

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 1

Vektorräume

- Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Menge X zusammen mit einer Verknüpfung $+: X \times X \rightarrow X$, genannt die Addition auf X , und einer (äußeren) Operation $\cdot: \mathbb{K} \times X \rightarrow X$, genannt skalare Multiplikation, heißt ein **$\mathbb{K}$ -Vektorraum** oder ein **linearer Raum über $\mathbb{K}$** , falls gilt:

(a) $(X, +)$ ist eine abelsche Gruppe und

(b) für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $x, y \in X$ gilt

$$1_{\mathbb{K}} \cdot x = x, \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x, \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y, \quad (\lambda \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x).$$

Beispiele:

- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wird $X = \mathbb{R}^n$ mit der komponentenweisen Addition und skalaren Multiplikation (d.h., für zwei Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ in X sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ seien $x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ und $\lambda \cdot x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$) zum reellen Vektorraum.
- Ebenso ist $C([a, b], \mathbb{R}) := \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Normierte Räume - (vgl. Skript Abschnitt 1.1)

- **Definition 1.1:** Sei X ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty[$ heißt eine **Norm** auf X , wenn für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (Definitheit),

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (Homogenität),

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung).

Ein Vektorraum X , versehen mit einer Norm $\|\cdot\|$, heißt ein **normierter Raum** $(X, \|\cdot\|)$.

- Sind in Definition 1.1 nur die Eigenschaften (ii) und (iii) erfüllt, reden wir von einer **Halbnorm**.

- **Definition 1.3:** Auf einem reellen Vektorraum X heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ **Skalarprodukt**, falls für alle $x, y, z \in X$ und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (Symmetrie)

(ii) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ (Bilinearität)

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ (Positiv-Definitheit)

Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf X , nennen wir $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einen **Euklidischen $\mathbb{R}$ -Vektorraum**.

- **Korollar 1.6:** Ein Euklidischer Vektorraum $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ wird mit der von einem Skalarprodukt induzierten Norm $\|x\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle} := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ zu einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle})$.

- Häufig verwendete Normen auf dem $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^n$ sind zum Beispiel

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad \left(\text{2-Norm mit dem Euklidischen Skalarprodukt } \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i \right),$$
$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (1\text{-Norm}), \quad \|x\|_{\infty} := \max_{i=1, \dots, n} |x_i| \quad (\text{Maximumsnorm}),$$

wobei die 1-Norm und die 2-Norm Spezialfälle der für reellwertiges $p \in [1, \infty[$ gegebenen p -Norm

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

sind. Die Dreiecksungleichung bezeichnet man in diesem Fall als **Minkowski-Ungleichung**

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Beweisen kann man sie für $p \in]1, \infty[$ (vgl. Forster I, §16) mittels der **Hölder-Ungleichung**

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \left(\text{wobei } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right),$$

die zudem für $p = 2$ die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung** $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$ liefert.

- Auf dem Vektorraum $C([a, b], \mathbb{R}) := \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$ kennen wir die Normen

$$(a) \|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad (\text{existiert, da } |f| \text{ stetig, } [a, b] \text{ abgeschlossen und beschränkt})$$

$$(b) \|f\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{C([a, b])}} := \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx} \quad (= \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ mit } \langle f, g \rangle_{C([a, b])} := \int_a^b (fg)(x) dx)$$

Bem.: Im Fall $\|f_n - f\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{C([a, b])}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ heißt $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **im quadratischen Mittel konvergent**.

Metrische Räume – (vgl. Skript Abschnitt 1.2)

- **Definition 1.8:** Sei $M \neq \emptyset$. Eine Abbildung $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Metrik** auf M , falls gilt

$$(i) \quad \forall x, y \in M: d(x, y) = 0 \iff x = y \quad (\text{Definitheit}),$$

$$(ii) \quad \forall x, y \in M: d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{Symmetrie}),$$

$$(iii) \quad \forall x, y, z \in M: d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{Dreiecksungleichung}).$$

Ist d eine Metrik auf M , so heißt das Paar (M, d) **metrischer Raum**. Für je zwei Elemente $x, y \in M$ heißt die Zahl $d(x, y)$ der *Abstand* oder die *Distanz* von x und y .

- **Beispiel 1.9:** Jeder normierte Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ wird mit der (sogenannten) norminduzierten Metrik $d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\|$ zu einem metrischen Raum $(X, d_{\|\cdot\|})$.

- **Definition 1.10:** In einem metrischen Raum (M, d) nennen wir eine Menge $U \subset M$ genau dann **offen**, wenn zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die offene Kugel $B_\varepsilon(x)$ um x von Radius ε bezüglich der Metrik d vollständig in U enthalten ist; mit anderen Worten, wenn

$$\forall x \in U \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \subset U, \quad \text{wobei} \quad B_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

- Unter der **Einheitskugel** eines normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$ versteht man die bezüglich der durch die Norm induzierten Metrik offene Kugel um den Ursprung von Radius 1, d.h. die Menge

$$B_1^{\|\cdot\|}(0) := \{x \in X \mid d_{\|\cdot\|}(0, x) < 1\} = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}.$$

- **Definition:** Sei $M \neq \emptyset$. Ein System von Teilmengen $T \subseteq \mathcal{P}(M)$ heißt **Topologie** auf M , falls:

$$\circ \emptyset \in T \text{ und } M \in T$$

$$\circ \text{Beliebige Vereinigungen sowie endliche Durchschnitte von Elementen aus } T \text{ liegen in } T.$$

Das Paar (M, T) nennt man einen **topologischen Raum** und die Elemente von T **offen**.

- **Satz 1.11:** Die Menge T_d aller offenen Teilmengen eines metrischen Raumes (M, d) ist eine (die von der Metrik d induzierte) **Topologie** auf M , wonach (M, T_d) ein topologischer Raum ist.

- **Definition:** Ein topologischer Raum (M, T) heißt **Hausdorff-Raum**, wenn er das **Hausdorffsche Trennungsaxiom** erfüllt, d.h., wenn zu je zwei (verschiedenen) Punkten $x, y \in M$ offene Mengen (sogenannte offene Umgebungen) $U, V \in T$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$ existieren.

- **Achtung:** Nicht jede Topologie wird durch eine Metrik induziert.

- Zwei Metriken d_1, d_2 auf $M \neq \emptyset$ heißen **äquivalent**, wenn sie dieselbe Topologie induzieren.

Äquivalenz von Normen – (vgl. Abschnitt 1.2)

- **Definition:** Zwei Normen auf einem Vektorraum X heißen **äquivalent**, wenn die beiden induzierten Metriken dieselbe Topologie besitzen.
- **Lemma 1.14:** Zwei Normen auf einem Vektorraum X sind genau dann äquivalent, wenn Konstanten $C, c > 0$ existieren, so dass $c\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\|$ für alle $x \in X$ erfüllt ist.
- **Bemerkung:** Äquivalenz von Normen ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen eines Vektorraumes X , d.h., sie ist reflexiv, symmetrisch und transitiv (Übungsaufgabe).

Zusatzaufgabe 1.1: (Topologische Räume & Hausdorffsches Trennungsaxiom)

- (a) Zeigen Sie, dass $\{\emptyset, \{u\}, X\}$ eine nicht-Hausdorffsche Topologie auf $X := \{u, v, w\}$ definiert.
- (b) Geben Sie alle Topologien von $M = \{a, b\}$ an. Welche davon sind Hausdorffsch?

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.1:

- (a) Nachzuprüfen ist, dass neben $\emptyset$ und X auch jeder endliche Schnitt und jede beliebige Vereinigung von Elementen aus $\{\emptyset, \{u\}, X\}$ wieder in $\{\emptyset, \{u\}, X\}$ liegen. Dies ist offensichtlich der Fall, da wegen $\emptyset \subset \{u\} \subset X$ jeder Schnitt und jede Vereinigung genau einer dieser Mengen ergibt. Jedoch besitzt beispielsweise der Punkt w nur die offene Umgebung $X = \{u, v, w\}$ und damit keine Umgebung, die nicht auch u oder w enthalten würde. Somit ist das Hausdorffsche Trennungsaxiom nicht erfüllt.
- (b) $T_1 = \{\emptyset, M\}$, $T_2 = \{\emptyset, \{a\}, M\}$, $T_3 = \{\emptyset, \{b\}, M\}$, $T_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, M\} = \mathcal{P}(M)$ sind genau alle Topologien auf $M = \{a, b\}$.

Zusatzaufgabe 1.2:

- (a) Zeigen Sie, dass die Nichtnegativität einer Norm bzw. einer Metrik nicht explizit gefordert werden muss, sondern sich aus den übrigen Eigenschaften einer Norm bzw. Metrik ergibt.
- (b) Geben Sie alle Normen auf $\mathbb{R}$ an und beweisen Sie, dass Sie wirklich alle gefunden haben.
- (c) Wie sieht $B_1^{d_*}((0,0))$ in $\mathbb{R}^2$ bzgl. der Metrik $d_*(x, y) := \|x - y\|_*$ für $*$ $\in \{1, 2, \infty\}$ aus?

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.2:

- (a)
 - $\forall x \in X : 0 = 0\|0\| = \|0\| = \|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\| \implies \|x\| \geq 0$
 - $\forall x, y \in M : 0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y) \implies d(x, y) \geq 0$
- (b) Jede Norm auf $\mathbb{R}$ besitzt die Gestalt $\|x\| = c|x|$ mit einer Konstanten $c > 0$ (genauer $c = \|1\|$), was unmittelbar aus der Gleichung $\|x\| = |x|\|1\|$ folgt.
- (c)
 - (i) Raute $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| < 1\}$;
 - (ii) Einheitskreis $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.
 - (iii) Quadrat $] -1, 1[\times] -1, 1[:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 1\}$;

Zusatzaufgabe 1.3: (Hierarchie der Räume)

- (a) Warum ist jeder Innenproduktraum auch ein normierter Raum?
- (b) Warum ist jeder normierte Raum auch ein metrischer Raum?
- (c) Warum ist jeder metrische Raum ein topologischer Raum?
- (d) Zeigen Sie, dass jeder metrische Raum (M, d) das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.3:

- (a) Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ein Innenprodukt (Skalarprodukt), dann wird nach Korollar durch $\|x\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle} := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm $\|\cdot\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle}: X \rightarrow \mathbb{R}$ induziert, also ist $(X, \|\cdot\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ ein normierter Raum.
- (b) Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann wird (vgl. Beispiel 1.9) durch $d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik $d_{\|\cdot\|}: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ induziert, also ist $(X, d_{\|\cdot\|})$ ein metrischer Raum.
- (c) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Menge aller offenen Mengen $\mathcal{T}_d$ nach Satz 1.11 eine Topologie, also $(M, \mathcal{T}_d)$ ein topologischer Raum.
- (d) Seien $x \neq y$ aus M . Aufgrund der Definitheit gilt dann $d(x, y) = \delta > 0$. Betrachte nun für $\varepsilon := \frac{\delta}{3}$ die offenen ε -Kugeln

$$B_\varepsilon(x) = \{z \in M : d(x, z) < \varepsilon\}, \quad B_\varepsilon(y) = \{z \in M : d(y, z) < \varepsilon\}.$$

Dann gilt $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$. Wäre nämlich $z \in B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y)$, so folgte nach Dreiecksungleichung $\delta = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \frac{2\delta}{3}$, Widerspruch. Somit existieren zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in M$ disjunkte offene $U, V \subset M$ mit $x \in U$ und $y \in V$.

Zusatzaufgabe 1.4: (Beispielmetriken)

- (a) Ist die Abbildung $d(x, y) = |x^3 - y^3|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$?
- (b) Zeigen Sie, dass für einen metrischen Raum (X, d) durch $d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ eine zu d äquivalente Metrik d' mit $d'(x, y) < 1$ für alle $x, y \in X$ definiert wird.

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.4:

- (a) Es sind die drei Eigenschaften einer Metrik zu zeigen:

- Da $f(x) = x^3$ streng monoton, also injektiv ist, folgt mit der Definitheit des Betrages

$$d(x, y) = 0 \iff |x^3 - y^3| = 0 \iff x^3 - y^3 = 0 \iff x^3 = y^3 \xrightarrow{f \text{ injektiv}} x = y.$$

- Aus den Eigenschaften von $|\cdot|$ folgt $d(x, y) = |x^3 - y^3| = |-(y^3 - x^3)| = |y^3 - x^3| = d(y, x)$.
- Ebenso gilt $d(x, z) = |x^3 - z^3| = |x^3 - y^3 + y^3 - z^3| \leq |x^3 - y^3| + |y^3 - z^3| = d(x, y) + d(y, z)$.

- (b) Zunächst einmal ist $d': X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Metrik, denn da $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Metrik ist, folgen für alle $x, y, z \in X$ offenbar

$$(i) \quad d'(x, y) = 0 \iff \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 0 \iff d(x, y) = 0 \iff x = y,$$

$$(ii) \quad d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = d'(y, x),$$

- (iii) (da $g: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{t}{1+t}$ die überall positive Ableitung $g': t \mapsto \frac{1}{(1+t)^2}$ besitzt und damit streng monoton wachsend ist)

$$\begin{aligned} d'(x, z) &= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} = g(d(x, z)) \leq g(d(x, y) + d(y, z)) \\ &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \\ &\leq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} = d'(x, y) + d'(y, z). \end{aligned}$$

Sei $U \subset X$ bezüglich der Metrik d auf X offen und sei $x_0 \in U$ beliebig. Nach Definition existiert dann ein $\varepsilon > 0$, so dass die offene Kugel $B_\varepsilon(x_0)$ von Radius ε um x_0 bezüglich d vollständig in U enthalten ist. Wählen wir nun $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < 1$, so gilt für jedes $y \in X$ mit $d'(x_0, y) < \varepsilon'$ offensichtlich

$$d(x_0, y) = \frac{d'(x_0, y)}{1 - d'(x_0, y)} \leq \frac{\varepsilon'}{1 - \varepsilon'} < \frac{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}{1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} = \frac{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}{\frac{1}{1+\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Also liegt die bezüglich d' offene Kugel $B_{\varepsilon'}(x_0)$ von Radius $\varepsilon' > 0$ um x_0 in $B_\varepsilon(x_0)$ und somit folglich in U . Da $x_0 \in U$ beliebig war, zeigt dies die Offenheit der Menge U bezüglich der durch d' induzierten Topologie.

Umgekehrt, stelle nun $U \subset X$ eine beliebige bezüglich der Metrik d' offene Menge in X dar, und sei $x_0 \in U$. Dann gibt es ein $\varepsilon' > 0$ mit $B_{\varepsilon'}(x_0) \subset U$, wobei $B_{\varepsilon'}(x_0)$ erneut die bezüglich d' offene Kugel um x_0 von Radius ε' bezeichnet. Ist nun $0 < \varepsilon < \varepsilon'$, so impliziert für jedes $y \in X$ die Abschätzung $d(x_0, y) < \varepsilon$ insbesondere

$$d'(x_0, y) = \frac{d(x_0, y)}{1 + d(x_0, y)} \leq d(x_0, y) < \varepsilon < \varepsilon'.$$

Folglich liegt für solche ε die Kugel $B_\varepsilon(x_0)$ in $B_{\varepsilon'}(x_0)$, was die Offenheit von U bezüglich d zeigt. Da in beiden Fällen die offene Menge U beliebig war, sind die induzierten Topologien wie behauptet gleich.

Wegen $0 \leq d(x, y) \leq 1 + d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gilt zu guter Letzt auch $d'(x, y) \leq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} < 1$ für alle $x, y \in X$.

Zusatzaufgabe 1.5:

- (a) Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $d_{\text{disk}}: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto \begin{cases} 0 & u = v, \\ 1 & u \neq v. \end{cases}$
- (i) Zeigen Sie, dass d_{disk} eine Metrik auf M ist. Diese wird **diskrete Metrik** genannt.
 - (ii) Wie sieht die von der diskreten Metrik erzeugte (sog. **diskrete**) Topologie $T_{d_{\text{disk}}}$ aus?
 - (iii) Für welche M stimmt die diskrete Topologie $T_{d_{\text{disk}}}$ mit der indiskreten Topologie $\{\emptyset, M\}$ überein?
- (b) Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum mit $|M| = n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:
Die Topologie ist genau dann von einer Metrik induziert, wenn $\mathcal{T} = \mathcal{P}(M)$ gilt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.5:

- (a) (i) Offenbar gilt $d_{\text{disk}}(u, v) \geq 0$ und $d_{\text{disk}}(u, v) = 0 \iff u = v$ (Definitheit erfüllt). Aufgrund der Symmetrie der Relationen $=$ und $\neq$ folgt auch die Symmetrie $d_{\text{disk}}(u, v) = d_{\text{disk}}(v, u)$. Eine Fallunterscheidung liefert nun auch die Gültigkeit der Dreiecksungleichung.
- (ii) Es ist $T_{d_{\text{disk}}} = \mathcal{P}(M)$, denn einerseits ist $\emptyset \in T_{d_{\text{disk}}}$ (da eine Topologie sowohl $\emptyset$ als auch M als Elemente enthalten muss) und andererseits stimmen die als offene Mengen in $T_{d_{\text{disk}}}$ enthaltenen offenen ε -Kugeln $B_\varepsilon(u) := \{v \in M \mid d_{\text{disk}}(u, v) < \varepsilon\}$ für $\varepsilon \leq 1$ genau mit den einelementigen Mengen $\{u\}$ überein und jede beliebige nichtleere Teilmenge A von M lässt sich darstellen als

$$A = \bigcup_{u \in A} \{u\}.$$

- (iii) Damit $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, M\}$ gelten kann, muss M genau ein Element besitzen.
- (b) „ $\implies$ “ Sei nun $\mathcal{T}$ von einer Metrik erzeugt (enthalte als Elemente also genau die bezüglich einer Metrik $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ offenen Mengen). Wir zeigen nun, dass jede beliebige Einpunktmenge in $\mathcal{T}$ und somit – da beliebige Vereinigungen von Elementen von $\mathcal{T}$ wieder in $\mathcal{T}$ liegen müssen

(Eigenschaft einer Topologie) – auch jede beliebige Teilmenge von M in $\mathcal{T}$ liegt (also $\mathcal{T} = \mathcal{P}(M)$ gilt).

Sei nun $m \in M$ ein beliebiges Element. Dann folgt aus der Definitheit der Metrik, dass ein $\rho > 0$ mit $\rho := \min\{d(m, \tilde{m}) \mid \tilde{m} \in M \setminus \{m\}\}$ existiert. Da demnach jedes von m verschiedene Element mindestens den Abstand $\rho > 0$ von m besitzt, stimmt die offene Kugel

$$B_{\frac{\rho}{2}}(m) := \left\{x \in M \mid d(x, m) < \frac{\rho}{2}\right\}$$

mit der Einpunktmenge $\{m\}$ überein. Als offene Kugel ist $\{m\}$ dann ein Element von $\mathcal{T}$, wie behauptet.

„ $\Leftarrow$ “ Gelte nun $\mathcal{T} = \mathcal{P}(M)$. In Aufgabenteil (a) haben wir bereits gesehen, dass $\mathcal{T}$ dann beispielsweise genau alle bezüglich der diskreten Metrik offenen Mengen von M enthält, demnach also mit der von der diskreten Metrik erzeugten Topologie übereinstimmt. (Dies gilt sogar unabhängig davon, ob die Menge M endlich viele Elemente besitzt, oder nicht).

Zusatzaufgabe 1.6:

- Zeigen Sie, dass $\|f\|_{\infty} := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ eine Norm auf $C([a, b], \mathbb{R})$ ist.
- Zeigen Sie: $\|f\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{C([a, b])}}$ ist eine Norm und es gilt $\forall f \in C([a, b], \mathbb{R}): \|f\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{C([a, b])}} \leq \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_{\infty}$.
- Begründen Sie, warum die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge f_n aus $C([a, b], \mathbb{R})$ die Konvergenz im quadratischen Mittel nach sich zieht.
- Finden Sie eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, welche im quadratischen Mittel aber nicht gleichmäßig konvergiert.

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.6:

- Zunächst einmal ist die Norm wohldefiniert, da jede stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall ihre globalen Extrema annimmt (Satz vom Minimum/Maximum) und $|\cdot| \circ f$ stetig ist, falls f stetig ist.

- Da nach Definition des Maximums für alle $x \in [a, b]$ stets $0 \leq |f(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ gilt, folgt die Definitheit wegen

$$\|f\|_{\infty} = 0 \iff \forall x \in [a, b] : |f(x)| = 0 \iff \forall x \in [a, b] : f(x) = 0 \iff f = 0.$$

- Nach Eigenschaften des Maximum und des Betrages gilt für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in C([a, b])$ auch

$$\|\lambda f\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} |\lambda f(x)| = \max_{x \in [a, b]} |\lambda| \cdot |f(x)| = |\lambda| \cdot \max_{x \in [a, b]} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_{\infty}.$$

- Nach Eigenschaften des Maximum und des Betrages gilt für beliebige $f, g \in C([a, b])$ auch

$$\|f + g\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} |f(x) + g(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} (|f(x)| + |g(x)|) \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |g(x)|,$$

also erfüllt $\|\cdot\|_{\infty}$ auch die Dreiecksungleichung $\|f + g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$.

- Es genügt zu zeigen, dass $\langle f, g \rangle_{C([a, b])} := \int_a^b f(x)g(x)dx$ auf $C([a, b])$ ein Skalarprodukt ist, denn dann folgt mit Korollar 1.6 bereits, dass $\|f\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{C([a, b])}} := \sqrt{\langle f, f \rangle_{C([a, b])}}$ eine Norm sein muss. Da sich die Symmetrie aus der Kommutativität der Multiplikation in $\mathbb{R}$ und die Bilinearität aus der Linearität des Integrals ergibt, bleibt nur die Definitheit zu überprüfen, d.h., zu zeigen ist, dass

$$\forall f \in C([a, b]): \langle f, f \rangle_{C([a, b])} \geq 0 \quad \text{und} \quad \langle f, f \rangle_{C([a, b])} = 0 \in \mathbb{R} \iff f = 0 \in C([a, b]).$$

Ersteres ergibt sich aus $0 \leq (f(x))^2$ und der Monotonie des Integrals. Ebenso sieht man, dass $\langle 0, 0 \rangle_{C([a,b])} = 0$. Sei nun $\langle f, f \rangle_{C([a,b])} = 0$ für ein $f \in C([a,b])$. Angenommen, f ist nicht die Nullfunktion, dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit $|f(\xi)| = \eta > 0$. Aufgrund der Stetigkeit von f und daher auch von $|f|$ finden wir ein $\delta > 0$, so dass $\forall x \in I := [\xi - \delta, \xi + \delta] \cap [a,b] : |f(x)| \geq \varepsilon := \frac{\eta}{2}$. Wegen $I = [\alpha, \beta] \subset [a,b]$ und da die Länge von I mindestens $\delta > 0$ beträgt (beachte, dass ξ auch am Rand liegen kann), erhalten wir nun mit den Eigenschaften des Integrals den Widerspruch

$$0 = \langle f, f \rangle_{C([a,b])} = \int_a^b |f(x)|^2 dx \geq \int_\alpha^\beta |f(x)|^2 dx \geq \int_\alpha^\beta \varepsilon^2 dx \geq (\beta - \alpha) \varepsilon^2 \geq \delta \varepsilon^2 > 0.$$

Desweiteren ergibt sich aufgrund der Linearität und Monotonie des Integrals

$$\|f\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{C([a,b])}}^2 = \int_a^b (f(x))^2 dx \leq \int_a^b \left(\max_{x \in [a,b]} |f(x)| \right)^2 dx = \int_a^b \|f\|_\infty^2 dx = (b-a) \cdot \|f\|_\infty^2.$$

Aufgrund der Nichtnegativität liefert Wurzelziehen nun die noch ausstehende Behauptung.

- (c) Gleichmäßige Konvergenz ist gleichbedeutend mit der Konvergenz bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$. Aufgrund der in (b) gezeigten Ungleichung impliziert dies aber auch die Konvergenz bezüglich $\|f\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{C([a,b])}}$, was aber genau der Konvergenz im quadratischen Mittel entspricht.
- (d) Betrachten wir die Funktionenfolge $f_k: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x) := \left(\frac{|x - \pi|}{\pi} \right)^k$, so konvergiert sie im quadratischen Mittel gegen die Nullfunktion, denn es gilt

$$\int_0^{2\pi} |f_k(x) - 0|^2 dx = 2 \int_0^\pi \left(\frac{\pi - x}{\pi} \right)^{2k} dx = -\frac{2\pi}{2k+1} \left(\frac{\pi - x}{\pi} \right)^{2k+1} \Big|_0^\pi = \frac{2\pi}{2k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Es gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) := \begin{cases} 0 & \text{bei } 0 < x < 2\pi \\ 1 & \text{bei } x = 0 \text{ oder } x = 2\pi \end{cases},$

also konvergiert f_k punktweise gegen die auf der rechten Seite definierte Funktion $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

Jedoch konvergiert f_k nicht gleichmäßig gegen f , denn:

- Variante A: $\sup_{x \in [0, 2\pi]} |f_k(x) - f(x)| = 1$ wegen $\lim_{\substack{x \searrow 0 \\ x \neq 0}} f_k(x) = 1$ und $f(x) = 0$ für $0 < x < 2\pi$,
- Variante B: f müsste als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen stetig sein.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 2

Konvergenz in normierten Räumen – (vgl. Abschnitt 1.3):

- **Definition 1.15:** Eine Folge x_k von Punkten in einem normierten Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ heißt **konvergent** gegen $x \in X$, falls $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\| = 0$ in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ gilt oder äquivalenterweise falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} : (k \geq K \implies \|x_k - x\| \leq \varepsilon).$$

Analog heißt eine Folge x_k eine **Cauchy-Folge** in $(X, \|\cdot\|)$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \forall k, \ell \in \mathbb{N} : (k, \ell \geq K \implies \|x_k - x_\ell\| \leq \varepsilon),$$

und sie heißt **beschränkt** in $(X, \|\cdot\|)$, falls $x \in X$ und $r > 0$ mit $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset B_r(x)$ existieren, oder äquivalenterweise, falls es ein $C > 0$ gibt, so dass $\|x_k\| \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

- **Lemma 1.16:** Eine Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ aus dem $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ gegen ein $x \in \mathbb{R}^n$, wenn für jedes $j = 1, \dots, n$ die Komponentenfolge $(x_j^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ gegen die j -te Komponente x_j von x konvergiert.
- **Satz 1.17: [Vererbung der Vollständigkeit und des Satzes von Bolzano-Weierstraß]**
 - (a) Jede Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ konvergiert.
 - (b) Jede beschränkte Folge in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ besitzt eine konvergente Teilfolge.
- **Satz 1.18:** Sind $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ äquivalente Normen auf einem Vektorraum X , dann konvergiert eine Folge in $(X, \|\cdot\|)$ genau dann, wenn sie in $(X, \|\cdot\|')$ konvergiert.
- **Satz 1.19/Kor. 1.20:** Je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ (bzw. X mit $\dim(X) = n$) sind äquivalent.
- **Bemerkung:** Die Aussagen 1.18, 1.19 und 1.20 implizieren, dass die Konvergenz einer Folge in einem endlich-dimensionalen normierten Raum nicht von der Norm abhängt, d.h., sie konvergiert genau dann bezüglich einer Norm, wenn sie auch bezüglich aller anderen Normen konvergiert.
Aber: In unendlich-dimensionalen normierten Räumen kann die Konvergenz einer Folge sehr wohl von der gewählten Norm abhängen.

