Analysis II **Sommersemester 2016, Universität Rostock**
Serie 0 **Abgabetermin:** spätestens 08.04.2016, 09:15 Uhr
Prof. Dr. K. P. Rybakowski Dr. K. Ihsberner

Aufgabe 0.1: (1+3+4 P)

(a) Gegeben sei ein beliebiger Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Zeigen Sie die Eindeutigkeit der neutralen Elemente.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

(i) $x < x^2$, (ii) $\frac{10}{x} - 3 < \frac{4}{x} + 1$, (iii) $3x^2 + 6x - 8 > 1$.

(c) Lösen Sie über dem Körper der reellen Zahlen die folgenden Ungleichungen und skizzieren Sie die Lage der jeweiligen Lösungsmenge auf der x-Achse:

(i) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x \leq x - \frac{7}{6}$ (ii) $\frac{5}{2}(x-3) \leq (x-3)$ (iii) $|x^2 - 4| - |x+2|(x^2 + x - 6) > 0$

Aufgabe 0.2: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Aussage (3 P)

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \left(n \geq 2 \implies \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \right)$$

Aufgabe 0.3: (2+2+4+4+3 P)

(a) Zeigen Sie, dass der Grenzwert einer Folge eindeutig ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede konvergente Folge auch eine Cauchy-Folge ist.

(c) Beweisen Sie, dass für jeden Startwert $0 < a_0 < 2$ die durch $a_{n+1} := \sqrt{a_n + 2}$ rekursiv definierte Folge (a_n) konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

(d) Untersuchen Sie die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{(-1)^k}{k}\right)$ auf Konvergenz.

(e) Zeigen Sie: Gilt $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ und konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut, dann konvergiert auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut.

Aufgabe 0.4: (2+2+2+3+3 P)

(a) Beweisen Sie den Zwischenwertsatz für eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ unter Verwendung des Nullstellensatzes.

(b) Gibt es eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche nicht stetig ist? (Beweis !)

(c) Gibt es eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche nicht differenzierbar ist? (Beweis !)

(d) Untersuchen Sie die folgende Funktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Punkt $a = 1$:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1} \, , & \text{falls } 0 < x < 1, \\[2mm] \dfrac{3-x}{4} \, , & \text{falls } x \geq 1 \, . \end{cases}$$

(e) Sei $f\colon \;]a,b[\to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

Zu vorgegebenen Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \;]a,b[$ existiert ein $\xi \in \;]a,b[$ mit $nf(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$.

Aufgabe 0.5: Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 = 16\mathrm{i}$. (3 P)

Aufgabe 0.6: (2+2+4+3+3+5 P)

(a) Beweisen Sie die Produktregel für die Ableitung mit Hilfe der Definition.

(b) Beweisen Sie: Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem offenen Intervall $]a,b[$ sowie stetig in den Randpunkten a, b und gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in\,]a,b[$, dann ist f auf $[a,b]$ monoton wachsend.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^4$, konvex ist.

Beweisen Sie nun, dass $(x+y)^4 \leq 8(x^4+y^4)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

(d) Ist die Funktion $g\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) := x\ln(x)$, konvex ? Besitzt g ein globales Minimum ?

(e) Bestimmen Sie mit Hilfe der Definition die erste und zweite Ableitung von $f(x) := |x^3|$ auf $\mathbb{R}$.

(f) Berechnen Sie die Grenzwerte (i) $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$.

Aufgabe 0.7: (1+3+3+2+5+3 P)

(a) Besitzt jede Riemann-integrierbare Funktion eine Stammfunktion ?

(b) Begründen Sie knapp, warum die Funktion $f(x) := \max(x^2, x)$ eine Stammfunktion besitzt.

Finden Sie eine Stammfunktion von f und bestimmen Sie mit deren Hilfe das Integral

$$\int_{-3}^{5} f(x)\, dx \ .$$

(c) Sei $f\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit echt positiver Ableitung und einer Stammfunktion F. Bestimmen Sie eine Stammfunktion zur Umkehrfunktion f^{-1}.

(d) Zeigen Sie: Ist R eine auf $[a,b] \subset]0,\infty[$ definierte rationale Funktion, so gilt

$$\int_{\ln(a)}^{\ln(b)} R(\mathrm{e}^x)\, dx = \int_a^b R(t)\, \frac{1}{t}\, dt \ .$$

(e) Finden Sie eine Stammfunktion von $\dfrac{2\mathrm{e}^{3x}+5\mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}-1}$. **Tipp:** Verwenden Sie (d).

(f) Berechnen Sie das uneigentliche Riemann-Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2x^2+1}{x^4+x^2}\, dx$.

Hinweis: Es gilt $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Aufgabe 0.8: (1+3+5+2+2 P)

(a) Welche Eigenschaft hat die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen auf einem Intervall ?

(b) Konvergiert die Folge der Funktionen $f_n(x) := \sqrt{\dfrac{1}{n} + x^2}$ punktweise auf $\mathbb{R}$? Auch gleichmäßig?

(c) Bestimmen Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ die Stammfunktion F_n von $f_n(x) := \dfrac{n}{n^2+x^2}$ mit $F_n(0) = 0$.

Konvergieren die Funktionenfolgen $\big(f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\big(F_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf $\mathbb{R}$?

Konvergieren$\big(f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\big(F_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$?

