik induzierte Topologie**.

(e) Jeder metrische Raum ist ein Hausdorff-Raum.

**Beweis:**

(a) Übungsaufgabe, wobei zum Nachweis der Dreiecksungleichung die Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus Satz 1.4 benötigt wird. Für den Fall eines hermite'schen Skalarproduktes siehe Korollar 5.4.

(b) Übungsaufgabe (etwa in A 5.1 (a) aus SoSe 2016)

(c) Übungsaufgabe, wobei die Eigenschaften der Metrik direkt aus der Definition folgen.

(d) Übungsaufgabe (etwa in ZA 1.3 (d) aus SoSe 2016)

□

**Definition 1.6** (Konvergenz/Cauchyfolge/Vollständigkeit)**.**

(a) Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $M$ heißt **Cauchyfolge**, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m \geq n_0$ die Ungleichung $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ erfüllt ist.

(b) Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $M$ heißt **konvergent**, falls ein $x \in M$ existiert, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $d(x_n, x) < \varepsilon$ erfüllt ist. Wie schreiben kurz $x_n \xrightarrow{d_1} x$ oder $x_n \longrightarrow x$.

(c) Ein metrischer Raum $(M, d)$ heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge aus $M$ in $(M, d)$ konvergiert.

**Definition 1.7** (Pseudometrik, Halbnorm, Äquivalenzklasse)**.**

(a) Sei $M \neq \emptyset$ beliebig. Eine Abbildung $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ heißt **Pseudo-Metrik** auf $M$, falls gilt

(i) $\forall x \in M\colon d(x, x) = 0$

(ii) $\forall x, y \in M\colon d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),

(iii) $\forall x, y, z \in M\colon d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Ist $d$ eine Pseudo-Metrik auf $M$, so heißt das Paar $(M, d)$ **pseudo-metrischer Raum**.

(b) Sei $X$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Abbildung $\|.\|\colon X \to \mathbb{R}$ heißt **Halbnorm**, falls aus der Definition einer Norm nur Eigenschaften (ii) und (iii) erfüllt sind, also falls gilt:

$$\forall x \in X\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\colon \|\alpha x\| \ = \ |\alpha|\|x\| \qquad \wedge \qquad \forall x, y \in X\colon \|x + y\| \ \leq \ \|x\| + \|y\|$$

(c) Sei $R$ eine Äquivalenzrelation auf einer nichtleeren Menge $M$. Dann bezeichnen wir für jedes $x \in M$ die Menge

$$[x]_R \ := \ \{y \in M \mid xRy\}$$

als **Äquivalenzklasse**.

**Bemerkung 1.8.**

(a) Aus der Definition folgt die Nichtnegativität von Pseudo-Metriken und Halbnormen.

(b) Ein (nicht unbedingt interessantes) Beispiel für pseudo-metrische Räume bzw. lineare Räume mit einer Halbnorm erhalten wir, wenn wir für $d$ bzw. $\|.\|$ die Nullabbildung wählen.

(c) Sowohl in pseudo-metrischen Räumen als auch in linearen Räumen mit einer Halbnorm können wir nicht mehr auf die Eindeutigkeit des Grenzwertes einer Folge schließen.

(d) Ist $\|.\|$ eine Halbnorm auf $X$, dann wird durch $xRy :\Longleftrightarrow \|x - y\| = 0$ eine Äquivalenzrelation definiert, denn

(i) $\forall x \in X\colon \|x - x\| = \|0\| = |0| \cdot \|0\| \ = \ 0 \Longrightarrow \forall x \in X\colon xRx$ (Reflexivität)

(ii) $\forall x, y \in X\colon \|x - y\| \ = \ |-1|\|y - x\|$
$\Longrightarrow \forall x, y \in X\colon (\|x - y\| = 0 \Longrightarrow \|y - x\| = 0)$
$\Longrightarrow \forall x, y \in X\colon (xRy \Longrightarrow yRx)$ (Symmetrie)

(iii) $\forall x,y,z \in X\colon \|x-z\| \;\leq\; \|x-y\| + \|y-z\|$
$\Longrightarrow\; \forall x,y,z \in X\colon\; (\|x-y\| = 0 \wedge \|y-z\| = 0 \Longrightarrow \|x-z\| = 0)$
$\Longrightarrow\; \forall x,y,z \in X\colon\; (xRy \wedge yRz \Longrightarrow xRz)$ (Transitivität)

(e) Sei $X$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, welcher mit einer Halbnorm $\|.\|_X\colon X \to \mathbb{R}$ versehen ist. Durch den Übergang zur Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $xRy :\Longleftrightarrow \|x-y\|_X = 0$ ist

$$X\big/R \;=\; \{[x]_R \mid x \in X\}$$

mit den (wohldefinierten) Verknüpfungen

$$\begin{array}{lcl} [x]_R + [y]_R & = & [x+y]_R \\ \alpha[x]_R & = & [\alpha x]_R \end{array}$$

ein linearer Raum über $\mathbb{K}$, welcher mit der durch

$$\|[x]_R\|_{X/R} \;:=\; \|x\|_X$$

definierten[2] Abbildung $\|.\|_{X/R}\colon X\big/R \to \mathbb{R}$ wegen

$$\|[x]_R\|_{X/R} \;=\; 0 \;\Longrightarrow\; \|x\|_X \;=\; 0 \;=\; \|x-0\|_X \;\Longrightarrow\; [x]_R \;=\; [0]_R$$

zu einem normierten Raum $\left(X\big/R, \|.\|_{X/R}\right)$ wird.

[2] Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn mit der Dreiecksungleichung folgt bei $[x]_R = [x']_R$ sowohl $\|x\|_X \leq \|x'\|_X$ als auch $\|x'\|_X \leq \|x\|_X$.

**Aufgaben:**

........................................ (Grundlegende Eigenschaften von Norm/Metrik)

A 1.1.1 Zeigen Sie, dass die Nichtnegativität einer Norm bzw. einer Metrik nicht explizit gefordert werden muss, sondern sich aus den übrigen Eigenschaften einer Norm bzw. Metrik ergibt.

A 1.1.2 Sei $(X, d)$ ein beliebiger metrischer Raum. Zeigen Sie für beliebige $x, x', y, y' \in X$ die **Vierecksungleichung**

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y') \ .$$

........................................ (Hierarchie der Räume)

A 1.1.3 Warum ist jeder mit einem Innenrodukt versehene Raum auch ein normierter Raum ?

A 1.1.4 Warum ist jeder normierte Raum auch ein metrischer Raum ?

A 1.1.5 Warum ist jeder metrische Raum ein topologischer Raum ?

A 1.1.6 Zeigen Sie, dass jeder metrische Raum $(M, d)$ das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt.

........................................ (Beispiele normierter Räume)

A 1.1.7 Geben Sie alle Normen auf $\mathbb{R}$ an und beweisen Sie, dass Sie wirklich alle gefunden haben.

A 1.1.8 Geben Sie jeweils einen Vektorraum von endlicher ($n \geq 2$) und unendlicher Dimension an.

A 1.1.9 Kennen Sie auf diesen Räumen bereits Normen ?

........................................ (Beispiele metrischer Räume)

A 1.1.10 Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie für alle $x, x', y, y' \in X$ die **Vierecksungleichung**

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y') \ .$$

A 1.1.11 Wie sieht $B_1^{d_*}\big((0,0)\big)$ in $\mathbb{R}^2$ bzgl. der Metrik $d_*(x, y) := \|x - y\|_*$ für $* \in \{1, 2, \infty\}$ aus?

A 1.1.12 Seien $(M, d_1)$ und $(M, d_2)$ metrische Räume. Beweisen oder widerlegen Sie:
Mit $d_3 := d_1 + d_2$ und $d_4 := \max(d_1, d_2)$ sind auch $(M, d_3)$ und $(M, d_4)$ metrische Räume.

A 1.1.13 Wird durch $d(x, y) := \arctan(|x - y|)$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird ?

A 1.1.14 Welche der Abbildungen $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ definieren eine Metrik auf $X$?

(a) $d(x, y) := \mathrm{e}^{x-y} - 1$ auf $X = \mathbb{R}$ (ii) $d(x, y) := \sin(\|x - y\|_2)$ auf $X = \mathbb{R}^2$

(c) $d(x, y) := |S(x) - S(y)|$ mit $S(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ auf $X = \mathbb{R}$

(d) $d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 + \dfrac{1}{x + y} & \text{für } x \neq y \end{cases}$ auf $X = \mathbb{N}$

........................................ (Diskrete/indiskrete Topologie)

A 1.1.15 Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $d_{\text{disk}} \colon M \times M \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto \begin{cases} 0 & u = v \ , \\ 1 & u \neq v \ . \end{cases}$

(a) Zeigen Sie, dass $d_{\text{disk}}$ eine Metrik auf $M$ ist. Diese wird **diskrete Metrik** genannt.

(b) Wie sieht die von der diskreten Metrik erzeugte (sog. **diskrete**) Topologie $T_{d_{\text{disk}}}$ aus ?

(c) Für welche $M$ stimmt die diskrete Topologie $T_{d_{\text{disk}}}$ mit der indiskreten Topologie $\{\emptyset, M\}$ überein?

**Erweiterte bzw. alternative Formulierung von (a,b):**

Sei $X$ eine beliebige Menge und die Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(x,y) \ := \ \begin{cases} 0\ , & \text{falls } x = y\ , \\ 1\ , & \text{falls } x \neq y\ . \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(X, d)$ ein metrischer Raum ist.

(b) Wie sieht die von dieser Metrik induzierte Topologie aus?

(c) Wählen Sie $X = \mathbb{R}$ und zeigen, dass $(X, d)$ eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge besitzt, die nicht kompakt ist.

(d) Charakterisieren Sie die kompakten Teilmengen von $(X, d)$.

A 1.1.16 $X$ sei eine beliebige nichtleere Menge.

(a) Welche Folgen konvergieren in $X$ bzgl. der indiskreten Topologie?

(b) Welche Folgen konvergieren in $X$ bzgl. der diskreten Topologie?

Geben Sie dabei auch an, gegen welche Elemente aus $X$ die Folgen konvergieren.

**Alternative Formulierung:**

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Welche Folgen aus $X$ konvergieren bezüglich der diskreten (bzw. indiskreten) Topologie? Geben Sie in beiden Fällen auch die Grenzwerte an.

............................................... (Weitere Beispiele topologischer Räume)

A 1.1.17 Zeigen Sie, dass $\{\emptyset, \{u\}, X\}$ eine nicht-Hausdorffsche Topologie auf $X := \{u, v, w\}$ definiert.

A 1.1.18 Geben Sie alle Topologien von $M = \{a, b\}$ an. Welche davon sind Hausdorffsch ?

A 1.1.19 Auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ betrachten wir das Mengensystem $\mathcal{T}$, welches neben $\emptyset$ und $\mathbb{N}$ genau die Teilmengen $U \subset \mathbb{N}$ enthält, deren Komplement $\mathbb{N} \setminus U$ endlich ist. Zeigen Sie:

(a) $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ ist ein topologischer Raum.

(b) Das Hausdorffsche Trennungsaxiom gilt nicht in $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$.

A 1.1.20 Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum mit $|M| = n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:
Die Topologie ist genau dann von einer Metrik induziert, wenn $\mathcal{T} = \mathcal{P}(M)$ gilt.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (vollständig vs. abgeschlossen)

A 1.1.21 Sei $(X,d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $A \subseteq X$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$(A, d_{|A}) \text{ ist vollständig} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ ist abgeschlossen in } (X,d).$$

**Alternative Formulierung:**

Sei $(X,d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $A \subseteq X$. Zeigen Sie, dass $A$ in $(X,d)$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $A$ mit der vererbten eingeschränkten Metrik vollständig ist.

**Alternative Formulierung:**

Sei $(X,d)$ ein vollständiger metrischer Raum. Zeigen Sie, dass ein Teilraum $X_0 \subseteq X$ genau dann vollständig ist, wenn $X_0$ abgeschlossen in $X$ ist.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Äquivalenz von Normen)

A 1.1.22 Sei $E$ ein linearer Raum. Zeigen Sie, dass der Begriff der Äquivalenz zweier Normen, tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf $E$ definiert.

A 1.1.23 Sei $X$ ein linearer Raum und $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ seien Normen auf $X$, welche dieselbe Topologie erzeugen. Zeigen Sie, dass entweder beide Räume $(X, \|.\|_1)$ und $(X, \|.\|_2)$ vollständig sind oder keiner von beiden.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Grenzfälle – Überraschung)

A 1.1.24 Gegeben seien die beiden Abbildungen

$$\begin{aligned} d_1 &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x,y) &\mapsto&\ |x-y| \qquad \text{und} \\ d_2 &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x,y) &\mapsto&\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \quad \text{mit} \quad \varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{1+|x|}\ . \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Sowohl $d_1$ als auch $d_2$ sind Metriken auf $\mathbb{R}$.

(b) Die von $d_2$ induzierte Topologie stimmt mit der von $d_1$ induzierten Topologie überein?

(c) $(\mathbb{R}, d_1)$ ist vollständig, während $(\mathbb{R}, d_2)$ nicht vollständig ist.

A 1.1.25 Auf der Menge $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sei $f \colon \bar{\mathbb{R}} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ definiert durch

$$f(x) \ := \ \begin{cases} \arctan(x) & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\pi}{2} & x = \infty, \\ -\frac{\pi}{2} & x = -\infty. \end{cases} \tag{1.2}$$

Zeigen Sie:

(a) Mit $\bar{d}(x,y) = |f(x) - f(y)|$ erhalten wir den metrischen Raum $\left(\bar{\mathbb{R}}, \bar{d}\right)$.
(Ist dieser Raum vollständig?)

(b) Welche Ihnen bekannten Konvergenzbegriffe umfasst die Konvergenz in $\left(\bar{\mathbb{R}}, \bar{d}\right)$ ?

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ mit der Einschränkung $\bar{d}_{|\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ unvollständig ist.
(Ist $\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{R}}$ abgeschlossen in $\left(\bar{\mathbb{R}}, \bar{d}\right)$ ?)

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Pseudometrische Räume)

A 1.1.26 Sei $(X, d)$ ein beliebiger pseudometrischer Raum.
Zeigen Sie, dass $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$ gilt!

A 1.1.27 Sei $(X, d)$ ein pseudometrischer Raum und $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Zeigen Sie:

$$d(x,y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{die konstante Folge } (x_n = x)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } y.$$

A 1.1.28 Sei $(X, d)$ ein (pseudo-)metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl.
Zeigen Sie, dass $U(x_0, \varepsilon)$ offen ist bzgl. $d$.

A 1.1.29 Sei $(X, d)$ ein (pseudo-)metrischer Raum und $O \subseteq X$. Zeigen Sie, dass die Aussagen

(a) $O$ ist offen.

(b) Zu jeder Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen einen Punkt von $O$ konvergiert, gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall k \geq n_0\colon x_k \in O$$

äquivalent sind.

A 1.1.30 Sei $(X, d)$ ein (pseudo-)metrischer Raum und $\tau_d := \{O \subseteq X \,|\, O \text{ offen bzgl. } d\}$.
Zeigen Sie: $\tau_d$ ist eine Topologie[3] auf $X$.

**Vergleiche auch Hierarchie der Räume:** Jeder metrische Raum ist ein topologischer.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Elemente einer Topologie)

A 1.1.31 Sei $(X, \tau)$ ein topologischer Raum und $O \subseteq X$. Zeigen Sie, dass die Aussagen

(a) $O \in \tau$

(b) $\forall x \in O : \exists U_x \in \tau : x \in U_x \subseteq O$

äquivalent sind.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Konvergenz in topologischen Räumen)

A 1.1.32 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, welcher hausdorffsch ist. Zeigen Sie, dass jede konvergente Folge in $X$ einen eindeutigen Grenzwert besitzt.

**Bem.:**

(a) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt Umgebung von $x$, wenn $x \in A$ und $A \in \mathcal{T}$ (man sagt dann, $A$ ist offen in $(X, \mathcal{T})$).

(b) Eine Folge $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ konvergiert in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ gegen $x \in X$, wenn in jeder Umgebung von $x$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen.

[3] Sie wird auch als 'die von $d$ erzeugte (induzierte) Topologie' bezeichnet.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Topologische Räume – Sternchenaufgabe)

A 1.1.33 $X$ sei ein topologischer Vektorraum (d.h. $X$ ein Vektorraum und $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ eine Topologie, so dass $(X, \tau)$ ein Hausdorff-Raum ist, Addition und Skalarenmultiplikation des Vektorraumes stetig sind).

Zeigen Sie, dass die Topologie auf $X$ genau dann von einer Norm $\|.\|$ erzeugt wird, wenn eine nicht-leere, offene, beschränkte und konvexe Teilmenge $O \subset X$ existiert.

**Hinweis:** $O$ heißt beschränkt, wenn zu jeder Umgebung $U$ von 0 ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $O \subset \alpha U$. Hausdorff-Raum bedeutet, dass zu je zwei Punkten aus $X$ disjunkte offene Umgebungen existieren. Zur Definition der Norm wählen Sie eine geeignete Teilmenge $A \subset X$, (d.h. zusätzlich zu den Eigenschaften von $O$, $0 \in A$, $-A = A$) und setzen

$$\|x\| := \sup\{\beta \in \mathbb{R}^+ : \ x \notin \beta A\} \ .$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Begriffsabfrage)

A 1.1.34 **Was bedeuten die folgenden Begriffe?**:

- Gruppe, Körper, linearer Raum, Innenprodukt
- (Halb-)Norm, (Pseudo-)Metrik, Topologie, Hausdorffsches Trennungsaxiom
- Cauchy-Folge, vollständig, Banachraum, Hilbertraum
- Halbnorm, Äquivalenzklasse

## 1.2 Kompaktheit und Präkompaktheit

**Definition 1.9.**
Sei $(X, d_X)$ ein metrischer Raum, $A \subset X$.

(a) Eine Familie $(U_j)_{j \in I}$ von offenen Teilmengen von $X$ heißt **offene Überdeckung** von $A$, falls gilt:

$$A \subset \bigcup_{j \in I} U_j \ . \tag{1.3}$$

(b) $A$ heißt **kompakt** (oder **überdeckungskompakt**) genau dann, falls zu jeder offenen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung existiert, d.h., ein $J \subset I$ endlich existiert, so dass bereits

$$A \subset \bigcup_{j \in J} U_j \ . \tag{1.4}$$

gilt.

(c) $A$ heißt **folgenkompakt** genau dann, wenn jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $A$ eine in $A$ konvergente Teilfolge besitzt, d.h.,

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \colon \Big( (\forall n \in \mathbb{N} \colon x_n \in A) \Longrightarrow \exists \mathrm{TF}(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \ \exists z \in A \colon x_{n_k} \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} z \Big) \tag{1.5}$$

(d) $A$ heißt **präkompakt** genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung von $A$ mit offenen $\varepsilon$-Kugeln gibt.

**Bemerkung 1.10.** Sei $(X, d_X)$ ein metrischer Raum, $A \subset X$.

(a) Es gilt: $A$ überdeckungskompakt $\Longrightarrow$ $A$ folgenkompakt.
Der Beweis findet sich etwa in Otto Forster, Analysis 2.

(b) Es gilt: $A$ überdeckungskompakt $\Longrightarrow$ $A$ präkompakt.
Der Beweis ergibt sich direkt durch Anwendung der Definition der Präkompaktheit auf die offene Überdeckung aller $\varepsilon$-Kugeln, welche als Mittelpunkt ein Element aus $A$ haben.

(c) Mit $A \subset X$ vollständig meinen wir, dass $(A, d_{A \times A})$ vollständig sei, also dass jede Cauchyfolge in $X$, deren Folgenglieder sämtlich schon in $A$ liegen, einen Grenzwert in $(X, d_X)$ besitzt, welcher auch schon in $A$ liegt.

**Satz 1.11.** *Sei $(X, d_X)$ ein metrischer Raum, $A \subset X$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) *$A$ ist überdeckungskompakt.*

(b) *$A$ ist folgenkompakt.*

(c) *$A$ ist vollständig und präkompakt.*

**Satz 1.12.** *Sei $(X, d_X)$ ein vollständiger metrischer Raum, $A \subset X$. Dann gilt*

$$A \text{ präkompakt} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{A} \text{ kompakt} \ .$$

**Satz 1.13.** *Sei $(X, d_X)$ ein metrischer Raum, $A \subset X$. Dann gilt*

$$\bar{A} \text{ kompakt} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ aus } A \ \exists \text{ konvergente TF in } X.$$

## 1.3 Mess- und Maßräume

**Definition 1.14** ($\sigma$-Algebra/Messraum/Borel-Mengen/Maß/Maßraum/$\mu$-Nullmenge/$\mu$-f.ü.)**.**

(a) Sei $\Omega \neq \emptyset$ beliebig. Ein Teilmengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **$\sigma$-Algebra** auf $\Omega$, falls die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(ii) $\forall A \in \mathcal{A} \colon \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$,

(iii) $\forall (A_k)_{k\in\mathbb{N}}, A_k \in \mathcal{A} \colon \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$ .

Das Tupel $(\Omega, \mathcal{A})$ wird **Messraum** genannt.[4]

(b) Die kleinste $\sigma$-Algebra auf $\mathbb{R}$, welche alle offenen Intervalle enthält,[5] heißt die **$\sigma$-Algebra der Borel-Mengen** und wird mit $\mathcal{B}$ bezeichnet.

(c) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum. Eine Abbildung $\mu \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt **Maß** auf $(\Omega, \mathcal{A})$, falls die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall (A_k)_{k\in\mathbb{N}},\ A_k \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt[6] : $\mu\Big(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}\Big) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$ .

Eigenschaft (ii) bezeichnet wir als **$\sigma$-Additivität**. Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ wird **Maßraum** genannt.

(d) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Teilmenge $N \subset \Omega$ heißt **$\mu$-Nullmenge**, falls $N \in \mathcal{A}$ und $\mu(N) = 0$ gilt.

(e) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir sagen, eine Eigenschaft gelte **$\mu$-fast überall**, falls eine $\mu$-Nullmenge $N$ existiert, so dass die Eigenschaft für alle $\omega \in \Omega \setminus N$ erfüllt ist.

(f) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir nennen $(\Omega, \overline{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ eine **Vervollständigung** von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sofern

(i) $\mathcal{A}$ eine Teil-$\sigma$-Algebra von $\overline{\mathcal{A}}$ ist[7]

(ii) $\forall A \in \mathcal{A} \colon \mu(A) = \bar{\mu}(A)$ gilt sowie

(iii) $\forall A \in \Omega \colon \big(\exists\ \mu\text{-Nullmenge } N \in \mathcal{A} \colon A \subset N \implies A \in \overline{\mathcal{A}}\big)$

**Bem.:** Über Vervollständigung des auf der $\sigma$-Algebra der Borel-Mengen eingeschränkten Lebesgue-Maßes gelangen wir zur **$\sigma$-Algebra der Lebesgue-Mengen**, welche mit $\mathcal{L}$ bezeichnet wird.

[4] Wir sagen, eine Teilmenge von $\Omega$ ist **$\mathcal{A}$-messbar** oder kurz **messbar**, falls sie in $\mathcal{A}$ liegt.
[5] Wir sprechen auch von der von den offenen Intervallen erzeugten $\sigma$-Algebra.
[6] d.h., $\forall j, k \in \mathbb{N} \colon (j \neq k \implies A_j \cap A_k = \emptyset)$.
[7] D.h., es gilt $\forall A \subset \Omega \colon \big(A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \in \overline{\mathcal{A}}\big)$

**Definition 1.15** ($(\mathcal{A}, \tilde{\mathcal{A}})$-messbar/$\mu$-messbar/$\mu$-integrierbar)**.**

(a) Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ zwei Messräume. Eine Funktion $f\colon \Omega \to \tilde{\Omega}$ heißt $(\mathcal{A}, \tilde{\mathcal{A}})$**-messbar** oder kurz **messbar**, falls für jedes $B \in \tilde{\mathcal{A}}$ auch $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ gilt.[8] [9]

(b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ ein Messraum. Eine Funktion $f\colon \Omega \to \tilde{\Omega}$ heißt $\mu$-**messbar**, falls ein $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ und ein $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ existiert, so dass durch

$$g(\omega) \ := \ \begin{cases} f(\omega) & \text{für } \omega \in \Omega \setminus N \ , \\ \tilde{\omega} & \text{für } \omega \in N \end{cases} \tag{1.6}$$

eine $(\mathcal{A}, \tilde{\mathcal{A}})$-messbare Funktion gegeben ist.[10]

(c) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Borel-messbare Funktion $e\colon \Omega \to [0, \infty[$ nennen wir $\mathcal{A}$-**Elementarfunktion**, falls $|e(\Omega)| < \infty$ ist. Eine Borel-messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt $\mu$**-integrierbar**, falls die Zahlen

$$\int f^+ d\mu \ := \sup_{\substack{0 \le e \le f^+ \\ e \text{Elementarfunktion}}} \int e \, d\mu \qquad \text{und} \qquad \int f^- d\mu \ := \sup_{\substack{0 \le e \le f^+ \\ e \text{Elementarfunktion}}} \int e \, d\mu \tag{1.7}$$

endlich sind. Dabei bezeichnen $f^+ := \max(f, 0)$ und $f^- := \max(-f, 0)$ den **Positivteil** bzw. **Negativteil** von $f$ und

$$\int e \, d\mu \ := \ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \mu(e^{-1}(\{\alpha_k\})) \tag{1.8}$$

das Integral einer Elementarfunktion, falls $e(\Omega) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ihr Bild ist.

**Aufgaben:**

A 1.3.1 $E$ sei ein linearer Raum über $\mathbb{K}$ und $p\colon E \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm auf $E$. Betrachten wir weiterhin die Relation

$$xRy :\Longleftrightarrow p(x - y) = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Relation $R$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Zeigen Sie, die Richtigkeit der folgenden Aussagen:

(i) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$, $\forall x, y \in E$ gilt

$$xRy \Longleftrightarrow (\alpha x)R(\alpha y).$$

(ii) $\forall x, x', y, y' \in E$ gilt

$$xRy \wedge x'Ry' \Longrightarrow (x + x')R(y + y').$$

(c) Für $x \in E$ sei $[x]$ die Äquivalenzklasse von $x$, d.h., $[x] = \{y \in E \,|\, xRy\}$. Damit erhalten wir einen $\mathbb{K}$-linearen Raum $E/R$ mit Vektoraddition $[x] + [y] = [x + y]$ und Skalarmultiplikation $\alpha[x] = [\alpha x]$. Zeigen, dass $\|[x]\| := p(x)$ wohldefiniert und eine Norm auf $E/R$ ist.

[8] d.h., wenn das Urbild jeder messbaren Menge wieder messbar ist.

[9] Im Fall $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ nennen wir die Funktion auch **Borel-messbar**.

[10] Mit anderen Worten ist $f$ genau dann $\mu$-messbar, wenn es eine messbare Funktion $g$ gibt, die außerhalb einer $\mu$-Nullmenge mit $f$ übereinstimmt.

# Kapitel 2

# Konvergenz in Beispielräumen

**Definition 2.1** (Konvergenz/Cauchyfolge/Vollständigkeit/Banachraum/Hilbertraum)**.**

(a) Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $M$ heißt **Cauchyfolge**, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m \geq n_0$ die Ungleichung $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ erfüllt ist.

(b) Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $M$ heißt **konvergent**, falls ein $x \in M$ existiert, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $d(x_n, x) < \varepsilon$ erfüllt ist. Wie schreiben kurz $x_n \xrightarrow{d_1} x$ oder $x_n \longrightarrow x$.

(c) Ein metrischer Raum $(M, d)$ heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge aus $M$ in $(M, d)$ konvergiert.

(d) Ein vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**.

(e) Ein vollständiger Euklidischer Raum heißt **Hilbertraum**.

## 2.1 Endlichdimensionale Vektorräume

**Beispiel 2.2** (Endlich-dimensionale Vektorräume)**.**

(a) Bezeichnet $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ein Element aus $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$, so sind für $1 \leq p \leq \infty$ durch

$$\|x\|_p \;:=\; \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \;, & \text{falls } p < \infty \;, \\ \max\limits_{1\leq k\leq n} |\xi_k| \;, & \text{falls } p = \infty \;. \end{cases} \tag{2.1}$$

Normen $\|.\|_p \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bzw. $\|.\|_p \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ gegeben. Den normierten Raum[1] $(\mathbb{K}^n, \|.\|_p)$ bezeichnen wir im Folgenden mit $\ell^p(n)$. Seine Vollständigkeit ist eine direkte Folge der Vollständigkeit von $(\mathbb{R}, |.|)$ bzw. $(\mathbb{C}, |.|)$.

(b) Mit jeder Norm sind $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ und $(\mathbb{C}^n, \|.\|)$ Banachräume. Die Vollständigkeit ist eine direkte Folge der Vollständigkeit von $(\mathbb{R}, |.|)$ bzw. $(\mathbb{C}, |.|)$ bzw. der Äquivalenz von Normen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen.

[1]Die Dreiecksungleichung haben wir in Gestalt der Minkowski-Ungleichung in der Analysis bewiesen.

**Aufgaben:**

A 2.1.1 Ist $E$ ein endlich dimensionaler normierter Raum, so ist die Normkonvergenz gleichbedeutend mit der komponentenweisen Konvergenz (d.h., ist $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis, $y_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} x_i$, $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, so gilt (bei $k \to \infty$): $\|y_k - y\| \to 0 \Longleftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n\colon \alpha_i^{(k)} \to \alpha_i$).

Wie ist dies in unendlichdimensionalen Räumen? Folgt immer noch die Normkonvergenz aus der komponentenweisen ? (Die umgekehrte Frage, ob die Normkonvergenz die komponentenweise impliziert, ist schwerer zu beantworten.)

A 2.1.2 Für ein $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ sei $\|f\|_{\mathrm{F}} := \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}^2}$. Zeigen Sie:

Auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ ist $\|.\|_{\mathrm{F}}$ eine Norm und für alle linearen Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ gilt

$$\|f\| \leq \|f\|_{\mathrm{F}} \; .$$

**Bemerkung:** $\|.\|_{\mathrm{F}}$ heißt **Frobenius**-Norm.

A 2.1.3 Sei $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ gegeben. Zu festen Basen sei $B := (b_{jk})_{j,k=1}^{n,m}$ die zugehörige Matrix von $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie die Operatornorm von $B$ als Abbildung von $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$ nach $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

A 2.1.4 Für $(X, \|.\|_X) = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$ und $(Y, \|.\|_Y) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ sei $\mathcal{B} \in L(X, Y)$ und zu festen Basen sei $B := (b_{jk})_{j,k=1}^{n,m}$ die zugehörige Matrix von $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie die Operatornorm $\|B\|_{L(X,Y)}$.

A 2.1.5 Auf $(X, \|.\|_X) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ sei $\mathcal{A} \in L(X, X)$ derart gegeben, dass zu festen Basen eine zugehörige symmetrische Matrix $A := (a_{jk})_{j,k=1}^{n}$ von $\mathcal{A}$ existiert. Bestimmen Sie die Operatornorm.[2]

[2] Zur Erinnerung: Symmetrische Matrizen $A$ (Matrizen mit $A^T = A$) besitzen nur reelle Eigenwerte. Weiterhin existiert eine orthogonale Matrix $U$ (deren Spalten aus den paarweise orthogonalen Eigenvektoren von $A$ bestehen), so dass $U^T A U$ eine Diagonalmatrix ist (Hauptachsentransformation), auf deren Diagonalen die Eigenwerte von $A$ stehen.

## 2.2 Folgenräume

**Beispiel 2.3** ($\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ **– linearer Raum aller Folgen).** Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Folge in $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{K},\ n \to \xi_n$. Den Raum aller Folgen in $\mathbb{K}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

**Beispiel 2.4** ($\ell^p$ **– linearer Raum aller** $p$**-summierbaren Folgen).** Für $1 \le p < \infty$ bezeichnet

$$\ell^p \ := \ \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ \middle| \ \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \ < \ \infty \right\} \tag{2.2}$$

den **Raum aller** $p$**-summierbaren Folgen** in $\mathbb{K}$. Auf ihm ist durch

$$\|x\|_p \ := \ \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.3}$$

eine Norm gegeben (Übungsaufgabe. Hinweis: Minkowksi-Ungleichung – folgt auch mit Beispiel 2.20). Der normierte Raum $(\ell^p, \|.\|_p)$ ist ein (unendlich-dimensionaler) Banachraum.

**Beweis:** (Vollständigkeit)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left( (\xi_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge aus $(\ell^p, \|.\|_p)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.

$$\Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n,m \ge n_0\colon \|x_n - x_m\|_p \ = \ \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \ < \ \varepsilon\ .$$

$$\Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\ \forall n,m \ge n_0\colon |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}| \ < \ \varepsilon\ .$$

$$\Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\colon (\xi_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge in } \mathbb{K}\ .$$

$$\Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\ \exists \xi_k \in \mathbb{K}\colon \xi_k^{(n)} \overset{n\to\infty}{\to} \xi_k \qquad \text{(da } (\mathbb{K}, |.|) \text{ vollständig ist)}\ .$$

$$\Longrightarrow \forall \ell \in \mathbb{N}\ \forall n,m \ge n_0\colon \left( \sum_{k=1}^{\ell} |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \ < \ \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \forall \ell \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0\colon \left( \sum_{k=1}^{\ell} |\xi_k^{(n)} - \xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \ \le \ \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \forall n \ge n_0\colon \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)} - \xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \ \le \ \varepsilon$$

Mit $x := (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ impliziert die letzte Zeile insbesondere $x - x_n \in \ell^p$. Da auch $x_n \in \ell^p$ und $\ell^p$ insbesondere ein linearer Vektorraum ist, folgt daraus auch $x \in \ell^p$. Insgesamt haben wir demnach gezeigt, dass es ein $x \in \ell^p$ gibt und ein (von $\varepsilon$ abhängiges) $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \ge n_0\colon \|x - x_n\|_p \le \varepsilon\ .$$

Aufgrund der Beliebigkeit von $\varepsilon$ ist dies genau die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\ell^p$.

$\square$

**Beispiel 2.5** ($\ell^\infty$ **– linearer Raum aller beschränkten Zahlenfolgen).**

Der **lineare Raum der beschränkten Zahlenfolgen**

$$\ell^\infty := \left\{ x \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \;\middle|\; \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k| < \infty \right\} \tag{2.4}$$

wird mit der Norm $\|x\|_\infty := \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k|$ zum Banachraum $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$.