Konvergenz in metrischen Räumen, Vollständigkeit – (vgl. Skript, Abschnitt 1.4, 1.5):

- **Definition 1.21:** Eine Folge x_k von Punkten in einem metrischen Raum (M, d) heißt **konvergent** gegen $x \in M$, falls $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x) = 0$ in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ gilt oder äquivalenterweise falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} : (k \geq K \implies d(x_k, x) \leq \varepsilon).$$

Analog heißt eine Folge x_k eine **Cauchy-Folge** in (M, d) , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \forall k, \ell \in \mathbb{N} : (k, \ell \geq K \implies d(x_k, x_\ell) \leq \varepsilon),$$

und **beschränkt** in (M, d) , falls ein $x \in M$ und ein $r > 0$ mit $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset B_r(x)$ existieren.

- **Definition 1.22:** Eine Teilmenge $V \subset M$ eines metrischen Raumes (M, d) heißt **Umgebung** des Punktes $x \in M$, falls ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset V$ – oder äquivalenterweise – falls eine offene Menge $U \subset V$ mit $x \in U$ existiert.
- **Lemma 1.23:** Eine Folge x_k von Punkten in einem metrischen Raum (M, d) konvergiert genau dann gegen ein $x \in M$, wenn in jeder Umgebung von x alle bis auf endlich viele Folgenglieder x_k liegen, d.h., falls $\forall$ Umgebungen V von $x \exists K \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} : (k \geq K \implies x_k \in V)$.

Fazit: Die Konvergenz in metrischen Räumen hängt nur von der Topologie ab.

- **Lemma 1.24:** Seien (M, d_M) und (L, d_L) metrische Räume. Eine Folge (m_k, ℓ_k) konvergiert genau dann im Produktraum $(M \times L, d_{M \times L})$ mit $d_{M \times L}((m, \ell), (\tilde{m}, \tilde{\ell})) := d_M(m, \tilde{m}) + d_L(\ell, \tilde{\ell})$ gegen ein $(m, \ell) \in M \times L$, wenn m_k in (M, d_M) gegen m und ℓ_k in (L, d_L) gegen ℓ konvergieren.

- **Definition 1.27:**

- Ein metrischer Raum (M, d) heißt **vollständig**, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert.
- Einen vollständigen¹ normierten Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ nennt man einen **Banach-Raum**.
- Ein vollständiger² Euklidischer Vektorraum $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt **Hilbert-Raum**.

- **Beispiele:**

- (a) Der $\mathbb{R}^n$ wird mit dem üblichen Skalarprodukt zu einem Hilbert-Raum (nach Satz 1.17).
- (b) Die Sätze 1.17, 1.18, 1.19 implizieren die Vollständigkeit von $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ mit beliebiger Norm.
- (c) Satz 21.1 (Forster, Analysis I) impliziert die Vollständigkeit von $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

- **Definition 1.25:** Sei (M, d) ein metrischer Raum. Ein Punkt $x \in M$ heißt **Berührungspunkt** einer Teilmenge $A \subset M$, wenn es eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in A mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ gibt, oder ...

äquivalenterweise, wenn in jeder Umgebung von x mindestens ein Punkt aus A liegt.

Die Menge aller Berührungspunkte³ von A bezeichnen wir mit $\bar{A}$ und heißt der **Abschluss** von A .

- **Definition 1.26:** Eine Teilmenge $A \subset M$ eines metrischen Raumes (M, d) heißt **abgeschlossen**, wenn für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus A , die in (M, d) konvergiert, auch der Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ in A liegt, – mit anderen Worten – wenn sie jeden ihrer Berührungspunkte enthält, d.h. wenn $A = \bar{A}$ gilt.

- **Bemerkungen/Bezeichnungen:**

- (a) $A \subset M$ ist genau dann **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement $U = M \setminus A$ offen ist.
- (b) $\bar{A}$ ist die minimale A enthaltende in (M, d) abgeschlossene Menge. Analog nennt man die maximale in A enthaltene offene Menge das **Innere** von A und bezeichnet sie mit A° .
- (c) Die Menge A° besteht genau aus den **inneren Punkten** von A , d.h. aus denjenigen Punkten $x \in A$, für die es eine Kugel $B_r(x)$ ($r > 0$) um x mit $B_r(x) \subset A$ gibt.
- (d) Zuletzt definieren wir noch den **Rand** ∂A einer Teilmenge $A \subset M$ durch $\partial A := \bar{A} \setminus A^\circ$.
- (e) Es ist $\partial A = \{x \in M \mid \forall \varepsilon > 0 \exists y \in B_\varepsilon(x) \cap A, \exists z \in B_\varepsilon(x) \setminus A\}$, d.h., der Rand von A besteht genau aus den Punkten x , für die in jeder Umgebung von x sowohl Punkte aus A als auch Punkte aus $M \setminus A$ liegen.
- (f) Für $\emptyset \neq A \subset M$ bezeichnet $\text{diam}(A) := \sup_{x, y \in A} d(x, y)$ den **Durchmesser**.
- (g) Offenbar gilt: A ist beschränkt $\iff \text{diam}(A) < \infty$.

- **Lemma 1.29:** Ein metrischer Raum (M, d) ist genau dann vollständig, wenn das Schachtelungsprinzip gilt, d.h., wenn es zu jeder Folge $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ ineinander geschachtelter nichtleerer abgeschlossener Teilmengen von M mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(A_k) = 0$ genau einen Punkt $x \in M$ gibt, so dass $\forall k \in \mathbb{N} : x \in A_k$.

- **Lemma 1.30:** Jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset M$ eines vollständigen metrischen Raumes (M, d) wird mit der eingeschränkten Metrik $d|_{A \times A}$ wieder zu einem vollständigen metrischen Raum $(A, d|_{A \times A})$.

Folgerung: Jeder abgeschlossene lineare Unterraum $U \leq X$ eines Banach-Raumes $(X, \|\cdot\|)$ wird mit derselben auf den Unterraum U eingeschränkten Norm zu einem Banach-Raum $(U, \|\cdot\|)$.

¹bezüglich der norminduzierten Metrik $d_{\|\cdot\|}$, vgl. Beispiel 1.9

²bezüglich der induzierten Norm $\|\cdot\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$, vgl. Korollar 1.6

³Insbesondere gilt $A \subset \bar{A}$, da für $x \in A$ die konstante Folge $x, x, \dots$ offensichtlich gegen x konvergiert.

Zusatzaufgabe 2.1:

- (a) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie, dass eine Menge $A \subset M$ genau dann Komplement einer offenen Menge ist, wenn sie all ihre Berührungspunkte enthält.
- (b) Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Zeigen Sie: $\forall x \in X: \{x\}$ ist abgeschlossen.
- (c) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ und geben Sie jeweils das Innere sowie den Abschluss an:
- (i) $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 \geq 1\}$ (ii) $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 1 < y \leq 2\}$
- (iii) $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < y^2\}$ (iv) $E := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, \sin\left(\frac{1}{x}\right) = y \right\}$ (v) $\mathbb{Q}^2$
- (d) Zeigen Sie, dass in einem metrischen Raum X die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist. Gilt dies auch für abzählbar viele Mengen?

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.1:

- (a) „ $\Leftarrow$ “ Enthält A all seine Berührungspunkte, dann ist jeder Punkt $x \in M \setminus A$ kein Berührungspunkt von A , also gibt es zu jedem Punkt $x \in M \setminus A$ eine Umgebung V von x , in der kein Punkt aus A liegt, d.h., eine Umgebung V von x mit $V \subset M \setminus A$. Somit ist $U := M \setminus A$ Umgebung all seiner Punkte und daher offen, d.h., $A = M \setminus U$ ist das Komplement einer offenen Menge.
„ $\Rightarrow$ “ Ist umgekehrt $A = M \setminus U$ Komplement einer offenen Menge U und x ein Berührungspunkt von A , dann kann x nicht in U liegen. Denn läge x in U , dann gäbe es aufgrund der Offenheit von U eine Umgebung um x , die komplett in U läge und daher keinen Punkt aus A enthielte, im Widerspruch dazu, dass x Berührungspunkt von A ist. Also liegt x (und somit jeder Berührungspunkt von A) automatisch in A .
- (b) Sei $A \subset X$ eine einelementige Menge, d.h., es existiere ein $a \in X$ mit $A = \{a\}$. Dann ist die einzig mögliche Folge, welche man aus Elementen aus A bilden kann, die konstante Folge $x_k := a$, welche konvergiert (warum?), und zwar gegen a . Daher ist a der einzige Berührungspunkt von A , welcher jedoch in A enthalten ist, d.h., es gilt $A = \overline{A}$, also A abgeschlossen.
- (c) (i) Die Menge $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 \geq 1\}$ ist das äußere einer offenen ungedrehten Ellipse mit x -Radius $\frac{1}{2}$ und y -Radius $\frac{1}{3}$. Sie ist abgeschlossen, also gilt $\overline{B} = B$, und das Innere von B ist $B^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 > 1\}$.
- (ii) Die Menge C hat die Gestalt eines Quadrats, allerdings ist C weder offen (da der obere Rand des Rechtecks zur Menge dazugehört) noch abgeschlossen (da die übrigen Ränder nicht zur Menge dazugehören). Das Innere von C ist $C^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 1 < y < 2\}$, während der Abschluss $\overline{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$ ist.
- (iii) Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < y^2\}$ ist als Urbild des offenen Intervalls $] - \infty, 0[$ unter der stetigen Funktion $f(x, y) := x^2 - y^2$ offen und hat die Gestalt eines beidseitigen Kegels ohne Rand und Ursprung. Als offene Menge ist ihr Inneres die Menge selbst, während der Abschluss $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y^2\}$ ist.
- (iv) Die Menge E ist der Graph der stetigen Funktion $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, daher ist ihr Inneres leer. Da die Funktion nahe $x = 0$ zwischen -1 und 1 hin- und herpendelt, ist der Abschluss des Graphen
- $$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, \sin\left(\frac{1}{x}\right) = y \right\} \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$$
- (v) Das Innere von $\mathbb{Q}^2$ ist leer, der Abschluss ist ganz $\mathbb{R}^2$. Insbesondere ist somit $\mathbb{Q}^2$ in $(\mathbb{R}^2, d_{\|\cdot\|_2})$ weder offen noch abgeschlossen.
- (d) Seien A_k ($k = 1, \dots, n$) abgeschlossen.

Dann sind $X \setminus A_k$ ($k = 1, \dots, n$) und somit auch $\bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k) = X \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k$ offen.

Deswegen ist $\bigcup_{k=1}^n A_k = X \setminus (X \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k)$ abgeschlossen. Aber $\bigcup_{k=1}^{\infty} [\frac{1}{k}, 1] =]0, 1]$.

- Zusatzaufgabe 2.2:** (a) Konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch $x_n(t) := t^n - t^{3n}$, in $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$?
 (b) Auf dem Quader $M := [0, 1] \times [0, 1]$ in $\mathbb{R}^2$ seien durch $\delta_1(x, y) = \|x - y\|_2$ bzw.

$$\delta_2(x, y) = \begin{cases} 2, & x_2 \neq y_2, \\ |x_1 - y_1|, & x_2 = y_2, \end{cases} \quad \left(\text{mit } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$$

Metriken $\delta_1, \delta_2: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definiert (muss nicht gezeigt werden). Konvergiert die Folge $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) := (\frac{n-1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3^n})$ in den metrischen Räumen (M, δ_1) bzw. (M, δ_2) ?

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.2:

- (a) • Wenn x_n in der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm (also gleichmäßig) gegen ein x konvergiert, so muss x_n notwendigerweise auch punktweise gegen diesen Grenzwert konvergieren. Wegen $x_n = t^n(1 - t^{2n})$ muss somit $x(t) \equiv 0$ gelten.
 • Wegen $x'_n(t) = nt^{n-1} - 3nt^{3n-1} = t^{n-1}(n - 3nt^{2n})$ nimmt x_n sein Maximum bei $t_0(n) = 3^{-\frac{1}{2n}}$ an, so dass die Folge $(x_n)_n$ in der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm nicht konvergiert, denn es gilt

$$\max_{t \in [0, 1]} |x_n(t)| = x_n(t_0(n)) = 3^{-\frac{1}{2}} - 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} 3^{-\frac{1}{2}} \not\rightarrow 0.$$

- (b) • Da die Metrik δ_1 norminduziert ist, konvergiert eine Folge $x^{(n)}$ aus M in (M, δ_1) genau dann, wenn sie auch im normierten Raum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ konvergiert, also nach Lemma 1.16 genau dann, wenn die Komponentenfolgen $x_1^{(n)}$ und $x_2^{(n)}$ in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ konvergieren. Da letztere für $n \rightarrow \infty$ gegen 1 beziehungsweise $\frac{1}{2}$ konvergieren, konvergiert auch $x^{(n)}$ für $n \rightarrow \infty$, und zwar gegen $(1, \frac{1}{2}) \in M$.
 • Offensichtlich ist für die Konvergenz einer Folge im metrischen Raum (M, δ_2) notwendig, dass sie ab einem gewissen Index in der zweiten Komponente konstant wird. Da dies auf die Folge $(x_2^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ nicht zutrifft, gilt $m \neq n \implies \delta_2(x^{(m)}, x^{(n)}) = 2$, so dass $x^{(n)}$ in (M, δ_2) noch nicht einmal eine Cauchy-Folge ist, also dort auch nicht konvergieren kann.

Zusatzaufgabe 2.3:

- (a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Überprüfen Sie in $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ die Abgeschlossenheit der Teilmenge

$$\mathbb{P}_k := \left\{ x \in C([a, b], \mathbb{R}) \mid x(t) = \sum_{i=0}^k \alpha_i t^i \text{ mit } \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ und } \alpha_k \neq 0 \right\}.$$

- (b) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subseteq X$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$(A, d|_A) \text{ ist vollständig} \iff A \text{ ist abgeschlossen in } (X, d).$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.3:

- (a) Die Folge $x_n(t) := n^{-1}t^k \rightarrow 0$ konvergiert offenbar in $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ gegen die Nullfunktion, welche – da der Koeffizient vor t^k nicht ungleich Null ist – nicht mehr in $\mathbb{P}_k$ liegt, obwohl $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \in \mathbb{P}_k$ gilt. Somit ist $\mathbb{P}_k$ nicht abgeschlossen.
 (b) „ $\implies$ “: Sei $(A, d|_A)$ vollständig und $b \in A$ Berührungspunkt von A in (X, d) . Dann existiert eine Folge a_n aus A , die in (X, d) gegen b konvergiert, diese ist dann auch eine Cauchy-Folge in (X, d) , also – wegen $a_n \in A$ und $d = d|_A$ auf A – auch eine Cauchy-Folge in $(A, d|_A)$. Aufgrund der Vollständigkeit muss die Folge a_n dann auch in $(A, d|_A)$ konvergieren, d.h., es muss ein $a \in A$ mit $d|_A(a_n, a) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ existieren. Wegen $a, a_n \in A$ und $d = d|_A$ auf A muss dann a_n auch in (X, d) gegen a konvergieren. Da jeder metrische Raum Hausdorffsch ist (vgl. ZA 1.3 (d)) und Grenzwerte in Hausdorff-Räumen eindeutig sind (vgl. ZA 2.1 (a)), folgt nun auch $b = a \in A$, d.h., A ist abgeschlossen in (X, d) .

„ $\impliedby$ “: Sei A abgeschlossen in (X, d) und $x_n \in A$ eine Cauchy-Folge in (X, d) . Dann konvergiert x_n aufgrund der Vollständigkeit von (X, d) gegen einen Punkt $x \in X$, der wegen $x_n \in A$ offensichtlich ein Berührungspunkt von A ist. Aufgrund der Abgeschlossenheit von A muss x jedoch schon in A liegen, d.h., x_n konvergiert bereits in $(A, d|_A)$. Somit ist $(A, d|_A)$ vollständig.

Zusatzaufgabe 2.4: Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \left\{ x = (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \right\}$ der lineare Raum aller reellen Zahlenfolgen.

- **Beispiel F.1:** Der Folgenraum $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ist ein Banach-Raum, wobei $p \in [1, \infty[$ sowie

$$\ell^p := \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty \right\} \quad \text{und} \quad \|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.1)$$

- **Beispiel F.2:** Der Folgenraum $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banach-Raum, wobei

$$\ell^\infty := \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k| < \infty \right\} \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k|. \quad (2.2)$$

- (a) Finden Sie Beispielfolgen $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit (i) $x \in \ell^2 \setminus \ell^1$ (ii) $x \in \ell^\infty \setminus \ell^1$ (iii) $x \notin \ell^\infty$.
- (b) Ist in $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ die Teilmenge $M := \{x \in \ell^1 \mid \forall k \in \mathbb{N}: |x(k)| \leq 1\}$ abgeschlossen?
- (c) Zeigen Sie: (i) $p \in [1, \infty[\implies \ell^p \subset \ell^\infty$. (ii) $p, q \in [1, \infty[\wedge p < q \implies \ell^p \subset \ell^q$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.4:

- (a) (i) $x = ((-1)^k \frac{1}{k})_{k \in \mathbb{N}}$ oder $x = (\frac{1}{5k})_{k \in \mathbb{N}}$. (ii) $x = (\frac{1}{1000})_{k \in \mathbb{N}}$ oder $x = (50)_{k \in \mathbb{N}}$ (iii) $x = (k)_{k \in \mathbb{N}}$
- (b) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((x_n(k))_{k \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $M \subset \ell^1$ mit $x_n \rightarrow x_0$ in $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$. Dies bedeutet also $\left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_n(k) - x_0(k)| \right) =: a_n \rightarrow 0$. Aufgrund der nichtnegativen Summanden muss dann notwendigerweise auch $|x_n(k) - x_0(k)| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ gelten.

- Angenommen, es gelte $|x_0(k)| > 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so folgte nach der umgekehrten Dreiecksungleichung wegen $x_n \in M$ der Widerspruch

$$0 < \varepsilon := |x_0(k)| - 1 \leq |x_0(k)| - |x_n(k)| \leq |x_n(k) - x_0(k)| \rightarrow 0,$$

wonach also $\forall k \in \mathbb{N}: |x_0(k)| \leq 1$, d.h. gelten muss.

Somit gilt $x_0 \in M$ und M abgeschlossen in $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$, so dass $(M, \|\cdot\|_1)$ ein Banach-Raum ist.

- (c) (i) Dies folgt aus der Implikationskette

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k|^p < \infty \implies \sum_{k \in \mathbb{N}} \xi_k^p \text{ konvergent} \implies (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ konvergent} \implies (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt.}$$

- (ii) Für $1 \leq p < q$ und $x \in \ell^p$ existiert wegen $|\xi_k|^p \rightarrow 0 \implies |\xi_k| \rightarrow 0 \implies |\xi_k|^{q-p} \rightarrow 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_0$ die Ungleichung $|\xi_k|^q = |\xi_k|^{q-p} |\xi_k|^p \leq 1 \cdot |\xi_k|^p$ erfüllt ist. Aus $x \in \ell^p$ folgt daher mit dem Majorantenkriterium auch $x \in \ell^q$.

Zusatzaufgabe 2.5: Finden Sie die optimalen $c, C > 0$ mit $c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.5:

Über die Cauchy-Schwarz-Ungleichung sowie mit $\|(1)_{k=1}^n\|_2 = \sqrt{n}$ ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}^n$ einerseits

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n |x_k| = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n |x_k \cdot 1| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_2 \|(1)_{k=1}^n\|_2 = \|x\|_2,$$

und unter Verwendung von $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2$ andererseits

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2} \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1.$$

Mit $x = (1, 1, \dots, 1)^T$ bzw. $x = (1, 0, \dots, 0)^T$ folgt die Optimalität von $c = \frac{1}{\sqrt{n}}$ und $C = 1$.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 3

Banachscher Fixpunktsatz – (vgl. Skript, Abschnitt 1.6)

- **Satz 1.32:** Ist $f: M \rightarrow M$ eine Kontraktion auf einem vollständigen metrischen Raum (M, d) , d.h., existiert ein $L < 1$, so dass für alle $x, y \in M$ die Ungleichung $d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$ erfüllt wird, dann gibt es genau einen Punkt $x^* \in M$ mit $f(x^*) = x^*$, welcher **Fixpunkt** von f genannt wird. Darüber hinaus konvergiert zu jedem Startwert $x_0 \in M$ jeweils die rekursiv durch $x_{k+1} = f(x_k)$ definierte Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ in (M, d) gegen den Fixpunkt x^* von f .
- **Korollar 1.33:** Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine kontrahierende Selbstabbildung von D , d.h., es gilt $f(D) \subset D$ und es gibt ein $L < 1$ mit $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$ für alle $x, y \in D$, so existiert ein eindeutiger Fixpunkt $x^* \in D$ von f .

Stetigkeit – (vgl. Skript, Abschnitt 1.7)

- **Definition 1.34:** Seien (M, d_M) und (N, d_N) metrische Räume. Dann heißt eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ **stetig im Punkt** $m \in M$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in M: (d_M(x, m) \leq \delta \implies d_N(f(x), f(m)) \leq \varepsilon)$$

oder – äquivalenterweise – falls wir von jeder Folge $x_k \in M$, die in (M, d_M) gegen m konvergiert, auch schon wissen, dass die Folge $f(x_k) \in N$ in (N, d_N) gegen $f(m)$ konvergiert.

Die Abbildung $f: M \rightarrow N$ nennen wir **stetig**, wenn sie in jedem Punkt $m \in M$ stetig ist.

- **Lemma 1.35:** Seien (M, d_M) und (N, d_N) metrische Räume. Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ ist genau dann stetig im Punkt $m \in M$, wenn zu jeder Umgebung $V \subset N$ von $f(m)$ eine Umgebung $U \subset M$ von m mit $f(U) \subset V$ existiert.
- **Satz 1.36:** Seien (M, d_M) und (N, d_N) metrische Räume. Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ ist genau dann stetig, falls für jede in (N, d_N) offene Menge V das Urbild $f^{-1}(V) := \{m \in M \mid f(m) \in V\}$ offen in (M, d_M) ist.⁴
- **Korollar 1.37:** Sei (M, d_M) ein metrischer Raum. Für eine stetige Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $d_{\mathbb{R}} = d_{|\cdot|}$) und einen Wert $c \in \mathbb{R}$ ist die Menge $U := \{x \in M \mid f(x) < c\}$ offen in (M, d_M) und die Menge $A := \{x \in X \mid f(x) \leq c\}$ abgeschlossen in (M, d_M) .
- **Beispiel 1.38:** (a) Jede konstante Abbildung $f: M \rightarrow N$, $m \mapsto b$ für ein festes $b \in N$ ist stetig.
(b) Die Norm $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem normierten Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ ist stetig in jedem Punkt.
(c) Auf einem normierten Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ sind Addition $+: X \times X \rightarrow X$ und Multiplikation mit einem Skalar $\cdot: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ stetig in allen $(x, y) \in X \times X$ bzw. $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X$.
(d) Die Division $\div: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ reeller Zahlen ist stetig in jedem Punkt (x, y) mit $y \neq 0$.
(e) Die Projektion $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x$, eines Produktes $X \times Y$ auf den Faktor X ist stetig. Insbesondere sind die Koordinatenfunktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x_k$, stetig.
- **Lemma 1.39:** Gegeben seien die metrischen Räume $(L, d_L), (M, d_M), (N, d_N)$ und die Abbildung $f = (f_1, f_2): L \rightarrow M \times N$. Dann ist f genau dann im Punkt $a \in L$ stetig, wenn die Komponentenfunktionen $f_1: L \rightarrow M$ und $f_2: L \rightarrow N$ im Punkt $a \in L$ stetig sind.⁵

⁴Eine direkte Konsequenz dieses Satzes ist, dass aufgrund der Eigenschaften des Urbildes eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ genau dann stetig ist, falls für jede in (N, d_N) abgeschlossene Menge V das Urbild $f^{-1}(V) := \{m \in M \mid f(m) \in V\}$ selbst auch wieder abgeschlossen in (M, d_M) ist.

⁵**Vorsicht:** Für Funktionen $f: L \times M \rightarrow N$, $(\ell, m) \mapsto f(\ell, m)$ ist die Aussage, dass $\ell \mapsto f(\ell, m)$ und $m \mapsto f(\ell, m)$ stetig sind, **nicht** zur Aussage äquivalent, dass f stetig ist (vgl. Skript, Beispiel 1.42).