(d) Ermitteln Sie den Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe $f(z) := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k} z^k$ und geben Sie (im Fall der Konvergenz) eine explizite Formel für $f(z)$ an.

(e) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $f(z) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{4n}$?

Zeigen Sie die Gleichung $f\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \dfrac{16}{17}$.

Aufgabe 1.1: **(Topologische Räume & Hausdorffsches Trennungsaxiom)** (2+2 P)

Auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ betrachten wir das Mengensystem $\mathcal{T}$, welches neben $\emptyset$ und $\mathbb{N}$ genau die Teilmengen $U \subset \mathbb{N}$ enthält, deren Komplement $\mathbb{N} \setminus U$ endlich ist. Zeigen Sie:

(a) $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ ist ein topologischer Raum.

(b) Das Hausdorffsche Trennungsaxiom gilt nicht in $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$.

Aufgabe 1.2: **(Beispiele metrischer Räume)** (6+3 P)

(a) Seien (M, d_1) und (M, d_2) metrische Räume. Beweisen oder widerlegen Sie:
Mit $d_3 := d_1 + d_2$ und $d_4 := \max(d_1, d_2)$ sind auch (M, d_3) und (M, d_4) metrische Räume.

(b) Bezeichne $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\big\}$ die Menge aller (nicht notwendigerweise konvergenten) reellen Zahlenfolgen. Zeigen Sie, dass für beliebige $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Zahl

$$d\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|}$$

endlich ist und auf diese Weise eine Metrik d auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiert wird.

Bonus: Wird durch $d(x, y) := \arctan(|x - y|)$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird ? **(+3 ZP)**

Aufgabe 1.3: Welche der Abbildungen $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ definieren eine Metrik auf X? (8 P)

(a) $d(x, y) := \mathrm{e}^{x-y} - 1$ auf $X = \mathbb{R}$ (b) $d(x, y) := \sin(\|x - y\|_2)$ auf $X = \mathbb{R}^2$

(c) $d(x, y) := |S(x) - S(y)|$ mit $S(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ auf $X = \mathbb{R}$

(d) $d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 + \dfrac{1}{x + y} & \text{für } x \neq y \end{cases}$ auf $X = \mathbb{N}$

Aufgabe 1.4: **(Normierte Räume & Innenprodukträume)** (3+3+3 P)

(a) Sei $(Y, \|.\|_Y)$ ein normierter Raum, X ein Vektorraum und $A\colon X \to Y$ eine injektive lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass durch $\|x\|_X := \|Ax\|_Y$ eine Norm auf X definiert wird.

(b) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ sei $\langle x, y\rangle := x^T y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ das übliche Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:
Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär, so definiert $\langle x, y\rangle_A := \langle Ax, Ay\rangle$ ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ auf dem $\mathbb{R}^n$.

(c) Entscheiden Sie, ob folgende Abbildungen $N_k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$, Normen auf dem $\mathbb{R}^3$ sind:

(i) $N_1\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left|\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right|$,

(ii) $N_2\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, (iii) $N_3\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2}$.

Bonus: **(+5 ZP)**

(i) Definiert die Abbildung $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \|(x, y)\| := \sqrt{x^2 - xy + y^2}$, eine Norm?

(ii) Gilt für alle Normen auf dem $\mathbb{R}^2$ die Ungleichung $\|(x, y)\| \leq \|(|x|, |y|)\|$?

Analysis II **Sommersemester 2016, Universität Rostock**
Serie 2 **Abgabetermin:** spätestens 22.04.2016, 09:15 Uhr
PROF. DR. K. P. RYBAKOWSKI DR. K. IHSBERNER

Aufgabe 2.1: Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: (3+2+2 P)

(a) Für alle $x, y \in X$ gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung** $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.

(b) Für alle $x, y \in X$ gilt die gilt die **Parallelogramm-Gleichung**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \tag{2.1}$$

(c) Für alle $x, y \in X$ gilt die gilt die **Polarisationsgleichung**

$$\langle x, y\rangle \ = \ \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \ . \tag{2.2}$$

Aufgabe 2.2: **(Offene und abgeschlossene Mengen)** (6+3 P)

(a) Welche der folgenden Mengen sind offen oder abgeschlossen im euklidischen $\mathbb{R}^2$?

(i) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 + x_2 < 1, x_1 > 0, x_2 > 0\}$,

(ii) $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x_1^2 + 3x_2^2 \geq 1\}$,

(iii) $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x_1 < 1, 1 < x_2 \leq 2\}$.

(b) Ist die Menge $D := \left\{\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{\ell}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \mid k, \ell, m, n \in \mathbb{N}\right\}$ in $(\mathbb{R}^4, \|.\|_1)$ abgeschlossen?

Bestimmen Sie sowohl das Innere als auch den Rand von D.

Aufgabe 2.3: **(Endlich-dimensionale normierte Räume)** (3+5 P)

(a) Zeigen Sie, dass die für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ durch $\|x\| := 2|x_1| + \frac{1}{2}|x_2|$ definierte Abbildung $\|.\|\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^2$ ist und skizzieren Sie die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x\| \leq 1\} \ .$$

(b) Sei nun $\|.\|_2$ die Euklidische Norm und $\|.\|$ die Norm aus (a). Bestimmen Sie Konstanten $a, b > 0$, so dass $\forall x \in \mathbb{R}^2 \colon a\ \|x\|_2 \leq \|x\| \leq b\ \|x\|_2$ gilt. Sind $\|.\|_2$ und $\|.\|$ äquivalent ?