**Bemerkung 2.6.** Wir vereinbaren die folgenden Sprechweisen:

- Seien $A, B$ zwei Vektorräume. Wir sagen, $A \subset B$ ist ein **linearer Unterraum**, wenn $A$ als Vektorraum ein Unterraum von $B$ mit den vererbten Verknüpfungen ist.
- Seien $(A, \|.\|_A)$ und $(B, \|.\|_B)$ zwei normierte lineare Räume. Wir sagen, $A \subset B$ ist ein **Unterraum**, wenn $A$ ein linearer Unterraum von $B$ ist und $\forall a \in A$: $\|a\|_A = \|a\|_B$ gilt (d.h., $\|.\|_A$ ist die Einschränkung von $\|.\|_B$ auf $A$).

**Korollar 2.7.**

(a) *Der Raum $\ell^p$ ist für jedes $p \in [1, \infty[$ ein linearer Unterraum von $\ell^\infty$.*

(b) *Der normierte lineare Raum $(\ell^p, \|.\|_\infty)$ ist ein nicht vollständiger Unterraum von $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$.*

**Beweis:**

(a) Wir zeigen $\ell^p \subset \ell^\infty$.
Sei $x \in \ell^p$, wegen $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k|^p < \infty$ muss dann $(|\xi_k|^p)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge sein (notwendiges Konvergenzkriterium für Reihen). Da die $p$-te Wurzel stetig ist, muss dann auch $(|\xi_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge sein, also insbesondere auch beschränkt. Somit folgt $x \in \ell^\infty$.

(b) Wir zeigen, nicht jede Cauchyfolge konvergiert:
Wählen wir etwa die Nullfolge $x := (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\xi_k := \sqrt[p]{\frac{1}{k}}$, dann gilt einerseits $x \notin \ell^p$ (da die harmonische Reihe $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k}$ bekanntlich divergiert), andererseits gilt für die Folge

$$x_n := (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, \ldots) \tag{2.5}$$

offenbar sowohl $x_n \in \ell^p$ als auch für beliebige $m > n$ die Beziehung

$$\|x_n - x_m\|_\infty = \sup_{m>n} |\xi_m| = \sqrt[p]{\frac{1}{n+1}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \tag{2.6}$$

Somit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im normierten Raum $(\ell^p, \|.\|_\infty)$, zu der wegen

$$\|x_n - x\|_\infty = \sup_{k>n} |\xi_k| = \sqrt[p]{\frac{1}{n+1}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.7}$$

jedoch kein Grenzwert in $\ell^p$ existieren kann.

□

**Beispiel 2.8** ($c$ **– linearer Raum aller konvergenten Zahlenfolgen).**
Der **Vektorraum der konvergenten Zahlenfolgen**

$$c \;:=\; \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \exists \xi \in \mathbb{K} \colon \xi_k \to \xi \right\} \tag{2.8}$$

ist ein linearer Unterraum von $\ell^\infty$ und wird mit der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$ zum Banachraum $(c, \|.\|_\infty)$, insbesondere zu einem vollständigen Unterraum von $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$.

**Beispiel 2.9** ($c_0$ **– linearer Raum aller Nullfolgen).** Der **Vektorraum der Nullfolgen**

$$c_0 \;:=\; \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \xi_k \to 0 \right\} \tag{2.9}$$

ist ein linearer Unterraum von $c$ und somit auch von $\ell^\infty$, welcher mit der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$ zum Banachraum $(c_0, \|.\|_\infty)$ wird, insbesondere zu einem vollständigen Unterraum von $(c, \|.\|_\infty)$ und somit auch von $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$.

**Aufgaben:**

A 2.2.1 Bezeichne $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller (nicht notwendigerweise konvergenten) reellen Zahlenfolgen. Zeigen Sie, dass für beliebige $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Zahl

$$d\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|} \tag{2.10}$$

endlich ist und auf diese Weise eine Metrik $d$ auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiert wird.

A 2.2.2 Sei $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ der metrische Raum aus der vorigen Aufgabe, d.h., mit der Metrik (2.10) versehen.

(a) Zeigen Sie, dass $x^{(j)} \xrightarrow{j\to\infty} x$ genau dann, wenn $\forall n \in \mathbb{N}\colon \xi_n^{(j)} \xrightarrow{j\to\infty} \xi_n$, wobei $x^{(j)} = \left(\xi_n^{(j)}\right)$ und $x = (\xi_n)$ sind.

(b) Beweisen Sie, dass $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ vollständig ist.

A 2.2.3 Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \Big\{x = (\xi_k)_{n\in\mathbb{N}}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}\Big\}$ der lineare Raum aller reellen Zahlenfolgen.

(a) Zeigen Sie: Der Folgenraum $(\ell^p, \|.\|_p)$ ist ein Banachraum, wobei $p \in [1, \infty[$ sowie

$$\ell^p \;:=\; \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \;<\; \infty\right\} \quad \text{und} \quad \|x\|_p \;:=\; \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} . \tag{2.11}$$

(b) Zeigen Sie: Der Folgenraum $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ ist ein Banachraum, wobei

$$\ell^\infty \;:=\; \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k| < \infty\right\} \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty \;:=\; \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k| . \tag{2.12}$$

(c) Finden Sie Beispielfolgen $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit
(i) $x \in \ell^2 \setminus \ell^1$ (ii) $x \in \ell^\infty \setminus \ell^1$ (iii) $x \notin \ell^\infty$.

(d) Ist in $\big(\ell^1, \|.\|_1\big)$ die Teilmenge $M := \{x \in \ell^1 \mid \forall k \in \mathbb{N}\colon |x(k)| \le 1\}$ abgeschlossen ?

(e) Zeigen Sie: (i) $p \in [1, \infty[ \implies \ell^p \subset \ell^\infty$ . (ii) $p, q \in [1, \infty[ \;\wedge\; p < q \implies \ell^p \subset \ell^q$ .

A 2.2.4 Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge aus $(\ell^2, \|.\|_2)$.

(a) Konvergiert sie auch in $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$? (ii) Konvergiert sie auch in $(\ell^1, \|.\|_1)$?

........................................................... (Nicht äquivalente Normen)

A 2.2.5 Sei $X$ der lineare Raum der Folgen, bei denen nur endlich viele Glieder ungleich 0 sind. Dann sind durch

$$\|x\|_1 \;=\; \sum_{n\ge 0} |x_n| \qquad \text{und} \qquad \|x\|_\infty = \sup_{n\ge 0} |x_n|$$

zwei Normen auf $X$ definiert. Zeigen Sie, dass diese nicht äquivalent sind.

## 2.3 Funktionenräume

Im Folgenden sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

**Beispiel 2.10** ($B(T)$ **– linearer Raum aller beschränkten Funktionen**).
Sei $(M,d)$ ein metrischer Raum und $T \subset M$ nichtleer. Der **Vektorraum der beschränkten Funktionen**

$$B(T) \;:=\; B(T,\mathbb{K}) \;=\; \left\{ f\colon T \to \mathbb{K} \;\middle|\; \sup_{t\in T} |f(t)| < \infty \right\} \tag{2.13}$$

wird mit der Norm $\|f\|_\infty := \sup\limits_{t\in T} |f(t)|$ zum Banachraum $(B(T), \|.\|_\infty)$.

**Beispiel 2.11** (**Linearer Unterraum aller stetigen Funktionen**).

(a) Ist $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, so wird nach dem letzten Beispiel die Menge

$$V \;:=\; B([a,b],\mathbb{K}) \;:=\; \left\{ f\colon I \to \mathbb{K} \;\middle|\; f \text{ beschränkt, d.h., } \sup_{t\in I} |f(t)| \;<\; \infty \right\}$$

mit den punktweisen Verknüpfungen

$$\begin{aligned} (f +_V g)(t) &\;:=\; f(t) +_{\mathbb{K}} g(t)\;, \quad t \in I\;, \\ (\lambda \cdot_V f)(t) &\;:=\; \lambda \cdot_{\mathbb{K}} f(t)\;, \quad \lambda \in \mathbb{K}\;, \quad t \in I \end{aligned}$$

zu einem Vektorraum. Durch $\|f\|_\infty \;:=\; \sup\limits_{t\in I} |f(t)|$ wird auf $V$ eine Norm definiert.

(b) Die Menge

$$W \;:=\; C([a,b],\mathbb{K}) \;:=\; \left\{ f\colon I \to \mathbb{K} \;\middle|\; f \text{ stetig} \right\}$$

ist nach dem Satz über das Maximum/Minimum (bekannt aus der Analysis I) offenbar eine Teilmenge von $V$. In der Tat, ist $W$ mit den von $V$ vererbten Verknüpfungen ein linearer Unterraum von $V$ im Sinne von Bemerkung 2.6 (b).

(c) Sei nun allgemein $(M,d)$ ein metrischer Raum und $T \subset M$ kompakt, nichtleer. Dann wird der **Vektorraum**

$$C(T) \;:=\; C(T,\mathbb{K}) \;:=\; \left\{ x\colon T \to \mathbb{K} \;\middle|\; x \text{ stetig} \right\} \tag{2.14}$$

**der stetigen Funktionen** über $T$ mit der Norm $\|x\|_\infty := \max\limits_{t\in T} |x(t)|$ (nach dem Satz vom Minimum/Maximum nimmt eine stetige Funktion auf einem Kompaktum sowohl Minimum als auch Maximum an) zum Banachraum $(C(T), \|.\|_\infty)$).

**Beispiel 2.12** ($C^n([a,b],\mathbb{K})$ **– linearer Raum aller $n$-mal stetig diff. Funktionen**).
Seien $a < b$ reelle Zahlen. Dann wird der **Vektorraum**

$$C^n([a,b],\mathbb{K}) \;:=\; \left\{ x\colon [a,b] \to \mathbb{K} \;\middle|\; x \text{ mind. } n\text{-mal stetig differenzierbar} \right\} \tag{2.15}$$

**der $n$-mal stetig differenzierbaren Funktionen** über $[a,b]$ mit der Norm

$$\|x\| \;:=\; \sum_{\nu=0}^{n} \|x^{(\nu)}\|_\infty \;=\; \sum_{\nu=0}^{n} \max_{t\in[a,b]} |x^{(\nu)}(t)| \tag{2.16}$$

zu einem Banachraum. Dabei sind $x^{(0)}(t) = x(t)$ und $x^{(\nu)}(t) = \big(x^{(\nu-1)}(t)\big)'$.

**Beispiel 2.13** ($BV([a,b],\mathbb{K})$ **– Raum der Funktionen mit beschränkter Variation).**

(a) Für eine Funktion $x\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ ist die **totale Variation** durch

$$V(x) \ := \ \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{Z(n)} \sum_{\nu=1}^{n} |x(t_\nu) - x(t_{\nu-1})| \tag{2.17}$$

definiert, wobei $Z(n)$ alle Zerlegungen $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ durchläuft.

(b) Der **Vektorraum der Funktionen auf** $[a,b]$ **mit beschränkter Variation**

$$BV([a,b],\mathbb{K}) \ := \ \left\{ x\colon T \to \mathbb{K} \ \middle| \ x \text{ von beschränkter Variation, d.h. } V(x) < \infty \right\} \tag{2.18}$$

wird mit der Norm

$$\|x\|_{BV} \ := \ |x(a)| \ + \ V(x) \tag{2.19}$$

zum Banachraum $(BV([a,b],\mathbb{K}), \|.\|_{BV})$.

**Aufgaben:**

A 2.3.1 Wie sind die folgenden Räume definiert?

- $B_{\mathbb{K}}([a,b],\mathbb{R})$, $C([a,b],\mathbb{R})$, $\mathcal{L}^1$

A 2.3.2 Auf $C^\infty([a,b],\mathbb{R})$, dem Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen, betrachten wir die Metrik

$$d(x,y) \;:=\; \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \frac{p_\nu(x-y)}{1+p_\nu(x-y)} \qquad \text{mit} \qquad p_\nu(z) \;:=\; \max_{t\in[a,b]} |z^{(\nu)}(t)| \;. \tag{2.20}$$

Zeigen Sie:

(a) $x_k \to x$ bezüglich $d \iff x_k^{(\nu)} \to x^{(\nu)}$ gleichmäßig für alle $\nu \in \mathbb{N}$.

(b) $\Big(C^\infty([a,b],\mathbb{R}), d\Big)$ ist vollständig.

(c) Es existiert keine Norm auf $C^\infty([a,b],\mathbb{R})$, welche $d$ induziert.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Funktionen mit beschränkter Variation)

A 2.3.3 Für eine Funktion $x\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ ist die **totale Variation** durch

$$V(x) \;:=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{Z(n)} \sum_{\nu=1}^{n} |x(t_\nu) - x(t_{\nu-1})| \tag{2.21}$$

definiert, wobei $Z(n)$ alle Zerlegungen $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ durchläuft.

(a) Geben Sie jeweils ein Beispiel einer stetigen Funktion mit beschränkter und einer stetigen Funktion mit unbeschränkter (totaler) Variation an.

(b) Zeigen Sie: Der **Vektorraum der Funktionen auf** $[a,b]$ **mit beschränkter Variation**

$$BV([a,b],\mathbb{K}) \;:=\; \Big\{ x\colon [a,b] \to \mathbb{K} \;\Big|\; x \text{ von beschränkter Variation, d.h., } V(x) < \infty \Big\} \tag{2.22}$$

wird mit der Norm

$$\|x\|_{BV} \;:=\; |x(a)| \;+\; V(x) \tag{2.23}$$

zum Banachraum $(BV([a,b],\mathbb{K}), \|.\|_{BV})$.

(c) Zeigen Sie: $BV([a,b],\mathbb{R})$ ist mit der von $B([a,b],\mathbb{R})$ induzierten Norm nicht vollständig.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Supremumsnorm und Wichtungen auf $C(X,Y)$)

A 2.3.4 Zeigen Sie, dass $\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ eine Norm auf $C([a,b],\mathbb{R})$ ist.

A 2.3.5 Auf $C[0,1]$ betrachten wir die Norm

$$\|x\| \;:=\; \max_{0\le t\le 1} |tx(t)|. \tag{2.24}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\|.\|$ wirklich eine Norm ist.

(b) Ist $C[0,1]$ mit dieser Norm vollständig?

A 2.3.6 Sei $g \in C[a,b]$ mit $g(x) > 0$. Wir definieren durch

$$d_g(x,y) = \max_{a \le t \le b} |g(t)(x(t) - y(t))| \tag{2.25}$$

eine gewichtete Distanz auf $C[a,b]$. Zeigen Sie:

(a) $d_g$ ist eine Metrik.

(b) $d_g$-Konvergenz ist gleichbedeutend mit glm Konvergenz auf $[a,b]$.

(c) $(C[a,b], d_g)$ ist vollständig.

A 2.3.7 Sei $\chi\colon \mathbb{R} \to ]0,\infty[$ stetig. Auf

$$X \ := \ \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}, \ \sup_{t \in \mathbb{R}} |\chi(t) f(t)| \ < \ \infty \right\} \tag{2.26}$$

definieren wir eine Norm (ohne Beweis) durch

$$\|f\|_\chi \ := \ \sup_{t \in \mathbb{R}} |\chi(t) f(t)| \ . \tag{2.27}$$

Zeigen Sie, dass $X$ mit $\|.\|$ ein Banachraum ist.

............................ (Weitere Normen/Metriken auf und Teilräume von $C(X,Y)$)

A 2.3.8 Zeigen Sie: $\|f\|_{\langle \cdot,\cdot \rangle_{C([a,b])}}$ ist eine Norm und es gilt $\forall f \in C([a,b],\mathbb{R})\colon \|f\|_{\langle \cdot,\cdot \rangle_{C([a,b])}} \ \le \ \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_\infty$ .

A 2.3.9 Begründen Sie, warum die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge $f_n$ aus $C([a,b],\mathbb{R})$ die Konvergenz im quadratischen Mittel nach sich zieht.

A 2.3.10 Finden Sie eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, welche im quadratischen Mittel aber nicht gleichmäßig konvergiert.

A 2.3.11 Durch $x_n(t) := t^n - t^{3n}$ sei eine Folge in $(C[0,1], \|.\|_\infty)$ definiert. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent?

A 2.3.12 Sei $k \in \mathbb{N}$. Überprüfen Sie in $\Big(C([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty\Big)$ die Abgeschlossenheit der Teilmenge

$$\mathbb{P}_k := \left\{ x \in C([a,b],\mathbb{R}) \mid x(t) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i t^i \text{ mit } \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ und } \alpha_k \neq 0 \right\} \ .$$

A 2.3.13 (a) Zeigen Sie, dass $C^m(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ ein Banachraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{K}^r)$ ein Banachraum ist.

A 2.3.14 Sei $X$ eine beliebige nichtleere Menge und $\ell^\infty(X)$ der Vektorraum der beschränkten Funktionen $X \to \mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sei. Hierbei sind Addition und Multiplikation mit Skalaren punktweise erklärt. Zeigen Sie:

(a) $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$ definiert eine Norm auf $\ell^\infty(X)$.

(b) $\ell^\infty(X)$ ist vollständig bezüglich dieser Norm.

A 2.3.15 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $C_b(X) \subset \ell^\infty(X)$ der Teilraum aller stetigen Funktionen. Zeigen Sie, dass $C_b(X)$ vollständig ist.

A 2.3.16 Zeigen Sie:

(a) Die Menge

$$C_0(\mathbb{R}) = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon f \text{ ist stetig und } \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \right\} .$$

ist ein Vektorraum.

(b) Durch $\|f\|_\infty := \max_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$ ist eine Norm auf $C_0(\mathbb{R})$ gegeben.

(c) $(C_0(\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ ist vollständig.

A 2.3.17 Sei $X$ ein linearer Raum. Eine Metrik $d$ auf $X$ heißt **invariant**, wenn $d(x,y) = d(x-y,0)$ für alle $x, y$ in $X$.

(a) Geben Sie eine invariante Metrik $d_{co}$ auf dem Vektorraum $C(\mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ an, bezüglich der eine Folge von Funktionen genau dann konvergiert, wenn sie gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$ konvergiert, d.h., für welche die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $f_n \to f$ bezüglich $d_{co}$.

(ii) Für jede kompakte Teilmenge $C \subset \mathbb{R}$ gilt $\sup_{t\in\mathbb{C}} |f_n(t) - f(t)| \to 0$.

(b) Ist $C(\mathbb{R})$ bezüglich der Metrik aus (a) vollständig?

(c) Zeigen Sie, dass die Einbettung $C_b(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ stetig ist.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Beispiel unvollständiger Funktionenräume)

A 2.3.18 Zeigen Sie, dass $C([a,b],\mathbb{R})$ mit $\|f\| = \|f\|_2 = \left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ nicht vollständig ist.

**Komplexe Variante (inklusive Nachweis des Innenproduktes):**

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Auf $C([a,b],\mathbb{C})$ sei eine Abbildung definiert durch

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(s)\overline{g(s)} ds \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass $\langle .,.\rangle$ ein Innenprodukt definiert.

(b) Zeigen Sie, dass $C([a,b],\mathbb{C})$ bezüglich dieses Innenproduktes kein Hilbertraum ist.

A 2.3.19 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $X = C([a,b],\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass $d_1(x,y) \ := \displaystyle\int_a^b |x(t) - y(t)| dt$ eine Metrik auf $X$ definiert.

(b) Ist $X$ bezüglich der Metrik $d_1$ aus (a) vollständig?

A 2.3.20 **Zusammenfassende Abwandlung der beiden letzten Aufgaben:**

Auf $X = C([a,b],\mathbb{R})$ definieren wir die beiden Abbildungen $d_k \colon X \times X \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, durch

$$d_1(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| \ dt \ , \qquad d_2(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 \ dt\right)^{\frac{1}{2}} \ . \tag{2.28}$$

Zeigen Sie:

(a) $d_1$ und $d_2$ sind Metriken auf $C[a,b]$.

(b) $C([a,b],\mathbb{R})$ ist mit keiner dieser Metriken vollständig.

A 2.3.21 **Zusammenfassende Formulierung nur die Vollständigkeit betreffend:**

Sei $d_g$ wie in (2.25) und $d_1$, $d_2$ wie in (2.28). Zeigen Sie:

(a) $(C[a,b], d_g)$ ist vollständig. (b) Weder $(C[a,b], d_1)$ noch $(C[a,b], d_2)$ sind vollständig.

## 2.4 Allgemeine $L^p$-Räume

**Definition 2.14.**

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum,[3] $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ der betrachtete Messraum und $p \in [1, \infty]$. Auf der Menge der messbaren Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definieren wir

(a) im Fall $1 \leq p < \infty$ die Zahl $N_p(f)$ durch

$$N_p(f) \;=\; \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.29}$$

sowie $\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ durch

$$\mathcal{L}^p := \left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ messbar und } \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty \right\} . \tag{2.30}$$

(b) im Fall $p = \infty$ die Zahl $N_\infty(f)$ durch[4]

$$N_\infty(f) := \inf A_f \qquad \text{mit} \qquad A_f \;=\; \{\lambda \in [0, \infty] \mid |f| \leq \lambda \ \mu\text{-f.ü.}\} \tag{2.31}$$

sowie $\mathcal{L}^\infty := \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ durch

$$\mathcal{L}^\infty := \left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ messbar und } N_\infty(f) < \infty \right\} . \tag{2.32}$$

**Bemerkung 2.15.**

(a) Wegen $\infty \in A_\infty$ ist $A_f \neq \emptyset$, so dass $\inf A_f \in [0, \infty]$ gilt.

(b) Da abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wiederum Nullmengen sind und nach Definition des Infimums eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $A_f$ existiert, für die $\lambda_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \inf A_f$ gilt und ein $M_n \in \mathcal{A}$ mit $\mu(M_n) = 0$ und $\forall \omega \in \Omega \setminus M_n\colon |f(\omega)| \leq \lambda_n$ existiert, folgt nun auch

$$\forall \omega \in \Omega \setminus M\colon |f(\omega)| \leq \inf A_f \qquad \text{mit} \qquad M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \tag{2.33}$$

und

$$\mu(M) \;=\; \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n\right) \;\leq\; \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(M_n) \;=\; 0 \ .$$

(c) Jedes $\lambda \in A_f$ nennen wir eine **wesentliche Schranke** von $f$.

(d) Es ist $N_\infty(f)$ die kleinste wesentliche Schranke von $f$.

**Korollar 2.16.** *Es ist $\mathcal{L}^\infty$ ein linearer Raum über $\mathbb{R}$, auf dem durch $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} := N_\infty(f)$ eine Halbnorm gegeben ist.*

**Beweis:**

[3] d.h., $\Omega$ eine nichtleere beliebige Menge, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine $\sigma$-Algebra und $\mu$ ein Maß auf $\mathcal{A}$

[4] $|f| \leq \lambda$ gilt $\mu$-f.ü., wenn $\exists N = N_{\lambda,f} \in \mathcal{A}\colon\ (\mu(N) = 0 \ \wedge\ (\forall \omega \in \Omega \setminus N\colon |f(\omega)| \leq \lambda))$

- Für jede beliebige messbare Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gilt

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\colon N_\infty(\alpha f) \;=\; |\alpha| \cdot N_\infty(f) \;, \tag{2.34}$$

  denn im Fall $\alpha = 0$ ist $N_\infty(\alpha f) = N_\infty(0) = 0$ und für jedes $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert eine $\mu$-Nullmenge $M_f$ mit

$$\forall \omega \in \Omega \setminus M_f\colon |\alpha f(\omega)| \;=\; |\alpha||f(\omega)| \;\leq\; |\alpha| \cdot \inf A_f \;,$$

  also $N_\infty(\alpha f) \leq |\alpha| \cdot N_\infty(f)$, sowie analog

$$\forall \omega \in \Omega \setminus M_f\colon |f(\omega)| \;=\; \left|\frac{1}{\alpha}\alpha f(\omega)\right| \;=\; \frac{1}{|\alpha|}|\alpha f(\omega)| \;\leq\; \frac{1}{|\alpha|} \cdot \inf A_{\alpha f} \;,$$

  also $|\alpha| \cdot N_\infty(f) \leq N_\infty(\alpha f)$.

- Für beliebige messbare Funktionen $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gilt

$$N_\infty(f+g) \;\leq\; N_\infty(f) + N_\infty(g) \;, \tag{2.35}$$

  nach der letzten Bemerkung existieren $\mu$-Nullmengen $M_f$ und $M_g$, so dass

$$\forall \omega \in \Omega \setminus (M_f \cup M_g)\colon |f(\omega) + g(\omega)| \;\leq\; |f(\omega)| + |g(\omega)| \;\leq\; \inf A_f \;+\; \inf A_g \;.$$

- Mit der punktweisen Addition und der skalaren Multiplikation, welche $\mathcal{L}^\infty$ als Teilmenge des linearen Raumes aller messbaren Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ erbt, wird $\mathcal{L}^\infty$ zu einem linearen Raum über $\mathbb{R}$, da einerseits mit $N_\infty(f) < \infty$ nach (2.34) auch $N_\infty(\alpha f)$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt (also die Multiplikation mit einem Skalaren nicht aus $\mathcal{L}^\infty$ herausführt) und andererseits sich mit $N_\infty(f) < \infty$ und $N_\infty(g) < \infty$ nach (2.35) auch $N_\infty(f+g) < \infty$ ergibt (also die Addition nicht aus $\mathcal{L}^\infty$ herausführt).

- Die Einschränkung von $N_f$ auf $\mathcal{L}^\infty$ erfüllt nun alle Eigenschaften einer Halbnorm.

□

Um zu zeigen, dass auch $\mathcal{L}^p$ ein linearer Raum und $N_p(f)$ eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p$, benötigen wir die folgenden beiden Ungleichungen.

**Lemma 2.17** (Hölder-Ungleichung)**.** *Sei $1 < p < \infty$ und $q \in \mathbb{R}$ derart, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \;=\; 1$ gilt. Dann gilt für beliebige messbare Funktionen $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ die* ***Hölder-Ungleichung***

$$N_1(f \cdot g) \;\leq\; N_p(f) N_q(g) \;,$$

*d.h.,*

$$\int_\Omega |f \cdot g| d\mu \;\leq\; \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_\Omega |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \;. \tag{2.36}$$

**Beweis:** In der Vorlesung (Verwendet die Young-Ungleichung). □

**Satz 2.18** (Minkowski-Ungleichung)**.** *Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt für beliebige messbare Funktionen $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ die* ***Minkowski-Ungleichung***

$$N_p(f+g) \;\leq\; N_p(f) \;+\; N_f(g) \;.$$

**Beweis:** In der Vorlesung (Verwendet die Hölder-Ungleichung). □

**Bemerkung 2.19.**

(a) Nach dem letzten Satz gilt $f, g \in \mathcal{L}^p \implies f + g \in \mathcal{L}^p$.

(b) Aus der Definition folgt $\alpha \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}^p \implies \alpha f \in \mathcal{L}^p$

(c) Nach den letzten beiden Punkten wissen wir, dass $\mathcal{L}^p$ für $1 \leq p < \infty$ ein linearer Raum ist, auf dem $\|f\|_{\mathcal{L}^p} \;:=\; N_p(f)$ eine Halbnorm ist.

(d) Da im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die Äquivalenz

$$f \text{ messbar} \iff \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) \text{ messbar}$$

zur Verfügung steht, können wir sowohl für $\mathcal{L}^p$ als auch für $\mathcal{L}^\infty$ analoge Aussagen herleiten.

(e) Oftmals findet sich für $p = \infty$ auch die Beschreibung

$$\mathcal{L}^\infty \;:=\; \left\{ f \colon \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ messbar und } \mu\text{-f. ü. beschränkt} \right\}, \tag{2.37}$$

wobei $f$ genau dann eine $\mu$-fast überall beschränkte Funktion genannt wird, falls eine positive Konstante $M < \infty$ existiert, so dass $\mu$-fast überall $|f| \leq M$ erfüllt ist. Die kleinste solche Konstante $M$, welche diese Eigenschaft besitzt, wird oft auch als **essentielles Supremum** bezeichnet und mit $\operatorname*{ess\,sup}_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|$ abgekürzt. Offenbar gilt

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \;=\; \operatorname*{ess\,sup}_{\omega \in \Omega} |f(\omega)| \,. \tag{2.38}$$

(f) Entsprechend Bemerkung 1.8 gelangen wir für jedes $p \in [1, \infty]$ mittels Übergang zu den Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $f \sim g \;:\iff\; f = g$ $\mu$-f.ü. jeweils zum linearen Raum

$$L^p \;:=\; L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \;:=\; \{[f] \mid f \in \mathcal{L}^p\} \tag{2.39}$$

der Äquivalenzklassen $[f]$ von $f \in \mathcal{L}^p$ bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$. Mit

$$\|[f]\|_{L^p} := \|f\|_{\mathcal{L}^p}$$

für alle $f \in \mathcal{L}^p$ wird $L^p$ dann zu einem normierten Raum[5]

**Beispiel 2.20** (Spezialfälle von allgemeinen $L^p$-Räumen)**.**

(a) Für $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und das **Zählmaß**

$$\mu(A) \;=\; \begin{cases} \#(A), & A \text{ endliche Teilmenge von } \Omega \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.40}$$

und $1 \leq p < \infty$ gilt $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \ell^p$ mit dem Folgenraum $\ell^p$ aus Beispiel 2.4. Da sich für $x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, $n \mapsto \xi_n$ mit dem Zählmaß

$$\int_\Omega |f|^p d\mu \;=\; \sum_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n|^p$$

ergibt, gilt $\|x\|_{\ell^p} \;=\; \|(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{\ell^p} \;=\; \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \;=\; \|x\|_p$ mit der Norm $\|x\|_p$ aus Beispiel 2.4.

[5]Dabei verwenden wir insbesondere die Implikation $f = g$ $\mu$-f.ü. $\implies \int |f|^p d\mu = \int |g|^p d\mu$.

(b) Mit demselben Maßraum wie in (a) erhalten wir (vgl. Beispiel 2.5)

$$(L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \|.\|_{L^\infty}) \;=\; (\ell^\infty, \|.\|_\infty)$$

und $(c, \|.\|_\infty)$ entsprechend Bemerkung 2.6 (a) als Unterraum von diesem (vgl. Beispiel 2.8).

**Aufgaben:**

A 2.4.1 Zeigen Sie die Young-/Hölder-/Minksowski-Ungleichung

A 2.4.2 Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^p$ ein linearer Raum ist.

A 2.4.3 Zeigen Sie, dass $N_p(f) := \|f\|_{\mathcal{L}^p}$ für $1 \leq p < \infty$ ein Halbnorm ist.

A 2.4.4 Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^\infty$ ein linearer Raum und das wesentliche Supremum eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^\infty$ ist.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

A 2.4.5 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$. Zeigen Sie: $p \in \,]1, \infty[ \quad \Longrightarrow \quad L^\infty \subset L^p \subset L^1$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Begriffsabfrage)

A 2.4.6 Geben Sie folgende Definitionen und Sätze an:

- Messbarkeit, Maß, Zählmaß
- Sätze: Hölder-Ungleichung, Minkowski-Ungleichung
- Wesentliches Supremum

A 2.4.7 Wie sind die folgenden Räume definiert?

- $\mathcal{L}^p, \mathcal{L}^\infty, \ell^p, \ell^\infty, c$

# Kapitel 3

# Stetige lineare Abbildungen

## 3.1 Abbildungen zwischen Vektoräumen

**Definition 3.1** (Linearität, Injektivität, Surjektivität)**.**
Eine Abbildung $A\colon E \to F$ zwischen zwei Vektor-Räumen heißt

(a) **linear** $:\Longleftrightarrow \forall x, y \in E\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\colon A(x+y) = Ax + Ay\ \wedge\ A(\alpha x) = \alpha A(x)$;

(b) **injektiv** $:\Longleftrightarrow \forall x, y \in E\ :\ (A(x)\ =\ A(y)\ \Longrightarrow\ x = y)$;

(c) **surjektiv** $:\Longleftrightarrow A(E) = F :\Longleftrightarrow \forall z \in F\ \exists x \in E\colon A(x) = z$.

**Aufgaben:**

A 3.1.1 Seien $E$ und $F$ endlichdimensionale Vektorräume der gleichen Dimension und $A\colon E \to F$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

$$A \text{ bijektiv } \Longleftrightarrow A \text{ injektiv oder surjektiv.}$$

A 3.1.2 Konstruieren Sie zwei Endomorphismen auf $C([a,b],\mathbb{R})$, wobei der erste injektiv, aber nicht surjektiv sei und der andere surjektiv, aber nicht injektiv sei.

A 3.1.3 Konstruieren Sie zwei Endomorphismen auf $\ell^1$, wobei der erste injektiv, aber nicht surjektiv sei und der andere surjektiv, aber nicht injektiv sei.

## 3.2 Eigenschaften stetiger linearer Abbildungen

**Definition 3.2** (Beschränkte lineare Operatoren)**.**
Seien $(E, \|.\|_E)$ und $(F, \|.\|_F)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$. Sei $A\colon E \to F$ linear. Dann heißt $A$ **beschränkt** $:\Longleftrightarrow \exists M \in [0, \infty[\colon \forall x \in E \ \|Ax\|_F \leq M \|x\|_E$.

Offensichtlich ist ein linearer Operator zwischen zwei normierten Räumen genau dann beschränkt, wenn es eine nichtnegative reelle Zahl $M$ gibt, so dass

$$\forall x \in E\colon \Big(\|x\|_E \leq 1 \implies \|Ax\|_F \leq M\Big)$$

gilt.

**Definition 3.3.** Seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ metrische Räume, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $x_0 \in X$. Dann heißt $f$ **stetig im Punkt** $x_0$ genau dann, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $X$ gilt

$$d_X(x_n, x_0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \Longrightarrow \qquad d_Y(f(x_n), f(x_0)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

In normierten Räumen $(E, \|.\|_E)$ bedeutet die Aussage „$x_n \to x$ in $E$“ genau die Konvergenz $\|x_n - x_0\|_E \to 0$.