- **Satz 1.40:** Gegeben seien die metrischen Räume $(L, d_L), (M, d_M), (N, d_N)$ und die Abbildungen $g: L \rightarrow M$ und $h: M \rightarrow N$. Ist die Abbildung g im Punkt $a \in L$ und die Abbildung h im Punkt $g(a) \in M$ stetig, dann ist auch die Komposition $h \circ g: L \rightarrow N$ stetig.
- **Korollar 1.41:** Für stetige Funktionen $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem metrischen Raum (M, d_M) sind die Abbildungen $f + g, f \cdot g$ und – falls zusätzlich $g(x) \neq 0$ für alle $x \in M$ gilt – auch $\frac{f}{g}$ stetig.
- **Definition:** Eine stetige Bijektion $f: M \rightarrow N$ zwischen metrischen Räumen $(M, d_M), (N, d_N)$, deren Umkehrabbildung $f^{-1}: N \rightarrow M$ stetig ist, nennen wir einen **Homöomorphismus** zwischen (M, d_M) und (N, d_N) . Die Räume (M, d_M) und (N, d_N) heißen dann **homöomorph**.⁶
- **Definition 1.44:** Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ zwischen metrischen Räumen (M, d_M) und (N, d_N) heißt
 - **gleichmäßig stetig** : $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x': (d_M(x, x') < \delta \implies d_N(f(x), f(x')) < \varepsilon)$
 - **Lipschitz-stetig** : $\Longleftrightarrow \exists L < \infty \forall x, x' \in M: d_N(f(x), f(x')) \leq L \cdot d_M(x, x')$
- **Lemma 1.45:** Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume. Für $f: M \rightarrow N$ gilt dann:

$$f \text{ Lipschitz-stetig} \implies f \text{ gleichmäßig stetig} \implies f \text{ stetig}$$

- **Definition 1.47:** Sind $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume, so besitzt eine Abbildung $f: D \rightarrow N$ ($D \subset M$) in einem Berührungspunkt a von $D \setminus \{a\}$ den **Grenzwert** $y \in N$, falls es zu jeder Umgebung $V \subset N$ von y eine Umgebung $U \subset D \cup \{a\}$ von a mit $f(U \setminus \{a\}) \subset V$ gibt.⁷

Bemerkungen/Bezeichnungen:

- (a) Ein Berührungspunkt a von $D \setminus \{a\}$ wird auch **Häufungspunkt** genannt, denn dann gibt es eine Folge $a \neq x_k \in D$ mit $x_k \rightarrow a$ (insbesondere kann $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ nicht nur aus endlich vielen Elementen bestehen, da sonst $\inf_{\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}} d(x_k, a) > 0$ im Widerspruch zur Konvergenz gelten würde). Insbesondere liegen in jeder Kugel um a unendlich viele Elemente aus D .
- (b) Im Falle der Existenz des Grenzwertes y von f in a erhalten wir durch die Definition $f(a) := y$ eine in a stetige Funktion $f: D \cup \{a\} \rightarrow N$, welche die **stetige Abänderung** (bei $a \in D$) bzw. **stetige Fortsetzung** (bei $a \notin D$) von f genannt wird.
- **Definition 1.48:** Eine Folge $f_k: M \rightarrow N$ von Abbildungen zwischen metrischen Räumen $(M, d_M), (N, d_N)$ nennen wir **gleichmäßig konvergent** gegen $f: M \rightarrow N$, falls gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in M} d_N(f_k(x), f(x)) \right) = 0.$$

- **Lemma 1.49:** Die Grenabbildung $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ einer gleichmäßig konvergenten Folge $f_k: M \rightarrow N$ stetiger Abbildungen zwischen metrischen Räumen $(M, d_M), (N, d_N)$ ist stetig.

Stetige lineare Abbildungen – (vgl. Skript, Abschnitt 1.8)

- **Definition:** Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte (ggf. unendlich dimensionale) $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Eine Abbildung $A: X \rightarrow Y$ heißt **lineare Abbildung** von X nach Y , falls für alle $x, x' \in X$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ die Gleichungen $A(x + x') = A(x) + A(x')$ und $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ erfüllt sind.
- **Lemma 1.50:** Eine lineare Abbildung $A: X \rightarrow Y$ zwischen normierten Vektorräumen $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ ist genau dann stetig, wenn es eine Konstante $L < \infty$ gibt⁸ mit

$$\forall x \in X: \|Ax\|_Y \leq L \|x\|_X. \quad (3.1)$$

⁶Ist $f: M \rightarrow N$ ein Homöomorphismus zwischen (M, d_M) und (N, d_N) , so ist $x_k \rightarrow x$ äquivalent zu $f(x_k) \rightarrow f(x)$.

⁷In diesem Fall schreibt man $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = y$.

⁸Insbesondere gelten für eine lineare Abbildung $A: X \rightarrow Y$ die Äquivalenzen
 A stetig $\iff A$ stetig bei $x = 0 \iff \exists L < \infty \forall x \in X: \|Ax\|_Y \leq L \|x\|_X \iff A$ gleichmäßig stetig

- **Bemerkung/Bezeichnung:** Zusammen mit Korollar 1.41 ergibt sich, dass zu festen normierten Räumen $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ die Menge

$$L(X, Y) := \{A: X \rightarrow Y \mid A \text{ linear und stetig}\} \quad (3.2)$$

einen Vektorraum bildet. Speziell ist $L(X, X)$ der Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen $A: X \rightarrow X$, welche **Endomorphismen** genannt werden.

- **Lemma 1.51/Bezeichnung:** Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ normierte Räume.

(a) Die Funktion $\|\cdot\|_{L(X,Y)}: L(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$, welche für ein $A \in L(X, Y)$ durch

$$\|A\|_{L(X,Y)} := \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0_X}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X=1}} \|Ax\|_Y \quad (3.3)$$

definiert wird, ist eine Norm auf $L(X, Y)$, welche die **Operatornorm** genannt wird.⁹

(b) Für $A \in L(X, Y)$ und $B \in L(Y, Z)$ ist auch $B \circ A \in L(X, Z)$. Desweiteren gilt

$$\|B \circ A\|_{L(X,Z)} \leq \|B\|_{L(Y,Z)} \cdot \|A\|_{L(X,Y)}. \quad (3.4)$$

- **Lemma 1.53/Bezeichnung:** Ist $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum, dann ist auch $L(X, X)$ vollständig und bildet zusammen mit der Komposition von Abbildungen eine sogenannte **Banach-Algebra**, d.h., $L(X, X)$ ist ein Banach-Raum versehen mit einer bilinearen assoziativen Multiplikation

$$L(X, X) \times L(X, X) \ni (A, B) \mapsto AB := A \circ B \in L(X, X)$$

und der zusätzlichen Eigenschaft, dass $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ für alle $A \in L(X, X)$ gilt.

- **Definition/Bemerkung:** Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X .

(a) Eine **Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ in X ist die Folge der Partialsummen $S_n := \sum_{k=0}^n x_k$, heißt **konvergent**,

falls (S_n) in X konvergiert, und **absolut konvergent**, falls $\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|_X$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

(b) In $L(X, X)$ lassen sich die Begriffe Potenzreihe und Konvergenzradius übertragen.

(c) Für $A \in L(X, X)$ heißt $f(A) := \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ die **Neumann-Reihe**.

- **Lemma 1.54:** Jede absolut konvergente Reihe in einem Banach-Raum konvergiert.
- **Satz 1.55:** Die Gruppe $GL(X) := \{A \in L(X, X) \mid A \text{ invertierbar}\}$ auf einem Banach-Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ ist offen in $(L(X, X), \|\cdot\|_{L(X,X)})$, und $GL(X) \ni A \mapsto A^{-1} \in GL(X)$ ist stetig.

Zusatzaufgabe 3.1:

- (a) Beweisen Sie Satz 1.32 und Korollar 1.33.
- (b) Zeigen Sie: Auf dem Euklidischen $\mathbb{R}^2$ besitzt die durch $f(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(x+y)^2 \\ \frac{1}{4}\sin(x) + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ definierte Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ im Quadrat $[0, 1]^2$ genau einen Fixpunkt.
- (c) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) := \ln(1 + e^x)$ definiert.
- Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ gilt $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, aber f besitzt keinen Fixpunkt. Warum widerspricht dies nicht dem Banachschen Fixpunktsatz?
 - Konvergiert die durch $x_{k+1} = f(x_k)$ zu einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ definierte Folge?
- (d) Welches ist das maximale (beschränkte) Intervall, auf dem $f(x) := x^2$ eine Selbstabbildung ist? Für welche $b > 0$ ist $f: [0, b] \rightarrow [0, b]$ eine Kontraktion?

⁹Die Operatornorm $\|A\|_{L(X,Y)}$ einer stetigen linearen Abbildung $A: X \rightarrow Y$ ist das kleinstmögliche L aus (3.1).

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.1:

- (a) (i) • Zunächst halten wir fest, dass die Voraussetzung $d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$ aufgrund der Nichtnegativität von Metriken $L \geq 0$ impliziert. Desweiteren ist der Fall $L = 0$ trivial, denn dann folgte aus der Definitheit der Metrik die Konstanz von f , also gäbe es wegen $f(M) \subseteq M$ in diesem Fall ein $x^* \in M$, so dass $\forall x \in M: f(x) = x^*$, also auch $f(x^*) = x^*$ gilt. Somit können wir im Folgenden o.B.d.A. annehmen, dass $L > 0$ gilt.
- Die Eindeutigkeit des Fixpunktes erhalten wir aus der Kontraktionseigenschaft. Angenommen, es existierten $x, \tilde{x} \in M$ mit $x = f(x)$ und $\tilde{x} = f(\tilde{x})$, dann folgt wegen

$$d_M(x, \tilde{x}) = d_M(f(x), f(\tilde{x})) \leq L d_M(x, \tilde{x})$$

und $L < 1$ schon $d_M(x, \tilde{x}) = 0$, also muss nach der Definitheit einer Metrik bereits $x = \tilde{x}$ gelten.

- Die Existenz des Fixpunktes erhalten wir nun aus der Vollständigkeit des Raumes, indem wir – wiederum mit Hilfe der Kontraktionseigenschaft – zeigen, dass die zu einem (sogar beliebigen) Startwert $x_0 \in M$ durch $x_{k+1} := f(x_k)$ rekursiv definierte Folge die Cauchy-Eigenschaft besitzt, also – aufgrund der Vollständigkeit des metrischen Raumes – in (M, d_M) auch einen Grenzwert x^* hat. Für diesen gilt dann – da die Kontraktionseigenschaft von f die Lipschitz-Stetigkeit, also auch die Stetigkeit von f impliziert – schließlich

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) = f(x^*) . \quad (3.5)$$

Nun zur Cauchy-Eigenschaft der oben zu einem Startwert $x_0 \in M$ durch $x_{k+1} := f(x_k)$ rekursiv definierte Folge. Wegen $d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq L d(x_n, x_{n-1})$ folgt für $\ell > k \geq 0$ auch unter mehrfacher Anwendung der Dreiecksungleichung

$$d(x_\ell, x_k) \leq \sum_{n=k}^{\ell-1} d(x_{n+1}, x_n) \leq \sum_{n=k}^{\ell-1} L^{n-k} d(x_{k+1}, x_k) \leq \left(\sum_{n=0}^{\ell-k-1} L^n \right) L^k d(x_1, x_0) .$$

Aufgrund der (im ersten Punkt begründeten) Positivität von L erhalten wir unter Kenntnis der geometrischen Reihe die Abschätzung

$$\sum_{n=0}^{\ell-k-1} L^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} L^n = \frac{1}{1-L} ,$$

so dass wegen $0 < L < 1$ für alle $\ell > k \geq 0$ schließlich

$$d_M(x_\ell, x_k) \leq \frac{L^k}{1-L} d_M(x_1, x_0)$$

folgt. Also finden wir aufgrund der Konvergenz $L^k \rightarrow 0$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\ell > k \geq K$ wie behauptet $d_M(x_\ell, x_k) \leq \varepsilon$ gilt.

- (ii) Der $\mathbb{R}^n$ ist mit jeder norminduzierten Metrik vollständig (vgl. Satz 1.17/ Satz 1.19). Nach Lemma 1.30 ist jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raumes mit der vererbten Metrik wiederum vollständig. Somit folgt die Behauptung aus Satz 1.32.

- (b) Da $[0, 1]^2$ eine abgeschlossene Teilmenge des nach Satz 1.17 vollständigen Euklidischen $\mathbb{R}^2$ ist, ist $([0, 1]^2, d_{\|\cdot\|_2})$ nach Lemma 1.30 selbst auch vollständig. Um den Banachschen Fixpunktsatz (Satz 1.32) anwenden zu können, braucht man daher nur nachzuweisen, dass $f([0, 1]^2) \subset [0, 1]^2$ gilt, also f auf $[0, 1]^2$ eine Selbstabbildung ist, und dass f eine Kontraktion auf $[0, 1]^2$ ist.

- **Selbstabbildung:** Für $(x, y) \in [0, 1]^2$ gelten wegen $(x + y)^2 \leq 4$ und $|\sin(x)| \leq 1$ die Abschätzungen $0 \leq \frac{1}{8}(x + y)^2 \leq \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \sin(x) + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4}$ und somit $f([0, 1]^2) \subset [0, 1]^2$, also ist f eingeschränkt auf $[0, 1]^2$ eine Selbstabbildung.

- **Kontraktion:** Wir suchen ein $L < 1$, so dass

$$\forall (x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in [0, 1]^2 : \|f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})\|_{\text{Euklid}} \leq L \cdot \|(x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y})\|_{\text{Euklid}} .$$

Aus der Definition von f erhalten wir zunächst

$$\|f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})\|_{\text{Euklid}}^2 = \frac{1}{64}((x+y)^2 - (\tilde{x} + \tilde{y})^2)^2 + \frac{1}{16}(\sin(x) - \sin(\tilde{x}))^2 . \quad (3.6)$$

Da $\sin(\xi)$ wegen $\max_{\xi \in \mathbb{R}} |\sin'(\xi)| = 1$ Lipschitz-Konstante 1 besitzt (Anwendung des Mittelwertsatzes), verwenden wir für den zweiten Term aus (3.6) die Abschätzung

$$|\sin(x) - \sin(\tilde{x})| \leq |x - \tilde{x}| .$$

Unter Verwendung der dritten Binomischen Formel und wegen $x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in [0, 1]$ können wir beim ersten Term aus (3.6) die Ungleichungen

$$|(x+y)^2 - (\tilde{x} + \tilde{y})^2| = |(x + \tilde{x} + y + \tilde{y})((x - \tilde{x}) + (y - \tilde{y}))| \leq 4|(x - \tilde{x}) + (y - \tilde{y})|$$

und wegen $|(x - \tilde{x}) + (y - \tilde{y})|^2 = ((x - \tilde{x}) + (y - \tilde{y}))^2$ sowie $2ab \leq a^2 + b^2$ weiter

$$((x - \tilde{x}) + (y - \tilde{y}))^2 \leq (x - \tilde{x})^2 + 2(x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) + (y - \tilde{y})^2 \leq 2((x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2)$$

hinzuziehen. Somit ergibt sich zusammen mit (3.6) die Ungleichung

$$\|f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})\|_{\text{Euklid}}^2 \leq \frac{1}{2}((x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2) + \frac{1}{16}(x - \tilde{x})^2 \leq \frac{9}{16}((x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2) .$$

Also besitzt $f|_{[0,1]^2}$ die Kontraktionskonstante $L = \frac{3}{4}$ und ist somit eine Kontraktion.

Also sind die Voraussetzungen für den Banachschen Fixpunktsatz erfüllt, so dass $f|_{[0,1]^2}$ genau einen Fixpunkt besitzt.

- (c) (i) Es gilt $|f'(\xi)| = \frac{e^\xi}{1+e^\xi} < 1$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}$, also gilt nach dem Mittelwertsatz (bzw. Schrankenatz) $|f(x) - f(y)| < |x - y|$. Aber f besitzt keinen Fixpunkt in $\mathbb{R}$, denn für einen solchen müsste dann $f(x) = x \iff 1 + e^x = e^x$ gelten, Widerspruch.
Das vorige Beispiel steht in keinerlei Widerspruch zum Banachschen Fixpunktsatz, denn ein $L < 1$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ gibt es nicht, da $\lim_{\xi \rightarrow \infty} f'(\xi) = 1$ gilt.
- (ii) Die durch $x_{k+1} := f(x_k)$ definierte Folge $x_k = \ln(k + e^{x_0})$ divergiert¹⁰ bestimmt gegen $+\infty$.
- (d) Das maximale Intervall ist $[-1, 1]$, denn $f([-1, 1]) \subset [0, 1]$ und aus $|x| > 1$ folgt $f(x) > |x|$. Für alle $b < \frac{1}{2}$, denn für $x, y \in [0, b]$ gilt $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y| \leq 2b \cdot |x - y|$.

Zusatzaufgabe 3.2:

- (a) Untersuchen Sie, ob für die Funktionen $f_k: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$, definiert durch

$$f_1(x, y) := \frac{x^2 + y^2}{x^2 + (x - y)^2} , \quad f_2(x, y) := \frac{xy}{x^2 + y^2} , \quad f_3(x, y) := \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f_k(x, y), \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f_k(x, y) \quad \text{sowie} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_k(x, y)$$

existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

- (b) In welchen Punkten sind die Funktionen aus (a) stetig bzw. stetig fortsetzbar?

¹⁰Der Grenzwert müsste die Fixpunktgleichung erfüllen, wir haben jedoch gezeigt, dass es keinen Fixpunkt geben kann.

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.2:

- (a.i) Für die iterierten Grenzwerte gelten aufgrund der „partiellen Stetigkeit“

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f_1(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 0^2}{x^2 + (x - 0)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\ \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f_1(x, y) &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{0^2 + y^2}{0^2 + (0 - y)^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 1 = 1.\end{aligned}$$

Da die ersten beiden Grenzwerte schon nicht übereinstimmen, kann auch der dritte Grenzwert nicht existieren.

(b.i) Der Nenner ist als Normquadrat der Norm $\|x\|_A := \|Ax\|_2$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ stetig und verschwindet aufgrund der Definitheit insbesondere nur in $(x, y) = (0, 0)$. Also folgt mit $f_1 = \frac{\|\cdot\|_2 \cdot \|\cdot\|_2}{\|\cdot\|_A \cdot \|\cdot\|_A}$ die Stetigkeit von f_1 in allen Punkten $(x, y) \neq (0, 0)$ aus Korollar 1.41. Aufgrund der Nichtexistenz des dritten Grenzwertes ist f_1 jedoch in $(0, 0)$ **nicht** stetig fortsetzbar.

- (a.ii) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f_2(x, y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x, y) = 0 \quad \text{sowie} \quad \nexists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_2(x, y)$$

da sowohl $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: f_2(x, 0) = 0$ als auch $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: f_2(0, y) = 0$ sind, jedoch gilt für die Folge $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ einerseits $d_{\|\cdot\|_1}((x_n, y_n), (0, 0)) = 2 \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ und andererseits

$$d_{|\cdot|}(f_2(x_n, y_n), f_2(0, 0)) = \left| \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} - 0 \right| = \frac{1}{2} \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(b.ii) Wegen $f_2 = \frac{\pi_x \cdot \pi_y}{\|\cdot\|_2 \cdot \|\cdot\|_2}$ folgt aufgrund der Definitheit der Norm die Stetigkeit von f_2 in allen Punkten $(x, y) \neq (0, 0)$ aus Korollar 1.41. Aufgrund der Nichtexistenz des dritten Grenzwertes ist f_2 jedoch in $(0, 0)$ **nicht** stetig fortsetzbar.

- (a.iii) Für die iterierten Grenzwerte gelten aufgrund der „partiellen Stetigkeit“

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f_3(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x(x^2 - 0^2)}{x^2 + 0^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0, \\ \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f_3(x, y) &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{0(0^2 - y^2)}{0^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.\end{aligned}$$

Mit der aufgrund von $x^2 \leq x^2 + y^2$ und $y^2 \leq x^2 + y^2$ in allen $(x, y) \neq (0, 0)$ gültigen Abschätzung

$$|f_3(x, y) - 0| = \frac{|x| \cdot |x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |x| \cdot \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) \leq 2|x|$$

folgt die Existenz des dritten Grenzwertes, also $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_3(x, y) = 0$.

(b.iii) Wegen $f_3 = \frac{\pi_x \cdot (\pi_x \cdot \pi_x - \pi_y \cdot \pi_y)}{\|\cdot\|_2 \cdot \|\cdot\|_2}$ folgt aufgrund der Definitheit der Norm die Stetigkeit von f_3 in allen Punkten $(x, y) \neq (0, 0)$ aus Korollar 1.41. Die Funktion ist aufgrund des dritten Grenzwertes sogar in $(0, 0)$ stetig fortsetzbar mit Funktionswert 0.

Zusatzaufgabe 3.3:

- (a) Untersuchen Sie die Stetigkeit der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2|y|^3}{x^2 - xy + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

- (b) Ist durch $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^2}{x^2 - xy + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, eine stetige Funktion gegeben?

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.3:

- (a) Da $x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + (x - y)^2) \geq \frac{1}{2}\|(x, y)\|_2^2 > 0$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt, Konstanten, die Norm sowie die Projektionen $\pi_x: (x, y) \mapsto x, \pi_y: (x, y) \mapsto y$ nach Beispiel 1.38 stetig sind, folgt nun in allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ nach Satz 1.40 und Korollar 1.41 auch die Stetigkeit von

$$f = \frac{\pi_x \cdot \pi_x \cdot (|\cdot| \circ \pi_y) \cdot (|\cdot| \circ \pi_y) \cdot (|\cdot| \circ \pi_y)}{\pi_x \cdot \pi_x - \pi_x \cdot \pi_y + \pi_y \cdot \pi_y}.$$

Es bleibt noch die Stetigkeit in $(0, 0)$ zu überprüfen. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann gilt für alle $(x, y) \in B_\delta^{\|\cdot\|_1}((0, 0)) \setminus \{(0, 0)\}$ mit $\delta := \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}}$ offenbar $|y| \leq \|(x, y)\|_1 < \delta$ und somit auch

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x^2 |y|^3}{x^2 - xy + y^2} \right| \leq 2 \frac{x^2}{x^2 + y^2} |y|^3 \leq 2|y|^3 < 2\delta^3 = \varepsilon.$$

- (b) Nein, denn wäre g in $(0, 0)$ stetig, dann müsste für jede Folge mit $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$ auch $f(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(0, 0) = 0$ gelten (vgl. Definition 1.34). Wegen $f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ speziell für $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, 0)$ oder auch für $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ist dies jedoch nicht der Fall.

Zusatzaufgabe 3.4:

- (a) Seien $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $(X, \|\cdot\|_X) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$. Bezüglich

der Standardnormalbasen besitzen A, B die zugehörigen Matrizen $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 11 & 3 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Operatornormen $\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$ und $\|B\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$.

Welche Operatornormen ergäben sich für $(X, \|\cdot\|_X) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$?

- (b) Auf $(X, \|\cdot\|_X) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ sei $\mathcal{A} \in L(X, X)$ derart gegeben, dass zu festen Basen eine zugehörige symmetrische Matrix $A := (a_{jk})_{j,k=1}^n$ von $\mathcal{A}$ existiert. Bestimmen Sie die Operatornorm.¹¹
- (c) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$A: f \mapsto \int_0^1 xf(x)dx$$

ist linear und stetig von $X := (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ nach $Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, d.h., $A \in L(X, Y)$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.4:

- (a) Die Operatornorm einer linearen Abbildung $L: X \rightarrow Y$ ist nach Definition

$$\|L\|_{\mathcal{L}(X, Y)} := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Lx\|_Y = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|Lx\|_Y = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Lx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Zunächst seien die Räume $(X, \|\cdot\|_X) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$ gegeben. Sei nun $x \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Dann erhalten wir für A die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \left\| \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \max(4|x_1| + 2|x_2|, 2|x_1| + |x_2|, 3|x_1| + 5|x_2|) \\ &\leq \max(6 \max(|x_1|, |x_2|), 3 \max(|x_1|, |x_2|), 8 \max(|x_1|, |x_2|)) = 8\|x\|_\infty \end{aligned}$$

¹¹Zur Erinnerung: Symmetrische Matrizen A (Matrizen mit $A^T = A$) besitzen nur reelle Eigenwerte. Weiterhin existiert eine orthogonale Matrix U (deren Spalten aus den paarweise orthogonalen Eigenvektoren von A bestehen), so dass $U^T A U$ eine Diagonalmatrix ist (Hauptachsentransformation), auf deren Diagonalen die Eigenwerte von A stehen.

Da die Gleichheit tatsächlich, beispielsweise für den Vektor $x = (1, 1)^T$, angenommen wird, ergibt sich somit

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 8.$$

Dies ist die Zeilensummennorm $\|\hat{A}\|_\infty := \max_{i=1,\dots,3} \left(\sum_{j=1}^2 |a_{ij}| \right)$ der Matrix $\hat{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{3,2}$. Analog ist somit

$$\|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Bx\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 15 = \max_{i=1,\dots,3} \left(\sum_{j=1}^2 |b_{ij}| \right) = \|\hat{B}\|_\infty.$$

Seien jetzt die Räume $(X, \|\cdot\|_X) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$ gegeben und wiederum $x \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Dann erhalten wir für A die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \left\| \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \end{pmatrix} \right\|_1 = |4x_1 + 2x_2| + |-2x_1 + x_2| + |3x_1 + 5x_2| \\ &\leq 4|x_1| + 2|x_2| + 2|x_1| + |x_2| + 3|x_1| + 5|x_2| = 9|x_1| + 8|x_2| \leq 9\|x\|_1 \end{aligned}$$

Da die Gleichheit tatsächlich, beispielsweise für den Vektor $x = (1, 0)^T$, angenommen wird, ergibt sich somit

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = 9.$$

Dies ist die Spaltensummennorm $\|\hat{A}\|_1 := \max_{j=1,2} \left(\sum_{i=1}^3 |a_{ij}| \right)$ der Matrix $\hat{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{3,2}$. Analog ist somit

$$\|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Bx\|_1}{\|x\|_1} = 28 = \max_{j=1,2} \left(\sum_{i=1}^3 |b_{ij}| \right) = \|\hat{B}\|_1.$$

- (b) Dass die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ symmetrischer Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sämtlich reell sind und darüberhinaus eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert, so dass $U^T A U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ Diagonalgestalt hat, liefert die Lineare Algebra. Besitzt nun $\mathcal{A}$ eine symmetrische Darstellungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, und bezeichnet $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die zugehörige orthogonale Transformationsmatrix U mit $U^T A U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: D$, gilt aufgrund der Orthogonalität $U^T U = I_n$ und

$$\|Ux\|_2^2 = \langle Ux, Ux \rangle = (Ux)^T Ux = x^T (U^T U x) = x^T I_n x = x^T x = \|x\|_2^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, also insbesondere $U(\partial B_1(0)) = \partial B_1(0) = U^T(\partial B_1(0))$. Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|AUx\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|U^T AUx\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Dx\|_2 \\ &= \sup_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 x_k^2} \leq \max_{k=1,\dots,n} |\lambda_k| \sup_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} = \max_{k=1,\dots,n} |\lambda_k| \sup_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = \max_{k=1,\dots,n} |\lambda_k| \end{aligned}$$

und $\|A\| \geq \|De_j\|_2 = \max_{k=1,\dots,n} |\lambda_k|$ mit dem Einheitsvektor $x = e_j$ für ein j mit $\max_{k=1,\dots,n} |\lambda_k| = |\lambda_j|$.

- (c) Wegen $A(f+g) = \int_0^1 x(f(x)+g(x))dx = \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 xg(x)dx = A(f) + A(g)$ und analog $A(\lambda f) = \int_0^1 x(\lambda f(x))dx = \lambda \int_0^1 xf(x)dx = \lambda A(f)$ (denn das Integral selbst ist auch ein lineares Funktional) ist A eine lineare Funktion von X nach Y . Um die Stetigkeit zu zeigen, wenden wir Lemma 1.50 an. Für ein beliebiges $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ haben wir die Abschätzung

$$|A(f)| = \left| \int_0^1 xf(x)dx \right| \leq \int_0^1 |xf(x)|dx \leq \int_0^1 x \underbrace{|f(x)|}_{\leq \|f\|_\infty} dx \leq \|f\|_\infty \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \cdot \|f\|_\infty,$$

Also gibt es eine Konstante $L = \frac{1}{2} < \infty$, so dass $\forall f \in X : \|A(f)\|_Y \leq L\|f\|_X$. (Tatsächlich ist $\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \frac{1}{2}$, denn Gleichheit gilt beispielsweise für die konstante Funktion $f = 1$.)