Aufgabe 2.4: Konvergieren die angegebenen Folgen im (normierten) $\mathbb{R}^n$? (2+2+2 P)

(a) $x^{(k)} = \left(\frac{1}{k}\sin(k), \frac{1}{k+1}\cos(k+1)\right) \in \mathbb{R}^2$

(b) $y^{(k)} = \left(\left(\frac{4}{7k} - 1\right)^k, \frac{k^2-13}{k^2+3}, \cos(5\pi)\right) \in \mathbb{R}^3$ **Tipp:** $\forall x \in \mathbb{R} : \lim\limits_{k\to\infty}\left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \ = \ \mathrm{e}^x$.

(c) $z^{(k)} = \left(\ln\left(\frac{3k}{k+1}\right), \mathrm{e}^{-k} \cdot s^{567k}\right) \in \mathbb{R}^2$ mit $s > 0$

Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 3.1: Gegeben seien die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ und der Vektor $b := \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$. (2+4 P)

(a) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}^2$ ist die Ungleichung $\|Ax\|_2 \;\leq\; 2\|x\|_2$ erfüllt.

(b) Zeigen Sie unter Verwendung von **Korollar 1.33**, dass die durch $f(x) := \frac{1}{4}(Ax + b)$ auf der Teilmenge $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ der Euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ definierte Abbildung $f\colon D \to \mathbb{R}$ einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 3.2: Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit (3+3 P)

(a) $f(x,y) \;=\; \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\;, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0\;, & \text{für } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ (b) $g(x,y) \;=\; \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{y^2+x^4}\;, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0\;, & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Bonus: Untersuchen Sie die Grenzwerte auf Existenz **(+6 ZP)**

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ (ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ (iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

Aufgabe 3.3: Für $n \in \mathbb{N}$ sei jeweils $f_n(x,y) := \begin{pmatrix} \sin\left(\dfrac{x}{n}\right) \\ \cos\left(\dfrac{y}{n}\right) \\ \exp\left(\dfrac{xy}{n}\right) \end{pmatrix}$ gegeben. (2+2+2 P)

(a) Überprüfen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Stetigkeit von $f_n\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

(b) Ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}^2$ gleichmäßig konvergent ?

(c) Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]^2$ gleichmäßig ?

Bonusfrage: Ist $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch $f(x,y) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y)$, stetig ? **(+1 ZP)**

Aufgabe 3.4: (6+6 P)

(a) Bestimmen Sie zu den linearen Abbildungen $f, g\colon X \to X$, die durch die Gleichungen

$$f(x_1,x_2) := (-x_1 + 4x_2, 4x_1 - x_2) \qquad \text{bzw.} \qquad g(x_1,x_2) := (-x_1 + 4x_2, -x_2)$$

gegeben sind, die Operatornormen für $X = (\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$, $X = (\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ und $X = (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$.

(b) Zeigen Sie, dass durch

(i) $A\colon f \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} f(x)dx$ und (ii) $B\colon f \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx$

stetige lineare Abbildungen von $\Big(C([-1,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty\Big)$ nach $(\mathbb{R}, |.|)$ gegeben sind.

Bestimmen Sie außerdem die Operatornormen $\|A\|$ und $\|B\|$.

Aufgabe 4.1: Zeigen Sie, dass $A := \left\{3 - \frac{5}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ in $(\mathbb{R}, |.|)$ nicht kompakt ist, (3+2+2 P)

(a) indem Sie direkt Definition 1.56 anwenden, d.h., indem Sie eine offene Überdeckung von A angeben, aus der keine endliche Teilüberdeckung ausgewählt werden kann;

(b) indem Sie Lemma 1.57 anwenden; (c) indem Sie Satz 1.58 (Heine-Borel) anwenden.

Aufgabe 4.2: (4 P)

Zeigen Sie, dass es auf dem Einheitskreis $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 | \, \|x\|_2 = 1\}$ einen Punkt $(x_1, x_2) \in S^1$ gibt, so dass $(x_2)^4 - (y_2)^4 \leq (x_1)^4 - (y_1)^4$ für alle $(y_1, y_2) \in S^1$ gilt.

Aufgabe 4.3: Überprüfen Sie die folgenden Behauptungen: (2+2+2+3 P)

(a) Gegeben seien die metrischen Räume (M, d_M) und $(\mathbb{R}, d_{|.|})$.
Ist $f \colon M \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ stetig und nicht konstant, dann ist M nicht zusammenhängend.

(b) Jede konvexe Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend. Dabei heißt M konvex, wenn mit $x, y \in M$ auch die Verbindungsgerade $\{x + t(y - x) | t \in [0, 1]\}$ vollständig in M enthalten ist.

(c) $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = 0\}$ ist zusammenhängend.

(d) Für $n \geq 1$ ist $GL(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) \neq 0\}$ offen und nicht zusammenhängend.

Aufgabe 4.4: (4+3+3 P)

(a) Bestimmen Sie für die folgenden Kurven jeweils den Tangentialvektor und die Bogenlänge:

(i) $c \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^k$, $t \mapsto (1 - t)v + tw$ für $v, w \in \mathbb{R}^k$ fest gewählt.

(ii) $c \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} x + r\cos(t) \\ y + r\sin(t) \end{pmatrix}$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $r > 0$.

Welche Gebilde beschreiben die oben genannten Kurven?