**Lemma 3.4.** *In einem normierten Raum $(E, \|.\|_E)$ sind Addition, Multiplikation mit Skalaren und die Norm stetig, d.h., es gilt stets die Implikation*

$$x_n \to x \ , \quad y_n \to y \ , \quad \alpha_n \to \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x_n + y_n & \to x + y \ , \\ \alpha_n x_n & \to \alpha x \ , \\ \|x_n\|_E & \to \|x\| \ . \end{cases}$$

**Beweis:** Übungsaufgabe bzw. in der Analysis behandelt. □

**Satz 3.5.** *Seien $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$, $A\colon E \to F$ $\mathbb{K}$-linear, $x_0 \in E$. Dann sind folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) *$A$ ist stetig in $x_0$.*

(b) *$A$ ist stetig.*

(c) *$A$ ist beschränkt.*

**Beweis:**

- „(a) $\Longrightarrow$ (b)“: Sei $A$ stetig in $x_0$.
  Desweiteren sei $x \in E$ beliebig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus $E$ mit $x_n \overset{d_{\|\cdot\|_E}}{\longrightarrow} x$. Nach Definition folgt daraus
  $$\|(x_n - x + x_0) - x_0\|_E \ = \ \|x_n - x\|_E \ \to \ 0 \ , \tag{3.1}$$
  also $x_n - x + x_0 \overset{d_{\|\cdot\|_E}}{\longrightarrow} x_0$. Da $A$ nach Voraussetzung stetig in $x_0$ ist, impliziert dies $A(x_n - x + x_0) \overset{d_{\|\cdot\|_F}}{\longrightarrow} Ax_0$ und zusammen mit der Linearität von $A$ somit
  $$\|Ax_n - Ax\|_F \ = \ \|Ax_n - Ax + Ax_0 - Ax_0\|_F \ = \ \|A(x_n - x + x_0) - Ax_0\|_F \ \to \ 0 \ , \tag{3.2}$$
  was genau $Ax_n \overset{d_{\|\cdot\|_F}}{\longrightarrow} Ax$ bedeutet. Aufgrund der Beliebigkeit der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ergibt sich die Stetigkeit von $A$ in $x$. Da auch $x \in E$ beliebig war, haben wir somit die Stetigkeit von $A$ gezeigt, also (b).

- „(b) $\Longrightarrow$ (c)“: (Beweismethode durch Widerspruch). Sei $A$ stetig.
Angenommen, $A$ sei unbeschränkt. Dann müsste zu jedem $M \in [0, M[$ ein $x_M \in E$ mit $\|Ax_M\|_F > M\|x_M\|_E$ existieren. Demnach würde es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \|Ax_n\|_F > n\|x_n\|_E \tag{3.3}$$
geben. Mit der Linearität von $A$ erhielten wir dann insbesondere
$$\|Ax_n\|_F > 0 \quad\Longrightarrow\quad Ax_n \neq 0_F \quad\Longrightarrow\quad x_n \neq 0_E \quad\Longrightarrow\quad \|x_n\|_E \neq 0\ . \tag{3.4}$$
Betrachten wir nun die Folge $y_n := \frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|_E}$. Mit der Homogenität der Norm ergäbe sich einerseits $\|y_n\|_E = \frac{1}{n} \to 0$, also $y_n \xrightarrow{d_{\|\cdot\|_E}} 0$, und andererseits
$$\|Ay_n\|_F \ = \ \frac{1}{n}\frac{\|Ax_n\|_F}{\|x_n\|_E} \ > \ 1\ . \tag{3.5}$$
Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Stetigkeit von $A$, denn laut dieser müsste nämlich
$$Ay_n \xrightarrow{d_{\|\cdot\|_F}} A0_E = 0_F\ , \tag{3.6}$$
also $\|Ay_n\|_F \to 0$ gelten.
- „(c) $\Longrightarrow$ (a)“: Sei $A$ beschränkt.
Nach Definition existiert dann ein $M \in [0, \infty[$, so dass $\forall y \in E\colon \|Ay\|_F \leq M\|y\|_E$ gilt. Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $x_n \xrightarrow{d_{\|\cdot\|_E}} x_0$, also $\|x_n \to x_0\|_E \to 0$. Dann ergibt sich wegen
$$\|Ax_n - Ax_0\|_F \ = \ \|A(x_n - x_0)\|_F \ \leq \ M\|x_n \to x_0\|_E \to 0 \tag{3.7}$$
ebenso $\|Ax_n - Ax_0\|_F \to 0$, also $Ax_n \xrightarrow{d_{\|\cdot\|_F}} Ax_0$. Aufgrund der Beliebigkeit der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ haben wir somit die Stetigkeit von $A$ in $x_0$ und somit (a) gezeigt.

□

**Definition 3.6.** Seien $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$. Dann definieren wir
$$\mathcal{L}(E, F) \ := \ \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \ := \ \big\{A : E \to F \ \big|\ A \ \mathbb{K}\text{-linear und stetig}\big\}\ .$$
Desweiteren definieren wir die **Operatornorm**[1]
$$\|A\| \ := \ \sup\{\|Ax\|_F \ \big|\ x \in E, \|x\| \leq 1\} \ = \ \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F \tag{3.8}$$
Da für $A, B \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ die punktweise definierten Abbildungen
$$\forall x \in E\colon (A + B)x \ := \ Ax + Bx \qquad \text{und} \qquad \forall x \in E\colon (\alpha A)x \ := \ \alpha(Ax) \tag{3.9}$$
offenbar linear und auch stetig sind, ist $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ in der Tat ein $\mathbb{K}$-linearer Raum. Nach dem vorigen Satz existiert zu jedem $A \in \mathcal{L}(E, F)$ ein $M := M_A \in [0, \infty[$, so dass
$$\forall x \in E\colon \|Ax\|_F \ \leq \ M\|x\|_E\ ,$$
also auch
$$\forall x \in E\colon \ (\|x\|_E \leq 1 \ \Longrightarrow\ \|Ax\|_F \leq M)\ . \tag{3.10}$$
gilt. Insbesondere ergibt sich damit $\|A\| < \infty$.

[1] Die Normeigenschaften werden im nachfolgenden Satz bewiesen.

**Satz 3.7.** *Es ist $A \mapsto \|A\|$ eine Norm auf $\mathcal{L}(E,F)$.*

**Beweis:** Es sind die drei Eigenschaften einer Norm zu überprüfen.

- Die Definitheit von $A \mapsto \|A\|$ ist erfüllt, denn für alle $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ gilt

$$\begin{aligned} \|A\| = 0 \iff & \forall x \in E\colon (\|x\|_E \le 1 \implies \|Ax\|_F \le 0) \\ \iff & \forall x \in E\colon (\|x\|_E \le 1 \implies Ax = 0) \\ \iff & \forall x \in E\colon Ax = 0 \\ \iff & A = 0\ . \end{aligned}$$

  **Zwischenbemerkung:** Offenbar haben wir $\forall x \in E\colon \|Ax\|_F \ \le\ \|A\|\|x\|_E$, denn:

  Für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E \le 1$ ist nach Definition $\|Ax\|_F \le \|A\|$. Desweiteren gilt für alle $x \ne 0_E$ nach der Definitheit der Norm $\|x\| \ne 0$ und somit für $y = \frac{1}{\|x\|_E}x$ dann $\|y\| = 1$, also auch

$$\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \ = \ \left\|A\left(\frac{1}{\|x\|_E}x\right)\right\|_F \ \le\ \|A\|\ . \tag{3.11}$$

  Aufgrund der Beliebigkeit von $x \ne 0_E$ erhalten wir zusammen mit der Definition insgesamt sogar

$$\|A\| \ = \ \sup_{x \ne 0_E} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}\ . \tag{3.12}$$

- Seien $A, B \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ und $x \in E$ mit $\|x\|_E \le 1$ beliebig. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung der $\|.\|_F$-Norm

$$\|(A+B)x\|_F \ = \ \|Ax + Bx\|_F \ \le\ \|Ax\|_F + \|Bx\|_F \ \le\ \|A\| + \|B\|\ . \tag{3.13}$$

  Aufgrund der Beliebigkeit von $x \in E$ ergibt sich daraus auch wie behauptet

$$\|A+B\| \ = \ \sup_{\|x\| \le 1} \|(A+B)x\|_F \ \le\ \|A\| + \|B\| \tag{3.14}$$

  und damit die Dreiecksungleichung für $A \mapsto \|A\|$.

- Sei $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ und $x \in E$ mit $\|x\|_E \le 1$ beliebig. Dann ergibt sich

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}\colon \|(\alpha A)x\|_F \ = \ |\alpha|\|Ax\|_E \ \le\ |\alpha|\|A\|\ . \tag{3.15}$$

  Aufgrund der Beliebigkeit von $x$ bedeutet dies

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}\colon \|\alpha A\| \ = \ \sup_{\|x\| \le 1} \|(\alpha A)x\|_F \ \le\ |\alpha|\|A\| \tag{3.16}$$

  Für $\alpha = 0$ folgt wegen der Definitheit auch die Gleichheit in (3.16). Für beliebiges $\alpha \ne 0$ ergibt sich

$$\|A\| \ = \ \left\|\left(\tfrac{1}{a}\right)\cdot(\alpha A)\right\| \ \overset{(3.16)}{\le}\ \left|\tfrac{1}{\alpha}\right| \cdot \|\alpha A\| \ \le\ \tfrac{1}{|\alpha|}\cdot\|\alpha A\| \qquad \implies \qquad |\alpha|\|A\| \le \|\alpha A\| \tag{3.17}$$

  und zusammen mit (3.16) somit

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}\colon |\alpha A\| \ = \ |\alpha|\|A\|\ , \tag{3.18}$$

  also die Homogenität für $A \mapsto \|A\|$.

$\square$

Somit haben wir gezeigt, dass die Operatornorm aus (3.8) in der Tat eine Norm auf $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ definiert. Im nächsten Satz zeigen wir überdies die Submultiplikativität der Operatornorm.

**Satz 3.8.** *Seien $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$, $(G, \|.\|_G)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$. Desweiteren seien $A \in \mathcal{L}(E, F)$, $B \in \mathcal{L}(F, G)$. Dann gelten $B \circ A \in \mathcal{L}(E, G)$, $\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$.*

**Beweis:** Die Abbildung $B \circ A$ ist linear, denn für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und beliebige $x, y \in E$ gilt aufgrund der Linearität von $A$ und $B$ dann auch

$$\begin{aligned}(B \circ A)(\lambda x + y) &= B(A(\lambda x + y)) = B(\lambda A(x) + A(y)) \\ &= \lambda B(A(x)) + B(A(y)) = \lambda(B \circ A)(x) + (B \circ A)(y) .\end{aligned}$$

Sei nun $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq 1$ beliebig. Dann gilt

$$\|(B \circ A)(x)\|_G = \|B(A(x))\|_G \leq \|B\|_{\mathcal{L}(F,G)} \|A(x)\|_F \leq \|B\|_{\mathcal{L}(F,G)} \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}$$

und somit auch

$$\|B \circ A\|_{\mathcal{L}(E,G)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|(B \circ A)(x)\|_G \leq \|B\|_{\mathcal{L}(F,G)} \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty . \tag{3.19}$$

Demnach ist $B \circ A$ beschränkt und daher $B \circ A \in \mathcal{L}(E, G)$ nach Satz 3.5. $\square$

**Satz 3.9.** *Seien $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$. Desweiteren sei $(F, \|.\|_F)$ vollständig (also ein Banachraum). Dann ist auch $\big(\mathcal{L}(E, F), \|.\|_{\mathcal{L}(E,F)}\big)$ ein Banachraum.*

**Beweis:** Es ist zu zeigen, dass für jede Cauchyfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\big(\mathcal{L}(E, F), \|.\|_{\mathcal{L}(E,F)}\big)$ ein $A \in \mathcal{L}(E, F)$ existiert, so dass $\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$ für $n \to \infty$ gilt.
Sei also $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Cauchyfolge in $\big(\mathcal{L}(E, F), \|.\|_{\mathcal{L}(E,F)}\big)$.

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \forall m, n \geq n_0 \colon \|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \varepsilon \\
&\Longrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall x \in E\ \forall m, n \geq n_0 \colon \\
&\qquad\qquad \|A_n x - A_m x\|_F = \|(A_n - A_m)x\|_F \leq \|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E < \varepsilon \|x\|_E \\
&\Longrightarrow \quad \forall x \in E \colon (A_n x)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge in } F \\
&\overset{F \text{ vollständig}}{\Longrightarrow} \quad \forall x \in E\ \exists! y_x = \lim_{n\to\infty} A_n x \in F
\end{aligned}$$

Demzufolge haben wir einen punktweisen Grenzwert $A : E \to F,\ x \mapsto y_x$ erhalten. Aufgrund der Linearität der $A_n$ folgen nun auch

$$\forall x, \tilde{x} \in E \colon A(x + x) = y_{x+\tilde{x}} = \lim_{n\to\infty} A_n(x + \tilde{x}) = \lim_{n\to\infty} A_n x + \lim_{n\to\infty} A_n \tilde{x} = Ax + A\tilde{x}$$

und

$$\forall x \in E\ \forall \alpha \in \mathbb{K} \colon A(\alpha x) = y_{\alpha x} = \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha x) = \alpha \lim_{n\to\infty} A_n(x) = \alpha A x ,$$

also die Linearität des punktweisen Grenzwertes $A : E \to F,\ x \mapsto y_x$.
Mit der Stetigkeit der $\|.\|_F$-Norm ergibt sich weiterhin aus

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n, m \geq n_0\ \forall x \in E \colon \|A_m x - A_n x\|_F < \varepsilon \|x\|_E$$

(da diese Ungleichung für alle $m \geq n_0$ gilt) dann

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in E\colon \lim_{m\to\infty} \|A_m x - A_n x\|_F \ = \ \|Ax - A_n x\|_F \ \leq \ \varepsilon \|x\|_E \ .$$

Insbesondere folgt daraus

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\colon \|A - A_n\| \ := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Ax - A_n x\|_F \ \leq \ \varepsilon \ , \tag{3.20}$$

was wegen der aus der Linearität von $A_{n_0}$ und $A$ resultierenden Linearität von $A - A_{n_0}$ und der Endlichkeit von $\varepsilon$ nach Satz 3.5 genau die Stetigkeit von $A - A_{n_0}$ bedeutet. Als stetige lineare Abbildung ist $A - A_{n_0}$ demnach Element des Vektorraumes $\mathcal{L}(E, F)$, genauso wie $A_{n_0}$ nach Voraussetzung und somit auch $A = (A - A_{n_0}) + A_{n_0}$. Letzterer ist nun wegen (3.20) genau der Grenzwert der Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im normierten Raum $\big(\mathcal{L}(E,F), \|.\|_{\mathcal{L}(E,F)}\big)$, dessen Vollständigkeit damit gezeigt ist. □

**Beispiel 3.10** (Fredholmscher Integraloperator)**.**

Zu $[a,b]$ sei $K\colon [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{K},\ (s,t) \mapsto k(s,t)$ stetig. Nach dem Satz vom Minimum/Maximum folgt dann $\exists M < \infty\ \forall s,t \in [a,b]\colon |k(s,t)| \leq M$. Für $x \in C([a,b],\mathbb{K})$ definieren wir $K(x)\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ durch

$$s \mapsto K(x)(s) \ := \ \int_a^b k(s,t)x(t)dt \ .$$

d.h.,

$$K(x) := y \qquad \text{mit} \qquad y(s) \ := \ \int_a^b k(s,t)x(t)dt \ .$$

- Für jedes $s \in [a,b]$ ist $t \mapsto z_s(t) := k(s,t)x(t)$ als Produkt stetiger Funktionen wieder stetig auf $[a,b]$.

- Mit der Stetigkeit von $z_s$ folgt auch die Existenz von $y(s) = \displaystyle\int_a^b z_s(t)dt \in \mathbb{K}$, so dass $y\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ wohldefiniert und – da $y$ auch stetig ist – der Operator

$$K\colon C([a,b],\mathbb{K}) \to C([a,b],\mathbb{K}) \tag{3.21}$$

  wohldefiniert ist.

- Weiterhin folgt wegen

$$\begin{aligned} K(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) \ &= \int_a^b k(s,t)[\alpha x_1 + \beta x_2](t)dt \\ &= \ \alpha \int_a^b k(s,t)x_1(t)dt \ + \ \beta \int_a^b k(s,t)x_2(t)dt \\ &= \ \alpha K(x_1)(s) \ + \ \beta K(x_2)(s) \end{aligned}$$

  auch die Linearität des Operators.

- Für den linearen Raum $E = C([a,b],\mathbb{K})$ und die (nach Satz vom Minimum/Maximum wohldefinierte) Norm $\|x\|_E \ = \ \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$ ist die lineare Abbildung

$$K\colon (E, \|.\|_E) \to (E, \|.\|_E)$$

stetig nach Satz 3.5, denn die Beschränktheit folgt aufgrund von

$$\begin{aligned}\|K(x)\|_E &= \max_{s\in[a,b]} |K(x)(s)| = \max_{s\in[a,b]} \left|\int_a^b k(s,t)x(t)dt\right| \le \max_{s\in[a,b]} \int_a^b |k(s,t)|\cdot|x(t)|\ dt \\ &\le \|x\|_E \cdot \max_{s\in[a,b]} \int_a^b \underbrace{|k(s,t)|}_{=:M\ <\ \infty}\ dt \le (b-a)M\cdot\|x\|_E\end{aligned}$$

- In der Tat gilt für die Operatornorm $\|K\|_{\mathcal{L}(E,E)} = \max_{s\in[a,b]} \int_a^b |k(s,t)|\ dt$.

  **Beweis:** Wir zeigen nur den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

  - Beim Nachweis der Stetigkeit haben wir bereits $\|K\|_{\mathcal{L}(E,E)} \le \max_{s\in[a,b]} \int_a^b |k(s,t)|\ dt$ erhalten.
  - Wir betrachten die Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Hilfsfunktionen $\varphi_n\colon \mathbb{R}\to[-1,1]$, definiert durch

    $$\varphi_n(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > \frac{1}{n}, \\ n\xi, & -\frac{1}{n} \le \xi \le \frac{1}{n}, \\ -1, & \xi < -\frac{1}{n}. \end{cases}$$

    Diese haben dann jeweils die Eigenschaften

    $$\forall \xi \in \mathbb{R}\colon \Big(|\varphi_n(\xi)| \le 1 \ \wedge\ (\xi \ne 0 \Longrightarrow \xi\cdot\varphi_n(\xi) > 0)\Big) .$$

    Für beliebige $s\in[a,b]$ betrachten wir nun weiter die Funktionenschar

    $$x_{n,s}\colon [a,b]\to\mathbb{R}\ , \quad t\mapsto \varphi_n(k(s,t)) .$$

    Dann gilt jeweils $x_{n,s} \in C([a,b],\mathbb{R})$ und $\forall t\in[a,b]\colon |x_{n,s}(t)| \le 1$, also $\|x_{n,s}\|_E \le 1$. Desweiteren gilt $\forall t \in [a,b]\colon \operatorname{sign}(x_{n,s}(t)) = \operatorname{sign}(k(s,t))$, also insbesondere

    $$\forall s\in[a,b]\colon K(x_{n,s})(s) := \int_a^b \underbrace{k(s,t)x_{n,s}(t)}_{\ge 0}\ dt \ \ge\ 0 .$$

    Aufgrund von

    $$\forall s,t\in[a,b]\colon 0 \le k(s,t)\cdot x_{n,s}(t) \begin{cases} = |k(s,t)| & \text{für } |k(s,t)| \ge \frac{1}{n} , \\ \le |k(s,t)| & \text{sonst} , \end{cases}$$

    erhalten wir nun durch Ergänzung einer nahrhaften Null die Abschätzung

    $$\begin{aligned} K(x_{n,s})(s) &= \int_a^b k(s,t)x_{n,s}(t)\ dt \\ &= \int_a^b |k(s,t)|\ dt - \underbrace{\int_a^b \underbrace{\Big(|k(s,t)| - k(s,t)x_{n,s}(t)\Big)}_{\le\frac{1}{n}}\ dt}_{\le\frac{1}{n}(b-a)} \\ &\ge \int_a^b |k(s,t)|\ dt - \frac{1}{n}(b-a) , \end{aligned}$$

so dass $\forall s \in [a,b]$ dann

$$\|K\| \;\geq\; \|K(x_{n,s})\|_E \;\geq\; K(x_{n,s})(s) \;\geq\; \int_a^b |k(s,t)|dt - \frac{1}{n}(b-a) \;\to\; \int_a^b |k(s,t)|dt \;,$$

also $\|K\| \;\geq\; \max\limits_{s\in[a,b]} \int_a^b |k(s,t)|dt$

□

**Beispiel 3.11** (Unstetigkeit des Differentialoperators bei „falsch gewählter Norm“)**.** Zu $[a,b]$ sei $F = C([a,b],\mathbb{R})$ und $E = C^1([a,b],\mathbb{R})$ sowie die lineare Abbildung $A\colon E \to F$ definiert durch $A(x) = x'$.

(a) Betrachten wir die linearen Räume $E$ und $F$ jeweils mit der Supremumsnorm, d.h.,

$$\|x\|_E \;=\; \|x\|_\infty \;=\; \sup_{t\in[a,b]} |x(t)| \;,$$

dann finden wir Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $E$, etwa

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \frac{1}{n}\sin(n(t-a)) \;, \\ x_n'(t) &= \cos(n(t-a)) \;, \end{aligned}$$

mit $\|x_n\|_E \;\leq\; \frac{1}{n}$, also $x_n \to 0$ in $(E, \|.\|_E)$, und gleichzeitig $\|x_n'\|_F \;\geq\; |x_n'(a)| \;=\; 1$, also $Ax_n \not\to A0 = 0$ in $(F, \|.\|_F)$. Somit kann $A$ in diesem Fall nicht stetig sein.

(b) Betrachten wir anderenfalls die linearen Räume $E$ und $F$ mit den Normen

$$\|x\|_F \;=\; \|x\|_\infty \;=\; \sup_{t\in[a,b]} |x(t)| \;, \qquad \|x\|_E \;=\; \|x\|_\infty \;+\; \|x'\|_\infty \;,$$

so folgt

$$\forall x \in E\colon \|Ax\|_F \;=\; \|x'\|_\infty \;\leq\; \|x\|_\infty \;+\; \|x'\|_\infty \;=\; 1 \cdot \|x\|_E \;,$$

also die Beschränktheit und somit nach Satz 3.5 die Stetigkeit des Operators $A$ mit Operatornorm $\|A\| \leq 1$.

**Definition 3.12.** Sei $E$ ein $\mathbb{K}$-linearer Raum sowie $\|.\|_a$ und $\|.\|_b$ zwei beliebige Normen auf $E$. Dann sagen[2] wir:

$$\begin{aligned} \|.\|_a \text{ ist } \textbf{stärker} \text{ als } \|.\|_b \;\; &:\Longleftrightarrow \;\; \mathrm{Id}_E\colon (E, \|.\|_a) \to (E, \|.\|_b) \text{ ist stetig} \\ &\Longleftrightarrow \;\; \exists M \in [0,\infty[\; \forall x \in E\colon \|x\|_b \;\leq\; M\|x\|_a \end{aligned}$$

**Beispiel 3.13** (Unterschiedlich starke Normen)**.** Auf dem Raum $E = C^1([a,b],\mathbb{R})$ können wir sowohl die $C^0$- als auch die $C^1$-Norm betrachten. Wegen

$$\forall x \in E\colon \|x\|_{C^0} \;:=\; \|x\|_\infty \;\leq\; \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty \;=\; 1 \cdot \|x\|_{C^1}$$

ist $\|.\|_{C^1}$ stärker als $\|.\|_{C^0}$ auf $C^1([a,b],\mathbb{R})$, jedoch ist $\|.\|_{C^0}$ dort nicht stärker als $\|.\|_{C^1}$.

[2] Nach Satz 3.5 ist ein linearer Operator $B\colon (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ genau dann stetig, wenn er beschränkt ist, also wenn gilt

$$\exists M \in [0,\infty[\; \forall x \in E\colon \|Bx\|_F \;\leq\; M\|x\|_E$$

**Bemerkung 3.14.**

(a) Zwei Normen $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ sind gleichstark, wenn $\|.\|_1$ stärker als $\|.\|_2$ und $\|.\|_2$ stärker als $\|.\|_1$ ist, also genau dann, wenn

$$\exists M_1, M_2 \in [0,\infty[\ \forall x \in E \setminus \{0\} \colon M_1 \ \leq \ \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \ \leq \ M_2 \tag{3.22}$$

(b) Nach der vorigen Definition ist eine beliebige Norm stärker als sie selbst.

**Aufgaben:**

................................................................ (Allgemeine Aussagen)

A 3.2.1 Sei $A\colon E \to F$ linear. Zeigen Sie:
$A$ **beschränkt** $\iff \forall x \in E\colon \Big(\|x\|_E \leq 1 \implies \|Ax\|_F \leq M\Big)$.

A 3.2.2 Zeigen Sie: Jede lineare Abbildung des $\ell^p(n)$ in einen normierten Raum ist stetig.[3]

A 3.2.3 Zeigen Sie, dass auf jedem unendlich-dimensionalen Raum $(X, \|.\|_X)$ eine unstetige lineare Abbildung $A\colon X \to \mathbb{R}$ existiert.

A 3.2.4 Sei $X$ ein unendlich-dimensionaler linearer Raum. Zeigen Sie, dass es zwei Normen gibt, die nicht äquivalent sind.

A 3.2.5 Sei $A\colon (X, \|.\|_X) \to (Y, \|.\|_Y)$ ein linearer Operator. Zeigen Sie, dass $A$ genau dann beschränkt ist, wenn er beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet.

A 3.2.6 Sei $A\colon (X, \|.\|_X) \to (Y, \|.\|_Y)$ ein beschränkter linearer surjektiver Operator und es gelte

$$\exists B > 0\colon \forall x \in X\colon \|x\|_X \ \leq \ B\|Ax\|_Y \ .$$

Zeigen Sie: Dann existiert die Inverse $A^{-1}\colon (Y, \|.\|_Y) \to (X, \|.\|_X)$ und ist beschränkt.

A 3.2.7 Seien $\{0\} \neq X$ und $Y$ normierte Räume. Ferner sei $\mathcal{L}(X, Y)$ vollständig. Zeigen Sie, dass $Y$ vollständig ist.

A 3.2.8 Gegeben seien $(X, \|.\|_X)$ nichttrivial und $S, T \in L(X, X)$. Zeigen Sie: Es gilt $ST - TS \neq \mathrm{Id}$.

**Tipp:** Zeigen Sie zunächst $ST^{n+1} - T^{n+1}S = (n+1)T^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ unter der Annahme, dass $ST - TS = \mathrm{Id}$ gelte. Folgern Sie dann aus $\|S\|, \|T\| < \infty$, dass $\|T^n\| = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gelten muss. Verwenden Sie dies, um im Widerspruch zur Voraussetzung auf $T = 0$ zu schließen.

---

[3] $\ell^p(n)$ ist die Menge $\mathbb{K}^n$ der $n$-Tupel $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Für $1 \leq p < \infty$ ist $\|x\| = \left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ eine Norm. Für $p = \infty$ ist $\|x\| = \max\limits_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu|$ eine Norm

**Alternative Formulierung:**

Beweisen Sie den folgenden Satz:
Für $A, B \in \mathcal{L}(E)$ mit einem normierten Raum $E \neq \{0\}$ gilt stets

$$AB - BA \neq I.$$

A 3.2.9 Sei $\big((X, \|.\|_X\big)$ ein Banachraum, $K \in \mathcal{L}(X, X)$ und $S := \sum_{n=0}^{\infty} K^n$. Zeigen Sie:

(a) Falls $\|K\| < 1$, so konvergiert $S$ in $\mathcal{L}(X, X)$.

(b) Falls $S$ konvergiert, so gilt $(I - K)S = S(I - K) = I$.

(c) Die Teilmenge aller Isomorphismen ist offen in $\mathcal{L}(X, X)$. Handelt es sich um einen Teilraum?

A 3.2.10 Finden Sie ein Beispiel eines (notwendigerweise unvollständigen) normierten Raumes $(X, \|.\|_X)$ und einer Reihe, für die einerseits

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X \; < \; \infty$$

und andererseits

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

nicht in $(X, \|.\|_X)$ konvergiert.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Konkrete Beispiele für Folgenräume)

A 3.2.11 Finden Sie ein Beispiel für stetige lineare Operatoren $S, T\colon \ell^p \to \ell^p$, $1 \leq p \leq \infty$, mit $ST = I$ und $TS \neq I$.

A 3.2.12 Auf $\ell^1$ definieren wir für jedes $n$ einen stetigen Endomorphismus $A_n$ durch

$$A_n(\xi_1, \xi_2, \ldots) := (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots).$$

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \ell^1$ zwar $A_n x \to x$ gilt, aber $(A_n)$ nicht in der Operatornorm gegen $\mathrm{Id}_{\ell^1}$ konvergiert.[4]

**Alternative Formulierung:**

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A_n\colon \ell^1 \to \ell^1$ definiert durch $A_n\Big((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\Big) := (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$y_k \; := \begin{cases} x_k, & \text{falls } k \leq n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

[4] $\ell^p$ bezeichnet den Vektorraum der Folgen $x = (\xi_\nu)$ mit $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p < \infty$. Durch $\|x\| = \left(\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ist eine Norm auf $\ell^p$ definiert. Weiter bezeichnet $\ell^\infty$ den linearen Raum der beschränkten Folgen $x = (\xi_\nu)$. Durch $\|x\| := \sup\limits_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|$ ist eine Norm auf $\ell^\infty$ gegeben.

Zeigen Sie, dass die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen $I := \mathrm{Id}_{\ell^1}$ konvergiert, aber nicht in der Operatornorm.

**Tipp:** Es ist $\ell^1 := \left\{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ aus } \mathbb{R} \;\middle|\; \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty\right\}$ mit $\|(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1} := \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$.

A 3.2.13 Sei $z \in \ell^\infty$ und $T_z\colon \ell^\infty \to \ell^\infty$ durch $T_z(x)(n) := z(n) \cdot x(n)$ definiert. Berechnen Sie $\|T_z\|$.

A 3.2.14 Sei $A\colon \ell^\infty \to \ell^\infty$ definiert durch $A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \dots)$.

(a) Zeigen Sie:

(i) $A$ ist injektiv. (ii) $A$ ist stetig. (iii) $\|A\| = 1$. (iv) $A$ ist nicht surjektiv.

(b) Zeigen Sie, dass $A^{-1}\colon A(\ell^\infty) \to \ell^\infty$ nicht stetig ist.

A 3.2.15 Der Operator $A\colon D \subset \ell^\infty \to \ell^\infty$ sei auf

$$D := \left\{ x \in \ell^\infty \mid \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{k} \text{ konvergiert} \right\} \qquad \text{durch} \qquad Ax := \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{k}, 0, \dots \right)$$

definiert. Zeigen Sie:

(a) $A\colon \ell^2 \to \ell^2$ ist stetig bezüglich $\|.\|_2$. (Warum ist $A$ auf $\ell^2$ definiert?)

(b) $A$ ist unstetig bezüglich $\|.\|_\infty$.

A 3.2.16 Gegeben sei die Norm $\|x\|_\infty := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$ auf dem Raum der beschränkten reellen Zahlenfolgen

$$\ell^\infty := \left\{ x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \colon \left( \forall n \in \mathbb{N}\ \xi_n \in \mathbb{R} \ \wedge\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n| < \infty \right) \right\} .$$

Auf $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ seien der **Shift-Operator** $S\colon \ell^\infty \to \ell^\infty$ durch $S(\xi_1, \xi_2, \dots) := (\xi_2, \xi_3, \dots)$ und der **Differenzoperator** $D\colon \ell^\infty \to \ell^\infty$ durch $D(\xi_1, \xi_2, \dots) := (\xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_2, \dots)$ definiert. Überprüfen Sie, ob $S, D \in L(\ell^\infty, \ell^\infty)$ gilt. Falls ja, berechnen Sie $\|S\|_{L(\ell^\infty,\ell^\infty)}$ und $\|D\|_{L(\ell^\infty,\ell^\infty)}$.

............................................ (Konkrete Beispiele für Funktionenräume)

A 3.2.17 Sei $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und $A_g\colon \left(L^2(]0,1[), \|.\|_{L^2(]0,1[)}\right) \to \left(L^2(]0,1[), \|.\|_{L^2(]0,1[)}\right)$ definiert durch $A_g f(x) = f(x)g(x)$. Zeigen Sie: $\|A_g\| = \|g\|_\infty := \max\limits_{x\in[0,1]} |g(x)|$.

A 3.2.18 Gegeben seien die normierten Räume $(X, \|.\|_X) = (\Pi(\mathbb{R}), \|.\|_{\Pi(\mathbb{R})})$ und $(Y, \|.\|_Y) = (\mathbb{R}, |.|)$, wobei $\Pi(\mathbb{R})$ den linearen Raum aller reellwertigen Polynome bezeichne und die Norm $\|.\|_{\Pi(\mathbb{R})}$ für ein $p = p(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$ durch $\|p\|_{\Pi(\mathbb{R})} := \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|$ definiert sei. Desweiteren seien die Abbildungen

(a) $A_1\colon p \mapsto \displaystyle\int_0^1 p(t)dt$ (b) $A_2\colon p \mapsto p'(0)$ (c) $A_3\colon p \mapsto \displaystyle\int_0^t p(s)ds$

gegeben. Überprüfen Sie, ob $A_1 \in L(X,Y)$, $A_2 \in L(X,Y)$ und $A_3 \in L(X,X)$ gilt.

Falls ja, bestimmen Sie jeweils die Operatornorm.

A 3.2.19 Zeigen Sie, dass durch

$$\text{(a)}\ A\colon f \mapsto \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} f(x)dx \quad \text{und} \qquad \text{(b)}\ B\colon f \mapsto \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx$$

stetige lineare Abbildungen von $\Big(C([-1,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty\Big)$ nach $(\mathbb{R}, |.|)$ gegeben sind.

Bestimmen Sie außerdem die Operatornormen $\|A\|$ und $\|B\|$.

A 3.2.20 Bestimmen Sei die Operatornorm der linearen Abbildung $A\colon C([0,a],\mathbb{R}) \to C([0,a],\mathbb{R})$, die jedem $x \in C([0,a],\mathbb{R})$ die Funktion

$$(Ax)(s) \;=\; s \cdot \int_0^a x(t)\; dt, \qquad 0 \le s \le a$$

zuordnet.

**Alternative Formulierung:**

Die lineare Abbildung $A\colon C([0,a],\mathbb{R}) \to C([0,a],\mathbb{R})$ sei definiert durch

$$(Ax)(s) \;=\; s \cdot \int_0^a x(t)\; dt\ .$$

Bestimmen Sie die Operatornorm auf $A$, wobei $C([0,a],\mathbb{R})$ mit der üblichen Supremumsnorm versehen sei.

A 3.2.21 Zeigen Sie: Die Abbildung

$$A\colon f \mapsto \int_0^1 x f(x)dx$$

ist linear und stetig von $X := (C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ nach $Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, d.h., $A \in L\,(X,Y)$.