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 4

Kompaktheit – (vgl. Skript, Abschnitt 1.9)

- **Definition:** Sei (M, T) ein topologischer Raum. Eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Mengen $U_i \in T$ (mit beliebiger Indexmenge I) heißt **offene Überdeckung** von $A \subset M$, falls $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ gilt.
- **Definition 1.56:** Sei (M, T) ein topologischer Raum. Eine beliebige Teilmenge $K \subset M$ heißt **(überdeckungs)kompakt**, falls zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von K eine endliche Teilüberdeckung existiert, d.h., falls schon mit endlich vielen Indizes $i_1, \dots, i_m \in I$ gilt, dass
$$K \subset \bigcup_{j=1}^m U_{i_j} . \quad (4.1)$$
- **Lemma 1.57/Definition:** In metrischen Räumen (M, d) ist eine Teilmenge $K \subset M$ genau dann überdeckungskompakt, wenn sie folgenkompakt ist. Dabei heißt eine Teilmenge $K \subset M$ **(folgen)kompakt**, wenn jede Folge aus K eine in K konvergente Teilfolge besitzt.¹²
- **Bemerkung:** In metrischen Räumen (M, d) folgt aus der Kompaktheit einer Teilmenge $K \subset M$ sofort auch deren Beschränktheit und Abgeschlossenheit. Die Umkehrung gilt jedoch i.A. **nicht**.
- **Satz 1.58 [Heine-Borel]:** In einem endlich-dimensionalen normierten linearen Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ ist eine Teilmenge $K \subset X$ genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.
- **Lemma 1.62:** Ist (M, d) kompakt, so gilt: $A \subset M$ abgeschlossen $\implies A$ kompakt.
- **Lemma 1.64 [Tubenlemma]:** Sei (M, d_M) ein metrischer Raum, (K, d_K) ein kompakter metrischer Raum, $x \in M$ und $W \subset M \times K$ offen mit $\{x\} \times K \subset W$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ von $x \in M$ mit $U \times K \subset W$.
- **Korollar 1.65:** Sind (M, d_M) , (N, d_N) kompakt, dann ist auch $(M \times N, d_{M \times N})$ kompakt.

Stetige Abbildungen auf kompakten Räumen

- **Satz 1.59:** Seien (M, d_M) , (N, d_N) metrische Räume, $f: M \rightarrow N$ stetig. Für kompakte Teilmengen $K \subset M$ ist dann auch $f(K) \subset N$ kompakt in (N, d_N) .
- **Korollar 1.60 [Satz v. Minimum/Maximum]:** Ist (M, d_M) ein kompakter metrischer Raum, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so nimmt f sowohl ihr Minimum als auch ihr Maximum an.
- **Satz 1.61:** Sei (M, d_M) ein kompakter metrischer Raum, (N, d_N) ein metrischer Raum und $f: M \rightarrow N$ stetig. Dann ist f sogar gleichmäßig stetig.
- **Satz 1.63:** Sei (M, d_M) ein kompakter metrischer Raum, (N, d_N) ein metrischer Raum und $f: M \rightarrow N$ stetig und bijektiv. Dann ist f^{-1} stetig (also f insbesondere ein Homöomorphismus).
- **Satz 1.66:** Sei (M, d_M) ein metrischer Raum und $f: M \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch die Funktion $F: M \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ wohldefiniert und stetig.

Zusammenhang – (vgl. Skript, Abschnitt 1.10)

- **Definition 1.67:** Ein metrischer Raum (M, d) heißt **zusammenhängend**, falls es keine Zerlegung $M = U \cup V$ von M in disjunkte, offene und nichtleere Teilmengen $U, V \subset M$ gibt.¹³ Insbesondere nennt man $A \subset M$ zusammenhängend, falls $(A, d_M|_{A \times A})$ zusammenhängend ist.

¹²Daher unterscheidet man in metrischen Räumen nicht zwischen Folgen- und Überdeckungskompaktheit.

¹³Äquivalent dazu ist, dass $\emptyset$ und M die einzigen sowohl offenen als auch abgeschlossenen Teilmengen von M sind.

- **Satz 1.68:** Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume, $f: M \rightarrow N$ stetig und (M, d_M) zusammenhängend. Dann ist $f(M)$ eine zusammenhängende Teilmenge von (N, d_N) .
- **Beispiel 1.69:** Genau dann ist $M \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend, wenn M ein Intervall ist.
- **Korollar 1.70 [Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes]:** Sei (M, d_M) ein zusammenhängender metrischer Raum, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in M$ mit $f(a) < f(b)$. Dann nimmt f auf M jeden Wert aus dem Intervall $]f(a), f(b)[$ an.
- **Definition 1.71:** Existiert zu je zwei Punkten $x, y \in M$ eine stetige Abbildung $c: [0, 1] \rightarrow M$ mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$, so heißt ein metrischer Raum (M, d_M) **wegzusammenhängend**.
- **Satz 1.72:** Ist (M, d_M) wegzusammenhängend, so ist (M, d_M) auch zusammenhängend.
- **Bemerkung:** Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen gilt:¹⁴ U zusammenhängend $\iff U$ wegzusammenhängend.
- **Beispiel 1.73:** Für $n > 1$ ist $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend (also auch zusammenhängend).
- **Satz 1.74:** Für $n > 1$ sind $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ und $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ **nicht** homöomorph.

Differenzierbare Kurven – (vgl. Skript, Abschnitt 2.1)

- **Definition:** Eine stetige Abbildung $c: I \rightarrow M$ eines Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ in einen metrischen Raum (M, d) nennt man eine **parametrisierte Kurve** in M . Das Bild $C := c(I) \subset M$ einer parametrisierten Kurve c heißt die **Spur** von c oder die **Kurve**, die durch c parametrisiert wird.
- **Bemerkung:** Im Weiteren betrachten wir vor allem parametrisierte Kurven in Banach-Räumen $(X, \|\cdot\|)$, wobei $X = \mathbb{R}^n$ den einfachsten und für $n = 2, n = 3$ der anschaulichste Fall ist.
- **Definition 2.1:** Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum. Eine parametrisierte Kurve $c: I \rightarrow X$ in X heißt **differenzierbar in $t^* \in I$** , wenn der Grenzwert

$$\dot{c}(t^*) = \lim_{t \rightarrow t^*} \frac{c(t) - c(t^*)}{t - t^*} \quad (4.2)$$

existiert. In diesem Fall nennt man $\dot{c}(t^*)$ die **Ableitung** oder den **Tangentialvektor** von c in t^* . Alternativ schreibt man auch $\frac{d}{dt}c(t)$ anstelle von $\dot{c}(t)$. Desweiteren heißt c **differenzierbar**, falls c in jedem Punkt $a \in I$ differenzierbar ist. Ist zusätzlich die durch Differentiation induzierte Abbildung $\dot{c}: t \mapsto \dot{c}(t)$ auch noch stetig, so nennt man c **stetig differenzierbar** oder **C^1 -Kurve**.

- **Lemma 2.2:** Existiert für $c: I \rightarrow X$ der Grenzwert (4.2) in t^* , so ist c in t^* stetig.
- **Bemerkungen/Folgerungen/Bezeichnung:**
 - (a) Im Fall $X = \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $c = (c_1, \dots, c_n): I \rightarrow \mathbb{R}^n$ nach Lemma 1.16 genau dann stetig, wenn alle Komponenten $c_i: I \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$, von c stetig sind.
 - (b) Analog folgt, dass eine parametrisierte Kurve $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann differenzierbar ist, wenn jede Komponentenfunktion $c_i: I \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$, differenzierbar ist.
 - (c) Das Ableiten von parametrisierten Kurven ist linear, d.h. sind $c, \tilde{c}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrisierte Kurven und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so gilt $\frac{d}{dt}(\lambda c + \mu \tilde{c}) = \lambda \dot{c} + \mu \dot{\tilde{c}}$.
 - (d) Ist $C \subset X$ eine Kurve im Banach-Raum $(X, \|\cdot\|)$ und $c: I \rightarrow X$ eine Parametrisierung von C sowie $\varphi: J \rightarrow I$ eine (mindestens) stetige Abbildung zwischen Intervallen I, J mit $\varphi(J) = I$, dann nennen wir φ eine **Parametertransformation**. Durch $c \circ \varphi: J \rightarrow X$ ist dann eine neue Parametrisierung von C gegeben.
- **Lemma 2.3 [Kettenregel für differenzierbare Kurven]:** Ist $c: I \rightarrow X$ eine differenzierbare Parametrisierung einer Kurve $C \subset X$ im Banach-Raum $(X, \|\cdot\|)$ und $\varphi: J \rightarrow I$ eine differenzierbare Parametertransformation, so ist $c \circ \varphi: J \rightarrow X$ in allen $t \in J$ differenzierbar mit Ableitung

$$(c \circ \varphi)'(t) = \dot{c}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t). \quad (4.3)$$

¹⁴vgl. Königsberger, Analysis 2, S. 35

Bemerkungen/Bezeichnungen:

- (a) Da $\varphi'(t)$ alle möglichen Werte aus $\mathbb{R}$ annehmen kann, ist nur die Menge $T_x C$ aller Tangentialvektoren in einem Punkt $x \in C$ durch C eindeutig bestimmt.
- (b) Ist C eine Kurve in einem Banach-Raum und ist $x \in C$ ein Punkt, an welchen die Ableitung jeder stetig differenzierbaren Parametrisierung von C verschwindet (also $T_x C = \{0\}$ gilt), so heißt x ein **singulärer Punkt** von C (vgl. Beispiel 2.8).

Andernfalls bezeichnet man $x \in C$ als einen **regulären Punkt** von C .

- (c) Besitzt eine Kurve C keine singulären Punkte, so wird sie **immersierte Kurve** genannt.

- **Definition:** Eine parametrisierte Kurve $c: I \rightarrow X$ in einem Banach-Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt **rektifizierbar**, wenn die Längen aller Sehnenpolygone von c beschränkt sind. Dabei versteht man unter einem Sehnenpolygon zu einer Zerlegung $Z = \{t_0 < t_1 < \dots < t_k\}$ von I mit Punkten $t_i \in I$ das durch die Strecken von $c(t_{i-1})$ nach $c(t_i)$ gegebene Polygon und unter der Länge dieses Sehnenpolygons den Wert

$$\sum_{i=1}^k \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|. \quad (4.4)$$

- **Definition 2.11:** Die **Bogenlänge** $L(c)$ einer rektifizierbaren Kurve $c: I \rightarrow X$ in einem Banach-Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist das Supremum aller Längen der Sehnenpolygone von c , wobei das Supremum über alle Zerlegungen $Z = \{t_0 < t_1 < \dots < t_k\}$ von I mit Punkten $t_i \in I$ gebildet wird.
- **Satz 2.13:** Jede stetig differenzierbare Parametrisierung $c: [a, b] \rightarrow X$ einer Kurve in einem Banach-Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist rektifizierbar und besitzt die Bogenlänge

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt. \quad (4.5)$$

Bemerkungen/Bezeichnungen:

- (a) Ist $c: I \rightarrow X$ eine stetig differenzierbare Parametrisierung, $\varphi: J \rightarrow I$ eine stetig differenzierbare Parametertransformation mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung $\varphi^{-1}: I \rightarrow J$, so gilt $L(c) = L(c \circ \varphi)$, d.h., die Bogenlänge ist unabhängig von der Parametrisierung.
- (b) Satz 2.13 ist auch noch für stückweise stetig differenzierbare Parametrisierungen gültig.
- (c) Eine Kurve C in einem Banach-Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt durch eine stetig differenzierbare Parametrisierung $c: I \rightarrow X$ **nach Bogenlänge parametrisiert** $\iff \forall t \in I: \|\dot{c}(t)\| = 1$.

Zusatzaufgabe 4.1: (a) Entscheiden Sie, ob die Menge $\mathbb{Q}$ in $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ kompakt ist.

- (b) Sei $\mathbb{R}$ versehen mit der Metrik $d(x, y) := \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$. Zeigen Sie, dass es beschränkte und abgeschlossene Mengen in $(\mathbb{R}, d)$ gibt, welche nicht kompakt sind.
- (c) Geben Sie (jeweils in $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$) offene Überdeckungen von $\mathbb{N}$ und von $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right]$ an, die keine endlichen Teilüberdeckungen enthalten.
- (d) Zeigen Sie: Die Vereinigung endlich vieler kompakter Teilmengen eines metrischen Raumes ist wieder kompakt.
- (e) Zeigen Sie **Lemma 1.62:** Ist (X, d) ein metrischer Raum und $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge von X , dann ist jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset K$ ebenfalls kompakt.
- (f) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine Punktfolge, die gegen ein $a \in X$ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Menge $A := \{x_n: n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ kompakt ist.
- (g) Sei A Teilmenge eines mit der diskreten Metrik versehenen metrischen Raumes (M, d_{diskret}) . Zeigen Sie: A ist genau dann kompakt, wenn A nur endlich viele Elemente enthält.

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.1:

- (a) Aufgrund der Unbeschränktheit kann $\mathbb{Q}$ nicht kompakt sein (vgl. Satz 3, §3 Forster 2). Darüber hinaus ist $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ auch nicht abgeschlossen.

- (b) Aus der Definition ist ablesbar, dass stets $d \geq 0$ gilt sowie $d(x, y) = 0$ für $y = x$ und $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq \frac{|x-y|}{|x-y|} = 1$ für $x \neq y$. Somit folgt die Ungleichungskette $\forall x, y \in \mathbb{R}: 0 \leq d(x, y) \leq 1$. Dies bedeutet aber, dass jede beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}$ bezüglich d beschränkt ist. Somit ist auch $\mathbb{R}$ beschränkt und (als ganzer Raum) abgeschlossen.

Sei nun daran erinnert, dass wir bereits beim Beweis der Dreiecksungleichung für d herausgefunden hatten, dass $f(x) = \frac{x}{1+x}$ wegen $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$ auf $\mathbb{R}_+$ streng monoton wachsend ist und somit zu einem $\delta > 0$ mit $f(y_\delta) = \delta$ auch $\forall x < y_\delta: f(x) < f(y_\delta) = \delta$ erfüllt wird.

Betrachten wir nun von $\mathbb{R}$ die offene Überdeckung

$$(U_z)_{z \in \mathbb{Z}} \quad \text{mit} \quad U_z := B_{\frac{1}{2}}(z) := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid d(x, z) = \frac{|z-x|}{1+|z-x|} < \frac{1}{2} \right\} =]z-1, z+1[.$$

(Es gilt offenbar $\mathbb{R} \subset \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} U_z$ und U_z offen.) Dann ist jedes $z \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ in genau einer offenen Umgebung (nämlich U_z) enthalten. Somit kann aus der offenen Überdeckung $(U_z)_{z \in \mathbb{Z}}$ keine einzige Menge weggelassen werden. Daher kann $\mathbb{R}$ nicht kompakt sein, so dass wir ein Beispiel für eine Menge in $(\mathbb{R}, d)$ gefunden haben, die beschränkt und abgeschlossen, jedoch nicht kompakt ist.

- (c) (i) Sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ gegeben. Dann bildet die Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_\varepsilon(n)$ aller offenen Kugeln um $n \in \mathbb{N}$ mit Radius ε offensichtlich eine offene Überdeckung von $\mathbb{N}$. Diese enthält aber keine endliche Teilüberdeckung für $\mathbb{N}$, da mit jeder Kugel $B_\varepsilon(n)$ aufgrund des Radius auch n selber fehlen würde.
- (ii) Wählen wir ein festes $\varepsilon > 0$ und definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Intervall $I_n :=]\frac{1}{2n+1}, 1+\varepsilon[$, dann ist I_n als Teilmenge von $\mathbb{R}$ offen, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt offensichtlich

$$\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right] \subset I_n,$$

aber

$$\left[\frac{1}{2(n+1)}, \frac{1}{2(n+1)-1} \right] \not\subset \bigcup_{k=1}^n I_k.$$

Folglich bildet die Vereinigung der offenen Intervalle I_n eine offene Überdeckung von

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right],$$

die jedoch wie gefordert keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

- (d) Eine beliebige offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von

$$A = \bigcup_{\ell=1}^n K_\ell, \quad K_\ell \text{ kompakt.}$$

ist für jedes einzelne K_ℓ eine offene Überdeckung. Aufgrund der Kompaktheit der Mengen K_ℓ finden wir jeweils endlich viele Indizes $i_1^\ell, \dots, i_{k_\ell}^\ell$, für welche

$$\bigcup_{j=1}^{k_\ell} U_{i_j^\ell} \supset K_\ell, \quad \ell = 1, \dots, n,$$

gilt. Demnach bildet $(U_{i_{j_\ell}^\ell})_{\ell \in \{1, \dots, n\}, j_\ell \in \{1, \dots, k_\ell\}}$ eine endliche offene Überdeckung für jedes K_ℓ und somit gilt auch

$$\bigcup_{\ell=1}^n \left(\bigcup_{j_\ell=1}^{k_\ell} U_{i_{j_\ell}^\ell} \right) \supset A,$$

weil für jedes $a \in A$ ein $\ell \in \{1, \dots, n\}$ existiert, so dass $a \in K_\ell$. Auf diese Weise können wir zu jeder beliebigen offenen Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung von A konstruieren, was gerade der Definition von Kompaktheit entspricht.

- (e) Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von A . Nehmen wir die offene (weil A abgeschlossen nach Voraussetzung) Menge $(X \setminus A)$ noch hinzu, erhalten wir

$$(X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} U_i = X \supset K.$$

Da K kompakt nach Voraussetzung, können wir innerhalb dieser offenen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung finden, d.h. es existieren $i_1, \dots, i_k \in I$ mit

$$(X \setminus A) \cup \bigcup_{j=1}^k U_{i_j} \supset K.$$

Wegen $K \supset A$ ist dies auch eine endliche offene Überdeckung von A . Da wir auf diese Weise aus jeder beliebigen offenen Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung von A erhalten, folgt damit die Kompaktheit von A .

- (f) Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von A . Da der Grenzwert $a \in A$ ist, existiert einerseits ein $i' \in I$ mit $a \in U_{i'}$, wobei $U_{i'}$ als Teil der offenen Überdeckung eine offene Umgebung von a ist, und andererseits ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n > n_0: x_n \in U_{i'}$. Da $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A ist, finden wir zu jedem x_k , $k \in \{0, \dots, n_0\}$ ein U_{i_k} mit $x_k \in U_{i_k}$. Demnach gilt

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{n_0} U_{i_k} \cup U_{i'},$$

womit wir eine endliche (aus $n_0 + 2$ Elementen bestehende) Teilüberdeckung gefunden haben. Da auf diese Weise für jede beliebige offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung gefunden werden kann, ist A nach der Definition somit kompakt.

- (g) Nach Definition 1.56 ist A genau dann kompakt, wenn zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ eine endliche Teilüberdeckung existiert.

„ $\Leftarrow$ “ Besitzt A endlich viele Elemente, d.h. $A = \{a_k \in M : 1 \leq k \leq n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so existiert in jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von A zu jedem der a_k ein $U_{i_{a_k}}$ mit $a_k \in U_{i_{a_k}}$, so dass $\{U_{i_{a_k}}\}_{1 \leq k \leq n}$ endliche Teilüberdeckung von A ist, d.h. $A \subset \bigcup_{k=1}^n U_{i_{a_k}}$. Somit ist A kompakt.

„ $\Rightarrow$ “ Sei nun A kompakt. Dann existiert zu der offenen Überdeckung $\{B_{\frac{1}{2}}(a) : a \in A\}$ mit

$$B_{\frac{1}{2}}(a) := \{x \in M : d_{\text{diskret}}(a, x) < \frac{1}{2}\}$$

aller offenen Kugeln mit Radius $\frac{1}{2}$ und Mittelpunkt $a \in A$ eine endliche Teilüberdeckung, etwa $\{B_{\frac{1}{2}}(a_k) : 1 \leq k \leq n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund von $d_{\text{diskret}}(a, b) = 1 > \frac{1}{2}$ für $a \neq b$ ergibt sich sofort $B_{\frac{1}{2}}(a_k) = \{a_k\}$. Demzufolge kann die Teilmenge

$$A \subset \bigcup_{k=1}^n B_{\frac{1}{2}}(a_k) = \{a_k : 1 \leq k \leq n\}$$

nur endlich viele Elemente enthalten.

Alternative: Nach Lemma 1.57 ist A genau dann kompakt, wenn zu jeder Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus A eine in A konvergente Teilfolge $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ existiert.

„ $\Leftarrow$ “ Habe nun A nur endlich viele Elemente, etwa $A = \{a_j : 1 \leq j \leq n\}$. Sei weiter $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus A , dann muss es mindestens ein j_0 geben, so dass $a_k = a_{j_0}$ für unendlich viele k gilt (andernfalls träten alle a_j nur endlich oft, etwa m_j -mal auf, so dass kein Element mehr für die „hinteren“ Folgenglieder nach $k = \sum m_j$ übrigbliebe). Folglich können wir die durch $a_{k_\ell} = a_{j_0}$ gegebene konstante Teilfolge finden, die (sogar in jedem metrischen Raum) konvergiert. Lemma 1.57 liefert nun die Kompaktheit von A .

„ $\Rightarrow$ “ Sei nun A kompakt. Angenommen, zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existierte ein $a_n \in A$ mit $a_n \neq a_k$ für alle $k < n$. Dann gilt insbesondere $d_{\text{diskret}}(a_n, a_m) = 1$ für alle $n > m \geq 1$. Somit kann die Folge keine Cauchy-Folge als Teilfolge enthalten, d.h., insbesondere auch keine konvergente Teilfolge, was jedoch ein Widerspruch zur Kompaktheit von A wäre. Somit kann A nur endlich viele Elemente enthalten.

Zusatzaufgabe 4.2:

- Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $K \subset V$ kompakt, $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(v) < 0$ für alle $v \in K$. Mittels Untersuchung von $f(K) \subset \mathbb{R}$ zeige man: $\exists r < 0 \forall v \in K: f(v) < r$.
- Zeigen Sie **Satz 1.63**: Sind (X, d_X) sowie (Y, d_Y) metrische Räume, (X, d_X) kompakt sowie $f: X \rightarrow Y$ stetig und bijektiv. Dann ist auch f^{-1} stetig.
- Zeigen Sie: Für $n \geq 1$ sind die n -Sphären $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ kompakt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.2:

- Nach Korollar 1.60 (Satz vom Minimum/Maximum) nimmt eine stetige Funktion auf einem Kompaktum sein Maximum an, d.h., es existiert ein $v_{\max} \in K$ mit $f(v) \leq f(v_{\max}) =: c$ für alle $v \in K$. Da nach Voraussetzung $f(v) < 0$ für alle $v \in K$ gilt, folgt auch $c < 0$. Wählen wir nun $r = \frac{c}{2}$, so folgt wegen $c < \frac{c}{2} < 0$ die Behauptung.
- Eine Abbildung ist genau dann stetig, wenn die Urbilder offener Mengen stets selbst wieder offen sind. Da eine Menge genau dann offen ist, wenn ihr Komplement abgeschlossen ist, kann diese Charakterisierung auch äquivalent dazu formuliert werden, dass die Urbilder abgeschlossener Mengen stets selbst wieder abgeschlossen sind.
Wir definieren $g := f^{-1}: Y \rightarrow X$. Sei nun $A \subset X$ abgeschlossen. Es ist nun zu zeigen, dass das Urbild

$$g^{-1}(A) := \{y \in Y : g(y) \in A\} \subset Y$$

abgeschlossen ist. Beweis:

- Aus (X, d_X) kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen folgt, dass A kompakt ist.
 - Aus A kompakt und $f: X \rightarrow Y$ stetig folgt, dass $B := f(A)$ kompakt.
 - Aus B kompakt folgt, dass $B \subset Y$ abgeschlossen.
 - Nun gilt aber $B = f(A) \iff g(B) = g \circ f(A) \iff g(B) = A \iff B = g^{-1}(A)$.
- Die n -Sphären S^n sind offensichtlich beschränkt, da sie beispielsweise in der Kugel mit Radius 2 enthalten sind und als Urbilder der einelementigen (und somit abgeschlossenen) Menge $\{1\}$ unter der stetigen Funktion $\|\cdot\|: (\mathbb{R}^{n+1}, d_{\|\cdot\|}) \rightarrow (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ auch abgeschlossen (vgl. Satz 1.36 im Skript oder vgl. Satz 11, §2 und anschließendes Beispiel Analysis 2, Forster), also nach dem Satz von Heine-Borel (Satz 1.58 im Skript oder vgl. Satz 5, §3 Analysis 2, Forster) kompakt.

Zusatzaufgabe 4.3:

- Geben Sie alle kompakten Vektorräume (bis auf Isomorphie) an und beweisen Sie, dass Sie wirklich alle gefunden haben.
- Für $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt sind ∂A und $\bar{A}$ kompakt.
- Ist $A \subset X$ sowohl offen als auch abgeschlossen in $(X, \|\cdot\|)$, so folgt $A = X$ oder $A = \emptyset$.
- Die Menge $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ ist weder zusammenhängend noch kompakt.
- Die n -Sphären $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ sind für $n \geq 1$ zusammenhängend.
- Der Kreisring $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ ist wegzusammenhängend.

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.3:

- (a) Über $\mathbb{R}$ ist lediglich der Vektorraum $\{0\}$ kompakt.

Beweis: Sei V ein kompakter reeller Vektorraum, dann folgt (etwa nach dem Satz von Heine-Borel, Satz 1.58) auch die Beschränktheit von V , also die Existenz eines $K < \infty$ mit der Eigenschaft $\forall v \in V: \|v\| \leq K$. Sei nun $\tilde{v} \in V$ beliebig. Aufgrund der linearen Struktur von V muss dann auch $\forall n \in \mathbb{N}: n\tilde{v} \in V$ gelten und somit

$$\forall n \in \mathbb{N}: \|n\tilde{v}\| = n\|\tilde{v}\| < K.$$

Da $\frac{K}{n}$ eine Nullfolge ist, muss zwangsläufig $\|\tilde{v}\| = 0$, also mit der Definitheit einer Norm auch $\tilde{v} = 0$ gelten. Somit ergibt sich aber bereits $V = \{\tilde{v}\} = \{0\}$.