(b) Zeigen Sie: Der Graph einer Funktion $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ besitzt keine singulären Punkte und ist rektifizierbar mit Bogenlänge

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt \, . \tag{4.1}$$

(c) Bestimmen Sie für $t \in [a, b]$ und beliebiges $\gamma \in \mathbb{R}$ die Tangentialvektoren und Bogenlänge der **Logarithmischen Spirale** $c(t) := \mathrm{e}^{\gamma t}(\cos t, \sin t)$.

Bonus: **(+3 ZP)**

Zeigen Sie, dass die Kurve aus (c) für $\gamma > 0$ jeden Kreis um den Nullpunkt in genau einem Punkt schneidet. Berechnen Sie jeweils den Kosinus des Schnittwinkels.

Aufgabe 5.1: Bestimmen Sie die Tangentialvektoren und Bogenlänge der Kurven (3+3 P)

(a) $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} (\cos(t))^3 \\ (\sin(t))^3 \end{pmatrix}$, (b) $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} 3t \\ 3t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5.2: **(Diverse Differenzierbarkeitsbegriffe)** (2+6 P)

(a) Gibt es eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $df(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2z & 2xyz & xy^2+z^{23} \end{pmatrix}$?

(b) Existiert ein $c \in \mathbb{R}$ derart, dass $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{e^{x+y}-x-y-1}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ c & \text{für } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$

(i) die partielle Ableitung $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \partial_{(1,0)} f(0,0)$ besitzt ? (iii) stetig wird ?

(ii) die Richtungsableitung $\partial_h f(0,0)$ für $h = (-1,2)$ besitzt ? (iv) differenzierbar wird ?

Bonus: **(+2+4+2 ZP)**

(i) Zeigen Sie anhand der Definition, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$ die Ableitung $df(x,y)(h_1,h_2) = yh_1 + xh_2$ besitzt.

(ii) Bestimmen Sie alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto |xy|$ differenzierbar ist.

(iii) Zeigen Sie, dass der normierte Gradient die Richtung des steilsten Anstiegs ist.

Aufgabe 5.3: **(Anwendung der Produktregel)** (4+3 P)

(a) Bestimmen Sie die Ableitung $d(\lambda f)$ von $\lambda f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1x_3, x_2 - x_4)$ und $\lambda(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_4$ einmal direkt und einmal mittels Produktregel.

(b) Beweisen Sie für in $a \in U$ differenzierbare Funktionen $f, g\colon U \to \mathbb{R}$, $U \subset X$ offene Teilmenge eines Banach-Raumes X und $g(a) \neq 0$, die Quotientenregel

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)\cdot df(a) - f(a)\cdot dg(a)}{g(a)^2} \tag{5.1}$$

durch Anwendung der Produktregel und der Kettenregel auf $h \circ g$ bei $h\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $h(y) := \dfrac{1}{y}$.

Aufgabe 5.4: **(Anwendung der Kettenregel)** (4+5 P)

(a) Gegeben sei die Funktion $\Phi := \Psi \circ \Upsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\Psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} -xyz \\ e^{z^2} - y\sin(x) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Upsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ u \mapsto \begin{pmatrix} 3u \\ -u^2 \\ u \end{pmatrix}.$$

(i) Finden Sie eine explizite Darstellung von Φ.

(ii) Bestimmen Sie die Ableitung $d\Phi\left(\frac{\pi}{3}\right)$ einmal direkt und einmal mittels Kettenregel.

(b) Berechnen Sie sowohl direkt als auch unter Verwendung der Kettenregel die Ableitung von $\Theta := h \circ g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \qquad g\colon (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ \cos(z)+x^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h\colon (u,v) \mapsto 1+u+2v\,.$$

Aufgabe 6.1: **(Kurven in Polarkoordinaten)** (4 P)

Berechnen Sie jeweils die Bogenlänge von $r = \left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right)^3$ über die gesamte Kurve.

Aufgabe 6.2: **(Stetigkeit und Differenzierbarkeit)** (3+3+3 P)

(a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^6+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Zeigen Sie, dass für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und jedes $c \in \mathbb{R}$ die Folge $f(x_n, c\cdot x_n)$ konvergiert, d.h. dass im Nullpunkt der Grenzwert der Funktion entlang einer beliebigen Geraden existiert. Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)$ für jede beliebige Nullfolge $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Ist f in $(0,0)$ stetig?

(b) Berechnen Sie die Fréchet-Ableitung (den Gradienten) für folgende Funktionen

(i) $f(x,y,z) = (x+y)^z$ (ii) $g(x,y,z) = x^{y+z}$ (iii) $h(x,y,z) := \sin(x\cdot\sin(z))$

(c) Existiert ein $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, so dass $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x-1)y = 0$ gilt ? Falls ja, geben Sie eine solche Funktion an.

Aufgabe 6.3: **(Anstiege)** (2+3 P)

(a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x,y) := x^2y^2$ definiert. Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs in Punkten (x,y) mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$. **Tipp:** Aufgabe 5.2 Bonus (iii)

(b) Angenommen, der Graph der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sin(xy)$ beschreibe näherungsweise eine Hügellandschaft. Ein Radfahrer möchte auf direktem Weg (über der Geraden $y = x$) vom Punkt $(0,0,0)$ zum Punkt $(1,1,f(1,1))$ fahren, kann jedoch nur Steigungen von maximal $45°$ überwinden. Erreicht er sein Ziel?

