

**Übungsblatt 40 zur Vorlesung
„Mathematik III für den Studiengang Maschinenbau“**

Aufgabe 40.1

Gegeben sei die Fläche F mit der Parametrisierung

$$\vec{\Phi}(u, v) = \begin{pmatrix} u + v \\ u \cdot v \\ u^2 + 2uv \end{pmatrix} \quad \text{über} \quad \bar{D} := \{0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 + u\}.$$

Zeigen Sie, dass der Punkt $P_0 := (1, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})^T$ zu dieser Fläche gehört, und ermitteln Sie einen Normalenvektor und die Tangentialebene in P_0 an F .

Aufgabe 40.2

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks

$$0 \leq x \leq 1, \quad -x \leq y \leq x, \quad z = \frac{2}{3} \sqrt{2}(x + y)^{\frac{3}{2}}.$$

Aufgabe 40.3

F sei ein Flächenstück mit der Parameterdarstellung $\vec{x} = \Phi(u, v) = (2u, v, u^2 + \frac{1}{2})^T$ für $0 \leq u, v \leq 1$. Weiterhin seien das Skalarfeld $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 \sqrt{2x_3 - \frac{x_1^2}{4}}$ und das Vektorfeld $\vec{g}(x_1, x_2, x_3) = (15x_1x_3, 7x_2^2, 6x_1 + 12x_2)^T$ gegeben. Berechnen Sie

$$(a) \quad \iint_F f(\vec{x}) \, d\sigma, \quad (b) \quad \iint_F \vec{g}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma}.$$

Aufgabe 40.4

Berechnen Sie jeweils $\operatorname{div} \vec{f}$ und $\operatorname{rot} \vec{f}$ für die folgenden Vektorfelder

$$(a) \quad \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + \sin x_2 \\ x_1 \cos x_2 + e^{x_2} \\ -\sin x_3 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_2 - 4x_1x_3 \\ x_3 e^{x_1} \\ \cos x_2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 40.5

$B = \{(x, y, z)^T, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \subset \mathbb{R}^3$ sei die Kugel mit dem Radius $R > 0$ und $\vec{f}(\vec{x}) = (x, y, z)^T$ ein Vektorfeld. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\iint_{\partial B} \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma}$$

(a) direkt und

(b) mit Hilfe des GAUßschen Integralsatzes $\iint_{\partial B} \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_B \operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) \, dx dy dz$.

Hinweis: Führen Sie Kugelkoordinaten ein.

Abgabetermin: 5. Kalenderwoche

Alle Übungsaufgaben sind verfügbar unter:

http://www.math.uni-rostock.de/~mayer/Maschinenbau/MB3_WS2006_07/