- (b) Da $\dim(\mathbb{R}^n) = n < \infty$ ist $U \subset \mathbb{R}^n$ nach Satz 1.58 (Heine-Borel) genau dann kompakt, wenn U beschränkt und abgeschlossen ist. Da der Abschluss nach Definition abgeschlossen ist und mit A auch $\overline{A}$ beschränkt ist, folgt sofort die Kompaktheit von $\overline{A}$. Desweiteren wissen wir nach Lemma 1.62, dass abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen wiederum kompakt sind, also ist ∂A als abgeschlossene Teilmenge der – wie eben gezeigt – kompakten Menge $\overline{A}$ ebenfalls kompakt.
- (c) Aufgrund seiner Linearität ist jeder normierte Raum $(X, \|\cdot\|)$ wegzusammenhängend, denn zu beliebigen $x, y \in X$ verläuft die Kurve $c: [0, 1] \rightarrow X, t \mapsto x + t(x - y)$ ganz in X , da mit $x, y \in X$ auch jede Linearkombination $\lambda x + \mu y$ (mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beliebig) in X liegt (hier $\lambda = 1 + t, \mu = -t$). Nach Satz 1.72 (vgl. Skript) ist $(X, \|\cdot\|)$ also auch zusammenhängend. Gäbe es ein $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$, welches sowohl offen als auch abgeschlossen wäre, dann wäre auch $X \setminus A$ nichtleer und offen mit $A \cap X \setminus A = \emptyset$ und $A \cup X \setminus A = X$, im Widerspruch dazu, dass $(X, \|\cdot\|)$ zusammenhängend ist.
- (d) Vorweg sollte erwähnt werden, dass der Schnitt $A \cap U$ einer offenen Menge $U \subset M$ mit einer Menge $A \subset M$ offen im metrischen Raum $(A, d_{|A \times A})$ ist. Offenbar sind $A_1 = \{(x, y) : xy = 1 \mid x > 0, y > 0\} = A \cap Q_1$ und $A_2 = \{(x, y) : xy = 1 \mid x < 0, y < 0\} = A \cap Q_3$ paarweise disjunkt und offen in $(A, d_{|A \times A})$. Da außerdem $A_1 \cup A_2 = A$ gilt, ist A nicht zusammenhängend.
- (e) Nach Beispiel 1.73 ist $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend. Für beliebige $x, y \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ existiert somit eine stetige Abbildung $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$, so dass wir dann durch $\theta: t \mapsto \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$ eine wegen $\gamma(t) \neq 0$ wohldefinierte stetige Funktion $\theta: [0, 1] \rightarrow S^n$ mit $\theta(0) = \frac{\gamma(0)}{\|\gamma(0)\|} = \frac{x}{\|x\|} = x$ und $\theta(1) = \frac{\gamma(1)}{\|\gamma(1)\|} = \frac{y}{\|y\|} = y$ erhalten. Damit ist gezeigt, dass die n -Sphären S^n wegzusammenhängend sind, so dass nach Satz 1.72 auch ihr Zusammenhang folgt.
- (f) Die Aussage ist wahr, denn: Seien $a, b \in \Omega$ beliebig mit $1 < r_1 := \|a\|_2 < \|b\|_2 =: r_2 < 2$.

- Dann liegt der Punkt $c = \frac{r_2}{r_1}a$ wegen $\|c\|_2 = \frac{r_2}{r_1}\|a\|_2 = r_2$ und $1 < r_2 < 2$ ebenfalls in Ω .
- Nun können wir durch $\gamma_1(t) = 2a \left(\left(\frac{1}{2} - t\right) + t\frac{r_2}{r_1} \right)$ eine stetige Abbildung $\gamma_1: \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \Omega$ mit $\gamma_1(0) = a$ und $\gamma_1\left(\frac{1}{2}\right) = c$ finden (wir laufen entlang der Strecke zwischen a und c).
- Wegen $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ liefert der aus Beispiel 1.73 bekannte Wegzusammenhang von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Existenz einer stetigen Abbildung $\delta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $\delta(0) = c$ und $\delta(1) = b$.
- Da insbesondere $\delta(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, 1]$ gilt, wird nun auch durch $\gamma_2(t) := r_2 \frac{\delta(2t-1)}{\|\delta(2t-1)\|_2}$ eine stetige Abbildung $\gamma_2: \left[\frac{1}{2}, 1\right] \rightarrow \partial B_{r_2}(0) \subset \Omega$ mit $\gamma_2\left(\frac{1}{2}\right) = c$ und $\gamma_2(1) = b$ definiert (denn es ist $\|\gamma_2(t)\|_2 = r_2$ für alle $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, d.h., wir laufen auf der Oberfläche der Kugel mit Radius r_2 entlang – vergleiche auch Zusatzaufgabe 5.3 (f)).

Offenbar erfüllt nun die durch $\gamma: t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \gamma_2(t), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$ gegebene stetige Funktion alle Anforderungen aus Definition 1.71.

Zusatzaufgabe 4.4:

(a) Zeigen Sie: Das Ableiten von parametrisierten Kurven ist linear.

(b) Zeigen Sie: Jede Lipschitz-stetige Parametrisierung $c: [a, b] \rightarrow X$ ist rektifizierbar.(c) Zeigen Sie: Für eine Parametrisierung $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ einer gegebenen Kurve nach Bogenlänge ist die Länge der Kurve durch $L(c) = b - a$ gegeben.(d) Zeigen Sie: Für die durch $c(t) := (2 \cos(t) - \cos(2t), 2 \sin(t) - \sin(2t))^T$ definierte parametrisierte Kurve c existiert kein $t \in]0, 2\pi[$, so dass $\frac{c(2\pi) - c(0)}{2\pi} = \dot{c}(t)$ gilt.**Lösung zu Zusatzaufgabe 4.4:**(a) Für Konstanten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt nach Definition des Grenzwertes

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\lambda c(t) + \mu \tilde{c}(t)) &= \lim_{t^* \rightarrow t} \frac{(\lambda c(t^*) + \mu \tilde{c}(t^*)) - (\lambda c(t) + \mu \tilde{c}(t))}{t^* - t} \\ &= \lambda \lim_{t^* \rightarrow t} \frac{c(t^*) - c(t)}{t^* - t} + \mu \lim_{t^* \rightarrow t} \frac{\tilde{c}(t^*) - \tilde{c}(t)}{t^* - t} = \lambda \dot{c}(t) + \mu \dot{\tilde{c}}(t) . \end{aligned}$$

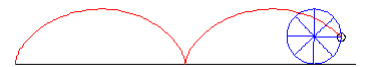
(b) Mit einer Lipschitz-Konstanten L von c gilt $\sum_{i=1}^k \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^k L|t_i - t_{i-1}| = L(b - a)$ für eine beliebige Zerlegung $Z = \{t_0 < t_1 < \dots < t_k\}$ von I ($t_i \in I$). Damit ist die Länge jedes Sehnepolygons beschränkt, also c rektifizierbar. Insbesondere folgt

$$L(c) := \sup_Z \sum_{i=1}^k \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| \leq L \cdot (b - a) .$$

(c) Nach Voraussetzung ist c stetig differenzierbar mit $\|\dot{c}(t)\|_2 = 1$ in jedem Punkt $t \in [a, b]$. Nach Satz 2.13 folgt damit die Rektifizierbarkeit und für die Bogenlänge gemäß (4.5) wie behauptet

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\|_2 dt = \int_a^b 1 dt = b - a .$$

(d) Es gilt $c(0) = (1, 0) = c(2\pi)$, aber $\dot{c}(t) = 2(\sin(2t) - \sin(t), \cos(t) - \cos(2t)) \neq (0, 0)$ für alle $t \in]0, 2\pi[$, denn $\sin(t) = \sin(2t)$ gilt nur bei $t = k\pi$, $t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oder $t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, während $\cos(t) = \cos(2t)$ nur bei $t = 2k\pi$, $t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ oder $t = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ gilt ($k \in \mathbb{Z}$). Also sind $t = 2k\pi$ die einzigen Zeiten mit $\dot{c}(t) = (0, 0)$.

Zusatzaufgabe 4.5: Bestimmen Sie die ...(a) ... Tangentialvektoren und Bogenlänge der **Zykloide** $c(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.(b) ... Bogenlänge der **Neilschen Parabel** $c(t) = (t^2, t^3)$ für $t \in [-1, 1]$.**Lösung zu Zusatzaufgabe 4.5:**

(a) Die Tangentialvektoren sind $\dot{c}(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ und wegen $(2 \sin(\frac{t}{2}))^2 = 2(1 - \cos(t))$ ergibt sich die Bogenlänge zu

$$L = \int_0^{2\pi} \|\dot{c}(t)\|_2 dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \int_0^{2\pi} 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = -4 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} = 8 .$$

(b) Mit $\dot{c}(t) = (2t, 3t^2)$ ergibt sich aufgrund der Symmetrie für die Bogenlänge

$$L(c) = \int_{-1}^1 \|\dot{c}(t)\|_2 dt = \frac{2}{18} \int_0^1 18t \sqrt{4 + 9t^2} dt = \frac{2}{27} \cdot \sqrt{(4 + 9t^2)^3} \Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{2(13\sqrt{13} - 8)}{27} .$$

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 5

Partielle Differenzierbarkeit – (vgl. Skript, Abschnitt 2.2)

- **Definition 2.15:**

- (a) Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen Banach-Räumen $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ heißt **im Punkt $a \in X$ partiell differenzierbar in Richtung $h \in X$** , falls der Grenzwert

$$\partial_h f(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} \quad (5.1)$$

in $(Y, \|\cdot\|_Y)$ existiert. In diesem Fall bezeichnet man $\partial_h f(a)$ als die **partielle Ableitung von f im Punkt a in Richtung h** . Ist f im Punkt a in jede Richtung partiell differenzierbar, so nennt man die Funktion f **partiell differenzierbar in a** .

- (b) Ist die Abbildung $G: h \mapsto \partial_h f(a)$ von $(X, \|\cdot\|_X)$ nach $(Y, \|\cdot\|_Y)$ darüberhinaus noch linear und stetig (d.h. $G \in L(X, Y)$), dann heißt f **Gâteaux-differenzierbar in a** .

Bemerkungen:

- (a) Offenbar ist $f: X \rightarrow Y$ genau dann in a in Richtung h partiell differenzierbar, wenn die parametrisierte Kurve $c: \mathbb{R} \rightarrow Y$, definiert durch $c(t) = f(a + th)$, in 0 differenzierbar ist. Insbesondere ist $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann in a in Richtung h partiell differenzierbar, wenn die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $t \mapsto f(a + th)$, in 0 differenzierbar ist.
- (b) Ist $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, im Punkt $a \in U$ partiell differenzierbar in die i -te Koordinatenrichtung $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, so schreiben wir statt $\partial_{e_i} f(a)$ üblicherweise $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Mit der Abbildung $\varphi: \xi \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, \xi, a_{i+1}, \dots, a_n)$ gilt dann $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \varphi'(a_i)$.
- (c) Ist $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, in $a \in U$ Gâteaux-differenzierbar, so gilt $\partial_h f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$.
- (d) **Achtung:** Weder partielle Differenzierbarkeit noch Gâteaux-Differenzierbarkeit implizieren i.A. die Stetigkeit einer Funktion (s.u.). Ebenso muss die Kettenregel nicht gelten.

- **Lemma 2.17:** Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ Banach-Räume. Dann ist eine Abbildung $f = (f_1, f_2): X \rightarrow Y \times Z$ genau dann in $a \in X$ partiell differenzierbar in Richtung $h \in X$, wenn die Abbildungen $f_1: X \rightarrow Y$ und $f_2: X \rightarrow Z$ in a in Richtung h partiell differenzierbar sind. In diesem Falle gilt für die partiellen Ableitungen $\partial_h f(a) = (\partial_h f_1(a), \partial_h f_2(a))$.

- **Satz 2.20 [Mittelwertsatz auf im Definitionsbereich enthaltenen Geradenstücken]:**

Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge eines Banach-Raumes $(X, \|\cdot\|_X)$ und seien $x, \tilde{x} \in U$ Punkte, für welche die Strecke $C := \{x + t(\tilde{x} - x) \mid t \in [0, 1]\}$ in U enthalten ist. Ist die Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ in jedem Punkt der Strecke C partiell differenzierbar in Richtung $\tilde{x} - x$, dann existiert ein $\theta \in]0, 1[$ mit $f(\tilde{x}) - f(x) = \partial_{(\tilde{x}-x)} f(x + \theta(\tilde{x} - x))$.

- **Definition:** Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen. Ist $f: U \rightarrow Y$ in jedem Punkt aus U partiell differenzierbar in die feste Richtung $h \in X$ und ist auch die partielle Ableitung $\partial_h f: U \rightarrow Y$ in jedem Punkt aus U partiell differenzierbar in Richtung $k \in X$, dann heißt f zweimal partiell differenzierbar in Richtung (h, k) und $\partial_k \partial_h f(a)$ wird die **zweite partielle Ableitung im Punkt $a \in U$ in Richtung (h, k)** genannt.

Rekursiv kann man analog partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnungen definieren.¹⁵

¹⁵Vorsicht: Im Allgemeinen gilt $\partial_k \partial_h f(a) \neq \partial_h \partial_k f(a)$

- **Definition:** Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum, $U \subset X$ offen. Man sagt, eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ hat in $x^* \in U$ ein **lokales Minimum** beziehungsweise ein **lokales Maximum**, wenn es eine Umgebung $V \subset U$ von x^* mit $f(x^*) \leq f(x)$ beziehungsweise $f(x^*) \geq f(x)$ für alle $x \in V$ gibt.
- **Satz 2.22 [Notwendiges Kriterium für lokale Extrema]:**

Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum, $U \subset X$ offen. Besitzt $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ in $x^* \in U$ ein lokales Extremum und ist f in x^* partiell differenzierbar in Richtung $h \in X$, dann gilt $\partial_h f(x^*) = 0$.

Bemerkung/Bezeichnung:

- Einen Punkt $x^* \in U$ mit der Eigenschaft, dass $\partial_h f(x^*) = 0$ für alle $h \in X$, nennen wir einen **stationären Punkt** von f , unabhängig davon, ob in x^* ein lokales Extremum vorliegt.
- Insbesondere bezeichnen wir einen stationären Punkt $a \in U$ als einen **Sattelpunkt** von f , wenn zu jedem $\delta > 0$ Punkte $x, \tilde{x} \in B_\delta(a) \cap U$ mit $f(x) > f(a)$ und $f(\tilde{x}) < f(a)$ existieren.

Differenzierbare Abbildungen – (vgl. Skript, Abschnitt 2.3)

- **Definition 2.23:** Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen. Eine Abbildung $f: U \rightarrow Y$ heißt **im Punkt** $a \in U$ **differenzierbar**, falls ein $A \in L(X, Y)$ existiert, so dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{\|h\|_X} = 0 \quad (5.2)$$

gilt. Dann heißt A die **Ableitung von f im Punkt a** und wird mit $df(a) := A$ symbolisiert.¹⁶

- **Satz 2.24:** Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen. Ist $f: U \rightarrow Y$ in $a \in U$ differenzierbar, dann ist f in a auch in jede beliebige Richtung $h \in X$ partiell differenzierbar und es gilt $\boxed{df(a)h = \partial_h f(a)}$. Insbesondere ist dann f in a auch Gâteaux-differenzierbar.

Bemerkung/Bezeichnung:

- Ist $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ in $a \in U$ differenzierbar, so ist $df(a) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Bezeichnen e_j , $j = 1, \dots, m$, die Einheitsvektoren und ist $f = (f_1, \dots, f_n)$, so wird $df(a)$ wegen

$$(df(a)e_j)_i = (\partial_{e_j} f(a))_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right)_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \quad (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m) \quad (5.3)$$

durch die $(n \times m)$ -Matrix

$$Jf(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

repräsentiert, welche **Jacobi-Matrix** von f im Punkt a genannt wird.

- Für eine in a differenzierbare Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ist der **Gradient** $\text{grad } f(a)$ als Spaltenvektor durch $\boxed{df(a) = \langle \text{grad } f(a), \cdot \rangle}$ mittels des Euklidischen Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert.

- **Satz 2.26:** Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen, $f: U \rightarrow Y$ eine Abbildung. Falls f in einem Punkt $a \in U$ differenzierbar ist, dann ist f auch stetig in a .
- **Lemma 2.27:** Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $(Z, \|\cdot\|_Z)$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen. Eine Abbildung $f = (f_1, f_2): U \rightarrow Y \times Z$ ist genau dann in $a \in U$ differenzierbar, wenn die Abbildungen $f_1: U \rightarrow Y$ und $f_2: U \rightarrow Z$ in a differenzierbar sind. In diesem Fall gilt $df(a) = (df_1(a), df_2(a))$.
- **Lemma 2.28:** Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen. Dann gelten

- Sind $f, g: U \rightarrow Y$ differenzierbar in $a \in U$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Konstanten, dann ist auch $(\lambda f + \mu g): U \rightarrow Y$ differenzierbar in a mit Ableitung $\boxed{d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a)}$.

¹⁶In der Literatur wird die Differenzierbarkeit im oben definierten Sinn auch oft als totale oder auch Fréchet-Differenzierbarkeit und die Ableitung A entsprechend als das totale oder Fréchet-Differential bezeichnet.

(b) Sind $f: U \rightarrow Y$ und $\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $a \in U$, dann ist $(\lambda f): U \rightarrow Y$ differenzierbar in a mit Ableitung $d(\lambda f)(a)h = d\lambda(a)h \cdot f(a) + \lambda(a) \cdot df(a)h$. (**Produktregel**)

- **Satz 2.29:** Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y), (Z, \|\cdot\|_Z)$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen, $V \subset Y$ offen. Ist $f: U \rightarrow V$ differenzierbar in $a \in U$ mit Ableitung $df(a) \in L(X, Y)$ und $g: V \rightarrow Z$ differenzierbar in $b = f(a)$ mit Ableitung $dg(b) \in L(Y, Z)$, dann ist $g \circ f$ differenzierbar in a mit Ableitung

$$d(g \circ f)(a) = ((dg \circ f)(a)) \circ df(a) \quad (\text{Kettenregel}). \quad (5.5)$$

Bemerkung:

Bei $X = \mathbb{R}^k, Y = \mathbb{R}^m, Z = \mathbb{R}^n$ gilt für die Jacobi-Matrizen $J(g \circ f)(a) = (Jg \circ f)(a) \cdot Jf(a)$.

Zusatzaufgabe 5.1: Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-Räume. Zeigen Sie:

- (a) Ist $f: X \rightarrow Y$ im Punkt $a \in X$ in Richtung h partiell differenzierbar, so ist f im Punkt $a \in X$ auch für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ in Richtung λh partiell differenzierbar mit $\partial_{\lambda h} f(a) = \lambda \partial_h f(a)$.

- (b) Sind $f, g: X \rightarrow Y$ im Punkt $a \in X$ partiell differenzierbar in Richtung h , dann ist auch jede Linearkombination $(\lambda f + \mu g)$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ im Punkt a partiell differenzierbar in Richtung h mit

$$\partial_h(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \partial_h f(a) + \mu \partial_h g(a). \quad (5.6)$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.1:

- (a) Während für $\lambda = 0$ die Aussage $\partial_{\lambda h} f(a) = \lambda \partial_h f(a)$ klar ist, folgt diese für $\lambda \neq 0$ wegen

$$\partial_{\lambda h} f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\lambda h) - f(a)}{t} = \lambda \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\lambda h) - f(a)}{\lambda t} = \lambda \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(a + sh) - f(a)}{s}.$$

- (b) Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \partial_h(\lambda f + \mu g)(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\lambda f(a + th) + \mu g(a + th)) - (\lambda f(a) + \mu g(a))}{t} \\ &= \lambda \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} + \mu \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(a + th) - g(a)}{t} = \lambda \partial_h f(a) + \mu \partial_h g(a). \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 5.2: Zeigen Sie: (a) **Satz 2.20** (MWS) (b) **Satz 2.22** (Notwendiges Kriterium)

- (c) In keinem $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_i = \|x\|_\infty = x_j$ für $i \neq j$ ist $f(x) := \|x\|_\infty$ partiell differenzierbar.

- (d) Bei $i \neq j$ ist $f(x) := \|x\|_1$ in den Punkten e_i nicht in die Richtung e_j partiell differenzierbar.¹⁷

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.2:

- (a) Nach Voraussetzung ist die Funktion $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(t) := f(x + t(\tilde{x} - x))$, differenzierbar. Somit gibt es nach dem Mittelwertsatz¹⁸ ein $\theta \in]0, 1[$ mit $\varphi(1) - \varphi(0) = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{1 - 0} = \varphi'(\theta)$, also mit $f(\tilde{x}) - f(x) = \partial_{(\tilde{x} - x)} f(x + \theta(\tilde{x} - x))$.

- (b) Die Funktion $\varphi(t) := f(x^* + th)$ auf $\mathbb{R}$ besitzt in $t = 0$ ein lokales Extremum und ist dort differenzierbar. Aus dem notwendigen Kriterium für lokale Extrema¹⁹ folgt somit $0 = \varphi'(0) = \partial_h f(x^*)$.

- (c) In einem solchen Punkt gilt wegen $\|x + te_i\|_\infty = x_i + t$ für $t > 0$ die Beziehung

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{\|x + te_i\|_\infty - \|x\|_\infty}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{x_i + t - x_i}{t} = 1$$

aber wegen $\|x + te_i\|_\infty = x_j = x_i$ für $-\|x\|_\infty \leq t < 0$ die Beziehung

$$\lim_{t \nearrow 0} \frac{\|x + te_i\|_\infty - \|x\|_\infty}{t} = \lim_{t \nearrow 0} \frac{x_j - x_i}{t} \stackrel{x_j = x_i}{=} \lim_{t \nearrow 0} \frac{x_i - x_i}{t} = 0.$$

Daher existiert dann für $f(x) := \|x\|_\infty$ die partielle Ableitung $\partial_{e_i} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ nicht.

¹⁷Dabei bezeichnet e_i den i -ten Einheitsvektor.

¹⁸vgl. Corollar 1 zu Satz 2, Forster I, §16

¹⁹vgl. Satz 1, Forster I, §16

(d) Für die reellwertige Funktion $f(x) := \|x\|_1$ existiert aufgrund von

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{\|e_i + te_j\|_1 - \|e_i\|_1}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{1+t-1}{t} = 1 \neq -1 = \lim_{t \nearrow 0} \frac{1-t-1}{t} = \lim_{t \nearrow 0} \frac{\|e_i + te_j\|_1 - \|e_i\|_1}{t}$$

im Fall $i \neq j$ die partielle Ableitung $\partial_{e_j} f(e_i)$ nicht.

Zusatzaufgabe 5.3: Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(0,0) := 0$ und $f(x,y) := \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ sonst definiert.

- (a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_h f$ von f im Punkt $(0,0)$ in jede Richtung $h \in \mathbb{R}^2$.
 (b) Beweisen Sie, dass f in $(0,0)$ stetig ist. (c) Ist f Gâteaux-differenzierbar in $(0,0)$?

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.3:

- (a) Mit $f(th) = t f(h)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ($h = (h_1, h_2)$) folgt

$$\partial_h f(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{(th_1)^2 th_2}{(th_1)^2 + (th_2)^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_1^2 h_2}{h_1^2 + h_2^2} = f(h).$$

Da der Differenzenquotient für die Richtung $h = (0,0)$ wegen $f(th_1, th_2) = f(0,0)$ stets Null ist, gilt wegen $f(0,0) = 0$ auch für diese Richtung $\partial_h f(0,0) = f(0)$. Also ist f in $(0,0)$ in jede Richtung $h \in \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar.

- (b) Der Ungleichung $|f(x,y)| \leq \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq |y|$

wegen gilt $\lim_{(x,y) \rightarrow 0} f(x,y) = 0$, was offensichtlich die Stetigkeit von f in $(0,0)$ impliziert.

- (c) Die Abbildung $h \mapsto \partial_h f(0,0)$ ist in diesem Fall nichts anderes als die Abbildung $h \mapsto f(h)$, und diese ist aber nicht linear, wie die Rechnung $f(1,1) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(1,0) + f(0,1)$ bestätigt. Also ist f nicht Gâteaux-differenzierbar.

Zusatzaufgabe 5.4:

- (a) Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $f(x) := \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ die Abbildung, welche einem $x \in X$ seine Euklidische Norm zuordnet. Ist $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ in Punkten $a \neq 0$ partiell differenzierbar in jede Richtung $h \in X$? Ist sie dort sogar Gâteaux-differenzierbar?

- (b) Zeigen Sie: Die durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\|x\|_2^{2n}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

definierte Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist in Null für beliebiges $i = 1, \dots, n$, in die Koordinatenrichtung e_i partiell differenzierbar, aber dort nicht stetig.

- (c) Die Funktionen $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x \\ y^2 \end{pmatrix}$ und $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + 2xy \\ y^2 e^x \end{pmatrix}$

seien gegeben. Berechnen Sie im Punkt $a = (1,2)$ die Ableitung $d(g \circ f)(a)$ einerseits direkt und andererseits unter Verwendung der Kettenregel.

- (d) Gegeben seien die Funktionen $\lambda: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda(x,y,z) = 3x^2 \sin(y)e^{x+z-1}$ sowie $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = 4x^3 \cos(y+2z)$. Berechnen Sie im Punkt $a = (1, \frac{\pi}{2}, 0)$ die Ableitung von $h = \lambda \cdot g$ einerseits direkt und andererseits mittels Anwendung der Produktregel.

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.4:

- (a) Die Funktion $t \mapsto f(a + th) = \sqrt{\langle a + th, a + th \rangle} = (\|a\|^2 + 2t\langle a, h \rangle + t^2\|h\|^2)^{1/2}$ ist bei $a \neq 0$ nach den üblichen Differentiationsregeln aus der Analysis I in $t = 0$ differenzierbar mit Ableitung

$$\partial_h f(a) = \frac{2\langle a, h \rangle}{2(\|a\|^2)^{1/2}} = \frac{\langle a, h \rangle}{\|a\|} \quad .$$

Es ist $h \mapsto \partial_h f(a) = \frac{\langle a, h \rangle}{\|a\|}$ linear und stetig (vgl. Satz 11, Forster II, §2), da nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\langle a, h \rangle| \leq \|a\| \|h\|$ die lineare Abbildung $h \mapsto \partial_h f(a)$ die Operatornorm $\frac{\|a\|}{\|a\|} = 1 < \infty$ besitzt. Also ist f Gâteaux-differenzierbar auf $X \setminus \{0\}$, da $\partial_h f(a)$ bei $a \neq 0$ für jedes $h \in X$ existiert sowie linear und stetig in h ist.