Aufgabe 6.4: **(Divergenz und Rotation)** (3+3 P)

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f,g\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie die Gültigkeit von

$$\Delta(fg) = f\Delta g + 2\langle\nabla f, \nabla g\rangle + g\Delta f .$$

(b) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $v\colon U \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie: $\operatorname{div}\operatorname{rot} v = 0.$

Aufgabe 6.5: **(Beispiellösungen berühmter partieller Differentialgleichungen)** (3+3 P)

(a) Zeigen Sie, dass $F\colon (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$G(x,t) := \frac{\cos(r-ct)}{r} , \qquad r(x) := \|x\|_2 ,$$

eine Lösung der Schwingungsgleichung (Wellengleichung) ist. **Tipp:** Zusatzaufgabe 6.6 (d)

(b) Zeigen Sie, dass $G\colon \mathbb{R}^n \times\,]0,\infty[\to \mathbb{R}$, definiert durch

$$H(x,t) := t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}} , \qquad r(x) := \|x\|_2 ,$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (für $k = 1$) ist. **Tipp:** Zusatzaufgabe 6.6 (d)

Aufgabe 7.1: **(Taylorpolynome)** (3+2 P)

(a) Auf der offenen Teilmenge $U := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > y, z > 0\}$ des $\mathbb{R}^3$ sei die Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ durch $f\colon (x,y,z) \mapsto \ln\left(\frac{x-y}{z}\right)$ gegeben. Wie lautet $T_3 f((x,y,z);(2,1,1))$?

(b) Wie sieht das Taylor-Polynom $T_3 c(t;0)$ für $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2t + t^2 + 3t^3 + 2t^4 + t^{50} \end{pmatrix}$ aus?

Aufgabe 7.2: **(Ausgleichsrechnung)** (3+3 P)

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate dasjenige Polynom maximal zweiten Grades, welches die Punktewolke $\{(s,s^4) \ : \ s \in \{-2,-1,0,1,2\}\}$ am besten approximiert. Welchen Wert nimmt das Polynom an der Stelle $x = 1$ an?

(b) Zu einer Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x + \beta}$ sollen die Parameter α und β so bestimmt werden, dass die entstehende Kurve möglichst gut die Punktwolke $\{(-1,6),(0,3),(1,1),(2,0.5)\}$ approximiert. Führen Sie dieses Problem durch Logarithmieren der Daten auf ein lineares Ausgleichsproblem zurück und lösen Sie dieses.

Aufgabe 7.3: **(Stationäre Punkte)** (12 P)

Bestimmen Sie die stationären Punkte der folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und begründen Sie, ob in diesen Punkten ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2x + 3y + 7$

(b) $f(x,y) = x^2 - 2xy - 3y + \frac{1}{3}y^2$

(c) $f(x,y) = x^2y^2(3 - x^2 - y^2)$

(d) $f(x,y) = (x+y)^3 - 12xy$

Aufgabe 7.4: **(Lokale und globale Extrema)** (4+3 P)

(a) Die Wirkung $W(x,t)$, die x Einheiten eines Medikamentes t Stunden nach der Einnahme auf einen Patienten haben, sei durch $W(x,t) := x^2(a-x)t^2\mathrm{e}^{-t}$ für $0 \le x \le a$, $t \ge 0$ gegeben. Bestimmen Sie die Dosis x und die Zeit t, so dass $W(x,t)$ maximal ist.

(b) Untersuchen Sie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) := xy\mathrm{e}^{-(x+y)}$ auf lokale und globale Extrema.

Bonus: Bestimmen Sie die Länge des Weges $c\colon [0,1] \mapsto \mathbb{R}^3$, $c(t) := (t,-t,f(t,-t))$ mit f aus (b).

Aufgabe 8.1: **(Klassifikation stationärer Punkte)** (5 P)

Die Funktion $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2y^2 > 0\}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = x\ln(x^2+y^2) - y\ .$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f sowie alle stationären Punkte. Ist hier das hinreichende Kriterium für lokale Extrema anwendbar?

Bonus: **(+5 ZP)**

Bestimmen Sie die stationären Punkte der auf $D = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_2 < 1\}$ durch

$$f(x) = \langle a, x\rangle + \sqrt{1-\|x\|_2^2}\ ,$$

definierten Funktion $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dabei sei $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ ein vorgegebener von Null verschiedener Vektor. Begründen Sie, ob in den stationären Punkten ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

Aufgabe 8.2: **(Anwendungsaufgaben zu Extrema)** (5+5 P)

(a) Bestimmen Sie zu $a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{R}^n$ den Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, für den die Summe der Quadrate der Abweichungen $\|x-a_1\|,\ldots,\|x-a_k\|$ minimal ist (wobei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm bezeichnet).

(b) Der orientierte Flächeninhalt $A(\alpha,\beta)$ eines dem Einheitskreis einbeschriebenen Dreiecks, dessen Ecken $(1,0)$, $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ und $(\cos(\beta),\sin(\beta))$ sind, lautet

$$A(\alpha,\beta) := \tfrac{1}{2}\det\begin{pmatrix} \cos(\alpha)-1 & \sin(\alpha) \\ \cos(\beta)-1 & \sin(\beta)\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Winkelpaar (α,β) so, dass der Flächeninhalt $A(\alpha,\beta)$ maximal wird.