A 3.2.22 Seien $n \in \mathbb{N}$, $-\infty < a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b < \infty$ und $l_k \in C([a,b],\mathbb{R})$, $k = 0,\ldots,n$. Der **Lagrange-Interpolationsoperator** $L\colon C([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R})$ sei definiert durch

$$(Lf)(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x).$$

Bestimmen Sie die Operatornorm von $L$.

........................................................................ (Kompakte Operatoren)

A 3.2.23 Die lineare Abbildung $K\colon (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ besitze die Eigenschaft, dass das Bild $(Ax_n)$ jeder beschränkten Folge $(x_n)$ eine konvergente Teilfolge enthält.[5]
Zeigen Sie, dass $A$ dann stetig ist.

A 3.2.24 Geben Sie eine beschränkte Folge aus $\ell^p$, $1 \le p < \infty$ an, aus welcher man keine Cauchy-Teilfolge auswählen kann.

A 3.2.25 Zeigen Sie: In $\ell^1(n)$ gilt der Satz von Bolzano-Weierstraß (Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge).

[5] Derartige Operatoren nennt man **kompakt**.

# Kapitel 4

# Eigenschaften normierter Räume

## 4.1 Endlichdimensionale normierte Räume

**Satz 4.1.** *Sei* $(E, \|.\|_E)$ *ein normierter Raum über* $\mathbb{K}$. *Desweiteren seien* $x_1, \ldots, x_n$ *linear unabhängig in* $E$. *Dann existiert ein* $\mu > 0$, *so dass*

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}^n \colon \|\alpha\|_{\ell^1(n)} \ := \ \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \ \leq \ \mu \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\|_E \quad . \tag{4.1}$$

**Beweis:**

Wir verwenden die folgenden bekannten Aussagen:

(a) Die Sphäre $\mathcal{S}_{n-1} = \left\{ \alpha \in \mathbb{K}^n \mid \|\alpha\|_{\ell^1(n)} = 1 \right\}$ ist kompakt in $\mathbb{K}^n$.

(b) Ist $(X, d)$ ein metrischer Raum und $K \subset X$ kompakt sowie $f \colon K \to \mathbb{R}$ stetig, so nimmt $f$ sowohl Maximum als auch Minimum an (Satz vom Minimum/Maximum).

(c) Die Abbildung $A \colon \mathbb{K}^n \to E$, $\alpha \mapsto \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, ist linear.

Betrachten wir nun $f \colon S \to \mathbb{R}$, definiert durch $f = \|.\| \circ A$, d.h., $\alpha \mapsto \|A\alpha\| \geq 0$, so ist $f$ als Hintereinanderausführung stetiger Funktionen wiederum stetig. Nach dem Satz vom Minimum/Maximum folgt

$$\exists \tilde{\alpha} \in S \colon \gamma := f(\tilde{\alpha}) = \min_{\alpha \in S} f(\alpha) \ \geq \ 0 \ .$$

Angenommen, es gelte $\gamma = 0$, also $f(\tilde{\alpha}) = 0$, d.h., $\|A\tilde{\alpha}\| = 0$. Aufgrund der Definitheit der Norm muss dann auch $A\tilde{\alpha} = 0$, d.h., $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$, so dass mit der linearen Unabhängigkeit $\forall j \colon \tilde{\alpha}_j = 0$, also $\tilde{\alpha} = 0$ und somit der Widerspruch $0 \in \mathcal{S}_{n-1}$ aufträte.
Also muss $\gamma > 0$ gelten. Sei nun $\mu := \frac{1}{\gamma} > 0$. Da wir zu jedem beliebigen $\alpha \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ durch Skalieren ein $\beta = \frac{\alpha}{\|\alpha\|_{\ell^1(n)}} \in \mathcal{S}_{n-1}$ finden, ergibt sich nun

$$\frac{1}{\mu} \ = \ \gamma \ \leq \ f(\beta) \ = \ \|A\beta\| \ = \ \frac{\alpha}{\|A\alpha\|_{\ell^1(n)}} \ ,$$

so dass nach Umstellen wie behauptet $\|\alpha\|_{\ell^1(n)} \leq \mu \|A\alpha\|$ gilt.

$\square$

**Korollar 4.2.** *Sei $(E, \|.\|_E)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$ mit $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n \in \mathbb{N}$. Desweiteren sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis von $E$ und die lineare Abbildung*

$$A\colon (\mathbb{K}^n, \|.\|_{\ell^1(n)}) \to (E, \|.\|_E)\ , \qquad \alpha \mapsto \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \tag{4.2}$$

*gegeben. Dann ist $A$ ein **Homöomorphismus**, d.h., $A$ ist bijektiv, stetig und $A^{-1}$ ist stetig.*

**Beweis:**

- $A$ ist injektiv, denn: Angenommen, es gäbe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^n$ mit $A(\alpha) = A(\beta)$, so folgte mit der Linearität von $A$ und der linearen Unabhängigkeit der Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ auch
$$0 \;=\; A(\alpha - \beta) \;=\; \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \beta_j) x_j \quad \Longrightarrow \quad \forall j = 1, \ldots, n\colon \alpha_j = \beta_j \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta\ .$$

- $A$ ist surjektiv, denn: Ist $z \in E$ ein beliebiges Element, so gibt es – da $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis von $E$ ist – eindeutige Koeffizienten $\zeta_j$, $j = 1, \ldots, n$ mit $z = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j x_j$. Also folgt mit $\zeta := (\zeta_j)_{j=1,\ldots,n} \in \mathbb{K}^n$ schon $A(\zeta) = z$, also $z \in A(\mathbb{K}^n)$ und somit $A(\mathbb{K}^n) = E$.

- $A$ ist stetig nach Satz 3.5, denn die Beschränktheit folgt mit $\|A\| \leq \max\limits_{k=1,\ldots,n} \|x_k\|_E$ aus
$$\forall \alpha \in \mathbb{K}^n\colon \|A(\alpha)\|_E \;\leq\; \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\|_E \;\leq\; \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \underbrace{\|x_j\|_E}_{\leq \max\limits_{k=1,\ldots,n} \|x_k\|_E} \;\leq\; \max_{k=1,\ldots,n} \|x_k\|_E \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|}_{= \|\alpha\|_{\ell^1(n)}}\ .$$

- $A^{-1}$ ist stetig, denn: Mit $\alpha = A^{-1}x$ liefert Satz 4.1 die Existenz eines $\mu \in ]0, \infty[$, so dass
$$\forall x \in E\colon \|A^{-1}x\|_{\ell^1(n)} \;=\; \|\alpha\|_{\ell^1(n)} \;\leq\; \mu \|A(\alpha)\|_E \;=\; \mu \|AA^{-1}x\|_E \;=\; \mu \|x\|_E\ ,$$
also ist $A^{-1}$ beschränkt und – da $A^{-1}$ linear sein muss – nach Satz 3.5 somit stetig.

□

**Satz 4.3.** *Sei $E$ ein $n$-dimensionaler Raum über $\mathbb{K}$. Desweiteren seien $\|.\|_a$, $\|.\|_b$ zwei beliebige Normen auf $E$. Dann sind $\|.\|_a$ und $\|.\|_b$ gleichstark (äquivalent).*

**Beweis:** Sei $A$ wie in Korollar 4.2 definiert. Dann gilt

$$(E, \|.\|_a) \overset{A^{-1} \text{ stetig}}{\longrightarrow} (\mathbb{K}^n, \|\|_{\ell^1(n)}) \overset{A \text{ stetig}}{\longrightarrow} (E, \|.\|_b)\ ,$$

wonach $\mathrm{Id}_E\colon (E, \|.\|_a) \to (E, \|.\|_b)$ als Hintereinanderausführung stetiger Funktionen selber wieder stetig ist, also nach Satz 3.5 somit beschränkt. Also finden wir eine Konstante $M < \infty$, so dass

$$\forall x \in E\colon \|x\|_b \;\leq\; M \|x\|_a$$

gilt. Entsprechend Definition 3.12 ergibt sich nun, dass $\|.\|_a$ stärker als $\|.\|_b$ ist. Analog folgt jedoch auch, dass $\|.\|_b$ stärker als $\|.\|_a$ ist, womit die Behauptung gezeigt ist. □

**Satz 4.4.** *Seien* $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ *normierte Räume über* $\mathbb{K}$ *und* $A\colon (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *linear und ein Homöomorphismus (d.h., $A$ ist bijektiv, stetig und $A^{-1}$ ist stetig) sowie* $(E, \|.\|_E)$ *vollständig. Dann ist* $(F, \|.\|_F)$ *ein Banachraum (d.h., vollständig).*

**Beweis:** Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $F$. Da $A$ ein Homöomorphismus ist, existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $E$, so dass $\forall n \in \mathbb{N}\colon Ax_n = y_n$. Aufgrund der aus der Stetigkeit von $A^{-1}$ resultierenden Abschätzung

$$\forall n, m \in \mathbb{N}\colon \|x_n - x_m\|_E \ = \ \|A^{-1}y_n \ - \ A^{-1}y_m\|_E \ \leq \ \|A^{-1}\| \cdot \|y_n - y_m\|_F$$

ergibt sich, dass auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $E$ sein muss. Die Vollständigkeit von $(E, \|.\|_E)$ liefert also die Existenz eines $x \in E$ mit $x_n \to x$ in $(E, \|.\|_E)$. Mit der Stetigkeit von $A$ muss somit auch $y_n = Ax_n \to Ax =: y$ in $(F, \|.\|_F)$ gelten. Daher ist $(F, \|.\|_F)$ ebenfalls vollständig und somit ein Banachraum. □

**Korollar 4.5.** *Sei* $(E, \|.\|_E)$ *ein normierter Raum über* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*) mit* $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $(E, \|.\|_E)$ *ein Banachraum (d.h., vollständig).*

**Beweis:** In der Vorlesung Analysis 2 haben wir gezeigt, dass Konvergenz in $(\mathbb{K}^n, \|.\|_{\ell^1(n)})$ äquivalent zur komponentenweisen Konvergenz ist, so dass die Vollständigkeit von $(\mathbb{K}, |.|)$ auch die Vollständigkeit von $(\mathbb{K}^n, \|.\|_{\ell^1(n)})$ nach sich zieht. Weiter liefert Korollar 4.2, dass jeder endlichdimensionale normierte Raum homöomorph zu $(\mathbb{K}^n, \|.\|_{\ell^1(n)})$ ist, so dass sich nun nach Satz 4.4 auch die Vollständigkeit von $(E, \|.\|_E)$ ergibt. □

**Satz 4.6.** *Sei* $(E, \|.\|_E)$ *ein normierter Raum über* $\mathbb{K}$ *und* $F \subset E$ *ein endlichdimensionaler linearer Unterraum. Dann ist* $F$ *abgeschlossen (in* $(E, \|.\|_E)$*).*

**Beweis:** Nach Korollar 4.5 ist $(F, \|.\|_{E_{|F}}$ als endlichdimensionaler normierter Raum vollständig. Sei nun $x \in E$ ein Berührpunkt von $F \subset E$, d.h., es gäbe eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $F$ mit $x_n \to x$ in $(E, \|.\|_E)$. Dann ist diese Folge notwendigerweise auch eine Cauchyfolge in $(E, \|.\|_E)$, also wegen $\forall n \in \mathbb{N}\colon x_n \in F$ auch eine Cauchyfolge in $(F, \|.\|_{E_{|F}}$. Aufgrund der festgestellten Vollständigkeit von $(F, \|.\|_{E_{|F}}$ existiert ein $y \in F$ mit $x_n \to y$ in $(F, \|.\|_{E_{|F}}$, also auch $x_n \to y$ in $(E, \|.\|_E)$. Mit der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt nun $x = y$, also $x \in F$. Somit haben wir gezeigt, dass $F \subset E$ abgeschlossen in $(E, \|.\|_E)$ ist. □

**Satz 4.7.** *Seien* $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ *normierte lineare Räume über* $\mathbb{K}$ *mit* $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n \in \mathbb{N}$. *Desweiteren sei* $B\colon E \to F$ *linear. Dann ist* $B$ *auch stetig, d.h., es gilt* $B \in \mathcal{L}(E, F)$.

**Beweis:** Mit dem Homöomorphismus $A$ aus Korollar 4.2 erhalten wir die ebenfalls lineare Abbildung $B \circ A\colon \mathbb{K}^n \to F$ mit

$$(B \circ A)(\alpha) \ = \ B\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right) \ = \ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j B x_j \ ,$$

deren Stetigkeit wiederum nach Satz 3.5 aus der Beschränktheit

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}^n\colon \|(B \circ A)(\alpha)\|_F \ \leq \ \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \|Bx_j\|_F \ \leq \ \left(\max_{k=1,\ldots,n} \|Bx_k\|_F\right) \|\alpha\|_{\ell^1(n)}$$

ergibt. Da Hintereinanderausführungen stetiger Abbildungen wiederum stetig sind, ergibt sich auch die Stetigkeit von $B = (B \circ A) \circ A^{-1}$. □

## 4.2 Rieszsches Lemma und seine Anwendungen

**Lemma 4.8** (Rieszsches Lemma)**.** *Zu $(E, \|.\|_E)$ sei $F \neq E$ ein abgeschlossener Unterraum von $E$. Dann gelten*

(a) $\exists \tilde{x} \in E\colon \left( \|\tilde{x}\|_E = 1 \ \wedge \ \forall x \in F\colon \|x - \tilde{x}\|_E \geq \frac{1}{2} \right)$.

(b) $\forall \eta \in \,]0,1[\ \exists x_\eta \in E\colon \left( \|x_\eta\|_E = 1 \ \wedge \ \forall x \in F\colon \|x - x_\eta\|_E \geq \eta \right)$.

**Beweis:** Wegen $F \neq E$ ist $E \setminus F \neq \emptyset$. Somit existiert ein $y \in E \setminus F$. Für dieses gilt gilt dann

$$d \ := \ \inf_{x \in F} \|x - y\|_E \ > \ 0 \ ,$$

denn:

- Angenommen, es gelte $d = 0$. Nach Definition des Infimums existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $F$ mit $\|x_n - y\|_E \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d$. Im Fall $d = 0$ wäre dies gleichbedeutend mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ in $(E, \|.\|_E)$. Da $\forall n \in \mathbb{N}\colon x_n \in F$ gilt und $F$ nach Voraussetzung abgeschlossen ist, folgt dann auch $y \in F$ im Widerspruch zu $y \in E \setminus F$.

Für beliebiges $\eta \in \,]0,1[$ gilt $\frac{d}{\eta} > d$, so dass nach Definition des Infimums ein $z \in F$ mit

$$0 \ < \ d \ \leq \ \|z - y\|_E \ < \ \frac{d}{\eta} \qquad \text{und somit auch} \qquad \frac{1}{\|y - z\|_E} \ > \ \frac{\eta}{d}$$

existiert. Insbesondere ist also $z - y \neq 0$. Für $x_\eta := \frac{y - z}{\|y - z\|_E}$ gelten nun einerseits $x_\eta \in E$ sowie $\|x_\eta\|_E = 1$ und andererseits

$$\forall x \in F\colon \|x - x_\eta\|_E = \left\| x - \frac{y - z}{\|y - z\|_E} \right\|_E = \frac{1}{\|y - z\|_E} \underbrace{\big\| \underbrace{(x \cdot \|y - z\|_E + z)}_{\in F} - y \big\|_E}_{\geq d} \ \geq \ \frac{\eta}{d} \cdot d \ = \ \eta \ ,$$

was Behauptung (b) entspricht. Behauptung (a) folgt genau für $\eta = \frac{1}{2}$. □

**Korollar 4.9.** *Zu $(E, \|.\|_E)$ sei $F \neq E$ ein abgeschlossener Unterraum von $E$ und $\delta > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $y \in E$, so dass*

$$\forall x \in F\colon \|x - y\|_E \ \geq \ \delta \ . \tag{4.3}$$

**Beweis:** Ist $F$ abgeschlossen, dann existiert nach dem Rieszschen Lemma (Lemma 4.8) für jedes beliebige $0 < \eta < 1$ ein $y_\eta$ mit $\|y_\eta\|_E = 1$ und $\forall x \in F\colon \|y_\eta - x\| \geq \eta$. Setzen wir nun $y := \frac{y_\eta}{\eta}\delta$, dann gilt

$$\forall x \in F\colon \|y - x\| \ = \ \frac{\delta}{\eta} \left\| y_\eta - \frac{\eta}{\delta} x \right\|_E \ \geq \ \frac{\delta}{\eta} \eta \ = \ \delta.$$

□

Die Aussage des letzten Korollars wird im Allgemeinen falsch, wenn auf die Abgeschlossenheit des Unterraumes verzichtet wird.

**Beispiel 4.10** (Fehlende Abgeschlossenheit des Unterraumes).
Betrachten wir den linearen Unterraum $F$ aller endlichen Folgen, so gilt für jedes beliebige $x \in F$ somit $\|x\|_{\ell^2}^2 = \sum_{k=1}^{n_x} |x(k)|^2 < \infty$, also $F \subset \ell^2$. Sei nun $y \in \ell^2 \setminus F$ beliebig[1] Dann existiert aufgrund der Konvergenz von $\sum_{n \in N} y(n)$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$, so dass für $y_0$ mit

$$y_0(n) \;=\; \begin{cases} y(n)\,, & n \leq n_0, \\ 0\,, & n > n_0, \end{cases}$$

einerseits $y_0 \in F$ und andererseits $\|y_0 - y\|_{\ell^2} < \varepsilon$. Also können wir kein $y \in \ell^2$ derart finden, dass für alle $x \in F$ die Ungleichung $\|y - x\|_{\ell^2} \geq \delta > 0$ gilt.

**Satz 4.11.** *Sei $(E, \|.\|_E)$ unendlich-dimensional. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $E$ mit*

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \|x_n\|_E = 1 \qquad \textit{und} \qquad \forall m,n \in \mathbb{N}\colon \left(m \neq n \Longrightarrow \|x_n - x_m\|_E \geq \frac{1}{2}\right)$$

**Beweis:**

- **Schritt 1:** Der triviale Raum $F_1 = \{0\}$ ist abgeschlossen und ein echter Unterraum von $E$, da $(E, \|.\|_E)$ unendlich-dimensional.
  Nach dem Rieszschen Lemma (Lemma 4.8 (a)) finden wir ein $x_1 \in E \setminus F_1$ mit $\|x_1\|_E = 1$ und trivialerweise $\forall x \in F_1\colon \|x - x_1\| \geq \frac{1}{2}$.
- **Schritt 2:** Der eindimensionale Raum $F_2 := \operatorname{span}\{x_1\}$ ist als endlichdimensionaler Unterraum nach Satz 4.6 abgeschlossen und ein echter Unterraum von $E$.
  Nach dem Rieszschen Lemma (Lemma 4.8 (a)) finden wir ein $x_2 \in E \setminus F_2$ mit $\|x_2\|_E = 1$ und $\forall x \in F_2\colon \|x - x_2\| \geq \frac{1}{2}$. Insbesondere gilt daher $\|x_1 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$.
- **Schritt 3:** Der zweidimensionale Raum $F_3 := \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$ ist als endlichdimensionaler Unterraum nach Satz 4.6 abgeschlossen und ein echter Unterraum von $E$.
  Nach dem Rieszschen Lemma (Lemma 4.8 (a)) finden wir ein $x_3 \in E \setminus F_3$ mit $\|x_3\|_E = 1$ und $\forall x \in F_3\colon \|x - x_3\| \geq \frac{1}{2}$. Insbesondere gilt daher $\forall k = 1,2\colon \|x_k - x_3\| \geq \frac{1}{2}$.
- ...
- **Schritt n:** Der $(n-1)$-dimensionale Raum $F_n := \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ ist als endlichdimensionaler Unterraum nach Satz 4.6 abgeschlossen und ein echter Unterraum von $E$.
  Nach dem Rieszschen Lemma (Lemma 4.8 (a)) finden wir ein $x_n \in E \setminus F_n$ mit $\|x_n\|_E = 1$ und $\forall x \in F_n\colon \|x - x_n\| \geq \frac{1}{2}$. Insbesondere gilt daher $\forall k = 1, \ldots, n-1\colon \|x_k - x_3\| \geq \frac{1}{2}$.

In dieser Weise erhalten wir eine Folge mit den gewünschten Eigenschaften. □

**Beispiel 4.12.** Sei $(E, \|.\|_E)$ unendlich-dimensional. Dann ist die Einheitssphäre

$$S \;:=\; \{x \in E \mid \|x\|_E = 1\} \tag{4.4}$$

nicht kompakt.

[1] Ein solches existiert, beispielsweise $y$ mit $\forall n \in \mathbb{N}\colon y(n) = \frac{1}{n^2}$

**Beweis:** Angenommen, die Einheitssphäre $S$ wäre kompakt. Dann müsste jede Folge aus $S$ eine konvergente Teilfolge besitzen. Die im Beweis von Satz 4.11 ermittelte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt die Eigenschaft, dass sie keine Teilfolge mit der Cauchy-Eigenschaft besitzen kann, also auch keine konvergente Teilfolge. Somit kann $S$ nicht kompakt gewesen sein. □

**Satz 4.13.** *Sei $(E, \|.\|_E)$ unendlich-dimensional, $K \subset E$, $K$ kompakt. Dann ist das Innere von $K$ leer, d.h., $K$ enthält keine offene Kugel.*

**Bemerkung 4.14.**

(a) Auf konvexen abgeschlossenen Nullumgebungen $M$ in linearen Räumen $E$ können wir die stetige Funktion $H\colon M \times [0,1] \to M$, definiert durch $H(x,t) = (1-t)x$, betrachten. Offenbar gilt dann für die parameterabhängigen Funktionen $H_t := H(\cdot, t)\colon M \to M$ insbesondere $H_0 \equiv \mathrm{Id}_S$ sowie $H_1 \equiv 0_E$. Man sagt, konvexe abgeschlossene Nullumgebungen sind **homotop** zum Nullpunkt bzw. sind (auf einen Punkt) zusammenziehbar.

(b) Beispielsweise ist die abgeschlossene Einheitskugel $K_1(0) := \{x \in E \mid \|x\|_E \leq 1\}$ in beliebigen normierten Räumen $(E, \|.\|_E)$ (etwa auf den Nullpunkt) zusammenziehbar.

(c) Dagegen gibt es in endlich-dimensionalen normierten Räumen $(E, \|.\|_E)$ keine stetige Funktion $H\colon E \times [0,1] \to E$, so dass für die Sphäre $S := \{x \in E \mid \|x\|_E = 1\}$ einerseits $H_{0|_S} \equiv \mathrm{Id}_S$ und $H_{0|_S} \equiv x_0$ mit einem $x_0 \in E$ gilt. Wir sagen, dass die Einheitssphäre in endlichdimensionalen Räumen nicht auf einen Punkt zusammenziehbar ist.

(d) Andererseits kann man zeigen, dass die Einheitssphäre in unendlichdimensionalen Räumen stets auf einen Punkt zusammenziehbar ist.

**Aufgaben:**

A 4.2.1 **(Ein Distanzierungsproblem)**

(a) Sei $F$ ein echter Unterraum des normierten Raumes $(E, \|.\|_E)$ und $\delta > 0$ beliebig. Gibt es ein $y \in E$, so dass $\|x - y\|_E \geq \delta$ für alle $x \in F$ ist ?

Zeigen Sie, dass die Frage für abgeschlossenes $F$ zu bejahen ist.

(b) Geben Sie einen Unterraum von $\ell^2$ an, für den es nicht gilt.

.................................... (Gegenbeispiel zum Rieszschen Lemma im Fall $\eta = 1$)

A 4.2.2 Sei $E := \{x \in C([0,1], \mathbb{K}) : x(0) = 0\}$ und $I\colon E \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 x(t)dt$. Dann ist $I$ eine lineare Abbildung. Weiterhin sei $F := \ker(I)$ der Kern von $I$. Zeigen Sie:

(i) $I$ ist stetig. (ii) $\|I\| = 1$. (iii) $F$ ist abgeschlossener Teilraum von $E$.

(iv) $\forall x \in E$ mit $\|x\| = 1$ ist $|Ix| < 1$. (v) $\forall x \in E\colon |Ix| = \mathrm{dist}(x, F)$.

(vi) Es kann kein $x_1 \in E$ mit $\|x_1\| = 1$ existieren, so dass $\|x - x_1\| \geq 1$ für alle $x \in F$ gilt.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Kompaktheit)

A 4.2.3 Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.

(b) Der Durchschnitt beliebig vieler kompakter Mengen ist kompakt.

A 4.2.4 Entscheiden Sie, ob die Menge $\mathbb{Q}$ in $(\mathbb{R}, d_{|.|})$ kompakt ist.

A 4.2.5 Zeigen Sie, dass die Menge $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | \ A^T A = \mathrm{Id}\}$ der orthogonalen reellen $n \times n$-Matrizen im normierten Raum $\big(L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}\big)$ der stetigen linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ kompakt ist.

A 4.2.6 Zeigen Sie: In einem normierten Raum gilt genau dann der Satz von Bolzano-Weierstraß, wenn der Raum von endlicher Dimension ist.

**Tipp:** Zeigen Sie zunächst, dass aus endlicher Dimension der Satz von Bolzano-Weierstraß folgt.[2]. Konstruieren Sie anschließend für einen beliebigen Raum von unendlicher Dimension eine beschränkte Folge, die keine konvergente Teilfolge besitzt - so dass Bolzano-Weierstraß also nicht gilt.

A 4.2.7 Zeigen Sie für einen normierten Raum $(E, \|.\|_E)$ die Äquivalenz von

(a) E ist endlichdimensional.

(b) Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von E ist überdeckungskompakt.

(c) Die abgeschlossene Einheitskugel ist kompakt.

A 4.2.8 Zeigen Sie, dass die Einheitssphäre in $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ nicht kompakt ist.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Vorgriff: Dualraum)

A 4.2.9 (a) Sei

$$L := \left\{ f \in C[a, b] \ | \ \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\, dx = \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\, dx \right\}$$

Bestimmen Sie ein $x' \in (C[a, b])'$ mit $L = \ker x'$ und zeigen Sie, dass $L$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $C[a, b]$ ist.

(b) Sei $x'$ durch die vorherige Aufgabe gegeben. Zeigen Sie, dass $x'$ auf der abgeschlossenen Einheitskugel seine Norm nicht annimmt, d.h.

$$\forall x \in C[a, b] \text{ mit } \|x\| \leq 1 \text{ gilt } \ |x'(x)| < \|x'\| \ .$$

[2] Nutzen Sie dafür die vorige Teilaufgabe und den folgenden Satz: Sei $E$ normierter linearer Raum über $\mathbb{K}$ und $x_1, \ldots, x_n$ $\mathbb{K}$-linear unabhängig in $E$. Dann existiert ein $\mu > 0$, so dass für alle $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ gilt: $|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n| \leq \mu \cdot \|\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_n x_n\|$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Komplexifizierung)

A 4.2.10 Sei $V_{\mathbb{R}}$ ein beliebiger reeller Vektorraum. Wir definieren zunächst die Menge $V_{\mathbb{C}}$ durch $V_{\mathbb{C}} := V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}}$ und führen in $V_{\mathbb{C}}$ eine Vektoraddition und eine Skalarmultiplikation mit komplexen Zahlen folgendermaßen ein:

- *Vektoraddition:* $(x, y) + (u, v) := (x \underset{\mathbb{R}}{+} u, y \underset{\mathbb{R}}{+} v)$
- *Skalarmultiplikation:* $(\alpha, \beta) \cdot (u, v) := (\alpha \underset{\mathbb{R}}{\cdot} u \underset{\mathbb{R}}{-} \beta \underset{\mathbb{R}}{\cdot} v, \beta \underset{\mathbb{R}}{\cdot} u \underset{\mathbb{R}}{+} \alpha \underset{\mathbb{R}}{\cdot} v)$

Zeigen Sie, dass $V_{\mathbb{C}}$ zusammen mit der oben definierten Vektoraddition und Skalarmultiplikation einen komplexen Vektorraum bilden.

A 4.2.11 Es sei $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$ die Norm auf $E$. Zeigen Sie, dass durch

$$\|(u, v)\|_{\mathbb{C}} := \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left(\max\{\|\cos(\theta)u - \sin(\theta)v\|_{\mathbb{R}},\ \|\sin(\theta)u + \cos(\theta)v\|_{\mathbb{R}}\}\right)$$

eine Norm auf der Komplexifizierung von $E$ definiert ist.

A 4.2.12 Sei $E$ ein reeller, normierter, linearer Raum mit der Norm $\|\cdot\|$ und $E_{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung von $E$. Zeigen Sie die Richtigkeit der Ungleichung

$$\frac{1}{2}\|u\| + \frac{1}{2}\|v\| \leq \|(u, v)\|_{\mathbb{C}} \leq \|u\| + \|v\|.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Erhaltung der Vollständigkeit unter Komplexifikation)

A 4.2.13 Sei $(E, \|.\|)$ ein reeller Banachraum.
Zeigen Sie, dass die Komplexifikation von $E$ ebenfalls ein Banachraum ist.

# Kapitel 5

# Hilberträume

In diesem Kapitel wollen wir uns mit Innenprodukträumen beschäftigen, stellen das Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren vor, untersuchen verschiedene Formulierungen der Approximationsaufgabe inklusive der Frage nach der Existenz, Eindeutigkeit und ggf. Konstruktion ihrer Lösung. Schließlich gelanden wir zum Riesz'schen Darstellungssatz.

Zunächst wollen wir jedoch noch einmal rekapitulieren, was ein abstraktes Innenprodukt ist, welche Beispiele wir bisher bereits kennengelernt haben und einige grundlegende Eigenschaften von Innenprodukträumen vorstellen.

## 5.1 Innenprodukträume

Um auch den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ abzudecken, benötigen wir eine im Vergleich zu dem im ersten Kapitel bereitgestellten Begriff etwas erweiterte Definition einen Innenproduktes.

**Definition 5.1.**
Sei $E$ ein $\mathbb{K}$-linearer Raum. Eine Abbildung $\langle .,. \rangle\colon E \times E \to \mathbb{K}$ heißt ein **Skalarprodukt** (oder ein **Innenprodukt**) auf $E$, wenn es die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \forall x,y,z \in E\colon \langle x+y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle \\ (2) & \forall x,z \in E\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\colon \langle \alpha x, z\rangle = \alpha \langle x,z\rangle \end{array}\right\} \quad \text{(Linearität in der ersten Komponente)}$$

(3) $\forall x,z \in E\colon \langle x,z\rangle = \overline{\langle z,x\rangle}$ (hermite'sch)

(4) $\forall x \in E\colon \langle x,x\rangle \geq 0$ (also insbesondere $\langle x,x\rangle \in \mathbb{R}$)

(5) $\forall x \in E\colon \Big(\langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0_E\Big)$

**Bemerkung 5.2.**

(a) Aus den Eigenschaften (1) und (3) folgt auch die Eigenschaft

(1') $\forall x,y,z \in E\colon \langle z, x+y\rangle = \langle z,x\rangle + \langle z,y\rangle$

wegen

$$\langle z, x+y\rangle \overset{(3)}{=} \overline{\langle x+y, z\rangle} \overset{(1)}{=} \overline{\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle} = \overline{\langle x,z\rangle} + \overline{\langle y,z\rangle} \overset{(3)}{=} \langle z,x\rangle + \langle z,y\rangle$$

(b) Aus den Eigenschaften (2) und (3) folgt auch die Eigenschaft

(2') $\forall x, z \in E\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\colon \langle z, \alpha x\rangle \;=\; \overline{\alpha}\langle z, x\rangle$

wegen

$$\langle z, \alpha x\rangle \stackrel{(3)}{=} \overline{\langle \alpha x, z\rangle} \stackrel{(2)}{=} \overline{\alpha\langle x, z\rangle} \;=\; \overline{\alpha}\cdot\overline{\langle x, z\rangle} \stackrel{(3)}{=} \overline{\alpha}\langle z, x\rangle\ .$$

**Satz 5.3** (Cauchy-Schwarz-Ungleichung).
*Sei $\langle .,.\rangle\colon E\times E \to \mathbb{K}$ ein Innenprodukt auf dem $\mathbb{K}$-linearen Raum $E$ und die Abbildung $\|.\|\colon E \to \mathbb{R}$ definiert durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Dann gelten*

(a) $\forall x, y \in E\colon |\langle x, y\rangle| \;\leq\; \|x\|\cdot\|y\|$

(b) $|\langle x, y\rangle| \;=\; \|x\|\cdot\|y\| \iff x, y$ *linear unabhängig.*

**Beweis:** Zunächst ist die Abbildung $\|.\|\colon E \to \mathbb{R}$ nach Eigenschaft (4) aus Definition 5.1 wohldefiniert. sowie nichtnegativ.

(a)
- Ist $x \;=\; 0_E$, dann folgt mit Eigenschaft (4) aus Definition 5.1, dass die linke Seite verschwindet, so dass die Behauptung aus der eben festgestellten Nichtnegativität der Abbildung $\|.\|\colon E \to \mathbb{R}$ folgt.
- Ist $x \neq 0_E$, so folgt mit den Eigenschaften (4) und (5) aus Definition 5.1 auch $\langle x, x\rangle \;>\; 0$. Weiter folgen für beliebiges $\alpha \in \mathbb{K}$ einmal

$$0 \;\leq\; \langle \alpha x + y, \alpha x + y\rangle \;=\; \overline{\alpha}\alpha\langle x, x\rangle \;+\; \alpha\langle x, y\rangle \;+\; \overline{\alpha}\langle y, x\rangle \;+\; \langle y, y\rangle$$

und speziell für $\alpha := -\dfrac{\langle y, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$ dann

$$0 \;\leq\; \frac{\langle y, x\rangle\langle x, y\rangle}{(\langle x, x\rangle)^2}\langle x, x\rangle \;-\; \frac{\langle y, x\rangle\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \;-\; \frac{\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \;+\; \langle y, y\rangle\ ,$$

also

$$0 \;\leq\; \langle \alpha x + y, \alpha x + y\rangle \;=\; \langle y, y\rangle \;-\; \frac{\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \tag{5.1}$$

und somit

$$0 \;\leq\; \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \;-\; \langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle}\ , \quad \text{also} \quad |\langle x, y\rangle|^2 \;\leq\; \|x\|^2\cdot\|y\|^2\ .$$

Durch Wurzelziehen folgt nun die Behauptung.

(b) Offenbar ist die Aussage wahr, falls mindestens eine der beiden Vektoren mit dem Nullvektor übereinstimmt. Sei nun also im Folgenden $x \neq 0_E \neq y$.