- (b) Die durch (5.7) definierte Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ist nicht nur in allen Punkten $a \neq 0$ partiell differenzierbar, sondern auch im Nullpunkt in die Koordinatenrichtungen e_i partiell differenzierbar, denn wegen $f(te_i) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(te_i) - 0}{t} = 0 \quad .$$

Aber f ist nicht stetig im Nullpunkt, denn z.B. existiert der Grenzwert von $f(t, t, \dots, t) = \frac{t^n}{(nt^2)^n}$ für $t \rightarrow 0$ nicht und ist somit insbesondere nicht gleich $f(0) = 0$.

- (c) Bei der Kettenregel $d(g \circ f)(x, y) = (dg \circ f)(x, y) \circ df(x, y)$ benötigen wir

$$df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 2y & 2x \\ y^2 e^x & 2y e^x \end{pmatrix}, \quad dg(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad (dg \circ f)(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2y^2 e^x \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$d(g \circ f)(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2y^2 e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x + 2y & 2x \\ y^2 e^x & 2y e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2y + y^2 e^x & 2x + 2y e^x \\ 4x + 4y & 4x \\ 2y^4 e^{2x} & 4y^3 e^{2x} \end{pmatrix}$$

Ohne Kettenregel erhalten wir

$$(g \circ f)(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2xy + y^2 e^x \\ 2x^2 + 4xy \\ y^4 e^{2x} \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad d(g \circ f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 2y + y^2 e^x & 2x + 2y e^x \\ 4x + 4y & 4x \\ 2y^4 e^{2x} & 4y^3 e^{2x} \end{pmatrix},$$

also demnach in beiden Fällen

$$d(g \circ f)(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 + 4 + 4e & 2 + 4e \\ 4 + 8 & 4 \\ 32e^2 & 32e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 4e & 2 + 4e \\ 12 & 4 \\ 32e^2 & 32e^2 \end{pmatrix}.$$

- (d) Für $h(x, y, z) = \lambda(x, y, z)g(x, y, z) = 12x^5 \sin(y) \cos(y + 2z)e^{x+z-1}$ folgt

$$dh(x, y, z) = 12x^4 e^{x+z-1} \begin{pmatrix} (x+5) \sin(y) \cos(y+2z) \\ x(\cos(y) \cos(y+2z) - \sin(y) \sin(y+2z)) \\ x \sin(y) (\cos(y+2z) - 2 \sin(y+2z)) \end{pmatrix}^T,$$

$$\text{also } dh\left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & -12 & -24 \end{pmatrix}.$$

Da $\lambda(x, y, z) = 3x^2 \sin(y)e^{x+z-1}$ und $g(x, y, z) = 4x^3 \cos(y + 2z)$ die Ableitungen

$$\begin{aligned} d\lambda(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 3x(x+2) \sin(y)e^{x+z-1} & 3x^2 \cos(y)e^{x+z-1} & 3x^2 \sin(y)e^{x+z-1} \end{pmatrix}, \\ dg(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 12x^2 \cos(y+2z) & -4x^3 \sin(y+2z) & -8x^3 \sin(y+2z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

besitzen, liefert die Produktregel wegen $\lambda(a) = \lambda(1, \frac{\pi}{2}, 0) = 3$ und $g(a) = g(1, \frac{\pi}{2}, 0) = 0$ ebenso

$$d(\lambda \cdot g)(a) = g(a)d\lambda(a) + \lambda(a)dg(a) = 0 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -12 & -24 \end{pmatrix}.$$

Zusatzaufgabe 5.5: Gegeben sei $y \in \mathbb{R}^m$. Bestimmen Sie die Ableitung von

$$(a) \quad f(x) = \langle x, y \rangle \text{ und } g(x) = (\langle x, y \rangle)^2 \text{ f\"ur } x \in \mathbb{R}^m, \quad (b) \quad h(x) = \frac{1}{\|x\|^2} \text{ f\"ur } x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$$

$$(c) \quad v(x_1, x_2, x_3) = x_1^{x_2+x_3} \text{ f\"ur } v: M \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1 > 0\},$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.5:

$$(a) \quad \text{Einerseits ist } df(x) = d\left(\sum_{k=1}^m x_k y_k\right) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{pmatrix} = y^T, \text{ andererseits ergibt sich nach Kettenregel } dg(x) = d(f^2)(x) = 2f(x) \cdot df(x) = 2\langle x, y \rangle y^T \text{ bzw. auch direkt}$$

$$dg(x) = d\left(\left(\sum_{k=1}^m x_k y_k\right)^2\right) = 2\left(\sum_{k=1}^m x_k y_k\right) \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{pmatrix} = 2\langle x, y \rangle y^T.$$

$$(b) \quad \text{Wegen } h(x) = \frac{1}{\langle x, x \rangle}, \text{ also } h = h_1 \circ h_2 \text{ mit}$$

$$h_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{1}{t},$$

$$h_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle x, x \rangle := \sum_{k=1}^n x_k^2,$$

erhalten wir mit der Kettenregel $dh(x) = (dh_1 \circ h_2)(x) \cdot dh_2(x)$ aufgrund von

$$dh_2(x) = d\langle x, x \rangle = 2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} = 2x^T$$

$$\text{und } dh_1(t) = h_1'(t) = -\frac{1}{t^2} \text{ somit}$$

$$dh(x) = -\frac{2}{(\langle x, x \rangle)^2} \cdot x^T = -\frac{2}{\|x\|^4} x^T.$$

$$(c) \quad \text{Wegen } a^b = \exp(b \ln(a)) \text{ ist } (a^x)' = \ln(a)a^x. \text{ Also folgt}$$

$$dv(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} (x_2 + x_3)x_1^{x_2+x_3-1} & \ln(x_1)x_1^{x_2+x_3} & \ln(x_1)x_1^{x_2+x_3} \end{pmatrix}.$$

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 6

Stetig differenzierbare Abbildungen – (vgl. Skript, Abschnitt 2.4)

- **Definition 2.31:** Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen. Eine Abbildung $f: U \rightarrow Y$ heißt **stetig differenzierbar**, wenn f auf U differenzierbar ist sowie die Ableitung $df: U \rightarrow L(X, Y)$, $a \mapsto df(a)$, stetig ist.

Bezeichnung/Bemerkung: Die Menge aller stetig differenzierbaren Abbildungen $f: U \rightarrow Y$ bilden einen linearen Raum, welcher als $C^1(U, Y)$ bezeichnet wird.

- **Satz 2.33:** Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen. Eine Abbildung $f: U \rightarrow Y$ ist genau dann stetig differenzierbar, wenn sie Gâteaux-differenzierbar mit stetiger Gâteaux-Ableitung $U \ni x \mapsto (h \mapsto \partial_h f(x)) \in L(X, Y)$ ist.
- **Korollar 2.34:** Existieren für $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$ offen die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in jedem $x \in U$ und ist $x \mapsto \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ stetig für alle $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, so ist $f \in C^1(U, Y)$.
- **Satz 2.36 [Schränkensatz]:** Sind $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen, so gilt:

$$f \in C^1(U, Y) \implies \forall x, \tilde{x} \in U: \|f(\tilde{x}) - f(x)\|_Y \leq \left(\max_{t \in [0,1]} \|df(x + t(\tilde{x} - x))\|_{L(X,Y)} \right) \|\tilde{x} - x\|_X.$$

- **Korollar 2.37:** Jede stetig differenzierbare Abbildung ist lokal Lipschitz-stetig.
- **Definition 2.38:** Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen, $f \in C^1(U, Y)$. Ist die Abbildung $df: U \rightarrow L(X, Y)$ selbst wieder stetig differenzierbar, d.h., gilt $df \in C^1(U, L(X, Y))$, so nennen wir f **zweimal stetig differenzierbar** mit $d^2 f: U \rightarrow L(X, L(X, Y))$.

Induktiv definieren wir so **k -mal stetig differenzierbare Abbildungen**²⁰ und bezeichnen $C^k(U, Y)$ als den Vektorraum der k -mal stetig differenzierbaren Abbildungen $f: U \rightarrow Y$.

- **Satz 2.39 [Satz von Schwarz]:** Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen und $f \in C^2(U, Y)$. Dann erfüllt die Abbildung $d^2 f: U \rightarrow L(X, L(X, Y))$ an jedem $x \in U$ die Beziehung

$$\forall h, k \in X: d^2 f(x)(h, k) = d^2 f(x)(k, h). \quad (6.1)$$

Bemerkungen/Bezeichnungen:

- Wie im $\mathbb{R}^1$ setzen wir hier $d^0 f(a) := f(a)$.
- Im Fall $f \in C^k(U, \mathbb{R})$ für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist die k -te Ableitung in Richtung h^k gegeben durch

$$d^k f(x) h^k = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x) h_{i_1} \cdots h_{i_k}. \quad (6.2)$$

Für $k = 2$ definieren wir die (nach Satz 2.39 symmetrische!) **Hesse-Matrix**

$$\text{Hess } f(a) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1}^n. \quad (6.3)$$

²⁰Da man Abbildungen $B \in L(X, L(X, Y))$ durch $(x, \tilde{x}) \mapsto B(x)(\tilde{x})$ mit bilinearen stetigen Abbildungen $X \times X \rightarrow Y$ identifizieren kann, folgt induktiv, dass die k -te Ableitung eine (nach Satz 2.39 sogar symmetrische) k -lineare Abbildung $d^k f(x): X \times \dots \times X \rightarrow Y$ ist.

Niveaumengen, Höhenlinien

- **Definition [Graph]:** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f: U \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ eine Abbildung. Der **Graph** von f ist die Menge

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in U \times \mathbb{R} : y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \quad (6.4)$$

Für $n = 2$ ist Γ_f als Fläche über U im dreidimensionalen Raum interpretierbar.

- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f: U \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ eine Abbildung. Dann ist f bestimmt durch die Schar $N_f(c), c \in \mathbb{R}$, definiert als die Urbilder

$$N_f(c) := f^{-1}(\{c\}) = \{x \in U : f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^n,$$

welche **Niveaumengen** (bzw. im Fall $n = 2$ auch **Höhenlinien**) genannt werden.

Gradient, Vektorfeld, Divergenz, Rotation, Laplace-Operator: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

- Für $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar ist der **Gradient** von f in $x \in U$ der Vektor

$$\text{grad } f(x) := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \right) = \nabla f(x) \quad \text{mit} \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Dabei kann man ∇ (den **Nabla**-Operator) als vektorwertigen Differentialoperator auffassen.

- Für $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar gilt die Produktregel $\boxed{\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g}$.
- Unter einem **Vektorfeld** auf U versteht man eine Abbildung $v: U \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- Sei $v = (v_1, \dots, v_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld (d.h. alle $v_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar). Die **Divergenz** des Vektorfeldes v heißt dann die Funktion

$$\text{div } v(x) := \langle \nabla, v \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} v_i(x)$$

- Für $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar und $v: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar gilt

$$\text{div}(fv) = \langle \text{grad } f, v \rangle + f \text{div } v \quad \text{bzw.} \quad \langle \nabla, fv \rangle = \langle \nabla f, v \rangle + f \langle \nabla, v \rangle.$$

- Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $v: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld. Unter der **Rotation** des Vektorfeldes v versteht man das Vektorfeld

$$\text{rot } v := \nabla \times v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} v_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} v_2 & \frac{\partial}{\partial x_3} v_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} v_3 & \frac{\partial}{\partial x_1} v_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} v_1 \end{pmatrix}$$

- Für eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man

$$\Delta f := \text{div grad } f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f \quad \text{mit dem Laplace-Operator} \quad \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

- Die Lösungen der **Potentialgleichung** $\Delta f = 0$ werden **harmonische Funktionen** genannt.
- Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, das als Zeitintervall interpretiert werde. Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen seien die Koordinaten in $U \times I \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t)$ bezeichnet. Für Funktionen

heißt dann $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto f(x, t),$

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f = 0$$

die **Schwingungsgleichung** (oder **Wellengleichung**) und

$$\Delta f - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} f = 0$$

die **Wärmeleitungsgleichung**. Dabei wirkt der Laplace-Operator auf f nur als Funktion des Ortes x . Die Konstanten $c > 0$ und $k > 0$ geben die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit bzw. Temperaturleitfähigkeit an.

Zusatzaufgabe 6.1:**(Wiederholung Stetigkeit)**

- (a) Ist die Funktion $h: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $h(x,y) := \frac{\sin(x^2)}{x^2 + y^2}$, beschränkt?

Ist h in den Punkt $(0,0)$ stetig fortsetzbar?

- (b) Existieren $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} f(t, at)$ und $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} f(t, at^2)$ für die Funktion $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$ und beliebiges $a \in \mathbb{R}$? Ist die Funktion f in $(0,0)$ stetig oder ggf. stetig abänderbar?

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.1:

- (a) Es gilt $|\sin(x^2)| \leq x^2 \leq x^2 + y^2$, also ist $|h(x,y)| \leq 1$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$, und somit ist h beschränkt. Aber h kann nicht stetig in $(0,0)$ fortgesetzt werden, denn einerseits gilt nach den Regeln von L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos(x^2)}{2x} = 1,$$

andererseits aber $\lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = 0$.

- (b) Es ist einerseits

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} f(t, at) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - a^2 t^2}{t^2 + a^2 t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - a^2}{1 + a^2} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}$$

und andererseits

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} f(t, at^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - a^2 t^4}{t^2 + a^2 t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - a^2 t^2}{1 + a^2 t^2} = 1.$$

Da sowohl (t, at) als auch (t, at^2) für $t \rightarrow 0$ gegen den Nullpunkt $(0,0)$ konvergieren, die Funktionswerte – wie eben untersucht – jedoch nicht gegen den Funktionswert 0, sondern sogar gegen (überabzählbar viele) verschiedene Werte streben, ist f in $(0,0)$ weder stetig noch stetig abänderbar.

Zusatzaufgabe 6.2:**(Nachtrag Kurven)**

- (a) Eine nach Polarkoordinaten parametrisierte Kurve $c: \varphi \mapsto (r(\varphi) \cos(\varphi), r(\varphi) \sin(\varphi))$ mit einem $r \in C^1([\alpha, \beta], [0, \infty[)$ besitzt die Bogenlänge

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\varphi))^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}(\varphi)\right)^2} d\varphi. \quad (6.5)$$

- (b) Bestimmen Sie die Bogenlänge von $c: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi \mapsto (\varphi^2 \cos(\varphi), \varphi^2 \sin(\varphi))$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.2:

- (a) Da $r: [\alpha, \beta] \rightarrow [0, \infty[$ stetig differenzierbar ist, sind es auch die Komponenten $x(\varphi) = r(\varphi) \cos(\varphi)$ und $y(\varphi) = r(\varphi) \sin(\varphi)$, also (vgl. Lemma 1.16 und Lemma 1.39) auch $c(\varphi) := (x(\varphi), y(\varphi))$, so dass wiederum nach Satz 2.13 die Kurve rektifizierbar ist mit Bogenlänge

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{c}(\varphi)\|_2 d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{r}(\varphi) \cos(\varphi) - r(\varphi) \sin(\varphi))^2 + (\dot{r}(\varphi) \sin(\varphi) + r(\varphi) \cos(\varphi))^2} d\varphi \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{r}(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2} d\varphi. \end{aligned}$$

- (b) Da es sich um eine nach Polarkoordinaten parametrisierte Kurve $c: \varphi \mapsto (r(\varphi) \cos(\varphi), r(\varphi) \sin(\varphi))$ mit einem $r \in C^1([0, \pi], [0, \infty[)$, nämlich $r: \varphi \mapsto \varphi^2$, handelt, erhalten wir nach (a) für die Bogenlänge

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\varphi))^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}(\varphi)\right)^2} d\varphi = \int_0^{\pi} \sqrt{(\varphi^2)^2 + (2\varphi)^2} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 2\varphi \sqrt{\varphi^2 + 4} d\varphi \\ &\stackrel{\text{SR}}{=} \frac{1}{2} \int_4^{\pi^2+4} \sqrt{t} dt = \frac{1}{3} \sqrt{t^3} \Big|_4^{\pi^2+4} = \frac{1}{3} \left(\sqrt{(\pi^2+4)^3} - 8 \right). \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 6.3:**(Fortsetzung Differenzierbarkeitsbegriffe)**

- (a) Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig im Nullpunkt und gilt $f(0) = 0$, so ist $\|x\|f(x)$ in $0 \in X$ nicht nur in alle Richtungen partiell differenzierbar, sondern auch Gâteaux-differenzierbar.
- (b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\partial_h f(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$ für die Funktionen
- (i) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $a = (1, 1)$, $h = (3, -4)$; (ii) $f(x, y) = x^{y+1}$, $a = (2, 2)$, $h = (1, 1)$.
- (c) Sei $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $g:]0, \infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t) = \left(\frac{1}{t}, \ln(t)\right)$ und $g(x, y) = x \exp\left(\frac{y}{x}\right)$. Bestimmen Sie mittels Kettenregel die Ableitung von $F := g \circ f$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.3:

- (a) Offenbar ist $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(th)$ stetig mit $g(0) = 0$. Desweiteren wissen wir, dass dann auch $b(t)g(t)$ stetig in Null mit Funktionswert Null ist, falls $b(t)$ in der Nähe von 0 beschränkt ist. Also folgt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|th\|f(th) - 0}{t} = \|h\| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t} f(th) = 0$$

für jedes $h \in X$ und somit ist f nicht nur partiell differenzierbar, sondern sogar Gâteaux-differenzierbar, da die Nullabbildung $h \mapsto \partial_h f(0) = 0$ auch stetig und linear ist.

- (b) (i) Die Funktion $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ist in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $xy \neq 0$ nach Korollar 2.34 differenzierbar mit Ableitung $df(x, y) = \left(-\frac{1}{x^2} \quad -\frac{1}{y^2}\right)$, da die partiellen Ableitungen dort stetig sind. Über die aus Satz 2.24 bekannte Beziehung $\partial_h f(x, y) = df(x, y)h$ erhalten wir

$$\partial_{(3,-4)} f(1, 1) = df(1, 1) \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 1.$$

- (ii) Die Funktion $f(x, y) = x^{y+1}$ ist in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ nach Korollar 2.34 differenzierbar mit Ableitung $df(x, y) = ((y+1)x^y \quad \ln(x)x^{y+1})$, da die partiellen Ableitungen dort stetig sind. Da $\partial_h f(x, y) = df(x, y)h$ nach Satz 2.24 gilt, erhalten wir

$$\partial_{(1,1)} f(2, 2) = df(2, 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = ((2+1)2^2 \quad \ln(2)2^{2+1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4(3 + 2 \ln(2)).$$

- (c) Mit $dg(x, y) = \left((1 - \frac{y}{x}) \exp\left(\frac{y}{x}\right) \quad \exp\left(\frac{y}{x}\right)\right)$ und Kettenregel $d(g \circ f)(t) = (dg \circ f)(t) \cdot df(t)$ sowie $t^t = \exp(t \ln(t))$ ergibt sich

$$dF(t) = \left((1 - t \ln(t)) \exp(t \ln(t)) \quad \exp(t \ln(t))\right) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2} \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix} = t^t \left(\frac{\ln(t) + 1}{t} - \frac{1}{t^2}\right).$$

Zusatzaufgabe 6.4:**(Höhere (stetige) Differenzierbarkeit)**

- (a) Existiert ein $g \in C^2\left(]0, \frac{\pi}{2}[\times]0, \infty[, \mathbb{R}\right)$, so dass

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x, y) = \left(\frac{\tan(x)}{y}\right)^2 + y + \frac{1}{y^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) = -\frac{2 \tan(x)}{y^3} + x$$

für alle $(x, y) \in]0, \frac{\pi}{2}[\times]0, \infty[$ gilt? Falls ja, geben Sie eine solche Funktion an.

- (b) Ermitteln Sie das Differential und die Hessematrix von

(i) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{x^2-y^3}$ (ii) $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = (x^2 + y)^3 + (y^2 + z)^4$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.4:

- (a) Gäbe es ein derartiges $g \in C^2$, so müssten die beiden gemischten Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{2 \tan(x)}{y^3} + x \right) = -\frac{2 \tan'(x)}{y^3} + 1$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\tan(x)}{y} \right)^2 + y + \frac{1}{y^2} \right) = 2 \left(\frac{\tan(x)}{y} \right) \cdot \left(-\frac{\tan(x)}{y^2} \right) + 1 - \frac{2}{y^3} = 1 - \frac{2}{y^3} (1 + (\tan(x))^2)$$

nach dem Satz von Schwarz übereinstimmen, was sie wegen $(\tan(x))' = \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}$ auch tun. In der Tat gelangen wir durch entsprechendes partielles Integrieren

$$g(x, y) = \int \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) dy = \int \left(-\frac{2 \tan(x)}{y^3} + x \right) dy = \frac{\tan(x)}{y^2} + xy + c(x)$$

und anschließendem partiellen Ableiten nach x auf die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tan(x)}{y^2} + xy + c(x) \right) = \frac{(1 + (\tan(x))^2)}{y^2} + y + c'(x) = \left(\frac{\tan(x)}{y} \right)^2 + y + \frac{1}{y^2},$$

also $c'(x) = 0$. Also erfüllt etwa $g(x, y) = \frac{\tan(x)}{y^2} + xy + 2$ alle geforderten Bedingungen.

- (b) (i) Wegen $df(x, y) = (2xe^{x^2-y^3} \quad -3y^2e^{x^2-y^3})$ ergibt sich für die Hessematrix

$$\text{Hess } f(x, y) = e^{x^2-y^3} \begin{pmatrix} 2 + 4x^2 & -6xy^2 \\ -6xy^2 & 9y^4 - 6y \end{pmatrix}.$$

- (ii) Wegen $dg(x, y, z) = (6x(x^2 + y)^2 \quad 3(x^2 + y)^2 + 8y(y^2 + z)^3 \quad 4(y^2 + z)^3)$ ergibt sich für die Hessematrix

$$\text{Hess } g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 30x^4 + 36x^2y + 6y^2 & 12x(x^2 + y) & 0 \\ 12x(x^2 + y) & 6(x^2 + y) + 8(y^2 + z)^2(7y^2 + z) & 24y(y^2 + z)^2 \\ 0 & 24y(y^2 + z)^2 & 12(y^2 + z)^2 \end{pmatrix}.$$

Zusatzaufgabe 6.5: Beweisen Sie (6.2) per vollständiger Induktion für ein $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.5:

Sei $h \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Der Induktionsanfang folgt aus der Linearität der Gâteaux-Ableitung und Satz 2.24 über

$$df(x)h \stackrel{\text{Satz 2.24}}{=} \partial_h f(x) \stackrel{\text{Linearität}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i \quad (6.6)$$

Angenommen, (6.2) gelte für ein $k \geq 1$. Mit dem Satz von Schwarz (Satz 2.39) über die Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge und der Linearität folgt dann analog

$$\begin{aligned} d^{k+1}f(x)h^{k+1} &\stackrel{(\star)}{=} d(d^k f(x)h^k)h \stackrel{(\text{IV})}{=} d \left(\sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x) h_{i_1} \cdots h_{i_k} \right) h \\ &\stackrel{(6.6)}{=} \sum_{i_{k+1}=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}} \left(\sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x) h_{i_1} \cdots h_{i_k} \right) h_{i_{k+1}} \\ &\stackrel{\text{Satz 2.39}}{\stackrel{\text{Linearität}}{=}} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \sum_{i_{k+1}=1}^n \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}}(x) h_{i_1} \cdots h_{i_k} h_{i_{k+1}}, \end{aligned}$$

wobei wir an der Stelle $(\star)$ verwendet haben, dass $d^k f(x) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, L(\dots, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \dots)))$ gilt, also dass $d^k f(x)$ für jedes x eine k -lineare stetige Abbildung $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist.

Zusatzaufgabe 6.6:

- (a) Sei $r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $r(x) := \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Welche Niveaumengen $N_r(c) = \{x \in \mathbb{R}^n : r(x) = c\}$ sind nicht leer? Was beschreiben sie?
- (b) Zeigen Sie, dass r in allen $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ partiell differenzierbar ist und berechnen Sie die partiellen Ableitungen. Was ist demzufolge der Gradient von $r(x)$?
- (c) Fassen Sie den Gradienten von $r(x)$ als Vektorfeld $F: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf und berechnen Sie die Divergenz dieses Vektorfeldes. Berechnen Sie dazu vorher den Gradienten von $\frac{1}{r(x)}$.
- (d) Sei $f \in C^2([0, \infty[, \mathbb{R})$. Berechnen Sie Δg für $g := f \circ r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (e) Zeigen Sie, dass $F(x) := \frac{1}{(r(x))^{n-2}}$ für $n \geq 3$ die Potentialgleichung $\Delta F = 0$ löst.

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.6:

- (a) Es ist $N_r(0) = \{0\}$. Für $c < 0$ gilt $N_r(c) = \emptyset$ und für $c > 0$ beschreiben die Niveaumengen $N_r(c)$ Sphären (für $n = 2$ Kreise und für $n = 3$ Kugeloberflächen) vom Radius c .

- (b) Für jedes $i = 1, \dots, n$ ist $r(x) = \sqrt{x_i^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k^2}$, so dass für $x \neq 0$ nach der Kettenregel
- $$\frac{\partial}{\partial x_i} r(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(x_i^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{r(x)}.$$

Also gilt offenbar $\text{grad } r(x) = \nabla r(x) = \frac{x}{r(x)}$.