Aufgabe 8.3: Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y+\mathrm{e}^x \\ x-\mathrm{e}^y\end{pmatrix}$. (3+2 P)

(a) Zeigen Sie, dass f überall lokal C^1-invertierbar ist.

(b) Wie lautet $d(f^{-1})(1,-1)$?

Bonusfrage: Ist f auch ein globaler Diffeomorphismus ? **(+5 ZP)**

Aufgabe 8.4: **(Anwendung des Satzes über implizite Funktionen)** (4+4+2 P)

(a) Werden n elektrische Widerstände parallel geschaltet, so wird der Gesamtwiderstand R des Systems durch die Gleichung

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

bestimmt. Wandeln Sie die obige Gleichung derart um, dass Sie den Satz über implizite Funktionen anwenden können. Drücken Sie nun $\dfrac{\partial R}{\partial R_k}$ durch R und R_k aus.

(b) In einer Umgebung des Punktes $(2,5)$ können wir das Gleichungssystem $\begin{cases} x^2+uy+\mathrm{e}^v = 0 \\ 2x+u^2-uv = 5\end{cases}$ durch eine C^1-Abbildung $(x,y) \mapsto \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ mit $u(2,5) = -1$ und $v(2,5) = 0$ auflösen.

Zeigen Sie dies. Berechnen Sie außerdem deren Ableitung in diesem Punkt.

(c) Überprüfen Sie, ob man die Gleichung $x^y - y^x = x-1$ lokal in in der Nähe des Punktes $(x_0,y_0) := (1,1)$ nach einer der beiden Variablen auflösen kann.

Aufgabe 9.1: **(Taylor-Polynome implizit gegebener Funktionen)** (4 P)

Sei $y = y(x)$ die Funktion, welche nahe $x = 1$ die Gleichung $F(x, y) = x^2y + xy^2 - 2 = 0$ löst, mit $y(1) = 1$. Ermitteln Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung zum Entwicklungspunkt $x = 1$.

Tipp: Leiten Sie die Gleichung zweimal ab. Verwenden Sie auch ZA 9.4 (a).

Aufgabe 9.2: **(Extrema auf beschränkten Untermannigfaltigkeiten)** (4+4 P)

(a) Bestimmen Sie den maximalen Flächeninhalt eines Rechtecks, dessen Ecken auf dem Rand eines Kreises vom Radius 1 liegen.

(b) Bestimmen Sie drei positive Zahlen a, b, c, deren Summe 60 und deren Produkt maximal ist.

Aufgabe 9.3: **(Extrema auf kompakten Gebieten)** (6 P)

In einem in kartesischen Koordinaten (x, y, z) vorliegenden dreidimensionalen Hologramm wird durch die Einheitskugel $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ein im Koordinatenursprung zentrierter georteter Himmelskörper dargestellt. Eine weitere Analyse ergibt, dass die an einem Punkt $(x, y, z) \in B$ vorliegende (skalierte) Konzentration eines auf der Erde selten vorkommenden und daher gefragten Erzes durch die Funktion $f(x, y, z) := \exp(x^2 - y^2 + z^2)$ gut beschrieben wird.

Bestimmen Sie, an welchen Punkten von B obige Konzentration f am höchsten bzw. am niedrigsten ist. Wo lohnt sich demnach der Abbau besonders ?

Tipp:
Betrachten Sie zunächst das unrestringierte Problem, d.h., bestimmen Sie zunächst die stationären Punkte von f, welche im Inneren von B liegen. Maximieren bzw. minimieren Sie f anschließend auf der zweidimensionalen C^∞-Untermannigfaltigkeit $M := \partial B$. Ist B kompakt? Durch welche implizit gegebene Gleichung wird der Äquator beschrieben?

Aufgabe 9.4: **(Tangentialräume)** (6 P)

Gegeben sei die Menge

$$M := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z^2 - xy = 1\right\} . \tag{9.1}$$

Zeigen Sie, dass M eine zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, welche nicht kompakt ist. Geben Sie an jedem Punkt $a \in M$ den Tangentialraum T_aM an.

Tipp: Bestimmen Sie den Kern der Ableitung von $g(x, y, z) = z^2 - xy - 1$ an jedem $(x, y, z) \in M$.

Aufgabe 9.5: **(Extrema auf unbeschränkten Untermannigfaltigkeiten)** (6 P)

(a) Besitzt $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$ auf M aus (9.1) lokale Extrema ? Falls ja, welcher Art.

(b) Welche Punkte der Menge M liegen dem Ursprung am nächsten (Begründung)?

Tipp:
Verwenden Sie die in Aufgabe 9.4 bestimmte Basis des Tangentialraumes.
Schauen Sie sich auch die Bemerkung im Zusatzmaterial nach Satz 2.77 sowie ZA 9.5 an.

Aufgabe 10.1: Gegeben sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $A^T = A$. (6+6 P)

(a) Zeigen Sie, dass das Maximum von f unter der Nebenbedingung $\|x\|_2 = 1$ existiert und der größte Eigenwert von A ist.

(b) Sei $x = u$ eine Stelle, an der das Maximum aus (a) angenommen wird. Zeigen Sie für $n > 1$, dass $\mu := \max\{f(x)\colon \|x\|_2 = 1 \wedge \langle x, u\rangle = 0\}$ existiert und ebenfalls ein Eigenwert von A ist. Welche algebraische Vielfachheit muss der größte Eigenwert von A besitzen, falls μ gleich dem zweitgrößten Eigenwert von A ist.