„$\Longleftarrow$:“ Sei $x = \lambda y$ mit $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0_{\mathbb{K}}\}$. Dann folgt

$$|\langle x, y\rangle| \;=\; |\langle \lambda y, y\rangle| \;=\; |\lambda\langle y, y\rangle| \;=\; |\lambda|\cdot\|y\|^2 \;=\; \|\lambda y\|\cdot\|y\| \;=\; \|x\|\cdot\|y\|$$

„$\Longrightarrow$:“ Es gelte $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\cdot\|y\|$. Dann gilt mit $\alpha := -\dfrac{\langle y, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$ aufgrund der dann folgenden Gleichheit in (5.1) zunächst

$$0 \;=\; \langle \alpha x + y, \alpha x + y\rangle\ ,$$

so dass mit Eigenschaft (5) aus Definition 5.1 sofort $\alpha x + y \;=\; 0_E$, also $y \;=\; -\alpha x$ und somit die lineare Abhängigkeit folgt.

□

**Korollar 5.4.** *Sei $\langle .,. \rangle$ ein Innenprodukt auf dem linearen Raum $E$ und $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$, dann ist $\|.\| = \sqrt{\langle .,. \rangle}$ eine Norm auf $E$, welche auch* ***Innenproduktnorm*** *genannt wird.*

**Beweis:** Zunächst ist die Abbildung nach Eigenschaft (4) aus Definition 5.1 wohldefiniert.

(1) Die Definitheit folgt aus Eigenschaft (5) in Definition 5.1, denn es gilt

$$\|x\| \;=\; 0 \iff \sqrt{\langle x, x \rangle} \;=\; 0 \iff \langle x, x \rangle \;=\; 0 \iff x = 0_E$$

(2) Die Homogenität folgt mit den Eigenschaften (2) bzw. (2') wegen

$$\|\alpha x\| \;=\; \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} \;\overset{(2),(2')}{=}\; \sqrt{\alpha \overline{\alpha} \langle x, x \rangle} \;=\; \sqrt{\alpha \overline{\alpha}} \cdot \sqrt{\langle x, x \rangle} \;=\; |\alpha| \cdot \|x\| \;.$$

(3) Die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung aufgrund der Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 \;&=\; \langle x+y, x+y \rangle \;=\; \|x\|^2 + \underbrace{\langle x, y \rangle \;+\; \langle y, x \rangle}_{=\; 2\,\mathrm{Re}(\langle x,y \rangle)} + \|y\|^2 \\ &\le\; \|x\|^2 \;+\; 2|\langle x, y \rangle| \;+\; \|y\|^2 \;\overset{\text{CSU}}{\le}\; \|x\|^2 \;+\; 2\|x\|\|y\| \;+\; \|y\|^2 \;=\; (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

sowie anschließendem Wurzelziehen.

□

**Definition 5.5.** Sei $\langle .,. \rangle$ ein Innenprodukt auf dem linearen Raum $E$.

(a) Wir nennen $(E, \langle .,. \rangle)$ einen **Innenproduktraum** (oder auch einen **Prä-Hilbertraum**).

(b) Wird $(E, \langle .,. \rangle)$ mit der induzierten Norm $\|.\| = \sqrt{\langle .,. \rangle}$ zu einem vollständig normierten Raum, so nennen wir $(E, \langle .,. \rangle)$ einen **Hilbertraum**.

**Bemerkung 5.6.**

(a) Es gilt die Hierarchie: Topologische Räume $\supset$ metrische Räume $\supset$ normierte Räume $\supset$ Innenprodukträume $\supset$ Hilberträume

(b) $H = L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ wird mit $(f,g)_{L^2} := \displaystyle\int_\Omega f \bar{g} \; d\mu$ zum Hilbertraum $(H, (.,.)_{L^2})$.

(c) Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist der Spezialfall $p = q = 2$ der Hölder-Ungleichung.

**Satz 5.7** (Stetigkeit des Skalarproduktes)**.**
*Sei $\langle .,. \rangle \colon E \times E \to \mathbb{R}$ ein Innenprodukt auf dem linearen Raum $E$ und $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ die betrachtete Norm auf $E$. Dann ist das Innenprodukt stetig.*

**Satz 5.8** (Parallelogramm-Gleichung)**.** *In jedem Innenproduktraum $(E, \langle .,. \rangle)$ gilt*

$$\forall x, y \in E \colon \|x+y\|^2 \;+\; \|x-y\|^2 \;=\; 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \;. \tag{5.2}$$

**Satz 5.9.** *In jedem Innenproduktraum $(E, \langle .,. \rangle)$ gilt mit der induzierten Norm*

(1) $\forall x, y \in E \colon \langle x, y\rangle \;=\; \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2$ *im Fall* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(2) $\forall x, y \in E \colon \langle x, y\rangle \;=\; \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 + \mathrm{i}\left\|\frac{x+\mathrm{i}y}{2}\right\|^2 - \mathrm{i}\left\|\frac{x-\mathrm{i}y}{2}\right\|^2$ *im Fall* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

**Beweis:**

(1) Da in reellen Innenprodukträumen $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ für beliebige $x, y$ gilt, folgt die Behauptung aus der Addition der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 &= \left\langle\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right\rangle = \frac{1}{4}\langle x, x\rangle + \frac{1}{4}\langle x, y\rangle + \frac{1}{4}\langle y, x\rangle + \frac{1}{4}\langle y, y\rangle\ . \\ -\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 &= -\left\langle\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}\right\rangle = -\frac{1}{4}\langle x, x\rangle + \frac{1}{4}\langle x, y\rangle + \frac{1}{4}\langle y, x\rangle - \frac{1}{4}\langle y, y\rangle\ . \end{aligned}$$

(2) Mit $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ folgt die Behauptung nach Addition der oberen beiden und der nachfolgenden beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\left\|\frac{x+\mathrm{i}y}{2}\right\|^2 &= \mathrm{i}\left\langle\frac{x+\mathrm{i}y}{2}, \frac{x+\mathrm{i}y}{2}\right\rangle = \frac{1}{4}\mathrm{i}\langle x, x\rangle + \frac{1}{4}\langle x, y\rangle - \frac{1}{4}\langle y, x\rangle - \frac{1}{4}\mathrm{i}\langle y, y\rangle\ . \\ -\mathrm{i}\left\|\frac{x-\mathrm{i}y}{2}\right\|^2 &= -\mathrm{i}\left\langle\frac{x-\mathrm{i}y}{2}, \frac{x-\mathrm{i}y}{2}\right\rangle = -\frac{1}{4}\mathrm{i}\langle x, x\rangle + \frac{1}{4}\langle x, y\rangle - \frac{1}{4}\langle y, x\rangle + \frac{1}{4}\mathrm{i}\langle y, y\rangle\ . \end{aligned}$$

□

**Definition 5.10.** Sei $(E, \langle .,.\rangle)$ ein Innenproduktraum. Weiter seien $x, y \in E$ sowie $N, M \subset E$.

(1) $x \perp y \;:\Longleftrightarrow\; \langle x, y\rangle = 0$. Wir sagen $x$ ist **orthogonal** zu $y$.

(2) $M \perp N \;:\Longleftrightarrow\; \forall x \in M\ \forall y \in N \colon x \perp y$.

(3) $x \perp M \;:\Longleftrightarrow\; \{x\} \perp M$.

(4) $M^\perp \;:=\; \{x \in E \mid x \perp M\}$.

**Bemerkung 5.11.**

(1) Für jedes $M \subset E$ ist $M^\perp$ ein abgeschlossener linearer Unterraum von $E$.

(2) Ist $M \subset E$ ein linearer Unterraum, so folgt $M \cap M^\perp = \{0\}$.

(3) $x \perp M \implies x \perp \operatorname{span}(M) \implies x \perp \overline{\operatorname{span}(M)}$

**Satz 5.12** (Pythagoras)**.** *Sei $(E, \langle .,.\rangle)$ ein Innenproduktraum. Seien weiter $u_1, \ldots, u_n \in E$ paarweise orthogonal, d.h., $\forall i, j = 1, \ldots, n \colon (i \neq j \Longrightarrow u_i \perp u_j)$. Dann gilt*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} u_k\right\|^2 \;=\; \sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2\ . \tag{5.3}$$

**Korollar 5.13.** *Sei $(E, \langle .,.\rangle)$ ein Innenproduktraum, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthogonalfolge aus $E$, für welche $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} u_k$ in $(E, \langle .,.\rangle)$ gegen ein $u \in E$ konvergiere. Dann gilt*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|^2 \;=\; \left\|\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k\right\|^2 \;=\; \|u\|^2. \tag{5.4}$$

**Aufgaben:**

A 5.1.1 Zeigen Sie: In jedem Innenproduktraum $(E, \langle .,. \rangle)$ gilt

$$\forall x, y \in E\colon \; \|x+y\|^2 \; + \; \|x-y\|^2 \; = \; 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \; . \tag{5.5}$$

A 5.1.2 Sei $(E, \langle .,. \rangle)$ ein Innenproduktraum und $x, y, z \in E$ beliebig.
Zeigen Sie den **Satz des Apollonius**:

$$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 \; = \; \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|^2 . \tag{5.6}$$

A 5.1.3 (a) Zeigen Sie, dass in einem Innenproduktraum $(E, \langle .,. \rangle_E)$ über $\mathbb{R}$ gelten:
(i) $\forall x, y \in E\colon \; \left(\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \Longrightarrow \quad x \bot y\right)$,
(ii) $\forall x, y \in E\colon \; (x \bot y \quad \Longleftrightarrow \quad \|x+y\| = \|x-y\|)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Aussagen aus (a) nicht in einem Innenproduktraum $(E, \langle .,. \rangle_E)$ über $\mathbb{C}$ gelten.

(c) Zeigen Sie **Satz 5.9**:
In jedem Innenproduktraum $(E, \langle .,. \rangle)$ gilt mit der induzierten Norm

(1) $\forall x, y \in E\colon \langle x, y \rangle \; = \; \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2$ im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(2) $\forall x, y \in E\colon \langle x, y \rangle \; = \; \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 + \mathrm{i}\left\|\frac{x+\mathrm{i}y}{2}\right\|^2 - \mathrm{i}\left\|\frac{x-\mathrm{i}y}{2}\right\|^2$ im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

A 5.1.4 Zeigen Sie, dass man auf $\ell^p$, $1 \leq p \leq \infty$, nur im Fall $p = 2$ ein Innenprodukt erklären kann, welches die $\ell^p$-Norm erzeugt.

**Tipp:** Parallelogramm-Gleichung.

**Alternative:**

Lässt sich $(\ell^p, \|.\|_p)$ für $p \neq 2$ als Hilbertraum auffassen? **Hinweis:** Parallelogrammgleichung

**Alternative:**

Für welche $p \in [1, \infty[$ ist es möglich, $(\ell^p, \|.\|_p)$ als Hilbertraum aufzufassen?

**Hinweis**: Angenommen ein Innenprodukt induziert die jeweilige Norm. Dann gelten die diversen elementaren Folgerungen daraus, beispielsweise die Parallelogrammgleichung.

A 5.1.5 Zeigen Sie: In jedem Innenproduktraum gilt

$$x \perp y \iff \forall \alpha \in \mathbb{K}\colon \|x + \alpha y\| \; = \; \|x - \alpha y\| \; .$$

A 5.1.6 Sei $E$ ein Innenproduktraum, $(x_n)_n$ eine Folge aus $E$ und $x \in E$. Zeigen Sie, dass $x_n \to x$ genau dann gilt, wenn $\langle x_n, x \rangle \to \langle x, x \rangle$ und $\|x_n\| \to \|x\|$.

A 5.1.7 Seien $M_1$, $M_2$ und $M$ Teilmengen eines Innenproduktraumes $E$. Zeigen Sie

(a) $M_1 \subset M_2 \quad \Longrightarrow \quad M_2^\perp \subset M_1^\perp$
(b) $M \subset (M^\perp)^\perp$
(c) $M^\perp = ((M^\perp)^\perp)^\perp$

**Tipp:** $M^\perp := \{y \in E \mid \forall x \in M\colon \langle x, y \rangle = 0\}$

## 5.2 Gram-Schmidt-sches Orthogonalisierungsverfahren

Im Folgenden wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, ob wir aus einer Folge linear unabhängiger Vektoren ein sogenanntes Orthonormalsystem erhalten können. Diese Frage wird mit Satz 5.16 positiv beantwortet, wobei im Beweis ein kanonisches Verfahren angegeben wird.

**Definition 5.14.** Sei $(E, \langle .,. \rangle)$ ein Innenproduktraum, $\emptyset \neq S \subset E$.

(1) $S$ **orthogonal** $:\Longleftrightarrow \ \forall x, y \in S\colon\ (x \neq y \Longrightarrow x \perp y)$.

(2) $S$ **orthonormnal** $:\Longleftrightarrow$ $S$ orthogonal und $\forall x \in S\colon \|x\| = 1$.

(3) $S$ **vollständiges Orthogonalsystem**
$:\Longleftrightarrow$ $S$ orthogonal und $\forall S' \subset E\colon\ ([S' \text{ orthogonal} \wedge S' \supset S] \Longrightarrow S' = S)$.

(4) $S$ **vollständiges Orthonormalsystem**
$:\Longleftrightarrow$ $S$ vollständiges Orthogonalsystem und $S$ orthonormal.

**Bemerkungen:**

(a) $S$ orthonormal $\Longrightarrow$ ($S$ vollständiges OS $\Longleftrightarrow \forall x \in E\colon\ (x \perp S \Longrightarrow x = 0)$)

(b) $S$ orthonormal $\Longrightarrow$ $S$ linear unabhängig[1]

**Beispiel 5.15.**

(1) Für $(\mathbb{R}^n, \langle .,. \rangle)$ mit $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ ist $\{e_k\colon k = 1, \ldots, n\}$ ein vollständiges ONS.

(2) Für $L^2_{\mathbb{R}}(]-\pi,\pi[)$ mit $\langle x, y \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y(t)\, dt$ ist ein vollständiges ONS etwa

$$S \;=\; \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kt) \;\middle|\; k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kt) \;\middle|\; k \in \mathbb{N}\right\}.$$

(3) Für $L^2_{\mathbb{C}}(]-\pi,\pi[)$ mit $\langle x, y \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\overline{y(t)}\, dt$ ist ein vollständiges ONS etwa

$$S \;=\; \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(int) \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

**Satz 5.16** (Gram-Schmidt-sches Orthogonalisierungsverfahren)**.**
*Sei $(E, \langle .,. \rangle)$ ein Innenproduktraum, $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$ höchstens abzählbar und linear unabhängig. Dann existiert ein höchstens abzählbares Orthonormalsystem $S = \{u_1, u_2, \ldots\}$, so dass für alle zulässigen $n$ gilt*

$$u_n \in \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\} \qquad \wedge \qquad x_n \in \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\}.$$

[1] D.h., $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall u_1, \ldots, u_n \in S$ paarweise verschieden ist $\{u_1, \ldots, u_n\}$ linear unabhängig

**Aufgaben:**

A 5.2.1 Auf dem $\mathbb{R}^3$ sei durch $\langle x|y\rangle := x^{\mathrm{T}}Ay$ mit

$$\text{(a) } A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(b) } A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ein Innenprodukt $\langle .|.\rangle$ definiert (ohne Beweis).

Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens aus der kanonischen Basis $e_1, e_2, e_3$ eine Orthonormalbasis bezüglich $\langle .|.\rangle$.

A 5.2.2 Orthogonalisieren Sie nach dem Verfahren von Schmidt die Polynome $1, t, t^2 \in \mathcal{L}^2_\omega(]-1,1[,\mathbb{R})$ mit $\omega(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$, d.h., bezüglich des (gewichteten) Innenproduktes

$$\langle x, y\rangle := \int_{-1}^{1} x(t)\overline{y(t)}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt \; .$$

## 5.3 Gaußsche & allgemeine Approximationsaufgabe

**Definition 5.17.**

(1) Gegeben seien $(E, \|.\|)$, $\emptyset \neq F \subset E$, $x \in E$. Ein $y_0 \in F$ heißt **Element bester Approximation** für $x$, falls

$$\|x - y_0\| \;=\; \min_{y \in F} \|x - y\| \;. \tag{5.7}$$

Die Frage nach der Existenz eines solchen $y_0 \in F$ nennen wir **allgemeine Approximationsaufgabe**.

(2) Wir sprechen von der **Gaußschen Approximationsaufgabe**, falls zusätzlich $F$ ein endlichdimensionaler Unterraum von $E$ und $(E, \langle ., . \rangle)$ ein Innenproduktraum ist.

**Satz 5.18.**

(1) *Die Gaußsche Approximationsaufgabe ist eindeutig lösbar.*

(2) *Ist $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ orthonormal mit $F = \operatorname{span}(S)$, dann ist zu jedem $x \in E$ das eindeutig bestimmte Element bester Approximation gegeben durch*

$$y_0 \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle u_k \tag{5.8}$$

(3) *$y_0$ ist Orthogonalprojektion von $x$ auf $F$.*

**Bemerkung 5.19.**

(a) Es gilt die **Besselsche Ungleichung**

$$\forall x \in E\colon \sum_{k=1}^{n} |\langle x, u_k \rangle|^2 \;\leq\; \|x\|^2 \;. \tag{5.9}$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
0 \;\leq\; \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle u_k \right\|^2 \;&=\; \left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle u_k , x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j \rangle u_j \right\rangle \\
=\; \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle \underbrace{\langle u_k, x \rangle}_{=\overline{\langle x, u_k \rangle}} &- \sum_{j=1}^{n} \overline{\langle x, u_j \rangle} \langle x, u_j \rangle + \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle \sum_{j=1}^{n} \overline{\langle x, u_j \rangle} \underbrace{\langle u_k, u_j \rangle}_{\delta_{j,k}} \\
=\; \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, u_k \rangle|^2 \qquad &\Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n} |\langle x, u_k \rangle|^2 \;\leq\; \|x\|^2
\end{aligned}$$

□

(b) Es gilt $x - y_0 \perp F$.

**Beweis:** $\forall m = 1, \ldots, n$:

$$\langle x - y_0, u_m \rangle \;=\; \langle x, u_m \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle \underbrace{\langle u_k, u_m \rangle}_{\delta_{k,m}} \;=\; \langle x, u_m \rangle - \langle x, u_m \rangle \;=\; 0$$

□

(c) Aufgrund der Eindeutigkeit von $y_0$ lässt sich jedes $x \in E$ eindeutig darstellen als $x = u + v$ mit $u = y_0 \in F$ und $v = x - y_0 \in F^\perp$, denn es gilt $F \cap F^\perp = \{0\}$ und $E = F \oplus F^\perp$. Allgemein gilt:

> Sei $(E, \langle ., . \rangle)$ ein Hilbertraum, $F$ ein abgeschlossener linearer Unterraum, dann gilt $E = F \oplus F^\perp$, d.h., zu jedem $x \in E$ existieren eindeutige $u \in F$, $v \in F^\perp$ mit $x = u + v$.

Letzteres ist – da abgeschlossene lineare Unterräume von Banachräumen sowohl konvex als auch selbst wieder Banach sind – insbesondere ein Spezialfall des nachfolgenden Satzes.

**Satz 5.20.**

*Sei $(E, \langle ., . \rangle_E)$ ein Innenproduktraum, $K \subset E$, $K \neq \emptyset$ konvex[2] und vollständig[3] sowie $x \in E$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $y_0 \in K$ mit*

$$\|x - y_0\|_E \;\leq\; \min_{y \in K} \|x - y\|_E \;. \tag{5.10}$$

**Satz 5.21.**

*Sei $(E, \langle ., . \rangle)$ ein Innenproduktraum, $F$ ein beliebiger linearer Unterraum von $E$ und $x \in E$. Besitzt das Minimierungsproblem*

$$\min_{y \in F} \|x - y\| \;=\; \|x - y_0\|$$

*eine Lösung $y_0 \in F$, so ist diese Lösung eindeutig und es gilt $x - y_0 \perp F$.*

**Satz 5.22.**

*Sei $(E, \langle ., . \rangle)$ ein Innenproduktraum, $F$ ein vollständiger linearer Unterraum von $E$. Dann existieren für alle $x \in E$ eindeutig bestimmte $u, v \in E$, $u \in F$, $v \in F^\perp$ und $x = u + v$, d.h., es gilt $E = F \oplus F^\perp$*

Der letzte Satz besagt also, dass jeder Innenproduktraum $(E, \langle ., . \rangle)$ orthogonal zerlegt werden kann in einen vollständigen linearen Unterraum und dessen Orthogonal. Insbesondere sind die Voraussetzungen des letzten Satzes erfüllt, wenn $(E, \langle ., . \rangle)$ sogar ein Hilbertraum und $F$ ein abgeschlossener linearer Unterraum ist (vgl. Bemerkung 5.19 (c)).

**Bemerkung 5.23.**

(a) Falls $E = F \oplus F^\perp$, so gilt $(F^\perp)^\perp = F$.

(b) Falls $E = F \oplus F^\perp$, so ist $F$ abgeschlossen.

**Definition 5.24.**

(a) Falls $E = F \oplus F^\perp$ gilt, so sagen wir, dass $F$ in $E$ ein **orthogonales Komplement** besitzt.

(b) Gilt $E = F \oplus F^\perp$, d.h., existiert für jedes $x \in E$ genau ein $u \in F$ und genau ein $v \in F^\perp$ mit $x = u + v$, so nennen wir die Abbildung $P\colon E \to F$, definiert durch $Px := u$, die **orthogonale Projektion** von $E$ auf $F$.

---

[2] D.h., $\forall x, y \in K\colon \{\alpha x + (1 - \alpha) y \mid \alpha \in [0, 1]\} \subset K$.

[3] als metrischer Raum mit der norm- bzw. vom Skalarprodukt induzierten Metrik $d(x, y) = \|x - y\|_E = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle_E}$

(c) Wir nennen einen linearen Operator $A\colon E \to E$ **symmetrisch**, wenn

$$\forall x, y \in E\colon \langle Ax|y\rangle = \langle x|Ay\rangle \ . \tag{5.11}$$

(d) Eine lineare Abbildung $P\colon E \to E$ heißt **Projektor**, falls $P^2 = P$ gilt.

**Satz 5.25.** *Sei $(E, \langle .,. \rangle)$ ein Innenproduktraum. Dann gilt:*

(a) *Jede orthogonale Projektion ist symmetrisch und besitzt – sofern sie ungleich der Nullabbildung ist – Norm 1.*

(b) *Ist $P\colon E \to E$ ein symmetrischer Projektor, so ist $P$ eine orthogonale Projektion.*

**Beweis:**

(a) Sei $P\colon E \to E$ eine orthogonale Projektion von $E$ auf $F$. Seien $x, y \in E$ beliebig und $u, u' \in F$ sowie $v, v' \in F^\perp$ mit $x = u + v$ und $y = u' + v'$. Dann ist $P$ symmetrisch aufgrund von

$$\langle Px, y\rangle \ = \ \langle u, u' + v'\rangle \ = \ \langle u, u'\rangle \ = \ \langle u + v, u'\rangle \ = \ \langle x, Py\rangle \ .$$

Nach Satz 5.12 folgt zunächst $\|P\| \leq 1$ aufgrund von

$$\|Px\|^2 \ = \ \|u\|^2 \ \leq \ \|u\|^2 + \|v\|^2 \ = \ \|u + v\|^2 \ = \ \|x\|^2 \ .$$

Falls $P \neq 0$, also $F \neq \{0\}$, so existiert ein $u_0 \in F \setminus \{0\}$ mit $\|Pu_0\| = \|u_0\|$. Damit ist in der Tat $\|P\| = 1$.

(b) (i) Wir zeigen, dass für jedes $x \in E$ genau ein $u \in \text{Bild}(P) = F$, nämlich $u = Px$, und genau ein $v \in \text{Kern}(P)$ mit $x = u + v$ existiert:

- **Existenz:** Mit $u := Px$ und $v := x - u$ folgt

$$Pv \ = \ Px - Pu \ = \ Px - P(Px) \ = \ Px - P^2x \ = \ Px - Px \ = \ 0 \ .$$

- **Eindeutigkeit:** Ang., es gelte auch $x = u' + v'$. Dann ist $u = Px = Pu' = u'$. (allgemein: $y \in \text{Bild}(P) \quad \Longrightarrow \quad y = P\tilde{y} = P^2\tilde{y} = P(P\tilde{y}) = Py$)

(ii) Da $v \in \text{Kern}(P)$ und $P$ symmetrisch ist, gilt

$$\langle u, v\rangle \ = \ \langle Px, v\rangle \ = \ \langle x, Pv\rangle \ = \ \langle x, 0\rangle \ = \ 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u \perp v$$

Somit folgt $E = F \oplus F^\perp$ mit $F^\perp = \text{Kern}(P)$.

$\square$

Zusammenfassend halten wir nun fest:

**Satz 5.26** (Lösbarkeit der Approximationsaufgabe für vollständigen UR eines IPR)**.**
*Sei $(E, \langle .,. \rangle)$ ein Innenproduktraum, $F \subset E$ ein vollständiger Unterraum, sowie $P$ die orthogonale Projektion von $E$ auf $F$. Dann ist $Px = u$ die Bestapproximation von $x$ in $F$, d.h., es gilt*

$$\forall y \in F\colon \|x - Px\| \ = \ \|x - y\| \ . \tag{5.12}$$

**Aufgaben:**

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Gaußsche Approximationsaufgabe)

A 5.3.1 Zeigen Sie: Ist $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ orthonormal, dann gilt die **Besselsche Ungleichung**

$$\forall x \in E\colon \sum_{k=1}^{n} |\langle x, u_k\rangle|^2 \ \leq \ \|x\|^2 \ . \tag{5.13}$$

A 5.3.2 Sei $(E, \langle ., .\rangle)$ ein Innenproduktraum. Dann gilt:

(a) Jede orthogonale Projektion ist symmetrisch und besitzt – sofern sie ungleich der Nullabbildung ist – Norm 1.

(b) Ist $P\colon E \to E$ ein symmetrischer Projektor, so ist $P$ eine orthogonale Projektion.

A 5.3.3 Sei $E$ ein Innenproduktraum und $0 \neq x_0 \in E$. Zeigen Sie, dass die eindeutige orthogonale Projektion $P = P_{x_0} \in \mathcal{L}(E, \operatorname{span}\{x_0\})$ auf den von $x_0$ aufgespannten Unterraum durch die Formel

$$Px := \frac{\langle x, x_0\rangle}{\langle x_0, x_0\rangle} x_0$$

gegeben ist.

A 5.3.4 Für $1 \leq n < m \in \mathbb{N}$ seien $\eta(k)$, $\xi_1^{(k)}$, $\ldots$, $\xi_n^{(k)} \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq m$, gegeben. Zeigen Sie: Es existieren $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(a_1, \ldots, a_n) \ := \ \sum_{k=1}^{m} \left( \eta^{(k)} - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \xi_\nu^{(k)} \right)^2$$

minimal wird. Falls die $\xi_\nu = (x_\nu^{(1)}, \ldots, \xi_\nu^{(m)})$, $i = 1, \ldots, n$, linear unabhängig sind, sind die $a_\nu$ sogar eindeutig bestimmt.

A 5.3.5 Es bezeichne $\mathbb{P}$ den linearen Raum aller Polynome über $[a, b]$ sowie $\langle .|.\rangle$ das Innenprodukt, welches gegeben ist durch

$$\langle f|g\rangle \ = \ \int_a^b f(x)g(x)\, dx \ . \tag{5.14}$$

Zeigen Sie:

(a) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein Polynom $p_n$ vom Grad $n$ mit Leitkoeffizient 1, welches orthogonal zu $\mathbb{P}_{n-1}$ ist. Dabei bezeichnet $\mathbb{P}_m$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ den linearen Unterraum aller Polynome, deren Grad höchstens $m$ ist.

(b) Sämtliche Nullstellen von $p_n$ aus (a) sind einfach, reell und liegen in $]a, b[$.

**Alternative erweiterte Formulierung:** Sei $a < b$ und $\rho\colon [a, b] \to ]0, \infty[$ eine stetige Funktion. Man betrachte den Raum aller meßbaren Funktionen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, für die $\int_a^b \rho(x) f(x)^2 dx$ existiert. Dieser Raum wird mit $\langle f, g\rangle := \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx$ zum Hilbertraum.
Zeigen Sie: Für alle $1 \leq n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein Polynom $p_n \in \mathbb{P}_n$, dem Raum der Polynome vom Grad kleiner gleich $n$, welches senkrecht zu $\mathbb{P}_{n-1}$ ist und 1 als Koeffizienten vor $x^n$ hat.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Orthogonales Komplement)

A 5.3.6 Sei $H$ ein Hilbertraum und $F$ ein Unterraum. Zeigen Sie: $F$ ist abgeschlossen, genau dann wenn $F^{\perp\perp} = F$ gilt.

A 5.3.7 Sei $H$ ein endlich dimensionaler Hilbertraum und $F \subset H$ ein Unterraum. Zeigen Sie: Dann gilt $H = F \oplus F^{\perp}$.

A 5.3.8 Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilräume von $\ell^2$ ein orthogonales Komplement besitzen:

(a) $F = \{x \in \ell^2 \mid \forall n \in N\colon x(2n) = 0\}$;

(b) $G = \left\{x \in \ell^2 \mid \lim\limits_{n\to\infty} 2^n x(n) = 0\right\}$.

**Alternative Formulierung für (b):**

Sei $F \subset \ell^2$ der Raum der Folgen $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, für welche $2^n x_n \to 0$ konvergiert.
Gilt $\ell^2 = F \oplus F^{\perp}$ ?

A 5.3.9 Sei $\mathbb{P}$ der lineare Raum aller Polynome. Für die lineare bijektive Abbildung

$$I\colon \mathbb{P} \to \ell^2, p \;=\; \sum_{k=1}^{n} \alpha_k t^k \quad\mapsto\quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0, 0, \ldots) \in \ell^2$$

betrachten wir den linearen Unterraum $\tilde{\mathbb{P}} := I(\mathbb{P})$ des $\ell^2$.

(i) Gilt $\ell^2 = \tilde{\mathbb{P}} \oplus \tilde{\mathbb{P}}^{\perp}$ ? (ii) Ist $\left(\tilde{\mathbb{P}}, \langle ., . \rangle_{\ell^2}\right)$ vollständig? (iii) Was besagt Satz 5.22 hier?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Approximation auf konvexen Teilmengen)

A 5.3.10 Welche der folgenden Mengen sind konvex?

(a) $C \;=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

(b) $\mathbb{T}_n \;:=\; \left\{ f \in L^2(]0,1[) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}, k \in \{1, \ldots, n\}\colon \\ f(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x)\right) \end{array} \right\}$

A 5.3.11 Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen konvex sind.

(a) Seien $\alpha < \beta$, $a < b$ reelle Zahlen und $C := \{x \in C[a, b] \mid \alpha \leq x(t) \leq \beta \quad \forall t \in [a, b]\}$.

(b) Seien $a < b$ reelle Zahlen, $n \in \mathbb{N}$ und

$$\mathbb{P}_n^+([a, b]) \;:=\; \left\{ x\colon [a, b] \to \mathbb{R} \;\middle|\; 0 \leq x(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k \text{ mit } \alpha_k \in \mathbb{R} \text{ für } k = 0, \ldots, n \right\}. \quad (5.15)$$

A 5.3.12 Sei $\mathbb{P}_n^+([a, b])$ die Menge der Polynome vom Grad höchstens $n$, die auf $[a, b]$ nicht negativ sind. Zeigen Sie:

(a) Zu jedem $x \in L^2([a, b], \mathbb{R})$ existiert genau ein $p_0 \in \mathbb{P}_n^+([a, b])$, so dass

$$\forall p \in \mathbb{P}_n^+([a, b])\colon \int_a^b |x(t) - p_0(t)|^2 dt \;\leq\; \int_a^b |x(t) - p(t)|^2 dt\ .$$

(b) Zu jedem $x \in C([a,b],\mathbb{R})$ existiert genau ein $p_0 \in \mathbb{P}_n^+([a,b])$, so dass

$$\forall p \in \mathbb{P}_n^+([a,b])\colon \int_a^b |x(t)-p_0(t)|^2 dt \;\le\; \int_a^b |x(t)-p(t)|^2 dt\ .$$

A 5.3.13 Sei

$$A := \{x \in L^2([0,1],\mathbb{R})\colon x(s) \in [0,1] \text{ f.ü.}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $A$ ist abgeschlossen in $L^2([0,1],\mathbb{R})$.

(b) Es gibt eine eindeutige Projektion $P\colon L^2([0,1],\mathbb{R}) \to A$, die jedem Element seine Bestapproximation zuordnet, nämlich

$$(Px)(s) = \begin{cases} 1 & x(s) \ge 1 \\ x(s) & 0 \le x(s) \le 1 \\ 0 & x(s) \le 0. \end{cases}$$

**Vorbereitung:**

(a) Zeigen Sie Theorem 4.9[4]:
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $L^p$ und sei $f \in L^p$ derart, dass $\|f_n - f\|_p \to 0$ für $n \to \infty$. Dann existiert eine Teilfolge $f_{n(k)} \in L^p$ und ein $h \in L^2$, so dass

(i) $f_{n(k)} \to f(x)$ für fast alle $x$. (ii) $\forall k \in \mathbb{N}\colon |f_{n(k)}| \le |h(x)|$ für fast alle $x$.

(b) Zeigen Sie, dass die Behauptungen des letzten Satzes i.A. nicht für die gesamte Folge gilt.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Projektoren)

A 5.3.14 (a) Existiert eine Projektion vom Raum $\mathbb{P}$ der Polynome auf

$$V_1 \;:=\; \left\{ p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{P}\colon a_0 = 0 \right\} \subset \mathbb{P}\ ,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ eine feste natürliche Zahl ist ?

(b) Existiert eine Projektion vom Raum $\mathbb{P}$ der Polynome auf

$$V_2 \;:=\; \left\{ p(x)\colon \sup_{-1\le x\le 1} |p(x)| \le 1 \right\} \subset \mathbb{P}\ ?$$

(c) Sind die Projektionen aus (a) und (b), soweit vorhanden, stetig bezüglich der Norm

$$\|p\| := \sup_{-1\le x\le 1} |p(x)|\ ? \tag{5.16}$$

(d) Ist der Operator $A\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j x^j \mapsto \sum_{j=0}^{n} j a_j$ linear und stetig bezüglich der Norm (5.16) ?

[4]Haim Brezis: Functional Analysis, Sobolev-Spaces and Partial Differential Equations

## 5.4 Darstellungssatz von Fréchet-Riesz

Mit Hilfe der im letzten Abschnitt erhaltenen Aussagen können wir uns nun dem Spezialfall des Dualraumes eines Hilbertraumes zuwenden.