- (c) Analog zu (b) ist für $x \neq 0$ nach der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r(x)} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \left(x_i^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x_i = -\frac{x_i}{(r(x))^3}$$

und somit $\nabla \frac{1}{r(x)} = \frac{-x}{(r(x))^3}$. Weiterhin können wir die Identität $\text{Id}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x$, offenbar als spezielles Vektorfeld auffassen, welches die Divergenz

$$\text{div Id} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} x_i = \sum_{i=1}^n 1 = n$$

besitzt. Mit $\langle x, x \rangle = (r(x))^2$ und den Rechenregeln für die Divergenz folgt nun

$$\text{div grad } r = \text{div} \left(\frac{1}{r} x \right) = \left\langle \text{grad} \frac{1}{r}, x \right\rangle + \frac{1}{r} \text{div } x = -\frac{\langle x, x \rangle}{r^3} + \frac{n}{r} = \frac{n-1}{r}.$$

- (d) Nach der Kettenregel folgt zunächst $\text{grad } g = \text{grad } f(r) = f'(r) \text{grad } r = f'(r) \frac{x}{r}$. Dann ist mit der Definition von Δg und den Rechenregeln der Divergenz

$$\begin{aligned} \Delta g &= \text{div grad } g = \text{div} \left(f'(r) \frac{x}{r} \right) = \left\langle \text{grad } f'(r), \frac{x}{r} \right\rangle + f'(r) \text{div} \frac{x}{r} \\ &= f''(r) \left\langle \frac{x}{r}, \frac{x}{r} \right\rangle + f'(r) \frac{n-1}{r} = f''(r) + f'(r) \frac{n-1}{r}. \end{aligned}$$

- (e) Wegen $F = f \circ r$ betrachten wir hier $f(r) = \frac{1}{r^{n-2}}$ mit den Ableitungen $f'(r) = \frac{2-n}{r^{n-1}}$ und $f''(r) = \frac{(2-n)(1-n)}{r^n}$. Nach (d) folgt somit

$$\Delta F = f''(r) + f'(r) \frac{n-1}{r} = \frac{(2-n)(1-n)}{r^n} + \frac{2-n}{r^{n-1}} \cdot \frac{n-1}{r} = 0.$$

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 7

Taylorpolynome und das Restglied

- **Definition 2.40:** Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen, $f \in C^k(U, Y)$, $a \in U$. Das **Taylorpolynom k -ten Grades von f im Entwicklungspunkt a** ist definiert durch

$$T_k f(x; a) := \sum_{r=0}^k \frac{1}{r!} d^r f(a)(x-a)^r \quad \text{mit} \quad (x-a)^r := \begin{cases} ((x-a), \dots, (x-a)) \in X^r, & r > 0, \\ 1, & r = 0. \end{cases}$$

Bemerkung: Wegen $df(a)h = \langle \text{grad } f(a), h \rangle$ und $d^2 f(a)(h, h) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$ gilt

$$T_2 f(x; a) = f(a) + \langle \text{grad } f(a), x-a \rangle + \frac{1}{2} \langle \text{Hess } f(a)(x-a), x-a \rangle. \quad (7.1)$$

- **Satz 2.42:** Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen, $f \in C^{k+1}(U, Y)$ sowie $\{a + t(x-a) \mid t \in [0, 1]\} \subset U$. Dann gilt

$$f(x) - T_k f(x; a) = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1} f(a + t(x-a))(x-a)^{k+1} dt. \quad (7.2)$$

Lokale Extrema ohne Nebenbedingung (Zusammenfassung)

- **Definition:** Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum, $U \subset X$ offen. Man sagt, eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ hat in $x^* \in U$ ein **lokales Minimum** beziehungsweise ein **lokales Maximum**, wenn es eine Umgebung $V \subset U$ von x^* mit $f(x^*) \leq f(x)$ beziehungsweise $f(x^*) \geq f(x)$ für alle $x \in V$ gibt.²¹

- **Satz 2.22 [Notwendiges Kriterium für lokale Extrema]:**

Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum, $U \subset X$ offen. Besitzt $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ in $x^* \in U$ ein lokales Extremum und ist f in x^* partiell differenzierbar in Richtung $h \in X$, dann gilt $\partial_h f(x^*) = 0$.

Bemerkung/Bezeichnung:

- Vorsicht:** Ist $K \subset X$ beliebig und $x^* \in \partial K \cap K$ lokales Extremum von $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, gilt nicht notwendigerweise $\partial_h f(x^*) = 0$.
 - Ist $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum, $U \subset X$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in $a \in U$ mit $\partial_h f(a) = 0$ für alle Richtungen $h \in X$, so heißt a **stationärer Punkt von f** .
 - Ist f sogar differenzierbar, muss an einem lokalen Extremum $a \in U$ nach Satz 2.22 zwingend $df(a) = 0$ gelten, da nach Satz 2.24 dann $\forall h \in X: 0 = \partial_h f(a) = df(a)h$ folgt.
 - Insbesondere bezeichnen wir einen stationären Punkt $a \in U$ als einen **Sattelpunkt** von f , wenn zu jedem $\delta > 0$ Punkte $x, \tilde{x} \in B_\delta(a) \cap U$ mit $f(x) > f(a)$ und $f(\tilde{x}) < f(a)$ existieren.
- **Definition 2.45:** Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beziehungsweise die ihr zugeordnete quadratische Form $\mathbb{R}^n \ni h \mapsto \langle Ah, h \rangle \in \mathbb{R}$ heißt
 - **positiv (semi-)definit**, falls $\langle Ah, h \rangle > 0$ (bzw. $\langle Ah, h \rangle \geq 0$) für alle $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.
 - **negativ (semi-)definit**, falls $\langle Ah, h \rangle < 0$ (bzw. $\langle Ah, h \rangle \leq 0$) für alle $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.
 - **indefinit**, falls es Vektoren $h, \tilde{h} \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle Ah, h \rangle > 0$ und $\langle A\tilde{h}, \tilde{h} \rangle < 0$ gibt.

²¹In beiden Fällen wird auch von einem lokalen Extremum von f in $x^* \in U$ gesprochen.

- **Lemma 2.46:** Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt
 - A ist positiv (negativ) definit $\iff$ Jeder Eigenwert von A ist positiv (negativ).
 - A ist indefinit $\iff A$ besitzt sowohl einen positiven als auch negativen Eigenwert.
 - A ist positiv (negativ) semidefinit $\iff$ Alle EWe von A sind nicht-negativ (nicht-positiv).
- **Satz 2.47 [Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema]:** Sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ ein stationärer Punkt (d.h. $df(a) = 0$). Ist $\text{Hess } f(a)$ positiv (bzw. negativ) definit, so besitzt f in a ein lokales Minimum (bzw. Maximum).
- **Konsequenz [Hinreichendes Kriterium für einen Sattelpunkt]:** Ist $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ ein stationärer Punkt und $\text{Hess } f(a)$ indefinit, so besitzt f in a einen Sattelpunkt.

- Zusatzaufgabe 7.1:**
- (a) Zeigen Sie: Für ein $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^T = A$ ist jeder Eigenwert reell.
 - (b) Ist die Hesse-Matrix für ein $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ an jedem Punkt symmetrisch?
 - (c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $Q(x) := \langle Ax, x \rangle$ die ihr zugeordnete quadratische Abbildung $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Euklidischen $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass A durch Q eindeutig bestimmt ist.
 - (d) Zeigen Sie, dass für eine symmetrische positiv definite $n \times n$ -Matrix A alle Hauptabschnittsdeterminanten $\det A_i$, $i = 1, \dots, n$, positiv sind, wobei A_i die aus den ersten i Spalten und Zeilen von A gebildete $i \times i$ -Matrix bezeichnet.²²
 - (e) Sei $m > n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rg}(A) = n$. Zeigen Sie, dass $A^T A$ nur positive Eigenwerte besitzt.
 - (f) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f: x \mapsto x^T A x$ mit einer beliebigen reellen $(n \times n)$ -Matrix A . Zeigen Sie, dass f differenzierbar mit Ableitung $df(x) = x^T (A + A^T)$ ist.
 - (g) Ermitteln Sie die Hesse-Matrix von $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^T A x$ für eine beliebige feste $n \times n$ -Matrix A und zeigen Sie, dass diese unabhängig vom Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist.
Wie lautet die Hesse-Matrix, falls A zusätzlich symmetrisch ist?

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.1:

- (a) Ähnlich dem Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ können wir auf $\mathbb{C}^n$ die Sesquilinearform (Hermite'sches Skalarprodukt) $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle_H := \bar{x}^T y = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k y_k$ betrachten, welche die leicht überprüfbaren Eigenschaften

- (i) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \forall x, y, z \in \mathbb{C}^n : \langle \alpha x + \beta y, z \rangle_H = \bar{\alpha} \langle x, z \rangle_H + \bar{\beta} \langle y, z \rangle_H$ (komplex-linear),
- (ii) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n : \langle x, y \rangle_H = \overline{\langle y, x \rangle_H}$ (hermite'sch),
- (iii) $\forall x \in \mathbb{C}^n : \langle x, x \rangle_H \geq 0$ und $\langle x, x \rangle_H = 0 \iff x = 0$ (positiv definit)

besitzt. Insbesondere liefert $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle_H}$ eine Norm auf $\mathbb{C}^n$. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ nun ein Eigenwert der reellen symmetrischen $n \times n$ -Matrix A und $x \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor mit $\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle_H = 1$, dann gilt wie behauptet $\lambda \in \mathbb{R}$ aufgrund von $A = A^T$ (Symmetrie), $\bar{A} = A$ (Reellwertigkeit) und daher

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \bar{\lambda} \langle x, x \rangle_H \stackrel{(i)}{=} \langle \lambda x, x \rangle_H = \langle Ax, x \rangle_H = \overline{Ax}^T x = \bar{x}^T \bar{A}^T x \\ &= \bar{x}^T A x = \langle x, Ax \rangle_H = \langle x, \lambda x \rangle_H \stackrel{(ii)}{=} \overline{\langle \lambda x, x \rangle_H} \stackrel{(i)}{=} \overline{\bar{\lambda} \langle x, x \rangle_H} = \lambda. \end{aligned}$$

- (b) Für ein $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gilt nach dem Satz von Schwarz (Satz 2.39) an jedem Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ und somit für die Hesse-Matrix

$$(\text{Hess } f(a))^T = \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1}^n \right)^T = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \right)_{i,j=1}^n = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1}^n = \text{Hess } f(a).$$

²²**Hinweis:** Es gilt auch die Umkehrung: Sind alle Hauptabschnittsdeterminanten $\det A_i$ einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv, so ist A positiv definit.

- (c) Der Symmetrie von A wegen gilt $\langle Ax, \tilde{x} \rangle = \frac{1}{2} [Q(x + \tilde{x}) - Q(x) - Q(\tilde{x})]$. Folglich ist A eindeutig durch Q bestimmt, denn setzt man $x := e_i$ und $\tilde{x} := e_j$ für beliebige $i, j \in \{1, \dots, n\}$ in diese Formel ein, so erhält man auf der linken Seite gerade den Eintrag a_{ij} der Matrix A .
- (d) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische positiv definite Matrix, und angenommen wir hätten $\det A_i \leq 0$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann kann zumindest ein Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von A_i nicht positiv sein, da $\det A_i$ gerade das Produkt aller Eigenwerte von A_i bildet. Bezeichne $y \in \mathbb{R}^i$ einen beliebigen zugehörigen Eigenvektor von A_i zum Eigenwert λ , und sei $x := (y, 0)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\langle x, Ax \rangle = \begin{pmatrix} y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i y \\ * \end{pmatrix} = \langle y, A_i y \rangle = \langle y, \lambda y \rangle = \lambda \langle y, y \rangle \leq 0,$$

im Widerspruch zur positiven Definitheit von A . Dies zeigt die Behauptung.

- (e) Die Matrix $B = A^T A$ ist wegen $B^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = B$ symmetrisch, besitzt also nach (a) nur reelle Eigenwerte. Desweiteren ist $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ wegen $m > n$ und $\text{rg}(A) = n$ injektiv. Da nach Aufgabe 1.4 (a) für jede beliebige injektive Abbildung $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch $\|x\|_A := \|Ax\|_2$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ gegeben ist, gilt für alle $x \neq 0$ demnach

$$0 < \|x\|_A = \|Ax\|_2 = \langle Ax, Ax \rangle = (Ax)^T Ax = x^T A^T Ax = x^T Bx = x^T B^T x = \langle Bx, x \rangle.$$

Dies bedeutet nach Definition genau die Positiv-Definitheit der Matrix $B = A^T A$. Nach Lemma 2.46 ist dies jedoch gleichbedeutend damit, dass $B = A^T A$ nur positive Eigenwerte besitzt.

- (f) Die Abbildung $\Phi := x^T(A + A^T)$ ist für jedes feste x in $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, denn für beliebige $h, k \in \mathbb{R}^n$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt aufgrund der Linearität von Matrizen

$$\Phi(\lambda h + \mu k) = x^T(A + A^T)(\lambda h + \mu k) = \lambda x^T(A + A^T)h + \mu \lambda x^T(A + A^T)k = \lambda \Phi(h) + \mu \Phi(k)$$

und lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Räumen sind beschränkt, also nach Lemma 1.50 stetig. Aufgrund von $a^T = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ ist auch $x^T A^T h = h^T Ax$. Desweiteren gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|h^T Ah| = |\langle h, Ah \rangle| \leq \|h\|_2 \|Ah\|_2,$$

woraus sich zusammen mit der Linearität von A und der Stetigkeit der Norm und der von A dann $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h^T Ah|}{\|h\|_2} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \|Ah\|_2 = 0$ ergibt und folglich wie behauptet

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \Phi(h)}{\|h\|_2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^T A(x+h) - x^T Ax - x^T(A + A^T)h}{\|h\|_2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^T Ax + h^T Ah - x^T A^T h}{\|h\|_2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^T Ah}{\|h\|_2} = 0. \end{aligned}$$

- (g) Nach der vorigen Aufgabe gilt $df(x) = x^T(A^T + A)$. Da die erste Ableitung in x linear ist und somit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{df(x+h) - df(x) - df(h)}{\|h\|} = 0, \quad \text{also } \forall h \in \mathbb{R}^n: d(df(x))h = df(h)$$

gilt, erhalten wir $\text{Hess } f(x) = A^T + A$, und – falls A symmetrisch ist – also $\text{Hess } f(x) = 2A$.

Zusatzaufgabe 7.2:

(Ausgleichsrechnung/Regression)

- (a) Sei $m > n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix vollen Ranges und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie: Dann löst der Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \stackrel{!}{=} \min$ genau dann, wenn er die Normalengleichungen $A^T Ax = A^T b$ erfüllt.

- (b) Es seien die Messpunkte (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$, gegeben. Ermitteln Sie die optimalen Parameter γ und δ einer Ausgleichsgerade $g(x) = \gamma x + \delta$.
- (c) Wenden Sie die Methode der linearen Regression (d.h., die Bestimmung einer Ausgleichsgerade – vgl. (b)) auf die folgende Messreihe an, um das Gewicht zur Größe 180 cm zu schätzen.

Größe in cm	160	165	168	170	175	178	185	190	193
Gewicht in kg	60	61	70	72	73	74	81	83	87

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.2:

- (a) Die Funktion $f(x) := \|Ax - b\|_2^2$ besitzt wegen $f(x) = \langle Ax - b, Ax - b \rangle$ die Ableitung $df(x)h = 2\langle Ax - b, Ah \rangle$, denn

- (i) die affin-lineare Abbildung $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax - b$ besitzt wegen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x) - Ah}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - b - (Ax - b) - Ah}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{\|h\|} = 0$$

in jedem beliebigen Punkt die Ableitung $du(x) = A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$;

- (ii) die Abbildung $s: x \mapsto \|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle$ besitzt in jedem Punkt die Ableitung

$$ds(x) = d\langle x, x \rangle = 2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{pmatrix} = 2x^T;$$

- (iii) es gilt $f(x) = (s \circ u)(x)$, d.h., nach Kettenregel folgt demnach

$$df(x) = (ds \circ u)(x) \cdot du(x) = 2(Ax - b)^T \cdot A.$$

Die notwendige Bedingung $df(x)h = 0$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$ ist dann äquivalent zu $A^T(Ax - b) = 0$. Darüber hinaus ist – wie ZA 7.1 (e) begründet – die zweite Ableitung Hess $f(x) = 2A^T A$ positiv definit, da A vollen Rang hat, also ist die Lösung von $A^T Ax = A^T b$ auch wirklich ein Minimum, welche eindeutig durch $x = (A^T A)^{-1} A^T b$ bestimmt ist.

- (b) Offenbar ist die Funktion $F(z) = \|Az - y\|_2^2$ mit $z = (\gamma, \delta)^T$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ und der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{pmatrix}$$

zu minimieren. Dazu benötigen wir die Lösung des linearen Gleichungssystems $A^T Az = A^T y$, wobei $A^T A$ beziehungsweise $A^T y$ sich unmittelbar als

$$A^T A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, \mathbf{1} \rangle \\ \langle x, \mathbf{1} \rangle & m \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A^T y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \sum_{i=1}^m y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x, y \rangle \\ \langle y, \mathbf{1} \rangle \end{pmatrix}$$

mit den beiden Vektoren $x = (x_1, \dots, x_m)^T$ und $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$ ergeben. Somit ist die Lösung durch

$$z = \frac{1}{m\langle x, x \rangle - (\langle x, \mathbf{1} \rangle)^2} \begin{pmatrix} m & -\langle x, \mathbf{1} \rangle \\ -\langle x, \mathbf{1} \rangle & \langle x, x \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle x, y \rangle \\ \langle y, \mathbf{1} \rangle \end{pmatrix}$$

gegeben, denn die Inverse von $B := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ergibt sich als $B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ aus der Gleichung

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

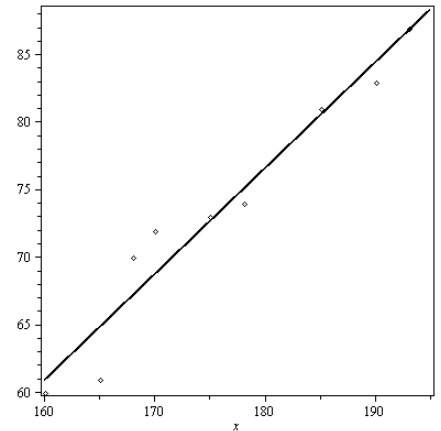
- (c) Mit den Messwerten $x = (160 \ 165 \ 168 \ 170 \ 175 \ 178 \ 185 \ 190 \ 193)$ für die Größe und $y = (60 \ 61 \ 70 \ 72 \ 73 \ 74 \ 81 \ 83 \ 87)$ für das Gewicht ergeben sich

$$m = 9, \quad \langle x, x \rangle = 279832, \quad \langle x, 1 \rangle = 1584, \quad \langle y, 1 \rangle = 661, \quad \langle x, y \rangle = 117158$$

und somit $m\langle x, x \rangle - (\langle x, 1 \rangle)^2 = 9432$. Wegen $m\langle x, y \rangle - \langle x, 1 \rangle \langle y, 1 \rangle = 7398$ für die erste Komponenten und $\langle x, x \rangle \langle y, 1 \rangle - \langle x, y \rangle \langle x, 1 \rangle = -609320$ erhalten wir nach (b) die Lösung

$$\begin{aligned} (\gamma, \delta) &= \left(\frac{7398}{9432}, \frac{-609320}{9432} \right) \\ &= \left(\frac{411}{524}, \frac{-76165}{1179} \right) \\ &\approx (0.784351, -64.601357). \end{aligned}$$

Der Körpergröße 180cm entspricht somit das Gewicht 76.58kg.



Zusatzaufgabe 7.3:

- (a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema und ggf. Sattelpunkte von

$$f(x, y) := x^2 + xy + y^2 + ax + by \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

- (b) Zeigen Sie, dass das Polynom $f(x, y) = (x^2 + y^2)(x^2 - 3x + y^2) + x^2$ entlang **jeder** Geraden durch den Ursprung ein lokales Minimum hat, aber dennoch in $(0, 0)$ **kein** lokales Minimum besitzt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.3:

- (a) Die Funktion $f(x, y) := x^2 + xy + y^2 + ax + by$ besitzt den Gradienten und die Hesse-Matrix

$$(\text{grad } f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y + a \\ 2y + x + b \end{pmatrix}, \quad (\text{Hess } f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Da Hess f positiv definit (mit Eigenwerten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$) und $\text{grad } f = (0, 0)$ die Lösung $x = \frac{b-2a}{3}$, $y = \frac{a-2b}{3}$ besitzt (und f für $(x, y) \rightarrow \infty$ gegen $+\infty$ strebt), liegt im Punkt $(\frac{b-2a}{3}, \frac{a-2b}{3})$ ein Minimum.

- (b) Geraden durch den Ursprung sind genau die Mengen $g_c := \{(x, cx) \mid x \in \mathbb{R}\}$ für $c \in \mathbb{R}$ und $g_\infty = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Offenbar gilt $f|_{g_c}(x) = f(x, cx) = (1 + c^2)x^4 - 3(1 + c^2)x^3 + x^2$ und $f|_{g_\infty}(y) = f(0, y) = y^4$. Wegen $f'_{|g_\infty}(y) = 4y^3$ ergibt sich $f'_{|g_\infty}(0) = 0$ sowie $f'_{|g_\infty}(y) > 0$ für $y > 0$ und $f'_{|g_\infty}(y) < 0$ für $y < 0$. Also besitzt f eingeschränkt auf die Gerade g_∞ im Ursprung ein lokales Minimum. Analog folgt aus

$$f'_{|g_c}(x) = 4(1 + c^2)^2 x^3 - 9(1 + c^2)x^2 + 2x, \quad f''_{|g_c}(x) = 12(1 + c^2)^2 x^2 - 18(1 + c^2)x + 2,$$

dass f eingeschränkt auf jede Gerade g_c im Ursprung ein lokales Minimum besitzt. Jedoch besitzt f selbst in $(0, 0)$ kein lokales Extremum, denn zu jedem $\varepsilon > 0$ findet sich ein $c > 0$ mit $\|(\frac{2}{1+c^2}, \frac{2c}{1+c^2})\| = \frac{2}{\sqrt{1+c^2}} < \varepsilon$ und $f(\frac{2}{1+c^2}, \frac{2c}{1+c^2}) = f|_{g_c}(\frac{2}{1+c^2}) < 0 = f(0, 0)$, denn es ist

$$f|_{g_c}\left(\frac{2}{1+c^2}\right) = (1+c^2)^2 \frac{2^4}{(1+c^2)^4} - 3(1+c^2) \frac{2^3}{(1+c^2)^3} + \frac{2^2}{(1+c^2)^2} = -\frac{4}{(1+c^2)^2}.$$

Bemerkung: Neben $x = 0$ sind $x_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{(1+c^2)^8}$ die beiden weiteren Nullstellen von $f|_{g_c}(x)'$ wegen

$$f'_{|g_c}(x) = 4x \left(((1+c^2)^2 x^2 - 2 \cdot \frac{9}{8}(1+c^2)x + \frac{1}{2} - \frac{81}{64} + \frac{81}{64}) \right) = 4x \left(\left((1+c^2)x - \frac{9}{8} \right)^2 - \frac{49}{64} \right).$$

Zusatzaufgabe 7.4: (a) Bestimmen Sie $T_3g((x, y); (0, 0))$ für $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2y + xy - y + 1$.

(b) Bestimmen Sie $T_2f((x, y, z); (1, 0, 0))$ für $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x) + z \\ x + y + \exp(z) \end{pmatrix}$.

(c) Sei $f:]0, \infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x, y) := \frac{x-y}{x+y}$ definiert.

(i) Bestimmen Sie für f das Taylorpolynom zweiten Grades im Entwicklungspunkt $(1, 1)$.

(ii) Besitzt f lokale oder globale Extrema?

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.4:

(a) Es gilt $T_3g((x, y); (0, 0)) = x^2y + xy - y + 1$, da wir hier ein Polynom 3. Grades vorliegen haben. In der Tat gilt dies wegen

$$dg(x, y) = ((2x+1)y \quad x^2 + x - 1) \quad , \quad \text{Hess } g(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+1 \\ 2x+1 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie mit $a = (x_1, x_2) = (x, y)$ und $h = (h_1, h_2)$ entsprechend (6.2) und dem Satz von Schwarz

$$\begin{aligned} d^3f(a)h^3 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a) h_i h_j h_k \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(a) h_1^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(a) h_1^2 h_2 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(a) h_1 h_2^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(a) h_2^3 = 3 \cdot 2 \cdot h_1^2 h_2 \end{aligned}$$

aufgrund der dreimal stetigen Differenzierbarkeit, denn damit folgt

$$\begin{aligned} T_3g((x, y); (0, 0)) \\ = 1 + (0 \quad -1) \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x-0 \quad y-0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 2 \cdot (x-0)^2 (y-0) . \end{aligned}$$

Bonus: Wegen $x^2 + x - 1 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$ besitzt g die stationären Punkte $P_{\pm} = (-\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, 0)$, welche jedoch aufgrund von $\det(\text{Hess } g(x, 0)) = -(2x+1)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und der daraus folgenden Indefinitheit von $\text{Hess } g(P_{\pm})$ beides Sattelpunkte sind.

(b) Wir benötigen $f(1, 0, 0)$, $df(1, 0, 0)$ sowie $d^2f(1, 0, 0)$. Demzufolge berechnen wir zunächst

$$df(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos(x) & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \exp(z) \end{pmatrix} \quad , \quad (\text{Hess } f_k(x, y, z))_{k=1,2} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(z) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Mit der in Satz 2.40 gegebenen Formel $T_k f(x; a) := f(a) + \sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} d^l f(a)(x-a)^l$ folgt nun

$$\begin{aligned} T_2f((x, y, z); (1, 0, 0)) \\ = \begin{pmatrix} \sin(1) \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(1) & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \sin(1) + (x-1)\cos(1) + z - \frac{(x-1)^2}{2}\sin(1) \\ 2 + (x-1) + y + z + \frac{1}{2}z^2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \sin(1) - \cos(1) + \cos(1)x - \sin(1)\frac{(x-1)^2}{2} + z \\ 1 + x + y + z + \frac{1}{2}z^2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

- (c) (i) Wir berechnen alle partiellen Ableitungen in den Hauptrichtungen bis zur Ordnung 2:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2y}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-2x}{(x+y)^2}$$

und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-4y}{(x+y)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{4x}{(x+y)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}.$$

Also erhalten wir im Punkt $(x, y) = (1, 1)$ neben $f(1, 1) = 0$ noch $df(1, 1) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ und

$$\text{Hess } f(1, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} T_2 f((x, y); (1, 1)) &= f(1, 1) + df(1, 1) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left\langle \text{Hess } f(1, 1) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1, y-1) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \\ &= x - y + \frac{1}{4}(y^2 - x^2) \end{aligned}$$

für das Taylorpolynom zweiten Grades von f im Punkt $(1, 1)$.