Aufgabe 10.2: **(Das Lebesgue-Maß und seine Nullmengen)** (4+4+4 P)

(a) Zeigen Sie: Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so gilt $K \in \mathfrak{L}_n$ und $\lambda_n(K) < \infty$.

(b) Finden Sie ein Beispiel für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und eine Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{A}$ mit $A_k \supset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \neq \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)\ .$$

(c) Ist die Teilmenge $A := \bigcup_{k=0}^{\infty} \left[k, k+\frac{1}{2^k}\right[$ von $\mathbb{R}$ Lebesgue-messbar ?
Bestimmen Sie gegebenenfalls ihr Lebesgue-Maß.

Bonus: **(+10 ZP)**

(i) Zeigen Sie: Die Vereinigung abzählbar vieler Lebesguescher Nullmengen ist wieder eine Lebesguesche Nullmenge.

(ii) Sind $\mathbb{N}$,$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ Lebesgue-messbar ? Falls ja, bestimmen Sie jeweils das Lebesgue-Maß.

(iii) Geben Sie eine Lebesguesche Nullmenge $M \subset \mathbb{R}$ an, deren Abschluss $\overline{M}$ keine Lebesguesche Nullmenge ist. Begründen Sie Ihre Wahl.

Aufgabe 10.3: **(Beispiel eines abstrakten Maßes)** (6 P)

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein beliebiger Messraum und $\omega \in \Omega$ beliebig, jedoch fest gewählt. Zeigen Sie, dass $(\Omega, \mathcal{A}, \delta_\omega)$ mit $\delta_\omega\colon \mathcal{A} \mapsto \{0,1\}$, definiert durch

$$\delta_\omega(A) := \begin{cases} 1\ , & \text{falls } \omega \in A\ ,\\ 0\ , & \text{falls } \omega \notin A\ ,\end{cases}$$

zu einem Wahrscheinlichkeitsraum wird. Das Maß δ_ω nennt man das **Dirac-Maß**.

Aufgabe 11.1: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum. Zeigen Sie: (2+2+2 P)

(a) μ ist additiv, d.h., für paarweise disjunkte $A_k \in \mathcal{A},\ k = 1, \ldots, n$ gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) .$$

(b) μ ist isoton, d.h., $\forall A, B \in \mathcal{A} \ : \ (A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B))$

(c) Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ endlich, dann besitzt jede messbare Menge endliches Maß.

Hinweis: Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **endlich**, falls $\mu(\Omega) < \infty$ gilt.

Aufgabe 11.2: **(Beispiel eines abstrakten Maßraumes)** (4+4 P)

Gegeben sei der Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\Omega \neq \emptyset$ beliebig und mit der σ-Algebra $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$. Desweiteren sei $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\nu(A) := \begin{cases} \#A , & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ ein vollständiger Maßraum ist. ν heißt das **Zählmaß**.

(b) Geben Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung für Ω an, damit $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ zu einem (i) σ-endlichen bzw. (ii) endlichen Maßraum wird.

Hinweise: Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **σ-endlich**, falls Ω als abzählbare Vereinigung von Mengen endlichen Maßes darstellbar ist. Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **endlich**, falls $\mu(\Omega) < \infty$.

Bonus: **(+2 ZP)**

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein beliebiger Messraum mit $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(\Omega)$. Geben Sie ein Beispiel für ein Maß μ an, so dass $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ endlich, aber nicht vollständig ist.

Aufgabe 11.3: **(Integration bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes)** (4+2+6 P)

(a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \,]0, 1[$ beliebig sowie $q := 1 - p$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \beta_n^p)$ mit dem **Bernoulli-Maß** $\beta_n^p \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$, definiert durch

$$\beta_n^p := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_k$$

(wobei δ_k das Diracmaß aus Aufgabe 10.3 bezeichnet), zu einem Wahrscheinlichkeitsraum wird.

(b) Geben Sie die bezüglich „$\subset$“ (Inklusion) maximale β_n^p-Nullmenge an.

(c) Berechnen Sie die β_n^p-Integrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x \, d\beta_n^p(x)$ und $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^2 \, d\beta_n^p(x)$.

Aufgabe 11.4: (4 P)

Gegeben sei der Lebesguesche Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda_1)$. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, definiert durch $f_k := -\mathbf{1}_{[k,k+1]}$, eine Folge λ_1-integrierbarer Funktionen ist, aber dennoch

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{k\to\infty} f_k \, d\mu > \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \, d\mu \tag{11.1}$$

gilt. Wieso ist dies kein Widerspruch zum **Lemma von Fatou** ?

Aufgabe 12.1: (5 P)

Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$u(t,x) := \begin{cases} \dfrac{tx^3}{(x^2+t^2)^2} \ , & \text{falls } (t,x) \neq (0,0) \ , \\ 0 \ , & \text{falls } (t,x) = (0,0) \ . \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Integrale $f(x) := \int_0^1 u(t,x)dt$ und $g(x) := \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} u(t,x)dt$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert sind, die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, jedoch $f'(0) \neq g(0)$ gilt.