**Beispiel 5.27.**
Sei $(E, \langle .,. \rangle)$ ein Innenproduktraum, $z \in E$ fest gewählt und $f\colon E \to \mathbb{K}$ definiert durch $x \mapsto \langle x, z\rangle$. Dann ist $f$ einerseits linear und aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung stetig über

$$\forall x \in E\colon |f(x)| \;=\; |\langle x, z\rangle| \;\leq\; \|x\| \cdot \|z\| \;.$$

Insbesondere folgt wegen $|f(z)| = \|z\|^2$ dann auch $\|f\| = \|z\|$.

**Definition 5.28.**

(a) Wir nennen $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ eine **Linearform**/indexLinearform/**lineares Funktional**.

(b) Den Raum der linearen Funktionale

$$E' \;:=\; \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \;=\; \{f\colon E \to \mathbb{K} \mid f \text{ linear und stetig } \} \tag{5.17}$$

nennen wir den **Dualraum** von $E$. Dieser wird mit der üblichen Operatornorm

$$\|f\|_{E'} \;:=\; \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \tag{5.18}$$

zu einem normierten Raum $(E', \|.\|_{E'})$.

**Satz 5.29** (Darstellungssatz von Fréchet-Riesz)**.** *Sei $(E, \langle .,. \rangle)$ ein Hilbertraum. Dann gilt:*

$$\forall f \in E' \;\exists!\; z_f \in E \quad \textit{mit} \quad \forall x \in E\colon f(x) \;=\; \langle x, z_f\rangle \;.$$

*Weiter gilt dann $\|f\|_{E'} \;=\; \|z_f\|_E$.*

**Beweis:**

- **Eindeutigkeit:** Angenommen, es gelte $\forall x \in E\colon f(x) = \langle x, z\rangle_E = \langle x, w\rangle_E$, so folgt auch $0 = \langle x, z - w\rangle_E$, also $(z - w) \perp E$, also $(z - w) \in E^\perp = \{0\}$, also $z = w$.

- **Existenz:**

  (a) Für $f = 0 \in E'$ tut $z = 0 \in E$ das Gewünschte.

  (b) Für $f \neq 0 \in E'$ ist $F :=$ Kern $f$ abgeschlossener Unterraum von $E$, da $f$ stetig wegen $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Da $(E, \langle .,. \rangle)$ ein Hilbertraum ist, ist jeder abgeschlossene lineare Unterraum vollständig. Nach Satz 5.20 folgt dann $E = F \oplus F^\perp$. Da $f \neq 0 \in E'$, ist $F \neq E$, also $F^\perp \neq \{0\}$. Betrachten wir nun die Einschränkung von $f$ auf $F^\perp$, also

  $$g := f_{|_{F^\perp}}$$

  Dann ist $g$ injektiv, denn für jedes $x_0 \in F^\perp \setminus \{0\}$ gilt $g(x_0) \neq 0 \in \mathbb{K}$.
  Ebenso ist $g\colon F^\perp \to \mathbb{K}$ surjektiv, da ungleich der Nullabbildung, also insbesondere auch

bijektiv. Damit muss $F^\perp$ eindimensional, also $F^\perp = \operatorname{span}\{x_0\}$ für ein $x_0 \in F^\perp \setminus \{0\}$ sein. Wegen $E = F \oplus F^\perp$ folgt nun

$$\forall x \in E \exists! \alpha \in \mathbb{K},\ y \in F\colon x = \alpha x_0 + y\ .$$

Aufgrund der Linearität von $f$ und – da $y \in \operatorname{Kern} f = F$ ist – folgt daher

$$\forall x \in E\colon f(x) = \alpha f(x_0)\ .$$

Setze nun $z = \beta x_0$ mit $\beta := \frac{\overline{f(x_0)}}{\|x_0\|_E^2} \in \mathbb{K}$. Dann folgt das Gewünschte wegen

$$f(x) = \alpha f(x_0) = \alpha \frac{f(x_0)}{\|x_0\|_E^2} \cdot \|x_0\|_E^2 = \alpha\overline{\beta}\langle x_0, x_0\rangle = \alpha\langle x_0, \beta x_0\rangle = \alpha\langle x_0, z\rangle = \langle x, z\rangle\ .$$

□

**Korollar 5.30.** *Sei $(E, \langle .,.\rangle)$ ein beliebiger Hilbertraum. Dann ist $\Gamma\colon E \to E', z \mapsto f_z$ mit $f_z\colon E \to \mathbb{K}, x \mapsto \langle x, z\rangle$ normerhaltend, bijektiv und antilinear*[5]

**Satz 5.31.** *Sei $(E, \langle .,.\rangle_E)$ ein Hilbertraum. Dann wird $E'$ mit dem Innenprodukt*

$$\langle f, g\rangle_{E'} := \langle z_f, z_g\rangle$$

*zu einem Hilbertraum $(E', \langle .,.\rangle_{E'})$. Insbesondere gilt $\|f\|_{E'} = \sqrt{\langle f, f\rangle_{E'}}$ mit $\|.\|_{E'}$ aus* (5.18).

**Beweis:** Der zweite Teil der Behauptung folgt wegen

$$\langle f, f\rangle_{E'} \overset{\text{Satz 5.29}}{=} \langle z_f, z_f\rangle_E = \|z_f\|_E^2 \overset{\text{Bsp. 5.27}}{=} \|f\|_{E'}^2$$

□

**Definition 5.32.** Sei $\Gamma\colon E \to E'', x \to \mathcal{F}_x$ mit $\forall f \in E'\colon \mathcal{F}_x(f) = f(x)$ (denn es gilt $\forall x \in E\colon \mathcal{F}_x$ linear und stetig mit $\|\mathcal{F}_x\|_{E''} \leq \|x\|_E$), dann ist $\Gamma$ injektiv wegen $\operatorname{Kern} \gamma = \{0\}$. (Folgt später aus Korollar 7.9.) Wir nennen $E$ **reflexiv** genau dann, wenn $\Gamma$ surjektiv ist.[6]

**Satz 5.33.** *Sei $(E, \langle .,.\rangle_E)$ ein Hilbertraum. Dann ist $E$ reflexiv.*

**Beweis:** Sei $\mathcal{F} \in E''$. Da $(E', \langle .,.\rangle_{E'})$ ein Hilbertraum ist, folgt nach Satz 5.29 (Fréchet-Riesz) die Existenz eines eindeutigen $g_{\mathcal{F}} \in E'$, so dass für alle $f \in E'$ gilt

$$\mathcal{F}(f) \overset{\text{Satz 5.29}}{=} \langle f, g_{\mathcal{F}}\rangle_{E'} \overset{\text{Satz 5.31}}{=} \langle z_{g_{\mathcal{F}}}, z_f\rangle_E \overset{\text{Satz 5.29}}{=} f\left(z_{g_{\mathcal{F}}}\right)\ .$$

Somit ist das $\Gamma\colon E \to E'',\ x \mapsto \mathcal{F}_x$ aus Definition 5.32 surjektiv, also ist $(E, \langle .,.\rangle_E)$ reflexiv. □

**Beispiel 5.34.**

Betrachten wir wiederum den linearen Raum der endlichen Folgen,[7] so gilt $F \subset \ell^2$, wie wir bereits in Beispiel 4.10 gesehen haben. Eine lineare und stetige Abbildung $f\colon F \to \mathbb{R}$ ist etwa gegeben durch die Einschränkung eines $f \in {\ell_2}'$. Genauer wird durch

$$p \mapsto f(p) := \langle p, z_f\rangle = \sum_{j=0}^{n_p} p(j) z_f(j)$$

mit einem beliebigen festen $z \in \ell^2$ eine lineare und stetige Abbildung auf $F$ definiert, die sich – wie wir später sehen werden – mit Hilfe der Fortsetzungssätze von Hahn-Banach eindeutig auf $\ell^2$ fortsetzen lässt.

---

[5] d.h., $\forall z \in E\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\colon\ (\Gamma(z + \tilde{z}) = \Gamma(z) + \Gamma(\tilde{z})\ \wedge\ \Gamma(\alpha z) = \overline{\alpha}\Gamma(z))$.

[6] Beachte: $E$ reflexiv $\Rightarrow E \cong E''$, aber $E \cong E'' \not\Rightarrow E$ reflexiv

[7] Diesen Raum können wir gegebenenfalls über eine bijektive Koeffizientenabbildung mit dem Raum aller Polynome $\mathbb{P}$ identifizieren.

**Aufgaben:**

A 5.4.1 Beweisen Sie **Satz 5.29 [Darstellungssatz von Fréchet-Riesz]**

A 5.4.2 Zeigen Sie **Satz 5.31 (b):** $\forall f \in E' \colon \langle f, f\rangle_{E'} = \|f\|^2$

A 5.4.3 Zeigen Sie **Satz 5.33**: Jeder Hilbertraum ist reflexiv.

A 5.4.4 Sei $H$ ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$. $s \colon H \times H \to \mathbb{C}$ heißt eine Sesquilinearform, wenn gilt:

$$\begin{aligned} s(x_1 + x_2, y) &= s(x_1, y) + s(x_2, y) \qquad & s(\alpha x, y) = \alpha s(x, y) \\ s(x, y_1 + y_2) &= s(x, y_1) + s(x, y_2) \qquad & s(x, \alpha y) = \bar{\alpha} s(x, y) \end{aligned}$$

Die Sesquilinearform $s$ heißt stetig, wenn aus $x_n \to x,\ y_n \to y$ stets $s(x_n, y_n) \to s(x, y)$ folgt; sie heißt beschränkt, wenn eine Konstante $\gamma$ existiert, so dass $|s(x, y)| \leq \gamma \|x\| \|y\|$ für alle $x, y \in H$ gilt. Zeigen Sie:

(a) $s$ ist stetig, genau dann wenn $s$ beschränkt ist.

(b) Sei $A$ eine lineare Abbildung von $H$ in sich. $s(x, y) := (Ax|y)$ ist genau dann stetig, wenn $A$ stetig ist.

(c) Sei $s$ eine stetige Sesquilinearform. Dann existiert genau eine stetige, lineare Abbildung $A$ von $H$ in sich, so dass

$$s(x, y) = (Ax|y) \tag{5.19}$$

für alle $x, y \in H$.

## 5.5 Orthogonalreihen und Separabilität

**Satz 5.35.** *Sei $(E, \langle .,. \rangle_E)$ ein Hilbertraum, $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset E$ orthonormal sowie $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{K}$. Dann gelten:*

(a) *Es ist* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n u_n$ *in* $(E, \langle .,. \rangle_E)$ *konvergent* $\iff$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2 < \infty$.

(b) $\forall x \in E\colon x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, u_n \rangle u_n \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, u_n \rangle_E|^2 = \langle x, x \rangle_E$

(c) *Gilt* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n u_n = x$ *in* $(E, \langle .,. \rangle_E)$, *so folgt* $\forall n \in \mathbb{N}\colon \alpha_n = \langle x, u_n \rangle_E$.

(d) *Gilt* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n u_n = x$ *in* $(E, \langle .,. \rangle_E)$, *so folgt für alle bijektiven Abbildungen* $\beta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *ebenfalls* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_{\beta(n)} u_{\beta(n)} = x$ *in* $(E, \langle .,. \rangle_E)$.

**Satz 5.36.** *Sei $(E, \langle .,. \rangle_E)$ ein Hilbertraum, $S \subset E$ ein Orthonormalsystem. Dann ist für alle $x \in E$ die Teilmenge*

$$S_0 \ := \ S_0(x) \ := \ \{u \in S \mid \langle x, u \rangle_E = 0\} \tag{5.20}$$

*höchstens abzählbar. Weiter gilt*

$$\sum_{u\in S} |\langle x, u \rangle_E|^2 \ = \ \sum_{u\in S_0} |\langle x, u \rangle_E|^2 \ \leq \ \|x\|_E^2 \tag{5.21}$$

**Satz 5.37.** *Sei $(E, \langle .,. \rangle_E)$ ein Hilbertraum, $S \subset E$ ein (beliebiges) Orthonormalsystem. Dann existiert für jedes $x \in E$ ein $z \in E$, so dass die Reihe*

$$\sum_{u\in S} \langle x, u \rangle_E u$$

*bei beliebiger Anordnung in $(E, \langle .,. \rangle_E)$ gegen $z$ konvergiert. Weiter gelten*

(a) $z = x \iff \sum_{u\in S} |\langle x, u \rangle_E|^2 \ = \ \|x\|_E^2$

(b) $(x - z) \perp \overline{(\operatorname{span} S)}$ *und*

(c) $\overline{(\operatorname{span} S)} \ = \ \left\{ \sum_{u\in S} \langle y, u \rangle_E u \mid y \in E \right\} \ =: \ M.$

**Definition 5.38.** Sei $(E, \langle .,. \rangle_E)$ ein Innenproduktraum, $S \subset E$ ein Orthonormalsystem.

(a) Dann heißen die Zahlen $\langle x, u \rangle_E$ für $u \in S$ die **Fourier-Koeffizienten** von $x$ bzgl. $S$.

(b) Es heißt $S \subset E$ eine **Orthonormalbasis** von $E$, wenn gilt:[8]

   (1) $S$ ist ein Orthonormalsystem

[8] Achtung: Dieser Begriff stimmt für unendlich-dimensionale Räume NICHT mit dem aus der linearen Algebra bekannten Begriff der Orthonnormalbasis überein.

(2) $\forall x \in E\colon \left( \sum_{u \in S} \langle x, u \rangle_E u \text{ konvergiert } \wedge \sum_{u \in S} \langle x, u \rangle_E u \;=\; x \right)$.

(c) Wir nennen $E$ **separabel** $:\Longleftrightarrow \exists M \subset E\colon M$ abzählbar und dicht in $E$.

**Korollar 5.39.** *Sei $(E, \langle .,. \rangle_E)$ ein Hilbertraum, $S \subset E$ ein (beliebiges) Orthonormalsystem. Dann sind äquivalent:*

(a) *$S$ ist Orthonormalbasis von $E$.*

(b) $E = \overline{(\operatorname{span} S)}$.

(c) *Es gilt die* ***Parsevalsche Gleichung***

$$\forall x \in E\colon \sum_{u \in S} |\langle x, u \rangle_E|^2 \;=\; \|x\|_E^2 \,. \tag{5.22}$$

**Satz 5.40.** *Sei $(E, \langle .,. \rangle_E)$ ein Hilbertraum, $S \subset E$. Dann gilt:*

$$S \text{ Orthonormalbasis von } E \quad \Longleftrightarrow \quad S \text{ vollständiges ONS von } E \,.$$

**Satz 5.41.** *Sei $(E, \langle .,. \rangle_E)$ ein Innenproduktraum, $E \neq \{0\}$. Dann gilt:*

(a) *$\exists S \subset E\colon S$ vollständiges ONS von $E$*

(b) *Zu jedem ONS $S_0 \subset E$ existiert ein vollständiges ONS $S$ mit $S_0 \subset S$.*

**Satz 5.42.** *Sei $(E, \langle .,. \rangle_E)$ ein Hilbertraum unendlicher Dimension. Dann gilt*

$$E \text{ separabel} \qquad \Longleftrightarrow \qquad E \text{ besitzt abzählbare ONB} \,.$$

**Beweis:**

- „$\Longrightarrow$:“ Wir zeigen:

  Ist $(E, \langle .,. \rangle_E)$ separabel und $S \subset E$ ein ONS, dann ist $S$ höchstens abzählbar.

  Da $E$ nach Voraussetzung separabel ist, existiert eine höchstens abzählbare Teilmenge $M \subset E$ mit $\overline{M} = E$. Es gilt also

  $$M \;=\; \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{oder} \qquad M \;=\; \{y_n \mid n = 1, \dots, m\} \,.$$

  Insbesondere folgt $S \subset E = \bigcup_n D_n$ mit den offenen Kugeln $D_n := B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(y_n)$. Sind nun $u, v \in S \cap D_n$, so gilt einerseits

  $$\|u - v\|_E \;\leq\; \underbrace{\|u - y_n\|_E}_{< \frac{\sqrt{2}}{2}} \;+\; \underbrace{\|y_n - v\|_E}_{< \frac{\sqrt{2}}{2}} \;<\; \sqrt{2} \,.$$

  Andererseits gilt für alle $u, v \in S$ mit $u \neq v$ schon $\|u - v\|_E^2 = \langle u, u \rangle_E + \langle v, v \rangle_E = 2$, also $\|u - v\|_E = \sqrt{2}$. Somit kann für jedes $n$ in $S \cap D_n$ maximal ein Element enthalten sein. Also ist $S$ höchstens abzählbar.

- „$\Longleftarrow$:“ Sei $S \subset E$ eine abzählbare ONB von $E$, d.h., $S = \{u_n \in E \mid n \in \mathbb{N}\}$. Da für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Menge
$$M_m := \left\{ \sum_{n=1}^{m} q_n u_n \mid \mathrm{Re}(q_n), \mathrm{Im}(q_n) \in \mathbb{Q} \right\}$$
abzählbar ist, ist auch $M := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} M_m$ abzählbar. Sei nun $\varepsilon > 0$ und $x \in E$ beliebig. Nach Definition einer Orthonormalbasis existiert dann ein $m \in \mathbb{N}$, so dass
$$\left\| x - \sum_{n=1}^{m} \langle x, u_n \rangle_E u_n \right\|_E < \frac{\varepsilon}{2}$$
Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, existieren $q_n$ mit $\mathrm{Re}(q_n), \mathrm{Im}(q_n) \in \mathbb{Q}$, so dass
$$\forall n = 1, \ldots, m\colon\ |q_n - \langle x, u_n \rangle_E| < \frac{\varepsilon}{2m} .$$
Insgesamt folgt somit
$$\left\| x - \sum_{n=1}^{m} q_n u_n \right\|_E \leq \underbrace{\left\| x - \sum_{n=1}^{m} \langle x, u_n \rangle_E u_n \right\|_E}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \sum_{n=1}^{m} \underbrace{|\langle x, u_n \rangle_E - q_n|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2m}} \underbrace{\|u_n\|_E}_{=1} < \varepsilon .$$
Also gilt $\overline{M} = E$, d.h., $M \subset E$ ist auch dicht in $E$.

$\square$

**Aufgaben:**

A 5.5.1 Zeigen Sie: Ein Banachraum $(E, \|.\|)$ über $\mathbb{R}$, dessen Norm die **Parallelogramm-Gleichung** (5.5) erfüllt, ist schon ein Hilbertraum.

A 5.5.2 Sei $E$ ein Hilbertraum und $S$ ein Orthonormalsystem. Beweisen Sie: Genau dann ist $S$ eine Hilbertbasis, wenn für alle $x, y \in E$ gilt

$$(x|y) \;=\; \sum_{u \in S} (x|u)(u|y). \tag{5.23}$$

.................................................................... (Separabilität)

A 5.5.3 Finden Sie Metriken $d_1, d_2$ auf $\mathbb{R}$, so dass $(\mathbb{R}, d_1)$ separabel, jedoch $(\mathbb{R}, d_2)$ nicht separabel ist.

A 5.5.4 Zeigen Sie, dass jeder Unterraum eines separablen metrischen Raumes wieder separabel ist.

A 5.5.5 Zeigen Sie: Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $\alpha > 0$ sowie $Y \subset X$ eine überabzählbare Teilmenge mit der Eigenschaft $\forall y, z \in Y\colon\ (y \neq z \Longrightarrow d(y,z) \geq \alpha)$. Dann ist $(X, d)$ **nicht** separabel.

A 5.5.6 Beweisen Sie **Satz 5.40:** Sei $(E, \langle ., . \rangle_E)$ ein Hilbertraum unendlicher Dimension. Dann gilt

$$E \text{ separabel} \qquad \Longleftrightarrow \qquad E \text{ besitzt abzählbare ONB}\ .$$

A 5.5.7 Sei $(E, \|.\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie:

$$(E, \|.\|) \text{ separabel} \qquad \Longleftrightarrow \qquad E \text{ besitzt abzählbare Teilmenge } D \text{ mit } \overline{\operatorname{span}(D)} = E\ .$$

A 5.5.8 Untersuchen Sie die folgenden Räume auf Separabilität

(a) $(\ell^p, \|.\|_p)$ für $p \in [1, \infty[$ (b) $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ (c) $(c, \|.\|_\infty)$ (d) $(c_0, \|.\|_\infty)$

A 5.5.9 $(X, \|.\|_X)$ sei ein separabler Banachraum. Zeigen Sie, dass eine lineare, surjektive und stetige Abbildung $Q\colon \ell^1 \to X$ existiert.

**Hinweis:** Sei $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge der offenen Einheitskugel $B_1(0) \subset X$ und $Q(\alpha) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n) x_n$.

.................................................. (Vorgriff: Schwache Konvergenz in $\ell^2$)

A 5.5.10 Geben Sie je ein Beispiel einer Folge aus $\ell^2$ an, die

(a) komponentenweise aber nicht schwach konvergiert;

(b) schwach aber nicht stark konvergiert.

A 5.5.11 Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\ell^2$, die komponentenweise gegen eine Folge $x$ konvergiert, d.h. $\forall k \in \mathbb{N}\colon x_n(k) \to x(k)$. Ferner sei $\|x_n\|_{\ell^2} \leq M$ für ein $M \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $x \in \ell^2$ und $x_n \rightharpoonup x$ ($x_n$ konvergiert schwach gegen $x$).

# Kapitel 6

# Konsequenzen der Vollständigkeit

**Definition 6.1.** Sei $(E,d)$ ein metrischer Raum, $M \subset E$, $M \neq \emptyset$. Dann definieren wir

$$\operatorname{diam}(M) \ := \ \sup_{x,y\in M} d(x,y) \ . \tag{6.1}$$

**Satz 6.2** (Cantor)**.** *Sei $(E,d)$ ein vollständiger metrischer Raum, $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener nichtleerer Teilmengen von $E$ mit $\forall n\colon F_n \supset F_{n+1}$ und $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$ für $n \to \infty$.*
*Dann enthält $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ genau ein Element.*

## 6.1 Der Satz von Baire und seine Anwendungen

**Lemma 6.3.** *Sei $(E,d)$ ein metrischer Raum, $F \subset E$, $\operatorname{Int}(F) = \emptyset$, $K \subset E$ abgeschlossene Kugel, $F$ abgeschlossen. Dann gibt es eine abgeschlossene Kugel $K' \subset K$ mit $K' \cap F = \emptyset$.*

**Satz 6.4** (Baire)**.** *Sei $(E,d)$ ein vollständiger metrischer Raum, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen von $E$, $G \subset E$ offen, $G \neq \emptyset$,*

$$G \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \ .$$

*Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $F_{n_0}$ ein nichtleeres Inneres besitzt.*[1]

**Korollar 6.5.** *Ist $(E, \|.\|)$ ein unendlich-dimensionaler Banachraum über $\mathbb{K}$, dann ist jede Basis von $E$ überabzählbar.*

**Beweis:** Angenommen, es existiere eine Folge $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ paarweise verschiedener (nicht notwendigerweise linear unabhängiger) Elemente aus $E$, welche $E$ aufspannen. Dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon F_n := \operatorname{span}\{e_k \mid k = 1,\ldots,n\} \quad \text{abgeschlossen, da endlich-dimensional}$$

sowie $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ offen. Nach Satz 6.3 (Baire) existierte dann ein $n_0 \in \mathbb{N}\colon \operatorname{Int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$. Dies bedeutete also, dass wir ein $x_0 \in E$ und ein $r > 0$ finden, so dass

$$F_{n_0} \supset K_r(x_0) \ := \ \{x \mid \|x - x_0\| < r\}\,,$$

[1] Äquivalente Formulierung: Sei $(E,d)$ vollständig, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge mit $\forall n \in \mathbb{N}\colon F_n \subset E$ abgeschlossen und $\operatorname{Int} \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. Dann gilt: $\exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \operatorname{Int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$

also insbesondere auch $x_0 \in F_{n_0}$. Da es sich um lineare Räume handelt, muss dann auch $K_r(0) \in F_{n_0}$ gelten und für jedes $y \in E \setminus \{0\}$ wegen

$$\frac{r}{2}\frac{y}{\|y\|} \in K_r(0) \subset F_{n_0}$$

dann auch $y \in F_{n_0}$, also $E \subset F_{n_0}$ und somit $E = F_{n_0}$ sowie $\dim E = \dim(F_{n_0}) = n_0 < \infty$ gelten, Widerspruch. □

**Definition 6.6.**

(a) Ist $(E, \|.\|)$ ein unendlich-dimensionaler normierter Raum über $\mathbb{K}$, dann nennen wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $E$ eine **Schauderbasis**, falls

$$\forall x \in E\ \exists!(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon x \ = \ \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n x_n \ = \ \lim_{k\to\infty} s_k \qquad \text{wobei} \qquad s_k \ := \ \sum_{n=1}^{k} \lambda_n x_n \ .$$

**Bem.:** Zur Abgrenzung wird die Basis im Sinne der linearen Algebra manchmal auch Hamelbasis genannt.

(b) Sei $(E, d)$ ein metrischer Raum, $S \subset E$ beliebig.

   (i) $S$ heißt **Menge 1. Kategorie** in $(E, d)$

   $$:\Longleftrightarrow \exists (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } \forall n \in \mathbb{N}\colon\ (F_n \subset E \text{ abgeschlossen } \wedge\ \operatorname{Int} F_n = \emptyset) \text{ und } S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\ .$$

   (ii) $S$ heißt **Menge 2. Kategorie** in $(E, d)$, falls $S$ keine Menge 1. Kategorie ist.

**Bemerkung 6.7.**

(a) Der Satz von Baire besagt, dass offene nichtleere Mengen in vollständigen metrischen Räumen Mengen 2. Katergorie sind.

(b) Letzteres impliziert, dass Mengen 1. Kategorie ein leeres Inneres besitzen.

**Beispiel 6.8.**

(a) $\mathbb{Q}$ ist eine Menge 1. Kategorie, da es eine geeignete abzählbare Überdeckung (nämlich $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}$) gibt.

(b) $\mathbb{R}$ ist eine Menge 2. Kategorie, da vollständig (vgl. letzte Bemerkung).

(c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist eine Menge 2. Kategorie, denn wäre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine Menge 1. Kategorie, dann auch $\mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}$, Widerspruch.

**Aufgaben:**

A 6.1.1 Entscheiden Sie, ob folgende Mengen von 1. oder 2. Kategorie sind: (i) $\mathbb{Q}$ (ii) $\mathbb{R}$ (iii) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

A 6.1.2 Finden Sie eine Menge, die dicht in einer anderen liegt, deren Komplement jedoch auch dicht ist.

A 6.1.3 Finden Sie einfache Beispiele, die zeigen, dass

(a) die Abzählbarkeitsvoraussetzung, bzw. (b) die Vollständigkeit des metrischen Raumes

im Baireschen Kategoriensatz notwendig ist.

A 6.1.4 Zeigen Sie mittels Baireschem Kategoriensatz, dass sich $A := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nicht als

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \tag{6.2}$$

mit

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon A_k \text{ abgeschlossen}$$

schreiben lässt.

A 6.1.5 Es seien $(E, \|.\|_E)$ ein Banachraum und $(F, \|.\|_F)$ ein normierter Raum. $(A_{m,n})_{m,n}$ sei eine Doppelfolge stetiger, linearer Operatoren $A_{m,n}\colon E \to F$. Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ existiere ein $x_m \in E$, so dass die Folge $(\|A_{m,n}x_m\|_F)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ unbeschränkt ist.
Zeigen Sie: Es existiert ein $x_0 \in E$ derart, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ $(\|A_{m,n}x_0\|_F)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist.

A 6.1.6 Zeigen Sie: Es gibt keine reellwertige Funktion auf dem Intervall $[0, 1]$, die in jedem rationalen Punkt stetig und in jedem irrationalen Punkt unstetig ist.

**Tipp:** Zeigen und verwenden Sie, dass eine Darstellung

$$[0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \tag{6.3}$$

mit abgeschlossenen Mengen $F_n$ unmöglich ist.

A 6.1.7 Sei $D \subset C := C([a, b], \mathbb{R})$ die Menge aller stetigen Funktionen, die in mindestens einem Punkt differenzierbar sind. Zeigen Sie, dass $D$ von 1.Kategorie (d.h., $D \subset \bigcup_n D_n$, für geeignete abgeschlossene Mengen $D_n$ mit leerem Inneren) und $C \setminus D$ dicht in $C$ ist.

**Tipp:** Betrachten Sie für $t_0 \in [a, b]$ und $n \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$D_{t_0,n} = \{f \in C \mid |f(t) - f(t_0)| \le n|t - t_0|, t \in [a, b]\} \qquad \text{und} \qquad D_n = \bigcup_{t_0} D_{t_0,n} \tag{6.4}$$

**Bemerkung:** $D$ ist auch dicht in $C$, aber $C\setminus D$ ist mächtiger als $D$.

A 6.1.8 Zeigen Sie Corollar 6.5:
Ist $(E, \|.\|)$ ein unendlich-dimensionaler Banachraum über $\mathbb{K}$, dann ist jede Basis von $E$ überabzälbar.

A 6.1.9 Zeigen Sie, dass

$$c := \{x \in \ell^\infty\colon x(k) \text{ konvergent }\}.$$

nirgends dicht in $\ell^\infty$ ist, d.h. $\operatorname{int}_{l^\infty} \operatorname{cl}_{l^\infty} c = \emptyset$.

## 6.2 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

**Satz 6.9** (Osgood)**.** *Sei $(E, d)$ ein vollständiger metrischer Raum, $(f_j)_{j\in J}$ eine Familie von stetigen Funktionen $f_j\colon E \to \mathbb{R}$, welche punktweise nach oben beschränkt sind, d.h.,*

$$\forall x \in E\ \exists M_x \in \mathbb{R} \forall j \in J\colon f_j(x) \ \leq\ M_x\ .$$

*Dann existiert eine offene*[2] *Kugel $K \subset E$ und ein $M \in \mathbb{R}$, so dass*

$$\forall x \in K\ \forall j \in J\colon f_j(x) \ \leq\ M\ . \tag{6.5}$$

**Beweis:** Wir betrachten für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $F_n := \{x \in E \mid \forall j \in J\colon f_j(x) \leq n\}$. Aufgrund der Stetigkeit der $f_j$ ist $f_j^{-1}(]-\infty, n])$ abgeschlossen für jedes $j \in I$, also ist auch

$$F_n \ =\ \bigcap_{j\in J} f_j^{-1}(]-\infty, n]) \ =\ \bigcap_{j\in J} \{x \in E \mid f_j(x) \leq n\}$$

abgeschlossen. Weiter folgt $\boxed{E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n}$. Mit dem Satz von Baire (Satz 6.4) folgt nun die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\operatorname{Int} F_{n_0} \neq \emptyset$. Somit existiert eine abgeschlossene Kugel $K \subset F_{n_0}$, für die mit $M := n_0 < \infty$ nun wie behauptet (6.5) gilt. □

**Satz 6.10** (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)**.**
*Sei $(E, \|.\|_E)$ ein Banachraum und $(F, \|.\|_F)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, $(A_j)_{j\in J}$ eine Familie aus $\mathcal{L}(E, F)$, welche punktweise beschränkt ist, d.h.,*

$$\forall x \in E\ \exists M_x \in \mathbb{R} \forall j \in J\colon \|A_j(x)\|_F \ \leq\ M_x\ .$$

*Dann ist $\left(\|A_j\|_{\mathcal{L}(E,F)}\right)_{j\in J}$ beschränkt.*

**Satz 6.11.** *Sei $(E, \|.\|_E)$ ein Banachraum und $(F, \|.\|_F)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{L}(E, F)$. Weiter konvergiere für jedes $x \in E$ die Folge $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ in $F$. Dann ist die durch $A(x) := \lim_{n\to\infty} A_n x$ definierte Abbildung linear und stetig. Weiter gilt*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \ \leq\ \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}\ . \tag{6.6}$$

**Beispiel 6.12.**

(a) Sei $(E, \langle ., . \rangle_E)$ ein Hilbertraum und $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein ONS, dann ist durch $f_n(x) = \langle x, u_n\rangle_E$ eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ mit $\forall n \in \|f_n\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})} = \|u_n\|_E = 1$ gegeben. Da nun nach der Besselschen Ungleichung (5.13) für jedes $x \in E$ die Abschätzung

$$\|x\|_E^2 \ \geq\ \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, u_n\rangle_E|^2$$

gilt, folgt nun notwendigerweise auch $|\langle x, u_n\rangle_E|^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für alle $x \in E$ und damit insbesondere auch $f_n(x) = \langle x, u_n\rangle_E \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für alle $x \in E$. Mit den Bezeichnungen des letzten Satzes sind hier also $A_n = f_n$, $A := 0$ sowie $F = \mathbb{K}$.

(b) Die Linearität der $A_n$ ist essentiel, denn haben wir nur eine Folge stetiger Funktionen $g_n\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, welche $\forall x \in [a, b]\colon g_n(x) \to g(x)$ erfüllt (welche also punktweise konvergiert), so ist der punktweise Grenzwert im Allgemeinen **nicht** stetig.

[2] Da in jeder offenen Kugel stets eine abgeschlossene Kugel enthalten ist und vice versa, kann hier auch „abgeschlossen" stehen.

## 6.3 Der Satz von Banach-Steinhaus

**Satz 6.13** (Banach-Steinhaus)**.** *Seien* $(E, \|.\|_E)$ *und* $(F, \|.\|_F)$ *Banachräume über* $\mathbb{K}$ *und* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge aus* $\mathcal{L}(E, F)$*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist punktweise konvergent.*

(2) (a) $(\|A_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist beschränkt.*

(b) $\exists S \subset E$*, so dass* $S$ *dicht in* $E$ *und die Folge* $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *für alle* $x \in S$ *konvergiert.*

**Satz 6.14.** *Seien* $(E, \|.\|_E)$*,* $(F, \|.\|_F)$ *und* $(G, \|.\|_G)$ *normierte Räume über* $\mathbb{K}$*, wobei* $(F, \|.\|_F)$ *vollständig sei. Weiter sei* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine punktweise konvergente Folge aus* $\mathcal{L}(E, F)$ *und* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine punktweise konvergente Folge aus* $\mathcal{L}(F, G)$ *sowie* $A\colon E \to F$ *und* $B\colon F \to G$ *die entsprechenden punktweisen Grenzwerte.*
*Dann konvergiert auch die Folge* $(B_n \circ A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aus* $\mathcal{L}(E, G)$ *punktweise.*

**Aufgaben:**

A 6.3.1 Sei $(X, d_X)$ ein vollständiger metrischer Raum und $f_n\colon (X, d_X) \to (\mathbb{R}, d_\mathbb{R})$ eine Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen $f\colon (X, d_X) \to (\mathbb{R}, d_\mathbb{R})$ konvergiert, d.h. $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in X$.

(a) Welche Aussage erhält man aus dem **Satz von Osgood**?

(b) Zeigen Sie ferner: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren eine nichtleere offene Menge $V \subset X$ und ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall x \in V \quad \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \tag{6.7}$$

**Tipp:** Satz von Baire.

............................................. (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)

A 6.3.2 Seien $(V, \|.\|_V)$ und $(W, \|.\|_W)$ Banach-Räume und $B\colon V \times W \to \mathbb{R}$ ein bilineares Funktional, welches in jeder Variablen stetig sei. Es gelte also

(i) für jedes $\xi \in V$ ist $B(\xi, \cdot)\colon W \to \mathbb{R}$ linear und stetig,

(ii) für jedes $\eta \in W$ ist $B(\cdot, \eta)\colon V \to \mathbb{R}$ linear und stetig.

Zeigen Sie die Stetigkeit von $B$. **Tipp:** Satz 6.10 oder Satz 6.13 (1) $\Longrightarrow$ (2.a).

A 6.3.3 Es sei $(E, \|.\|_E)$ ein Banachraum über $\mathbb{R}$ und $(x_n')_n$ eine fest vorgegebene Folge aus $E'$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $E$ mit $\|x_n\|_E \to 0$ ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n'(x_n)$ konvergent;

(b) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$ konvergiert absolut.

**Tipp:**
Verwenden Sie für die Richtung „(a) $\Longrightarrow$ (b)" das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.

.......................................................... (Satz von Banach-Steinhaus)

A 6.3.4 Der Operator $A\colon \Big(C([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty\Big) \to \Big(C([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty\Big)$ sei definiert durch

$$(Af)(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt\ , & \text{für } x \in \,]0,1] \\ f(0)\ , & \text{für } x = 0. \end{cases} \tag{6.8}$$

(a) Zeigen Sie, dass $A\colon \Big(C([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty\Big) \to \Big(C([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty\Big)$ linear und stetig ist.

(b) Existiert ein stetiger, linearer Operator $B\colon \Big(C([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty\Big) \to \Big(C([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty\Big)$, so dass punktweise $A^n \to B$ gilt?

## 6.4 Schwache Konvergenz

**Definition 6.15** (starke und schwache Konvergenz)**.**
Sei $(E, \|.\|_E)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $E$ und $x \in E$.

(a) Wir nennen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **stark konvergent** gegen $x$ und schreiben $x_n \to x$, falls $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ in $E$ (d.h., $\|x_n - x\|_E \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$).

(b) Wir nennen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **schwach konvergent** gegen $x$ und schreiben $x_n \rightharpoonup x$, falls

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})\colon\ f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

**Bemerkung 6.16.**

(a) Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz.

(b) In jedem Hilbertraum $(E, \langle .,. \rangle_E)$ gilt

$$x_n \rightharpoonup x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall z \in E\colon\ \langle x_n, z\rangle_E \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x, z\rangle_E \tag{6.9}$$

(c) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormal in einem Hilbertraum $(E, \langle .,. \rangle_E)$. Dann konvergiert $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach, besitzt jedoch keine Teilfolge, welche stark konvergiert.

**Beweis:**

(a) Ist $x_n \to x$ in $E$ und $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ beliebig, also $f$ stetig, so gilt $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

(b) Nach dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz (Satz 5.29) gilt

$$f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \qquad \Longrightarrow \qquad \exists z \in E\colon \forall x \in E\colon\ f(x) = \langle x, z\rangle_E\ .$$

(c) (i) Nach Satz 5.36 gilt

$$\forall z \in E\colon \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x_n, z\rangle|^2 \ \le\ \|z\|^2 \ <\ \infty\ ,$$

so dass notwendigerweise $\langle x_n, z\rangle \to 0 \ =\ \langle 0, z\rangle$ gelten muss. Dies ist genau die schwache Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0.

(ii) Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormal in $(E, \langle .,. \rangle_E)$, gilt für beliebige $n > m$ stets

$$\|x_n - x_m\|^2 \ =\ \langle x_n, x_n\rangle_E + \langle x_m, x_m\rangle_E \ =\ \|x_n\|^2 + \|x_m\|^2 \ =\ 2\ ,$$

also $\|x_n - x_m\|^2 \ =\ \sqrt{2} \not\to 0$, so dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Norm noch nicht einmal eine konvergente Teilfolge besitzen kann (da sie keine Cauchyteilfolge enthalten kann).

□

**Satz 6.17.**
*Sei $(E, \langle .,. \rangle_E)$ ein Hilbertraum. Dann besitzt jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $E$ eine schwach konvergente Teilfolge.*

**Aufgaben:**

A 6.4.1 Beweisen Sie:

(a) Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz.

(b) Ist jedem Hilbertraum $(E, \langle ., . \rangle_E)$ gilt

$$x_n \rightharpoonup x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall z \in E \colon \langle x_n, z \rangle_E \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \langle x, z \rangle_E \tag{6.10}$$

(c) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormal in einem Hilbertraum $(E, \langle ., . \rangle_E)$. Dann konvergiert $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen 0, kann jedoch keine Teilfolge besitzen, welche stark konvergiert.

A 6.4.2 Geben Sie je ein Beispiel einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\ell^2$ an, die

(a) komponentenweise, aber nicht schwach konvergiert;[3]

(b) schwach, aber nicht stark konvergiert.

A 6.4.3 Zeigen Sie, dass der Dualraum von $c_0$ isomorph zu $\ell^1$ ist.

A 6.4.4 Sei $(x_n)_n$ eine Folge aus $C([a, b], \mathbb{R})$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{t\in[a,b]} |x_n(t)| < \infty$. Dann existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ und ein $x \in L^2([a, b], \mathbb{R})$ mit

$$\int_a^b x_{n_k(s)}(s) y(s)\, ds \to \int_a^b x(s) y(s)\, ds$$

für alle $y \in L^2[a, b]$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Kompaktheit und relative Kompaktheit)

A 6.4.5 Untersuchen Sie folgende Mengen auf Beschränktheit und Kompaktheit.

(a) $E_1 = \left\{ x \in \ell^2 \;\middle|\; \forall i \in \mathbb{N} \colon |x_i| \leq \frac{1}{\sqrt{i}} \right\}$,

(b) $E_2 = \left\{ x \in \ell^2 \;\middle|\; \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \leq 1 \right\}$, (c) $E_3 = \left\{ x \in \ell^2 \;\middle|\; \forall i \in \mathbb{N} \colon |x_i| \leq \frac{1}{i} \right\}$.

A 6.4.6 Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. $M \subset X$ heißt **relativ kompakt**, wenn jede Folge aus $M$ eine in $X$ konvergente Teilfolge besitzt. Sei $c_0 := \{x \in \ell^\infty \mid x(n) \to 0 \text{ für } n \to \infty\}$. Zeigen Sie:

$$M \subset c_0 \text{ ist relativ kompakt} \quad \Longleftrightarrow \quad M \text{ ist beschränkt und } \sup_{x\in M} \left( \sup_{k\geq N} |x(k)| \right) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

[3]also $x_n \not\rightharpoonup x$. Dabei gilt hier $x_n \rightharpoonup x \Longleftrightarrow \forall y \in \ell^2 \colon \langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$

# Der Satz von Arzelá-Ascoli und Anwendungen

**Definition 6.18.** Sei $(X,d)$ kompakt, $A \subset C(X,\mathbb{K}^m)$.

(a) $A$ heißt **beschränkt** $:\Longleftrightarrow \sup\limits_{f\in A} \|f\|_\infty =: C < \infty$

(b) $A$ heißt **gleichgradig gleichmäßig stetig**

$$:\Longleftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall x,y \in X\colon \Big( d(x,y) < \delta \Longrightarrow \forall f \in A\colon \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \Big) \; .$$

**Bemerkung 6.19.**

(a) Nach dem Satz von Heine-Borel ist eine Teilmenge eines endlich-dimensionalen normierten Raumes genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

(b) Nach dem Satz vom Minimum/Maximum ist

$$\|f\|_\infty \;:=\; \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \tag{6.11}$$

für jedes $f \in C([a,b],\mathbb{K})$ endlich.

(c) Analog erhalten wir für kompakte metrische Räume $(X, d_X)$, dass

$$\|f\|_\infty \;:=\; \sup_{x\in[a,b]} \|f(x)\| \;<\; \infty \tag{6.12}$$

für jedes $f \in C(X,\mathbb{K}^m) := \{f\colon X \to \mathbb{K}^m \mid f \text{ stetig } \}$.

(d) Insbesondere ist $\big(C(X,\mathbb{K}^m), \|.\|_\infty\big)$ ein Banach-Raum.

**Satz 6.20** (Arzelà-Ascoli)**.** *Sei $(X,d)$ kompakt, $A \subset C(X,\mathbb{K}^m)$. Dann gilt*

$$A \text{ präkompakt} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ beschränkt und gleichgradig gleichmäßig stetig}$$

**Satz 6.21** (Peano – Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems)**.**
*Sei $f\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt, d.h.,*

$$\exists M < \infty\colon \sup_{(t,x)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n} \|f(t,x)\| \le M \; . \tag{6.13}$$

*Weiter sei $\eta \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann existiert eine differenzierbare Funktion $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit*

$$\left.\begin{aligned} \forall t \in [a,b]\colon x'(t) &= f(t,x(t)), \\ x(a) &= \eta. \end{aligned}\right\} \tag{6.14}$$

# Kapitel 7

# Fortsetzungssätze für lineare und stetige Funktionale

Im Folgenden betrachten wir stets einen $\mathbb{K}$-linearen Raum $E$ mit einem $\mathbb{K}$-linearen Unterraum $F \leq E$ sowie einer $\mathbb{K}$-linearen Abbildung $f\colon F \to \mathbb{K}$. Insbesondere interessiert uns die Frage, ob bzw. wann es eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $g\colon E \to \mathbb{K}$ mit $g_{|F} = f$ und gleicher Operatornorm gibt.

**Satz 7.1** (vgl. Lemma III.1.3 (a) in [8] )**.** *Sei $E$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, $f\colon E \to \mathbb{C}$. Setzen wir*

$$\begin{aligned} f_1 &:= \operatorname{Re} f\colon E \to \mathbb{R}, \\ f_2 &:= \operatorname{Im} f\colon E \to \mathbb{R}, \end{aligned}$$

*dann ist $f$ genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn $f_1$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist und*

$$\forall x \in E\colon f_2(x) = -f_1(\mathrm{i}x) \tag{7.1}$$

*gilt.*

**Definition 7.2.** Sei $E$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $p\colon E \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

(a) $p$ heißt **subadditiv**, falls

$$\forall x, y \in E\colon p(x+y) \leq p(x) + p(y)\ . \tag{7.2}$$

(b) $p$ heißt **positiv homogen**, falls

$$\forall x \in E\ \forall 0 < \lambda \in \mathbb{R}\colon p(\lambda x) \ = \ \lambda p(x)\ . \tag{7.3}$$

(c) $p$ heißt **homogen**, falls

$$\forall x \in E\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\colon p(\alpha x) = |\alpha| p(x)\ . \tag{7.4}$$

(d) $p$ heißt **Halbnorm**, falls $p \geq 0$ sowie $p$ subadditiv und homogen ist.

## 7.1 Der Satz von Hahn-Banach

**Satz 7.3** (Hahn-Banach – reeller Fall)**.**

*Sei $E$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $p\colon E \to \mathbb{R}$ subadditiv, positiv homogen, $F \subset E$ ein $\mathbb{R}$-linearer Unterraum, $f\colon F \to \mathbb{R}$ linear und $f \leq p$ auf $F$. Dann existiert ein $g\colon E \to \mathbb{R}$ linear, so dass*

$$g_{|F} \ = \ f \quad \text{und} \quad \forall x \in E\colon g(x) \leq p(x)\ . \tag{7.5}$$

**Korollar 7.4** (Hahn-Banach – komplexer Fall)**.** *Sei $E$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, $p\colon E \to \mathbb{R}$ subadditiv, positiv homogen, $F \subset E$ ein $\mathbb{C}$-linearer Unterraum, $f\colon F \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung und* $\operatorname{Re} f \leq p$ *auf $F$. Dann existiert eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $g\colon E \to \mathbb{C}$, so dass*

$$g_{|F} \ = \ f \quad \text{und} \quad \forall x \in E\colon \operatorname{Re} g(x) \leq p(x)\ . \tag{7.6}$$

**Beweis:** Fassen wir $E, F$ als $\mathbb{R}$-Vektorräume auf (die dann natürlich von höherer Dimension sind), dann ist $f_1 = \operatorname{Re} f$ insbesondere $\mathbb{R}$-linear. Nach Satz 7.3 existiert dann eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $g_1\colon E \to \mathbb{R}$ mit

$$g_{1|F} \ = \ f_1 \quad \text{und} \quad \forall x \in E\colon g_1(x) \leq p(x)\ .$$

Setzen wir nun $g(x) := g_1(x) - \mathrm{i}g_2(\mathrm{i}x)$, so erhalten wir nach Satz 7.1 eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $g\colon E \to \mathbb{C}$ mit

$$\forall x \in E\colon \ \operatorname{Re} g(x) =: g_1(x) \leq p(x)$$

sowie – denn mit $x \in F$ auch $\mathrm{i}x \in F$ liegt, da $F$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist –

$$\forall x \in F\colon g(x) \ = \ g_1(x) - \mathrm{i}g_2(\mathrm{i}x) \ = \ f_1(x) - \mathrm{i}f_2(\mathrm{i}x) \ \overset{\text{Satz7.1}}{=} \ f(x)\ ,$$

also $g_{|F} \ = \ f$. □

**Satz 7.5** (Hahn-Banach mit Halbnormen)**.**

*Sei $E$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $p\colon E \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm, $F \subset E$ ein $\mathbb{K}$-linearer Unterraum, $f\colon F \to \mathbb{K}$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung und $|f| \leq p$ auf $F$. Dann existiert eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $g\colon E \to \mathbb{K}$, so dass*

$$g_{|F} \ = \ f \quad \text{und} \quad \forall x \in E\colon |g(x)| \leq p(x)\ . \tag{7.7}$$

**Korollar 7.6** (Hahn-Banach auf normierten Räumen)**.**

*Sei $\big(E, \|.\|_E\big)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $F \subset E$ ein $\mathbb{K}$-linearer Unterraum, $f\colon F \to \mathbb{K}$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung, welche stetig bezüglich der $\|.\|_E$-Norm ist. Dann existiert eine stetige $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $g\colon E \to \mathbb{K}$, so dass*

$$g_{|F} \ = \ f \quad \text{und} \quad \|g\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})} \ = \ \|f\|_{\mathcal{L}(F,\mathbb{K})}\ . \tag{7.8}$$

**Beweis:** Setzen wir $\forall x \in E\colon p(x) := \|f\|_{\mathcal{L}(F,\mathbb{K})}\|x\|_E$, so ist $p$ eine Halbnorm auf $E$ mit der Eigenschaft $\forall x \in F\colon |f(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}(F,\mathbb{K})}\|x\|_E = p(x)$. Nach Satz 7.5 existiert dann eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $g\colon E \to \mathbb{K}$, so dass

$$g_{|F} \ = \ f \quad \text{und} \quad \forall x \in E\colon |g(x)| \leq p(x) = \|f\|_{\mathcal{L}(F,\mathbb{K})}\|x\|_E\ .$$

Somit ist $g$ stetig mit $\|g\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})} \leq \|f\|_{\mathcal{L}(F,\mathbb{K})}$. Da jedoch ebenso für alle $x \in F$ die Ungleichungskette

$$|f(x)| \ = \ |g(x)| \ \leq \ \|g\|_{\mathcal{L}(F,\mathbb{K})} \cdot \|x\|_E$$

und daher $\|f\|_{\mathcal{L}(F,\mathbb{K})} \ \leq \ \|g\|_{\mathcal{L}(F,\mathbb{K})}$ gilt, ergibt sich wegen $\|g\|_{\mathcal{L}(F,\mathbb{K})} \leq \|g\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$ nun wie behauptet

$$\|g\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})} \ = \ \|f\|_{\mathcal{L}(F,\mathbb{K})}\ .$$

□

**Satz 7.7.**
*Sei $\big(E, \|.\|_E\big)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $0 \neq x_0 \in E$ beliebig und $\beta \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann existiert eine stetige $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $g\colon E \to \mathbb{K}$, so dass*

$$g(x_0) \;=\; \beta\|x_0\|_E \quad \text{und} \quad \|g\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})} \;=\; |\beta| \;. \tag{7.9}$$

**Beweis:** Setze $F := \mathbb{K} \cdot x_0$, $f\colon F \to \mathbb{K}$, $f(x) = f(tx_0) = t\beta\|x_0\|_E$. Dann ist einerseits $F$ ein $\mathbb{K}$-linearer Unterraum und andererseits $f$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung. Weiterhin gilt

$$|t| \leq 1 \implies \left| f\left( t\frac{x_0}{\|x_0\|_E} \right) \right| \;\leq\; |t\beta| \;\leq\; |\beta| \;.$$

Somit ist $\|f\|_{\mathcal{F},\mathbb{K}} \;\leq\; |\beta|$. Mit Korollar 7.6 folgt nun die Behauptung. □

**Bemerkung 7.8** (Spezialfälle)**.**

(a) Satz 7.7 besagt im Fall $\beta = 1$, dass es eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $g\colon E \to \mathbb{K}$ mit $g(x_0) \;=\; \|x_0\|_E$ und $\|g\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})} \;=\; 1$ gibt.

(b) Satz 7.7 besagt im Fall $\beta \;=\; \|x_0\|_E$, dass es eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $g\colon E \to \mathbb{K}$ mit $g(x_0) \;=\; \|x_0\|_E^2$ und $\|g\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})} \;=\; \|x_0\|_E$ gibt.

Das folgende Korollar liefert nun als Nachtrag die Begründung für die Injektivität der Abbildung aus Definition 5.32.

**Korollar 7.9.** *Sei $\big(E, \|.\|_E\big)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und es existiere $0 \neq x_0 \in E$. Dann existiert eine stetige $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $g\colon E \to \mathbb{K}$ mit $g(x_0) \neq 0$.*

**Korollar 7.10.** *Sei $\big(E, \|.\|_E\big)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $E \neq \{0\}$. Dann gilt $E' \neq \{0\}$.*

**Bemerkung 7.11.**

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit positivem Maß$\mu$, $0 < p < 1$ sowie $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Dann gilt

$$\int \Big| |f|^p - |g|^p \Big| d\mu \;\leq\; \int |f - g|^p d\mu \;. \tag{7.10}$$

Insbesondere wird durch $d_p(f, g) := \int |f - g|^p d\mu$ eine Pseudo-Metrik auf $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ definiert, mit der wir (wiederum nach Übergang zu den Äquivalenzklassen $L^p$) den vollständigen metrischen Raum $(L^p, d_p)$ erhalten (vgl. [6], p. 199f).

(b) Für $0 < p < 1$ und den Lebesgueschen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = ([0, 1], \mathcal{B} \sqcap [0, 1], \lambda_{|\mathcal{B} \sqcap [0,1]})$ besitzt der vollständige metrische Raum $(L^p, d_p)$ nur den trivialen Vektorraum als Dualraum, d.h., es gilt $(L^p)' = \{0\}$ (vgl. [3], chap 4, §6, Exercise 13).

**Korollar 7.12.** *Sei $\big(E, \|.\|_E\big)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Weiter gelte $x_n \rightharpoonup x$ sowie $x_n \rightharpoonup x'$. Dann folgt $x = x'$, d.h., schwache Grenzwerte sind eindeutig.*

**Beweis:** Nach Voraussetzung gilt sowohl

$$\forall f \in E' \colon f(x_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \text{ in } \mathbb{K}$$

als auch

$$\forall f \in E' \colon f(x_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x') \text{ in } \mathbb{K} \ .$$

Aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwertes in $(\mathbb{K}, |.|)$ folgt somit

$$\forall f \in E' \colon f(x) = f(x') \ , \qquad \text{also mit } y_0 := x - x' \text{ auch} \qquad \forall f \in E' \colon f(y_0) = 0 \ .$$

Angenommen, es gelte $y_0 \neq 0$, so folgt mit Korollar 7.9 die Existenz eines $f \in E' \colon f(y_0) \neq 0$, Widerspruch! Also muss $y_0 = 0_E$ und daher $x = x'$ gelten. □

**Korollar 7.13.** *Sei $\big(E, \|.\|_E\big)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum sowie $x, x' \in E$ mit $x \neq x'$. Dann existiert ein $f \in E'$ mit $f(x) \neq f(x')$.*

**Satz 7.14.**
*Sei $\big(E, \|.\|_E\big)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gilt*

$$\forall x \in E \colon \|x\|_E \ = \ \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} |f(x)| \ = \ \max_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} |f(x)| \tag{7.11}$$

**Beweis:** Einerseits gilt

$$\|f\|_{E'} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| \ \leq \ \|f\|_{E'} \cdot \|x\|_E \ \leq \ \|x\|_E \quad \Longrightarrow \quad \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} |f(x)| \ \leq \ \|x\|_E \ .$$

Andererseits folgt

- im Fall $x = 0_E$ aufgrund der Linearität $\forall f \in E' \colon f(0_E) = 0_{\mathbb{K}}$, also trivialerweise die Behauptung und
- im Fall $x \neq 0_E$ nach Satz 7.7 für $\beta = 1$ die Existenz eines $f_0 \in E'$ mit $\|f_0\| = 1$ und $|f_0(x)| = \|x\|_E$, also einerseits die Gleichheit und andererseits auch, dass das Supremum angenommen wird.

□

**Satz 7.15.**
*Sei $\big(E, \|.\|_E\big)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $F \leq E$ ein $\mathbb{K}$-linearer Unterraum, $x_0 \in E \setminus F$ sowie*

$$\delta \ := \ \inf_{x \in F} \|x - x_0\|_E \ > \ 0 \ . \tag{7.12}$$

*(Letzteres ist beispielsweise erfüllt, falls $F$ ein abgeschlossener Unterraum ist.) Dann gilt*

$$\exists f \in E' \colon \Big( f(x_0) = \delta \ \wedge \ \|f\|_{E'} = 1 \ \wedge \ \forall x \in F \colon f(x) = 0 \Big) \ . \tag{7.13}$$

**Beweis:** Betrachten wir die direkte Summe $H = \mathbb{K}x_0 \oplus F$, dann ist $H$ ein $\mathbb{K}$-linearer Unterraum von $E$, dessen Elemente als $\alpha x_0 + x$ mit eindeutigen $x \in F$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ geschrieben werden können. Betrachten wir nun die Abbildung

$$h\colon H \to \mathbb{K}\ , \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall x \in F\colon h(\alpha x_0 + x) := \alpha\delta\ .$$

Dann ist $h$ linear mit $h(x_0) = \delta$ und $\forall x \in F\colon h(x) = 0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}&\forall x \in F\ \forall \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\colon\\ &\quad \|\alpha x_0 + x\|_E \;=\; \left\|-\alpha\left(\frac{1}{\alpha}x - x_0\right)\right\|_E \;=\; |\alpha| \cdot \Big\|\underbrace{\frac{1}{\alpha}x}_{\in F} - x_0\Big\|_E \;\geq\; |\alpha|\delta \;=\; |h(\alpha x_0 + x)|\ ,\end{aligned}$$

also insgesamt

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall x \in F\colon |h(\alpha x_0 + x)| \leq \|\alpha x_0 + x\|_E\ , \tag{7.14}$$

so dass $h$ stetig mit $\|h\|_{H'} \leq 1$ ist. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, jedoch fest gewählt. Nach Definition des Infimums finden wir ein $x_\varepsilon \in F$ mit $0 < \delta \leq \|x_\varepsilon - x_0\|_E < \delta + \varepsilon$. Für

$$z_\varepsilon \;:=\; \frac{x_\varepsilon - x_0}{\|x_\varepsilon - x_0\|_E} \;=\; \underbrace{-\frac{1}{\|x_\varepsilon - x_0\|_E}}_{=\alpha \in \mathbb{K}} x_0 \;+\; \underbrace{\frac{1}{\|x_\varepsilon - x_0\|_E} x_\varepsilon}_{\in F}$$

gilt dann $z_\varepsilon \in H$ sowie $\|z_\varepsilon\|_E = 1$ und somit

$$1 \;\geq\; \|h\|_{H'} \;\geq\; |h(z_\varepsilon)| \;=\; \left|-\frac{1}{\|x_\varepsilon - x_0\|_E}\right|\delta \;=\; \frac{\delta}{\|x_\varepsilon - x_0\|_E} \;>\; \frac{\delta}{\delta + \varepsilon}\ .$$

Aufgrund der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ erhalten wir durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ dann $1 \;\geq\; \|h\|_{H'} \;\geq\; 1$, also $\|h\|_{H'} = 1$. Nach Korollar 7.6 (Satz von Hahn-Banach) existiert nun eine stetige und $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $f\colon E \to \mathbb{K}$ mit $f_{|_H} = h$ und $\|f\|_{E'} = \|h\|_{H'} = 1$. □

**Satz 7.16.** *Sei $\big(E, \|.\|_E\big)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $F \leq E$ ein $\mathbb{K}$-linearer Unterraum. Dann sind äquivalent:*

(a) *$F$ liegt dicht in $E$ (d.h., es gilt $\overline{F} = E$)*

(b) $\forall f \in E'\colon \Big(f_{|_F} = 0 \implies f = 0\Big)$

**Aufgaben:**

A 7.1.1 Eine Abbildung $p$ des Vektorraumes $E$ in $\mathbb{R}$ heißt ein **sublineares** Funktional, wenn es die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt:

(a) $\forall \alpha \geq 0\ \forall x \in E\colon p(\alpha x) = \alpha p(x)$; (b) $\forall x, y \in E\colon p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Beweisen Sie den **Fortsetzungssatz von Banach**:

Sei $E$ ein reeller Vektorraum, $p$ ein sublineares Funktional auf $E$ und $F$ ein linearer Unterraum von $E$. Genügt eine auf $F$ definierte Linearform $f$ der Abschätzung

$$\forall x \in F\colon f(x) \leq p(x), \tag{7.15}$$

so existiert auf $E$ eine Linearform $g$ mit

(a) $\forall x \in F\colon f(x) = g(x)$ (b) $\forall x \in E\colon g(x) \leq p(x)$

**Tipp:** 1. Teil des Beweises des Fortsetzungssatzes von Hahn-Banach.

.................................................................. (Konkrete Beispiele)

A 7.1.2 Sei $\ell^2$ der Raum aller Folgen $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ in $\mathbb{R}$, für die $\sum_{j=1}^{\infty} \xi^2$ endlich ist, mit dem üblichen Innenprodukt $\langle \xi, \chi \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \chi_j$. Wir fassen den Raum $\mathbb{P}$ der Polynome als Unterraum von $\ell^2$ auf, indem wir ein Polynom $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ mit der Folge $(a_0, \dots, a_n, 0, \dots) \in \ell^2$ identifizieren. Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ sei $A_x\colon \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ definiert durch $A_x(p) := p(x)$.

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $A_x$ stetig?

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $A_x$ zu einer stetigen Linearform auf $\ell^2$ fortsetzbar?

(c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $\xi \in \ell^2$, so dass $\forall p \in \mathbb{P}\colon \langle p, \xi \rangle = A_x(p)$?

**Exaktere Formulierung:**

Es sei $P := \{x \in \ell^2 \mid x \text{ ist finit}\}$ ein Teilraum von $\ell^2$. Durch $A_t(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x(n) t^n$, erhält man für festes $t \in \mathbb{R}$ ein lineares Funktional auf $P$.

(a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist $A_t$ stetig?

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ kann $A_t$ zu einer stetigen Linearform auf $\ell^2$ fortgesetzt werden?

(c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ lässt sich $A_t$ in der Form $A_t(x) = \langle x, \xi \rangle$ für ein geeignetes $\xi \in \ell^2$ darstellen?

A 7.1.3 Es sei

$$E \ := \ \left\{ f \in L^1[0,1] \mid \int_0^1 f \, d\lambda = 0 \right\}.$$

Offensichtlich ist $E$ ein linearer Unterraum von $L^1[0,1]$. Durch

$$F(f) := \int_0^{\frac{1}{2}} f\, d\lambda$$

ist ein stetiges lineares Funktional auf $E$ gegeben.
Bestimmen Sie eine Fortsetzung $G \in L^1[0,1]'$ mit $\|F\| = \|G\|$! Ist diese eindeutig?

A 7.1.4 Sei $X := \{x \in \ell^1 \mid \forall k \in \mathbb{N}\colon x(2k-1) = 0\}$. Lässt sich jedes stetige lineare Funktional auf $X$ eindeutig und normerhaltend zu einem stetigen linearen Funktional auf $\ell^1$ fortsetzen? Berechnen Sie gegebenenfalls alle derartigen Fortsetzungen!

............................................ (Anwendung des Darstellungssatzes von Riesz)

A 7.1.5 Sei $E$ ein Hilbertraum und $F \subset E$ ein abgeschlossener, linearer Unterraum.

(a) Sei $f \in F'$. Zeigen Sie, dass $E' \ni g := f \circ p$ die eindeutige Fortsetzung von $f$ mit $\|f\| = \|g\|$ ist. Hierbei bezeichnet $p\colon E \to F$ die orthogonale Projektion.

(b) Sei $0 \neq a \in E$ und $F := \{x \in E \mid \langle x, a\rangle = 0\}$. $f \in F'$ sei gegeben durch $f(x) := \langle x, b\rangle$, $b \in E$. Zeigen Sie, dass

$$\bar{f}(x) := \langle x, b\rangle - \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|^2}\langle x, a\rangle, \quad x \in E$$

die eindeutige normgleiche Fortsetzung von $f$ auf $E$ ist.

A 7.1.6 Sei

$$G := \left\{ f \in L^2[0,1] : \int_0^1 x f(x)\, dx = 0 \right\} \qquad \text{und } L \in G' \text{ durch} \qquad L(f) := \int_0^1 x^2 f(x)\, dx$$

definiert. Berechnen Sie eine stetige und lineare Fortsetzung gleicher Norm von $L$ auf $L^2[0,1]$. Ist diese eindeutig?

................................................ (Isometrische Einbettung des Biduals)

A 7.1.7 (a) Begründen Sie, warum die Abbildung $\Gamma\colon E \to E'', x \to \mathcal{F}_x$ mit $\forall f \in E'\colon \mathcal{F}_x(f) = f(x)$ aus Definition 5.30 linear und stetig ist.

(b) Zeigen Sie nun mit einem der Fortsetzungssätze von Hahn-Banach die Injektivität der Abbildung $\Gamma\colon E \to E'', x \to \mathcal{F}_x$ mit $\forall f \in E'\colon \mathcal{F}_x(f) = f(x)$ aus Definition 5.30.

(c) Zeigen Sie nun mit Hilfe von (a) und (b), dass $\Gamma$ sogar eine Isometrie ist, d.h., es gilt

$$\forall x \in E\colon \|x\|_E \;=\; \|\mathcal{F}_x\|_{E''}\ . \tag{7.16}$$

(d) Sei $E$ ein Banachraum und $(x_j)_{j\geq 1} \in E$ eine Folge. Zeigen Sie:
Gilt $x_j \to x \in E$ schwach, so ist die Folge $(\|x_j\|)_{j\geq 1}$ beschränkt. **Tipp:** (c) und Satz 6.10.

(e) Sei $E$ ein Banachraum und $x, x_j \in E$, $x', x'_j \in E'$ gegeben, so dass $x_j \to x$ schwach in $E$ und $x'_j \to x'$ stark in $E'$ (bei $j \to \infty$). Dann gilt

$$x'_j(x_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} x'(x)\ .$$

A 7.1.8 Sei $E$ ein normierter Raum, $x_0 \in E$ und $M \subset E$. Zeigen Sie

$$x_0 \in \operatorname{cl}\operatorname{span} M \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x' \in E' \text{ mit } x'_{|M} \equiv 0 \text{ gilt } x'(x_0) = 0.$$

## 7.2 Trennung konvexer Mengen

**Definition 7.17.** Sei $E$ ein $\mathbb{K}$-linearer Raum, $C \subset E$ nichtleer.

(a) $C$ heißt **ausgeglichen** $:\Longleftrightarrow \quad \forall x \in E\ \exists \alpha > 0\colon x \in \alpha C \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in E\ \exists \alpha > 0\colon \frac{1}{\alpha}x \in C$

(b) Zu jeder ausgeglichenen Menge $C$ heißt die Abbildung

$$p_C\colon E \to \mathbb{R}\ , \quad x \mapsto \inf\{\alpha > 0 \mid x \in \alpha C\} \tag{7.17}$$

das **Minkowski-Funktional** von $C$.

**Bemerkung 7.18.**

(a) Jede ausgeglichene Teilmenge von $E$ enthält das Nullelement $0_E$.

(b) Es gilt $p_C(0_E) = 0_{\mathbb{K}}$ sowie $\forall \lambda > 0\colon p_C(\lambda x) = \lambda p_C(x)$ (d.h., $p_C$ ist positiv homogen).

(c) Ist $C \subset E$ konvex, $\alpha, \beta \in \,]0, \infty[$, so gilt $\alpha C + \beta C \subseteq (\alpha + \beta)C$.

(d) Sei $C$ ausgeglichen und konvex. Dann gilt $\forall x, y \in E\colon p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$.

**Beweis:**

(a) Da $0 \in E$ und $C$ ausgeglichen, existiert ein $\alpha > 0$ mit $\dfrac{1}{\alpha}0 = 0 \in C$.

(b) Da $0 \in C$ gilt $\forall \alpha > 0\colon \dfrac{1}{\alpha}0 = 0 \in C$ und somit $p_C(0) = \inf\ ]0, \infty[\ = 0$.
Weiter gilt für $\lambda > 0$ wegen

$$\beta \in \{\alpha > 0 \mid \lambda x \in \alpha C\} \quad \Longleftrightarrow \quad \beta \in \left\{\alpha > 0 \mid x \in \frac{\alpha}{\lambda}C\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \beta \in \lambda\{\alpha > 0 \mid x \in \alpha C\}$$

auch

$$p_C(\lambda x) \;=\; \inf\{\alpha > 0 \mid \lambda x \in \alpha C\} \;=\; \lambda \inf\{\alpha > 0 \mid x \in \alpha C\} \;=\; \lambda p_C(x)\ .$$

(c) Seien $a, b \in C$ beliebig. Aufgrund der Konvexität von $C$ ist dann auch

$$c \;:=\; \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}a + \frac{\beta}{\alpha + \beta}b\right) \in C$$

und weiter $\alpha a + \beta b \;=\; (\alpha + \beta)c \in (\alpha + \beta)C$. Somit folgt $\alpha C + \beta C \subseteq (\alpha + \beta)C$.