Aufgabe 12.2: Berechnen Sie: (4+4 P)

(a) $\int_B 2xy\, d\lambda_2(x,y)$, wobei B durch $x^2+y^2 = 2x$ und $y = x$ $(y \geq x)$ begrenzt wird;

(b) $\int_B \sqrt{xy - y^2}\, d\lambda_2(x,y)$, wobei B das Trapez mit den Ecken $(1,1)$, $(5,1)$, $(10,2)$ und $(2,2)$ ist.
Hinweis: Es bietet sich an, den Integrationsbereich als Normalbereich bzgl. y darzustellen.

Aufgabe 12.3: (4 P)

Bestimmen Sie $\lambda_2(A)$ von $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x + y \leq 3\,,\ x^2 \leq y\}$.

Aufgabe 12.4: **(Schwerpunkt)** (8+5 P)

(a) Eine dünne Platte habe die Form des Bereiches zwischen der Parabel $y = -2x^2 + 18$ und der x-Achse. Ihre Flächendichte sei $\rho(x,y) = \mathrm{e}^x$. Berechnen Sie den Schwerpunkt der Platte.

(b) Sei B die von den Kurven $y = x$, $xy = 4$ sowie $x = 4$ eingeschlossene Fläche. Berechnen Sie den geometrischen Schwerpunkt von B.

Aufgabe 13.1: **(Gegenbeispiel zum Satz von Fubini)** (12 P)

(a) Berechnen Sie $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \arctan \frac{x}{y}$ und $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \arctan \frac{x}{y}$ für $y \neq 0$.

(b) Die Funktion $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x,y) \;:=\; \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,, & (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0\,, & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

Überprüfen Sie, ob die beiden iterierten Integrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) d\mu(x) \right) d\mu(y) \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) d\mu(y) \right) d\mu(x)\;.$$

denselben Wert annehmen.

(c) Sind die Voraussetzungen des Satzes von Fubini erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 13.2: **(Integration über Normalbereiche)** (2+4 P)

(a) Berechnen Sie das Lebesgue-Integral $\int_\Omega f(x,y)\, d\lambda_2(x,y)$ von $f(x,y) := x+y$ über das Dreieck $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1\,,\, 0 \leq y \leq 1-x\}$.

(b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt (also das 2-dimensionale Lebesgue-Maß $\lambda_2(A)$) der Mengen $A := \{(x,y) \,|\, 0 \leq y \leq 1\,, y^2 \leq x \leq y\} \subset \mathbb{R}^2$ und $B := \{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq 1\,,\, 1-x \leq y \leq 1+x^2\}$.

Aufgabe 13.3: **(Lineare Koordinatentransformationen)** (3+3 P)

(a) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine ungerade (d.h., es gelte $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$) Lebesgue-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass das Lebesgue-Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda_n$ verschwindet.

(b) Zeigen Sie, dass die Diagonale $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ eine λ_2-Nullmenge ist.

Tipp: Transformieren Sie die Menge auf eine „Hyperebene".

Bonus: **(+6 ZP)**

Für $p = (2,2)$ und $q = (1,2)$ sei die Menge $E = \{sp + tq \mid s,t \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$ gegeben. Skizzieren Sie E und bestimmen Sie das Integral $\int_E xy d\lambda_2(x,y)$ mit Hilfe der Transformation $(x,y) = \Phi(u,v)$, gegeben durch

$$\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \qquad (u,v) \;\mapsto\; \begin{pmatrix} u-v \\ 2u-v \end{pmatrix}\,. \tag{13.1}$$

Aufgabe 13.4: **(Elliptische Koordinatentransformation)** (6 P)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_R \frac{1}{4x^2+y^2+2y+1} d\lambda_2(x,y)$$

mit $R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq 4x^2+y^2+2y+1 \leq 25,\; x \geq 0\}$ unter Verwendung der Koordinatentransformation $x = \frac{r}{2}\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi) - 1$.

Aufgabe 14.1: **(Satz von Riemann-Lebesgue)** (4 P)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion mit $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0.$$

Aufgabe 14.2: (4+4 P)

(a) Zeigen Sie, dass das Fourierpolynom

$$(S_n f)(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{14.1}$$

mit den Koeffizienten $c_k := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}\,dy$, einer 2π-periodischen Funktion f die Darstellung $(S_n f)(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-y)f(y)\,dy$ mit dem Dirichlet-Kern $D_n(x) := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass der Dirichlet-Kern $D_n(x)$ aus Aufgabenteil (a) für jedes n eine gerade, 2π-periodische Funktion ist, welche $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1$ erfüllt.

Aufgabe 14.3: (4+4 P)

(a) Zeigen Sie: Besitzt die Fourierreihe einer stückweise stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktion f die Koeffizienten c_k, so besitzt die Fourierreihe von f' die Koeffizienten $\mathrm{i}kc_k$.

(b) Zeigen Sie mittels (a): Die Fourierreihe von f'' einer stückweise zweimal stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktion f mit Fourier-Koeffizienten c_k besitzt die Gestalt

$$(Sf'')(x) \;=\; -\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\ .$$

Aufgabe 14.4: (5+5 P)

Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten für diejenige 2π-periodische Funktion f, welche auf dem Intervall $]-\pi,\pi]$ die Werte

$$f(x) \;=\; \begin{cases} c_1 & -\pi < x \le 0 \\ c_2 & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, besitzt. Beweisen Sie anschließend mit Hilfe der (reellen) Parsevalschen Gleichung für eine stückweise stetige Funktion $f(x)$ die Gültigkeit der Gleichung $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \;=\; \frac{\pi^2}{8}$.