(d) Seien $x, y \in E$ beliebig, fest. Sei $\delta > 0$ beliebig. Nach Definition von $p_C$ (also nach Definition des Infimums) finden wir $\alpha, \beta \in \,]0, \infty[$ mit

$$p_C(x) \;\leq\; \alpha < p_C(x) + \delta \qquad \text{und} \qquad p_C(y) \;\leq\; \beta < p_C(y) + \delta$$

und somit $x \in \alpha C$ sowie $y \in \beta C$. Nach der vorangegangenen Aussage erhalten wir nun

$$x + y \in (\alpha C + \beta C) \subset (\alpha + \beta)C\ ,$$

also $(\alpha + \beta) \in \{\gamma > 0 \mid (x + y) \in \gamma C\}$. Insbesondere folgt die Einschließung

$$p_C(x + y) \;\leq\; \alpha + \beta \;<\; p_C(x) + p_C(y) + 2\delta\ .$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, ergibt sich mit Grenzübergang $p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$.

□

Wir fassen zusammen und stellen weiter fest:

**Satz 7.19** (vgl. Lemma III.2.2 in [8]).

(a) *Ist $E$ ein $\mathbb{K}$-linearer Raum und $C \subset E$ ausgeglichen, so ist das Minkowski-Funktional $p_C$ positiv homogen mit $p_C(0) = 0$. Ist $C$ zusätzlich konvex, so ist $p$ subadditiv.*

(b) *Sei $\big(E, \|.\|_E\big)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und $C \subset E$ eine konvexe Nullumgebung in $\big(E, \|.\|_E\big)$. Dann ist $C$ ausgeglichen und es existiert ein $r > 0$ mit $B_r(0) \subset C$ und*

$$\forall x \in E\colon 0 \;\leq\; p_C(x) \;\leq\; \frac{1}{r}\|x\|_E \;. \tag{7.18}$$

*Falls $C$ offen in $\big(E, \|.\|_E\big)$ ist, gilt $C = p_C^{-1}([0,1[) := \{x \in E \mid p_C(x) < 1\}$.*

**Beweis:**

(a) folgt aus der vorangegangenen Bemerkung.

(b) (i) Da $C$ eine Nullumgebung ist, existiert ein $r > 0$ mit $B_r(0) \subset C$. Insbesondere gilt

$$\forall x \in E \setminus \{0\} \; \forall r' \in \,]0, r[\; : r' \cdot \frac{x}{\|x\|_E} \in B_r(0) \subset C \;.$$

Demnach folgt einerseits $\forall x \in E \; \exists \alpha > 0\colon \alpha x \in C$ (wegen $\alpha 0 = 0 \in C$), d.h., $C$ ist ausgeglichen, und andererseits für $x \neq 0$ und beliebiges $r' \in \,]0, r[$ sofort $x \in \dfrac{\|x\|_E}{r'} C$, also auch $p_C(x) \;\leq\; \dfrac{\|x\|_E}{r'}$, was auch für $x = 0$ erfüllt bleibt, d.h., insgesamt erhalten wir für beliebiges $x \in E$ somit

$$\forall r' \in \,]0, r[\; : p_C(x) \;\leq\; \frac{\|x\|_E}{r'} \qquad \Longrightarrow \qquad p_C(x) \;\leq\; \inf_{r' \in \,]0,r[} \frac{\|x\|_E}{r'} \;=\; \frac{\|x\|_E}{r} \;.$$

(ii) Sei nun $C$ offen.

- Für $x \in C$ beliebig existiert dann ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset C$, also gilt insbesondere für ein genügend kleines $\beta > 0$ auch

$$\begin{aligned} \|(1+\beta)x - x\|_E \;=\; \beta\|x\|_E \;<\; \varepsilon \;&\Longrightarrow\; (1+\beta)x \in B_\varepsilon(x) \subset C \\ &\Longrightarrow\; \frac{1}{1+\beta} \in \{\alpha > 0 \mid x \in \alpha C\} \\ &\Longrightarrow\; p_C(x) \;\leq\; \frac{1}{1+\beta} \;<\; 1 \\ &\Longrightarrow\; x \in p_C^{-1}([0,1[) \;. \end{aligned}$$

- Sei nun umgekehrt $x \in p_C^{-1}([0,1[)$. Dann existiert ein $\beta \in \{\alpha > 0 \mid x \in \alpha C\}$ mit $0 \leq p_C(x) \leq \beta < 1$. Also existiert wegen $x \in \beta C$ ein $b \in C$ mit $x = \beta b$. Da $C$ wie zuvor gezeigt ausgeglichen ist, also nach vorangegangener Bemerkung auch $0 \in C$ gelten muss, folgt mit der Konvexität von $C$ auch

$$x \;=\; \beta b \;=\; \big(\beta b + (1-\beta)0\big) \in C \;.$$

□

**Satz 7.20** (vgl. Lemma III.2.3 in [8]).
*Sei $(E, \|.\|_E)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $C \subset E$ konvex, offen, nichtleer sowie $x_0 \in E \setminus C$. Dann existiert ein $f \in E'$ mit $\forall x \in C\colon \operatorname{Re} f(x) < \operatorname{Re} f(x_0) =: \alpha$, also insbesondere $f \not\equiv 0$.*

**Beweis:**

(a) $\boxed{\text{Fall } \mathbb{K} = \mathbb{R}\text{:}}$

- Angenommen, es sei $0 \in C$. Dann ist $C$ als offene nichtleere Menge eine Nullumgebung, welche nach Satz 7.19 (b) ausgeglichen ist (vgl. Definition 7.17 (a)). Insbesondere ist dann das Minkowski-Funktional $p_C\colon E \to \mathbb{R}$ wohldefiniert (vgl. Definition 7.17 (b)) Wegen $x_0 \in E \setminus C$, also $x_0 \notin C$ folgt dann $x_0 \neq 0$, so dass $F = x_0\mathbb{R}$ in der Tat ein eindimensionaler $\mathbb{R}$-linearer Unterraum von $E$ ist. Definieren wir nun

$$g\colon F \to \mathbb{R} \qquad \text{durch} \qquad g(tx_0) = t,\ t \in \mathbb{R}\ ,$$

so ist einerseits $g$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung und wegen

$$x_0 \notin C \overset{\text{Satz7.19(b)}}{=} \{x \in E \mid p_C(x) < 1\}$$

andererseits $p_C(x_0) \geq 1$, also

$$g(x_0) = 1 \leq p_C(x_0)$$

sowie – aufgrund der Nichtnegativität von Minkowski-Funktionalen – auch

$$g(-x_0) \;=\; -\,g(x_0) \;=\; -\,1 \;<\; 0 \;\leq\; p_C(-x_0)\ .$$

Mit der positiven Homogenität von Minkowski-Funktionalen (vgl. Satz 7.19 (a)) ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0\colon g(tx_0) &= tg(x_0) \;\leq\; tp_C(x_0) \;\leq\; p_C(tx_0)\ , \\ \forall t \geq 0\colon g(tx_0) &= g((-t)(-x_0)) \;=\; (-t)g(-x_0) \;\leq\; (-t)p_C(-x_0) \;=\; p_C((-t)(-x_0)) \\ &= p_C(tx_0)\ . \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir somit, dass $\forall x \in x_0\mathbb{R}\colon g(x) \;\leq\; p_C(x)$ gilt. Mit dem Satz von Hahn-Banach (Satz 7.3) folgt nun die Existenz einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $f\colon E \to \mathbb{R}$ mit $f_{|F} = g$ und $\forall x \in E\colon f(x) \leq p_C(x)$.
Zusammen mit der Ungleichung (7.18) aus Satz 7.19 (b) folgt weiter

$$\exists r > 0\ \forall x \in E\colon f(x) \;\leq\; \frac{1}{r}\|x\|_E\ .$$

Mit der Linearität von $f$ erhalten wir ebenfalls

$$\forall x \in E\colon -f(x) \;=\; f(-x) \;\leq\; \frac{1}{r}\|-x\|_E \;=\; \frac{1}{r}\|x\|_E\ ,$$

so dass sich nun insgesamt $\forall x \in E\colon |f(x)| \;\leq\; \frac{1}{r}\|x\|_E$, also auch die Stetigkeit von $f$ und daher $f \in E'$ ergibt. Wegen $f(x_0) = g(x_0) = 1$ sowie der nach Satz 7.19 (b) gültigen Identität $C = \{x \in E \mid p_C(x) < 1\}$ erhalten wir nun wie behauptet

$$\forall x \in C\colon f(x) \;\leq\; p_C(x) \;<\; 1 \;=\; f(x_0)\ .$$

- Angenommen, es sei $0 \notin C$. Da $C \neq \emptyset$ konvex, existiert ein $y_0 \in C$, so dass dann $0 \in \tilde{C} := C - y_0$ und $\tilde{C}$ konvex, offen, nichtleer ist. Mit Punkt 1 folgt dann mit $\tilde{x}_0 := x_0 - y_0 \in E \setminus \tilde{C}$ die Existenz eines $f \in E'$ mit

$$\forall z \in \tilde{C} \colon f(z) < f(\tilde{x}_0) \quad \overset{z=x-y_0, x\in C}{\Longleftrightarrow} \quad \forall x \in C \colon f(x - y_0) \ < \ f(x_0 - y_0) \ ,$$

so dass mit der Linearität von $f$ und den Anordnungsaxiomen in $\mathbb{R}$ die Behauptung im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt.

(b) $\boxed{\text{Fall } \mathbb{K} = \mathbb{C}\text{:}}$ Übungsaufgabe.

□

Mit dem vorangegangenen Satz zeigen wir nun sofort auch

**Satz 7.21** (Hahn-Banach, 1. geometrische Fassung – vgl. Lemma III.2.4 in [8])**.**
*Sei* $\big(E, \|.\|_E\big)$ *ein normierter* $\mathbb{K}$*-Vektorraum,* $A, B \subset E$ *nichtleer, konvex mit* $A \cap B = \emptyset$ *sowie* $A$ *offen. Dann existiert ein* $f \in E'$ *mit*

$$\forall x \in A \ \forall y \in B \colon \ \operatorname{Re} f(x) \ < \ \operatorname{Re} f(y) \ . \tag{7.19}$$

**Bemerkung 7.22.**

(a) Da die Teilmengen $A$ und $B$ in Satz 7.21 nichtleer sind, folgt sofort, dass $f \not\equiv 0$ gelten muss.

(b) Unter den Voraussetzungen des Satzes 7.21 gilt insbesondere

$$\exists \alpha \in R \colon \ \sup_{x\in A} \operatorname{Re} f(x) \ \leq \ \alpha \ \leq \ \inf_{y \in B} \operatorname{Re} f(y) \ . \tag{7.20}$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist somit die Gerade bzw. Hyperebene $E_\alpha := \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$ eine Trennlinie zwischen den beiden Mengen $A$ und $B$.

**Satz 7.23** (Hahn-Banach, 2. geometrische Fassung)**.**
*Sei* $\big(E, \|.\|_E\big)$ *ein normierter* $\mathbb{K}$*-Vektorraum,* $A, B \subset E$ *nichtleer, konvex mit* $A \cap B = \emptyset$ *sowie* $A$ *abgeschlossen und* $B$ *kompakt. Dann existieren ein* $\varepsilon > 0$ *und ein* $f \in E'$ *mit* $f \not\equiv 0$ *und*

$$\forall x \in A \ \forall y \in B \colon \ \operatorname{Re} f(x) \ + \ \varepsilon \underbrace{\|f\|_{E'}}_{>0} \ \leq \ \operatorname{Re} f(y) \ - \ \varepsilon \|f\|_{E'} \ .$$

*Es gilt also*

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \colon \ \sup_{x \in A} \operatorname{Re} f(x) \ < \ \alpha \ < \ \inf_{y\in B} \operatorname{Re} f(y) \ .$$

# Kapitel 8

# Offene Abbildungen und abgeschlossene Graphen

## 8.1 Der Satz von Banach-Schauder

**Definition 8.1.** Seien $(E, d_E)$ und $(F, d_F)$ metrische Räume.

(a) (Version aus [5])
Eine Abbildung $f\colon E \to F$ heißt **offen**, wenn für alle offenen Teilmengen $A \subset E$ das Bild $f(A)$ offen in $(f(E), d_F)$ ist, also falls

$$\forall A \subset E\colon \Big(A \text{ offen in } (E, d_E) \quad \Longrightarrow \quad f(A) \text{ offen in } (f(E), d_F)\Big) \tag{8.1}$$

(b) (Version aus [8])
Eine Abbildung $f\colon E \to F$ heißt **offen**, wenn für alle offenen Teilmengen $A \subset E$ das Bild $f(A)$ offen in $(F, d_F)$ ist, also falls

$$\forall A \subset E\colon \Big(A \text{ offen in } (E, d_E) \quad \Longrightarrow \quad f(A) \text{ offen in } (F, d_F)\Big) \tag{8.2}$$

Offenbar impliziert Version (b) die Version (a) nach der Definition der Relativtopologie. Im Fall surjektiver Abbildungen stimmen beide Versionen überein.

**Lemma 8.2.**
*Sei $(E, \|.\|_E)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, $M, N \subset E$ sowie $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gelten:*

(a) $\overline{M} + \overline{N} \subset \overline{M + N}$, *wobei* $M + N \ := \ \{x \in E \mid \exists m \in M \ \exists n \in N\colon x = m + n\}$ *ist,*

(b) $\alpha\overline{M} \ = \ \overline{\alpha M}$,

(c) $\overline{M} - \overline{N} \subset \overline{M - N}$,

(d) *Ist $M$ offen, $x \in E$, $\alpha \neq 0$, dann ist auch $x + \alpha M$ offen.*

**Satz 8.3** (Banach-Schauder, Prinzip der offenen Abbildung)**.**
*Seien $(E, \|.\|_E)$ und $(F, \|.\|_F)$ Banachräume über $\mathbb{K}$ sowie $A \in \mathcal{L}(E, F)$ surjektiv.*
*Dann ist $A$ offen.*[1]

[1] d.h., es gilt $\forall G \subset E$ offen : $A(G)$ offen in $(F, \|.\|_F)$.

Der Satz von Banach-Schauder impliziert nun sofort die folgende Aussage.

**Satz 8.4** (Satz von der stetigen Inversen)**.**

*Seien $(E, \|.\|_E)$ und $(F, \|.\|_F)$ Banachräume über $\mathbb{K}$ sowie $A \in \mathcal{L}(E, F)$ bijektiv. Dann ist $A$ schon ein Homöomorphismus, d.h., $A^{-1}\colon F \to E$ ist stetig.*

**Beweis:** Aufgrund der Bijektivität existiert eine Umkehrabbildung $A^{-1}\colon F \to E$. Um deren Stetigkeit zu überprüfen verwenden wir die zur Stetigkeit äquivalente Charakterisierung, dass Urbilder offener Mengen wieder offen sind. Da nun einerseits nach dem Satz von Banach-Schauder (Satz 8.3) aufgrund der Surjektivität von $A \in \mathcal{L}(E, F)$ für jedes offene $U \subset E$ auch $A(U)$ offen in $F$ ist und andererseits $A(U)$ aufgrund der Bijektivität genau mit dem Urbild von $U$ unter $A^{-1}$ übereinstimmt, folgt nun auch die noch fehlende Stetigkeit von $A^{-1}$. $\square$

## 8.2 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

**Bemerkung 8.5.**

(a) Sind $(E, \|.\|_E)$ und $(F, \|.\|_F)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$, dann ist durch

$$\forall (x, y) \in E \times F\colon \|(x, y)\|_{E\times F} \;:=\; \|x\|_E \;+\; \|y\|_F \tag{8.3}$$

eine Norm $\|.\|_{E\times F}\colon E \times F \to \mathbb{R}$ gegeben.

(b) Eine zu (8.3) äquivalente Norm ist etwa

$$\|(x, y)\|' \;:=\; \sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2}\ . \tag{8.4}$$

(c) Sind $(E, \|.\|_E)$ und $(F, \|.\|_F)$ Banachräume, so wird $(E \times F, \|.\|_{E\times F})$ ebenfalls zu einem Banach-Raum.

(d) Die Konvergenz in $(E \times F, \|.\|_{E\times F})$ ist äquivalent zur komponentenweisen Konvergenz, denn wir haben die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
(x_n, y_n) \xrightarrow{E\times F} (x, y) \quad &\Longleftrightarrow \quad \|(x_n, y_n) - (x, y)\|_{E\times F} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \|(x_n - x, y_n - y)\|_{E\times F} \;=\; \|x_n - x\|_E \;+\; \|y_n - y\|_F \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \|x_n - x\|_E \xrightarrow{n\to\infty} 0 \;\wedge\; \|y_n - y\|_F \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x_n \xrightarrow{E} x \;\wedge\; y_n \xrightarrow{F} y\ .
\end{aligned}$$

**Definition 8.6** (Graph einer Abbildung)**.**

Seien $(E, \|.\|_E)$ und $(F, \|.\|_F)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$ sowie $A\colon E \to F$ eine Abbildung. Dann nennen wir die Menge

$$\operatorname{Graph} A \;:=\; \{(x, Ax) \mid x \in E\} \subset E \times F \tag{8.5}$$

den **Graphen der Abbildung** $A$.

**Bemerkung 8.7.**

(a) Ist $A\colon E \to F$ stetig, dann ist $G_A :=$ Graph $A$ abgeschlossen in $(E \times F, \|.\|_{E\times F})$, d.h.,

$$\Big(\forall n \in \mathbb{N}\colon (x_n, y_n) \in G_A \ \wedge\ (x_n, y_n) \overset{E\times F}{\longrightarrow} (x,y)\Big) \Longrightarrow (x,y) \in G_A \ ,$$

denn aufgrund der Stetigkeit folgt $(x_n, Ax_n) \to (x, Ax) \in G_A$.

(b) Betrachten wir mit $I = [a,b]$ die linearen Räume $E = C^1(I)$ und $F = C^0(I)$ versehen mit den Normen $\|x\|_E = \sup\limits_{t\in I} |x(t)|$ und $\|y\|_F = \sup\limits_{t\in I} |y(t)|$. Dann gelten:

- Es ist $(F, \|.\|_F)$ ein Banachraum, jedoch $(E, \|.\|_E)$ **nicht**.
- Die durch $Ax := x'$ definierte $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $A\colon (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ besitzt einen abgeschlossenen Graphen Graph $A$ entsprechend (8.5), denn:
  - Gilt $(x_n, y_n) \in G_A$ für jedes $n$ und $(x_n, y_n) \overset{E\times F}{\longrightarrow} (x,y)$, so folgt die auf $I$ gleichmäßige Konvergenz von $x_n \to x$ sowie die auf $I$ gleichmäßige Konvergenz von $x_n' \to y$, so dass mit einem Satz aus der Analysis 1 schon $y = x'$ folgt. Daher ist Graph $A$ aus (8.5) abgeschlossen.
- Die durch $Ax := x'$ definierte $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $A\colon (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ ist unstetig, denn:
  - Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche durch $x_n(t) := \dfrac{1}{n}\sin(nt)$ gegeben ist, konvergiert wegen $\|x_n\|_E \le \frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$ in $(E, \|.\|_E)$ gegen die konstante Nullfunktion, während die durch $(Ax_n)(t) = \cos(nt)$ gegebene Folge $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noch nicht einmal punktweise (also auch nicht in $(F, \|.\|_F)$) gegen die Nullfunktion konvergiert.

Betrachten wir nun auf $E = C^1(I)$ die alternative Norm

$$\|x\|' \ := \ \|x\|_E + \|Ax\|_F \ , \tag{8.6}$$

welche auch **Graphennorm** genannt wird, so folgt sofort, dass

$$\forall x \in E\colon \|Ax\|_F \ \le \ \|x\|'$$

gilt, also aufgrund der Linearität von $A$ die Stetigkeit von $A\colon (E, \|.\|') \to (F, \|.\|_F)$ folgt.

**Satz 8.8** (Satz vom abgeschlossenen Graphen)**.**

*Seien $(E, \|.\|_E)$ und $(F, \|.\|_F)$ Banachräume über $\mathbb{K}$ sowie $A\colon E \to F$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung. Weiter sei der Graph* (8.5) *abgeschlossen in $(E \times F, \|.\|_{E\times F})$. Dann ist $A$ stetig.*

**Satz 8.9.**

*Seien $(E, \|.\|_E)$ ein Banachraum sowie $E_1$, $E_2$ abgeschlossene lineare Unterräume von $E$, derart, dass $E = E_1 \oplus E_2$, d.h.,*

$$\forall x \in E \ \exists! x_1 \in E_1 \ \exists! x_2 \in E_2 \text{ mit } x = x_1 + x_2 \ .$$

*Dann sind die Projektionen $P_1\colon E \to E_1$, $x \mapsto x_1$ und $P_2\colon E \to E_2$, $x \mapsto x_2$ stetig.*

**Definition 8.10** (symmetrische Abbildung)**.**
Sei $\left(E, \langle .,. \rangle_E\right)$ ein Innenproduktraum über $\mathbb{K}$. Dann heißt

(a) eine Abbildung $A\colon E \to E$ **symmetrisch** bezüglich $\langle .,. \rangle_E$, falls gilt:

$$\forall x, y \in E\colon \langle Ax, y\rangle_E = \langle x, Ay\rangle_E \ . \tag{8.7}$$

(b) im Fall $D_A \subset E$ eine Abbildung $A\colon D_A \to E$ **symmetrisch**, falls gilt:

$$\forall x, y \in D_A\colon \langle Ax, y\rangle_E = \langle x, Ay\rangle_E \ . \tag{8.8}$$

Wir schreiben $A \geq 0$, falls $\forall x \in D_A\colon \langle Ax, x\rangle \geq 0$ erfüllt ist.

**Satz 8.11.**
*Sei* $\left(E, \langle .,. \rangle_E\right)$ *ein Innenproduktraum über* $\mathbb{K}$. *Weiter sei* $A\colon E \to E$ *linear und symmetrisch. Dann ist* Graph $A$ *abgeschlossen.*

**Korollar 8.12** (Satz von Hellinger-Töplitz)**.**
*Sei* $\left(E, \langle .,. \rangle_E\right)$ *ein Hilbertraum über* $\mathbb{K}$. *Weiter sei* $A\colon E \to E$ *linear und symmetrisch. Dann ist* $A$ *stetig.*

**Beweis:** Nach Satz 8.11 ist Graph $A$ abgeschlossen. Da $\left(E, \langle .,. \rangle_E\right)$ als Hilbertraum insbesondere vollständig, also mit der vom Skalarprodukt induzierten Norm zu einem Banachraum wird, folgt nun mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen (Satz 8.8) sofort auch die Stetigkeit von $A$. □

**Aufgaben:**

A 8.2.1 Zeigen Sie: Seien $E$, $F$ normierte Räume. Alle stetigen Operatoren von $E$ nach $F$ mit endlich-dimensionalem Bild sind offen. Insbesondere sind also alle linearen Funktionale auf $E$ offen.

A 8.2.2 Seien $E$, $F$ Banachräume, $D$ ein linearer Unterraum von $E$ und $A\colon D \to F$ eine abgeschlossene, bijektive, lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $A^{-1}$ stetig ist.

A 8.2.3 $E, F$ seien normierte Räume, $D \subset E$ ein linearer Unterraum und $A\colon D \to F$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Wenn $A$ stetig und $D$ abgeschlossen ist, dann ist $A$ abgeschlossen.

(b) Wenn $A$ stetig und abgeschlossen und $F$ vollständig ist, dann ist $D$ abgeschlossen.

(c) Sei $D$ nicht abgeschlossen, $E = F$ und $A = \mathrm{Id}_E$. $A$ ist stetig aber nicht abgeschlossen.

(d) Wenn $A$ abgeschlossen und injektiv ist, dann ist $A^{-1}$ ebenfalls abgeschlossen.

A 8.2.4 $E_1, E_2, F$ seien Banachräume und für $k \in \{1, 2\}$ sei $A_k\colon E_k \to F$ stetig und linear. Ferner existiere zu jedem $x \in E_1$ genau ein $y \in E_2$ mit $A_1 x = A_2 y$. Zeigen Sie, dass die durch $Ax := y$ definierte Abbildung $A\colon E_1 \to E_2$ linear und stetig ist.

# Kapitel 9

# Spektralsatz für kompakte symmetrische Operatoren – in Bearbeitung

**Aufgaben:**

A 9.0.1 Sei $E$ ein Hilbertraum, $\mu_n$ eine Folge reeller Zahlen, die entweder endlich ist, oder gegen 0 strebt, und $\{u_1, u_2, \dots\}$ ein Orthonormalsystem. Dann ist $A\colon E \to E$ definiert durch

$$Ax \; := \; \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n (x|u_n) u_n \tag{9.1}$$

ein symmetrischer, kompakter Operator.

A 9.0.2 Wir definieren $T\colon \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$ durch

$$Tx := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k+1} e_{k+1} \ , \tag{9.2}$$

wobei die $e_k$ die kanonischen Einheitsvektoren sind. Zeigen Sie, dass $T$ kompakt ist, aber keine Eigenwerte besitzt.

A 9.0.3 Der durch $T_z(x)(n) := z(n) \cdot x(n)$ definierte Operator $T_z\colon \ell^\infty \to \ell^\infty$ für ein $z \in \ell^\infty$ ist genau dann kompakt, wenn $z \in c_0 = \left\{ x \in \ell^\infty \mid \lim_{n\to\infty} x(n) = 0 \right\}$ gilt.

A 9.0.4 Sei $0 \le \alpha < \beta \le 1$, $[a, b]$ ein nichtleeres Intervall und

$$\delta(\gamma, f) := \sup_{x,y \in [a,b]\ x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\gamma},$$

wobei $\gamma \in [0, 1]$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Es sei

$$C^{0,\gamma} := \{ f \in C([a, b]) \mid \delta(\gamma, f) < \infty \}$$

versehen mit der Norm (ohne Beweis)

$$\|f\|_{0,\gamma} := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| + \delta(\gamma, f).$$

Zeigen Sie, dass die Inklusion $f \mapsto f$, $C^{0,\beta} \to C^{0,\alpha}$, kompakt ist.
*Hinweis:* Für $\alpha = 0$ den Satz von Arzela-Ascoli anwenden und anschließend für $\alpha > 0$ die $C^{0,\alpha}$-Norm durch $C^{0,0}$ und $C^{0,\beta}$ ausdrücken.

no sol in 2015: 1.4,1.5,1.6,1.7,3.1,3.3,4.3

no sol in 2014: 1.4,1.5,1.6,1.7,4.1,4.5

# Kapitel 10

# Prüfungsvorbereitung

## 10.1 Stetige lineare Abbildungen

**Begriffe**:

- $\mathbb{K}$-linear, beschränkt
- Äquivalenz von Stetigkeit und Beschränktheit
- Operatornorm, Submultiplikativität der Operatornorm
- $F$ Banach $\Longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ Banach
- abgeschlossene Teilmenge, abgeschlossener Operator/Graph

**Beispiele:**

- $A\colon C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^b x(t)dt$
- $A\colon c \mapsto \mathbb{K}$, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$
- $A\colon (C^1([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty) \to (C([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$, $x \mapsto x'$ ist unstetig ( $x_n(t) = \frac{1}{n}\sin(n(t-a))$)
- $A\colon (C^1([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_{C^1}) \to (C([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$, $x \mapsto x'$ ist stetig

A 10.1.1 Was ist ein linearer Operator?

A 10.1.2 Wann heißt ein linearer Operator stetig? Wann heißt ein linearer Operator beschränkt?

A 10.1.3 Wann ist ein linearer Operator stetig?

A 10.1.4 Was verstehen wir unter der Operatornorm? Welche Eigenschaft(en) hat diese ?

A 10.1.5 Unter welcher Bedingung ist $\mathcal{L}(E, F)$ vollständig?

A 10.1.6 Zeigen Sie die Stetigkeit des Integraloperators $Af := \displaystyle\int_a^b f(x)dx$!
Von wo nach wo bildet er üblicherweise ab? Berechnen Sie seine Norm!

A 10.1.7 Unter welcher Bedingung wird der Differentialoperator $B\colon f \mapsto f'$ stetig?
Von wo nach wo bildet er üblicherweise ab?
Welche Normen betrachten wir üblicherweise?
Welche Norm(en) besitzen $Bf_n$ für die Funktionenfolge $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n(x-a))$ ?

A 10.1.8 Wie sehen Fredholmsche Integraloperatoren aus?

## 10.2 Eigenschaften normierter Räume

A 10.2.1 Was besagt der Satz von Bolzano-Weierstraß?
Ist dieser auch in endlich-dimensionalen normierten Räumen gültig?

A 10.2.2 Welche Eigenschaften haben zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ ?

................................................... (Rieszsches Lemma und Anwendungen)

A 10.2.3 Was besagt das Rieszsche Lemma?

A 10.2.4 Gilt der Satz von Bolzano-Weierstraß in unendlichdimensionalen Räumen?

A 10.2.5 Gilt: $\dim V = \infty \quad \Longrightarrow \quad \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon \big(\forall n, m \in \mathbb{N}\colon \|x_n\| = 1 \wedge \big[n \neq m \Longrightarrow \|x_n - x_m\| \geq \tfrac{1}{2}\big]\big)$?
Warum?

## 10.3 Hilberträume – Darstellungssatz von Fréchet-Riesz

A 10.3.1 Wir ist ein Skalar- oder Innenprodukt definiert (5 definierende Eigenschaften)?
Leiten Sie die Additivität in der zweiten Komponente her? Was gilt noch?
Zeigen Sie: $\forall \alpha \in \mathbb{K} \forall x, y \in E\colon \langle x, \alpha y\rangle \;=\; \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$?

A 10.3.2 Was unterscheidet eine Bilinearform von einem Skalarprodukt?

A 10.3.3 Wie lautet die Cauchy-Schwarz-Ungleichung? Wann gilt Gleichheit?

A 10.3.4 Warum ist ein Innenproduktraum ein normierter Raum?
Warum ist ein Hilbertraum ein Banachraum?

A 10.3.5 Welche Eigenschaften besitzt das orthogonale Komplement?

A 10.3.6 Erläutern Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren!

A 10.3.7 Was verstehen wir unter der Gaußschen Approximationsaufgabe?

A 10.3.8 Was verstehen wir unter einer orthogonalen Projektion?

A 10.3.9 Wie lautet die allgemeine Approximationsaufgabe? Wann ist sie eindeutig lösbar?

A 10.3.10 Wie lautet der Satz über die Orthogonalzerlegung?

A 10.3.11 Wie ist der Dualraum definiert ?

A 10.3.12 Formulieren Sie den Darstellungssatz von Fréchet-Riesz!

A 10.3.13 Geben Sie für einen Hilbertraum $\big(E, \langle .,. \rangle_E\big)$ eine Isometrie zwischen $E$ und $E'$ an.

A 10.3.14 Beweisen Sie den Darstellungssatz von Fréchet-Riesz!

A 10.3.15 Geben Sie Eigenschaften an eine Abbildung $f$ an, so dass $F = \ker f$ abgeschlossen ist!

A 10.3.16 Gilt der Darstellungssatz von Fréchet-Riesz auch in unvollständigen Räumen ?

## 10.4 Konsequenzen der Vollständigkeit

................................................................ (Satz von Baire)

A 10.4.1 Formulieren Sie den Baireschen Kategoriensatz.

A 10.4.2 Beweisen Sie den Baireschen Kategoriensatz.

A 10.4.3 Zeigen Sie mittels Baireschem Kategoriensatz, dass sich $A := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nicht als

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \tag{10.1}$$

mit

$$\forall k \in \mathbb{N} \colon A_k \text{ abgeschlossen}$$

schreiben lässt.

A 10.4.4 Zeigen Sie mittels Baireschem Kategoriensatz, dass ein unendlichdimensionaler Banachraum keine abzählbare Basis besitzen kann.

............................(Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit/Banach-Steinhaus)

A 10.4.5 Wie lautet der Satz von Osgood?

A 10.4.6 Wie lautet das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit?

A 10.4.7 Wie lautet der Satz von Banach-Steinhaus?

.......................................................... (Schwache Konvergenz)

A 10.4.8 Was verstehen wir unter schwacher Konvergenz?

A 10.4.9 Welche Beziehung besteht zwischen schwacher und starker Konvergenz?

A 10.4.10 Geben Sie eine Folge in einem unendlichdimensionalen Hilbertraum an, die schwach, aber nicht stark konvergent ist!
**Tipp:**
Wie lauten die Besselsche Ungleichung und das notwendige Konvergenzkriterium für Reihen?

A 10.4.11 Welche schwächere Aussage haben wir in Hilberträumen anstelle des Satzes von Bolzano-Weierstraß immerhin noch zur Verfügung?

## 10.5 Fortsetzungssätze

A 10.5.1 Wie lautet einer der Fortsetzungssätze von Hahn-Banach ?

A 10.5.2 Geben Sie eine Beweisskizze an.

A 10.5.3 Ist die Fortsetzung immer eindeutig?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (Trennung konvexer Mengen)

A 10.5.4 Was ist ein Minkowski-Funktional?

A 10.5.5 Wie lautet der Trennungssatz von Hahn-Banach ?

## 10.6 Prinzip von der offenen Abbildung

A 10.6.1 Formulieren Sie das Prinzip von der offenen Abbildung.

A 10.6.2 Geben Sie den Satz von der stetigen Inversen an und beweisen Sie ihn.

# Fachwortverzeichnis

# Literaturverzeichnis


[1] H. Bauer. *Maß- und Integrationstheorie*. 2. Auflage, de Gruyter, Berlin, 1992.

[2] H. Bauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 5. Auflage, de Gruyter, Berlin, 2002.

[3] N. Bourbaki *Intégration.* Chapitres 1 à 4. (Réimpression inchangée de l'édition de 1965 ed.) Springer, Berlin, 2007.

[4] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. 2. Auflage, Springer, Berlin, 1999.

[5] H. Heuser. *Funktionalanalysis*. 3. Auflage, Teubner, Stuttgart, 1992.

[6] Edwin Hewitt, Karl Stromberg. *Real and Abstract Analysis*. Springer, Berlin, 1965.

[7] D. Werner. *Einführung in die höhere Analysis*. 2. korrigierte Auflage, Springer, 2009.

[8] D. Werner. *Funktionalanalysis*. 6. korrigierte Auflage, Springer, Berlin, 2007.