- (ii) Wegen $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2y}{(x+y)^2}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-2x}{(x+y)^2}$ verschwindet der Gradient von f in keinem Punkt $(x, y) \in]0, \infty[^2$, es gibt also keine lokalen Extrema, und aufgrund der Offenheit von $]0, \infty[^2 \subset \mathbb{R}^2$ daher erst recht keine globalen Extrema.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 8

Diffeomorphismen – (vgl. Skript, Abschnitt 2.5)

- **Definition 2.53:** Seien $(X, \|\cdot\|_X, (Y, \|\cdot\|_Y))$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen und $V \subset Y$ offen. Eine Abbildung $f: U \rightarrow V$ wird **C^k -Diffeomorphismus** von U auf V genannt, falls $f \in C^k(U, V)$ bijektiv ist und zusätzlich $f^{-1} \in C^k(V, U)$ gilt.
- **Definition 2.54:** Seien $(X, \|\cdot\|_X, (Y, \|\cdot\|_Y))$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen. Eine Abbildung $f: U \rightarrow Y$ heißt **lokal C^k -invertierbar bei $x \in U$** , wenn es offene Umgebungen $U' \subset U$ von x und $V' \subset Y$ von $f(x)$ gibt, so dass $f: U' \rightarrow V'$ ein C^k -Diffeomorphismus ist.
- **Lemma 2.55:** Seien $(X, \|\cdot\|_X, (Y, \|\cdot\|_Y))$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen. Ist $f: U \rightarrow Y$ lokal C^k -invertierbar bei $x \in U$, so ist die stetige lineare Abbildung $df(x) \in L(X, Y)$ invertierbar mit Inversem $df^{-1}(f(x)) \in L(Y, X)$. **Bem.:** Insbesondere gilt bei $X = \mathbb{R}^m$ und $Y = \mathbb{R}^n$ auch $m = n$.
- **Satz 2.57 [Satz über lokale Umkehrbarkeit]:** Seien $(X, \|\cdot\|_X, (Y, \|\cdot\|_Y))$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen. Genau dann ist eine Abbildung $f \in C^k(U, Y)$ lokal C^k -invertierbar bei $x \in U$, wenn $df(x) \in L(X, Y)$ invertierbar ist.
- **Korollar 2.58:** Seien $(X, \|\cdot\|_X, (Y, \|\cdot\|_Y))$ Banach-Räume, $U \subset X$ offen und $f \in C^1(U, Y)$. Falls die Ableitung $df(x)$ in jedem Punkt $x \in U$ invertierbar ist, dann ist $f(U)$ offen. Falls f zusätzlich injektiv ist, dann ist f sogar ein Diffeomorphismus von U auf $f(U)$.

Implizit definierte Abbildungen – (vgl. Skript, Abschnitt 2.6)

- **Satz 2.61 [Satz über implizite Funktionen/ Satz über lokale Auflösbarkeit]:**²³ Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y), (Z, \|\cdot\|_Z)$ Banach-Räume, $W \subset X \times Y$ offen und $F \in C^k(W, Z)$. Löst zu vorgegebenem $z^* \in Z$ der Punkt $a^* = (x^*, y^*) \in W$ die Gleichung

$$F(x^*, y^*) = z^* \quad (8.1)$$

und ist die Einschränkung $dF(x^*, y^*)|_Y =: d_Y F(x^*, y^*) \in L(Y, Z)$ invertierbar, dann gibt es offene Umgebungen U^* von x^* und V^* von y^* sowie ein $g \in C^k(U^*, V^*)$ mit

$$\forall (x, y) \in U^* \times V^* : F(x, y) = z^* \iff y = g(x) . \quad (8.2)$$

Bemerkung: Sind alle Räume endlich-dimensional, dann ist $dF(a^*)$ eine Matrix und der Satz insbesondere genau dann anwendbar, falls die Jacobi-Matrix $dF(a^*)$ surjektiv ist, d.h., maximalen Rang besitzt, d.h., alle Zeilen linear unabhängig sind (denn dann können wir – ggf. nach Umsortierung der Variablen – eine invertierbare Untermatrix U mit $\text{rg}(U) = \text{rg}(dF(a^*))$ finden).

Ganz einfaches Beispiel: Seien $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ und $F(x, y) = Ax + By$ mit $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und $B \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, dann ist $dF(x, y) = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$ und die Gleichung (8.1) genau dann nach y^* auflösbar, wenn B invertierbar ist, denn in diesem Fall gilt

$$y^* = B^{-1}(z^* - Ax^*) . \quad (8.3)$$

Gibt es nun eine Umgebung U von x^* und eine auflösende Funktion $y = h(x)$, dann gilt insbesondere $\forall x \in U: F(x, h(x)) = (F \circ H)(x) = z^*$ mit $H: x \mapsto (x, h(x))$. Somit stimmt $F \circ H$ auf ganz U mit einer Konstanten überein, deren Ableitung verschwindet, somit folgt nun nach Kettenregel

$$\forall x \in U: d(F \circ H)(x) = (dF \circ H)(x) \cdot dH(x) = 0 \in L(X, Z) .$$

In unserem einfachen Beispiel liest sich diese Gleichung als $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n \\ dh(x) \end{pmatrix} = 0 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, was umgestellt $dh(x) = -B^{-1}A$ ergibt (Hier hätten wir dies auch aus (8.3) erhalten können).

²³siehe auch Satz 2 (Forster II, §8)

Zusatzaufgabe 8.1: (Anwendungen des Satzes über die lokale Invertierbarkeit)

- (a) Bestimmen Sie die Punkte, an denen die Abbildungen
- $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
- ,

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{1-x} \sin(y) \\ e^{1-x} \cos(y) \end{pmatrix}, \quad g(x, y) = \begin{pmatrix} x + y^3 \\ e^x \end{pmatrix},$$

lokal invertierbar sind. Berechnen Sie dort die Ableitung der lokalen Umkehrabbildung.

- (b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Phi(x, y) := ((x-y)^2, 2xy)$ in der Nähe jedes Punktes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| \neq |y|$ eine differenzierbare Umkehrabbildung besitzt. Beweisen Sie, dass Φ ein Diffeomorphismus von $A := \{(x, y) \mid 0 < y < x\} \subset \mathbb{R}^2$ auf $B :=]0, \infty[^2$ ist.
- (c) Zeigen Sie, dass $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x^3 + 3xe^y \\ y - x^2 \end{pmatrix}$ ein C^1 -Diffeomorphismus ist.
- (d) Zeigen Sie, dass die Abbildung $F(x, y) := (x(1-y), xy)$ auf $\mathbb{R}^2$ in der Nähe jeden Punktes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$ eine differenzierbare Umkehrabbildung besitzt. Beweisen Sie, dass F sogar ein Diffeomorphismus von $]0, \infty[\times]0, 1[$ auf $]0, \infty[\times]0, \infty[$ ist.
- (e) Bei welchen (x, y) ist die C^1 -Abbildung $\Phi(x, y) := (x^2 + y^2, x + y^2)$ ein lokaler Diffeomorphismus?

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.1:

- (a) Als Komposition stetig differenzierbarer Abbildungen sind beide Abbildungen jeweils mindestens aus
- $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$
- mit Ableitungen

$$df(x, y) = e^{1-x} \begin{pmatrix} -\sin(y) & \cos(y) \\ -\cos(y) & -\sin(y) \end{pmatrix}, \quad dg(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 3y^2 \\ e^x & 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det(df(x, y)) = e^{2(1-x)} > 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $\det(dg(x, y)) = -3e^x y^2 < 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y \neq 0$ folgt nach Satz 2.57 die lokale (C^1 -)Invertierbarkeit von f in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und die lokale (C^1 -)Invertierbarkeit von g in allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y \neq 0$. Nach Lemma 2.55 erhalten wir dort für die Ableitung der Umkehrfunktion jeweils

$$df^{-1}(f(x, y)) = e^{x-1} \begin{pmatrix} -\sin(y) & -\cos(y) \\ \cos(y) & -\sin(y) \end{pmatrix}$$

und

$$dg^{-1}(g(x, y)) = \frac{1}{-3e^x y^2} \begin{pmatrix} 0 & -3y^2 \\ -e^x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-x} \\ \frac{1}{3y^2} & \frac{1}{-3e^x y^2} \end{pmatrix}.$$

- (b) Nach Satz 2.57 ist $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ in einem Punkt $\xi \in \mathbb{R}^2$ lokal (C^1 -)invertierbar, wenn Φ stetig differenzierbar ist und $d\Phi(\xi)$ als lineare Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ invertierbar ist. Die Ableitung $d\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x-y) & -2(x-y) \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$ ist nur bei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| = |y|$ singulär, denn es gilt

$$\det(d\Phi(x, y)) = 4x(x-y) + 4y(x-y) = 4(x+y)(x-y) = 4(x^2 - y^2) = 0 \iff |x| = |y|.$$

Betrachten wir $\Phi: \{(x, y) \mid 0 < y < x\} \rightarrow]0, \infty[\times]0, \infty[$, $\Phi(x, y) := ((x-y)^2, 2xy)$, so ist dies sogar ein globaler Diffeomorphismus von A nach B mit Umkehrabbildung

$$\Psi: B \rightarrow A, \quad \Psi(u, v) = \left(\frac{1}{2}(\sqrt{u+2v} + \sqrt{u}), \frac{1}{2}(\sqrt{u+2v} - \sqrt{u}) \right),$$

denn $(x-y)^2 = u > 0$, $2xy = v > 0$ ist für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > y > 0$ wegen $u + 2v = (x+y)^2$ und $x = \frac{1}{2}((x+y) + (x-y))$, $y = \frac{1}{2}((x+y) - (x-y))$, äquivalent zu

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{u+2v} + \sqrt{u}) \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{2}(\sqrt{u+2v} - \sqrt{u}).$$

- (c) Zunächst ist Φ nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit (Satz 2.57) in jedem Punkt lokal C^1 -invertierbar, denn es ist

$$d\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} 3(x^2 + e^y) & 3xe^y \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$$

einerseits stetig und wegen $\det(d\Phi(x, y)) = 3(e^y + x^2(1 + 2e^y)) > 0$ für beliebige $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ andererseits überall invertierbar.

Zu jedem beliebigen $b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f_b(x) = x^3 + 3xe^{b+x^2}$ stetig und wegen $f'_b(x) = 2x^2 + 3e^{b+x^2} + 6x^2e^{b+x^2} > 3e^{b+x^2} > 0$ streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$. Darüber hinaus gilt $f_b(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, denn nach Grenzwertgesetzen folgen $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_b(x) = \pm\infty$. Nach dem Satz über die stetige Umkehrfunktion (siehe Analysis 1) existiert nun ein $f_b^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welches ebenfalls streng monoton wachsend und stetig ist. Die Abbildung $\Psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$\Psi(a, b) = \begin{pmatrix} f_b^{-1}(a) \\ b + (f_b^{-1}(a))^2 \end{pmatrix},$$

ist nun offenbar die Umkehrabbildung zu Φ , wonach $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sogar bijektiv ist. Zusammen mit der lokalen C^1 -Invertierbarkeit liefert nun Korollar 2.58, dass $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sogar ein (globaler) C^1 -Diffeomorphismus ist.

- (d) Da die Komponenten der Funktion als Polynome sogar beliebig oft stetig differenzierbar sind, gilt $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Wegen

$$dF(x, y) = \begin{pmatrix} (1-y) & -x \\ y & x \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \det \begin{pmatrix} (1-y) & -x \\ y & x \end{pmatrix} = x,$$

ist darüber hinaus die Ableitung $dF(x, y)$ in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$ invertierbar. Nach dem Satz über lokale Umkehrbarkeit (Satz 2.57) besitzt F also in der Nähe solcher Punkte eine differenzierbare Umkehrabbildung.

Zur globalen Diffeomorphie: Zunächst bildet F den Streifen $]0, \infty[\times]0, 1[$ nach $]0, \infty[\times]0, \infty[$ ab, denn $x(1-y)$ und xy sind positiv für $x \in]0, \infty[$, $y \in]0, 1[$. Sei nun $F(x, y) = (u, v)$. Dann gilt $x = u + v$ sowie $y = \frac{v}{u+v}$, wobei y bei $u, v > 0$ auch wirklich wohldefiniert ist und in $(0, 1)$ liegt. Also ist $F:]0, \infty[\times]0, 1[\rightarrow]0, \infty[\times]0, \infty[$ bijektiv, die Umkehrabbildung ist explizit durch $F^{-1}(u, v) = (u + v, \frac{v}{u+v})$ gegeben. Bijektivität und lokale Diffeomorphie implizieren aber nach Korollar 2.58 sogar globale Diffeomorphie, was auch zu zeigen war.

- (e) Wegen $d\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$ ist $d\Phi(x, y)$ in den Punkten (x, y) mit $\det(d\Phi(x, y)) = 4xy - 2y \neq 0$ invertierbar. Also ist Φ nach dem Satz über lokale Umkehrbarkeit (Satz 2.57) in der Nähe der Punkte (x, y) mit $x \neq \frac{1}{2}$ und $y \neq 0$ jeweils ein lokaler Diffeomorphismus.

Zusatzaufgabe 8.2: (Satz über implizite Funktionen – Auflösbarkeit nach 1 Variable)

- (a) Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = \cos(x^2) + 2xy + \sin(y^2) - 4x - 1 + y$.
Zeigen Sie, dass $f(x, y) = 0$ lokal in $(0, 0)$ nach $y = g(x)$ auflösbar ist und dass $g(x)$ in einer Umgebung von $(0, 0)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Geben Sie $g'(0)$ und $g''(0)$ an.
- (b) Zeigen Sie: Für hinreichend kleine x, y und genügend nahe bei -1 liegende z kann man die Gleichung $x^2 + y^2 + z + \cosh(xyz) = 0$ nach z auflösen.
- (c) Zeigen Sie, dass für hinreichend kleine x, y , d.h., für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genügend nahe bei $(0, 0)$, die Gleichung $\exp(\sin(xy)) + x^2 - 2y - 1 = 0$ nach y aufgelöst werden kann.
- (d) Sei $y(x)$ eine Funktion, welche die Gleichung $F(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$ löst, d.h. $F(x, y(x)) = 0$ erfüllt. Zeigen Sie mittels der Kettenregel, dass dann $y'(x) = -\frac{x}{y}$ gilt.

- (e) Sei y eine Funktion, welche die Gleichung $F(x, y) := x^5 - y^3 - 3 = 0$ löst, d.h. welche die Gleichung $F(x, y(x)) = 0$ erfüllt. Zeigen Sie mittels Kettenregel, dass $y' = \frac{5x^4}{3y^2}$ bei $y \neq 0$ gilt.
- (f) Sei $x(y, z)$ eine Funktion, welche die Gleichung $G(x, y, z) := x^2y + \ln(yz)x = 0$ löst, d.h. welche die Gleichung $G(x(y, z), y, z) = 0$ erfüllt. Bestimmen Sie mittels Kettenregel $\frac{\partial x}{\partial y}$ und $\frac{\partial x}{\partial z}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.2:

- (a) Zunächst bemerken wir, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ gilt (Dies folgt beispielsweise durch wiederholte Anwendung von Korollar 2.34, da sämtliche partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnung offenbar stetig sind). Nach Satz 2.61 (Satz über implizite Funktionen) ist $f(x, y) = 0$ wegen $f(0, 0) = 0$ in der Nähe von $(0, 0)$ auflösbar, falls $d_y f(0, 0)$ invertierbar ist. Da hier

$$df(x, y) = \begin{pmatrix} -2x \sin(x^2) + 2y - 4 & 2x + 2y \cos(y^2) + 1 \end{pmatrix}$$

und somit $df(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \end{pmatrix}$ gilt, ist $d_y f(0, 0) = (1) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ in der Tat invertierbar. Also finden wir nach Satz 2.61 in der Nähe von $(0, 0)$ eine (sogar beliebig oft stetig differenzierbare) Funktion $y = g(x)$ mit $f(x, g(x)) = 0$.

Leiten wir die Gleichung $f(x, g(x)) = 0$ nach x ab, erhalten wir mit der Kettenregel und der Hilfsfunktion $H: x \rightarrow (x, g(x))$ sowie mit $G = f \circ H = 0$ weiter

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & g'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x \sin(x^2) + 2g(x) - 4 \\ 2x + 2g(x) \cos((g(x))^2) + 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Für $(x, g(x)) = (0, 0)$ liefert dies nun $0 = -4 + g'(0) \cdot 1$, also $g'(0) = 4$. Erneutes Ableiten liefert $0 = 2g'(0) + g''(0) \cdot 1 + g'(0)(2 + 2g'(0) \cos((g(0))^2))$ und somit $g''(0) = -48$.

- (b) Die Funktion $G(x, y, z) := x^2 + y^2 + z + \cosh(xyz)$ ist stetig differenzierbar mit

$$dG(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + yz \sinh(xyz) & 2y + xz \sinh(xyz) & 1 + xy \sinh(xyz) \end{pmatrix}.$$

Für $(x, y, z) = (0, 0, -1)$ gilt $G(x, y, z) = 0$ und $\frac{\partial G}{\partial z}(x, y, z) = 1 + xy \sinh(xyz)$ ist bei $(x, y, z) = (0, 0, -1)$ mit 1 invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren dann eine δ -Umgebung U von $(x, y) = (0, 0)$, eine ε -Umgebung V von $z = -1$ und genau eine stetige Funktion $f: U \rightarrow V$ mit $f(0, 0) = -1$ und $F(x, y, f(x, y)) = 0$ für alle $(x, y) \in U$.

- (c) Die Funktion $F(x, y) := \exp(\sin(xy)) + x^2 - 2y - 1 = 0$ ist offenbar stetig differenzierbar mit

$$\text{grad } F(x, y) = \begin{pmatrix} y \cos(xy) \exp(\sin(xy)) + 2x \\ x \cos(xy) \exp(\sin(xy)) - 2 \end{pmatrix}.$$

Für $(x, y) = (0, 0)$ gilt $F(x, y) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x \cos(xy) \exp(\sin(xy)) - 2$ ist bei $(x, y) = (0, 0)$ mit -2 invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren also eine Umgebung U von $x = 0$, eine Umgebung V von $y = 0$ und genau eine stetig differenzierbare Funktion $f: U \rightarrow V$ mit $f(0) = 0$ und $F(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in U$.

- (d) $F(x, y) = 0$ ist äquivalent zu $x^2 + y^2 = 1$ und für genügend kleine x ($|x| < 1$) können wir $y = y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ für positive y finden, was eine explizite Darstellung von y bedeutet. Nach der Kettenregel können wir die Gleichung $F(x, y) = 0$ differenzieren und erhalten

$$dF(x, y) = 2x + 2y(x)y'(x) = 0.$$

Da wir $y > 0$ voraussetzen, erhalten wir $y'(x) = -\frac{x}{y}$.

- (e) Die Ableitung der Gleichung $F(x, y(x)) = 0$ nach x liefert $5x^4 - 3y^2 y' = 0$ und somit $y'(x) = \frac{5x^4}{3y^2}$.

(f) Die Ableitung der Gleichung $G(x(y, z), y, z) = 0$ nach y liefert

$$2xyx_y + x^2 + \frac{x}{y} + \ln(yz)x_y = 0, \quad \text{d.h.} \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -x \frac{xy + 1}{y(2xy + \ln(yz))}.$$

Ebenso liefert Ableiten nach z die Gleichung

$$2xyx_z + \frac{x}{z} + \ln(yz)x_z = 0, \quad \text{d.h.} \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{x}{z(2xy + \ln(yz))}.$$

Erläuterung: Die Funktion $F = G \circ H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (y, z) \mapsto (\varphi(y, z), y, z)$ besitzt nach Kettenregel das Differential

$$\begin{aligned} dF(y, z) &= (dG \circ H)(y, z) \cdot dH(y, z) \\ &= \begin{pmatrix} 2\varphi y + \ln(yz) & \varphi^2 + \frac{\varphi}{y} & \frac{\varphi}{z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y, z) & \frac{\partial}{\partial z} \varphi(y, z) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left((2\varphi y + \ln(yz)) \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y, z) + \varphi^2 + \frac{\varphi}{y} \quad : \quad (2\varphi y + \ln(yz)) \frac{\partial}{\partial z} \varphi(y, z) + \frac{\varphi}{z} \right) \end{aligned}$$

Da wir uns nur für die Funktionen $x = \varphi(y, z)$ interessieren, für die $G \circ H = 0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt, liefert Ableiten dieser Gleichung das Gleichungssystem $dF(y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, aus welchem wir dann $\frac{\partial}{\partial y} \varphi(y, z)$ und $\frac{\partial}{\partial z} \varphi(y, z)$ jeweils durch Umstellen gewinnen können.

Zusatzaufgabe 8.3: (Satz über implizite Funktionen – Auflösbarkeit nach 2 Variablen)

- (a) Für genügend nahe bei 1 liegende x, y, z kann das Gleichungssystem $\begin{cases} -2x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^2 + e^{y-1} - 2y = 0 \end{cases}$ durch C^∞ -Funktionen $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ nach y und z aufgelöst werden.
- (b) Sei $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, u, v) \mapsto \begin{pmatrix} F_1(x, y, u, v) \\ F_2(x, y, u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \cos(uv) - vx - 1 \\ \sin(u) - y - v \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^2$ von $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $V \subset \mathbb{R}^2$ von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}: U \rightarrow V$ differenzierbar existieren, so dass $F(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) = 0$ für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U$ gilt. Berechnen Sie $df(0, -1)$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.3:

- (a) Die beliebig oft stetig differenzierbare Funktion

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y, z) := (-2x^2 + y^2 + z^2, x^2 + \exp(y-1) - 2y)$$

erfüllt $F(x, y, z) = 0 \in \mathbb{R}^2$ für $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ und besitzt die Ableitung

$$dF(x, y, z) = \begin{pmatrix} -4x & 2y & 2z \\ 2x & \exp(y-1) - 2 & 0 \end{pmatrix} \implies dF(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die zu den Variablen (y, z) gehörige quadratische Untermatrix $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist invertierbar. Also existieren nach dem Satz über implizite Funktionen (Satz 2.61/Satz 2 - Forster II, §8) eine Umgebung U von $x = 1$, eine Umgebung V von $(y, z) = (1, 1)$ und eine vektorwertige C^∞ -Funktion $g = (\varphi, \psi): U \rightarrow V$ mit $\varphi(1) = 1$, $\psi(1) = 1$ und $F(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0$ für alle $x \in U$.

- (b) Nach Satz 2.61 existieren obige Umgebungen, so dass $F(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) = 0$ für alle $(x, y) \in U$ gilt. Dieser ist anwendbar aufgrund der linearen Unabhängigkeit der letzten beiden Spalten in

$$dF(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} -v & 0 & 1 - v \sin(uv) & -x - u \sin(uv) \\ 0 & -1 & \cos(u) & -1 \end{pmatrix}, \quad dF(0, -1, 0, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Weiter folgt mit Kettenregel

$$0 = dF(0, -1, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} I_2 \\ df(0, -1) \end{pmatrix} \implies -dF_{(x,y)}(0, -1, 0, 1) = dF_{(u,v)}(0, -1, 0, 1) df(0, -1)$$

$$df(0, -1) = -(dF_{(u,v)}(0, -1, 0, 1))^{-1} dF_{(x,y)}(0, -1, 0, 1) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Zusatzaufgabe 8.4: Nach welchen Variablen ist das folgende Gleichungssystem (lokal) auflösbar?

$$\begin{aligned} 3x + y - z + u^2 &= 0 \\ x - y + 2z + u &= 0 \\ 2x + 2y - 3z + 24 &= 0. \end{aligned}$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.4:

Das Gleichungssystem schreibt sich als $F(x, y, z, u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ mit der Funktion $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$F(x, y, z, u) = \begin{pmatrix} 3x + y - z + u^2 \\ x - y + 2z + u \\ 2x + 2y - 3z + 24 \end{pmatrix} \quad \text{mit Ableitung} \quad dF(x, y, z, u) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2u \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen brauchen wir Kombinationen von jeweils drei Spalten der Jacobi-Matrix, welche linear unabhängig sind. Dies überprüfen wir mittels der Determinanten

$$\det \left(\frac{\partial F}{\partial (x, y, z)} \right) = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = (9 + 4 - 2) - (2 + 12 - 3) = 0,$$

$$\det \left(\frac{\partial F}{\partial (x, y, u)} \right) = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2u \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = (0 + 2 + 4u) - (-4u + 6 + 0) = 4(2u - 1),$$

$$\det \left(\frac{\partial F}{\partial (x, z, u)} \right) = \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2u \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = (0 - 2 - 6u) - (8u - 0 - 9) = 7(1 - 2u),$$

$$\det \left(\frac{\partial F}{\partial (y, z, u)} \right) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2u \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = (0 - 2 + 6u) - (8u - 3 + 0) = 1 - 2u.$$

Finden wir also ein $(x_0, y_0, z_0, u_0) \in \mathbb{R}^4$ mit $F(x_0, y_0, z_0, u_0) = 0$ und $u_0 \neq \frac{1}{2}$, dann existieren

- eine Umgebung U_x von x_0 , eine Umgebung V_x von (y_0, z_0, u_0) , eine stetig differenzierbare Abbildung $g: U_x \rightarrow V_x$ mit $F(x, g(x))$ für alle $x \in U_x$, und falls $(x, y, z, u) \in U_x \times V_x$ ein Punkt mit $F(x, y, z, u) = 0$ ist, dann gilt

$$(y, z, u) = g(x), \quad \text{d.h.} \quad y = g_1(x), z = g_2(x), u = g_3(x),$$

- Analoges gilt für y_0 oder z_0 .

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 9

Untermannigfaltigkeiten – (vgl. Skript, Abschnitt 2.7)

- **Definition 2.65:** Sei $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt **regulärer Punkt von g** , wenn $dg(x)$ surjektiv ist (insbesondere muss dann $n \geq m$ sein). Ein Wert $z^* \in \mathbb{R}^m$ heißt **regulärer Wert von g** , wenn jedes x mit $g(x) = z^*$ ein regulärer Punkt ist, d.h., wenn das Urbild $g^{-1}(\{z^*\})$ nur aus regulären Punkten besteht.

- **Satz 2.66/Satz 2 (Forster II, §9):** Für eine nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

(a) **(Beschreibung durch Gleichungen)**

M ist lokal Urbild eines regulären Wertes einer C^k -Funktion vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^{n-d}$, d.h., für jedes $x \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$, eine Funktion $g \in C^k(U, \mathbb{R}^{n-d})$ und ein regulärer Wert $z^* \in \mathbb{R}^{n-d}$ von g mit

$$M \cap U = g^{-1}(\{z^*\}) . \quad (9.1a)$$

(b) **(Darstellung als Graph einer C^k -Funktion)**

M ist lokal der Graph einer C^k -Funktion auf dem $\mathbb{R}^d$, d.h., für jedes $a \in M$ gibt es eine Zerlegung $\mathbb{R}^n \cong X \times Y$ in einen d -dimensionalen linearen Unterraum X und einen $(n-d)$ -dimensionalen linearen Unterraum Y von $\mathbb{R}^n$ sowie bei $a = (x^*, y^*)$ offene Umgebungen $U^* \subset X$ von x^* , $V^* \subset Y$ von y^* und ein $g \in C^k(U^*, V^*)$ mit

$$M \cap (U^* \times V^*) = \text{Graph}(g) . \quad (9.1b)$$

Dabei bezeichnet $\text{Graph}(g) := \{(x, g(x)) \mid x \in U^*\}$ den Graphen von g .

(c) **(Transformation in eine Hyper-Ebene)**

M ist lokal C^k -diffeomorph zum $\mathbb{R}^d$, d.h., für jedes $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und einen C^k -Diffeomorphismus $\Phi: U \rightarrow V$ auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$\Phi(M \cap U) = \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d} \cap V \quad (9.1c)$$

(„ Φ biegt die d -dimensionale Fläche M gerade“).

- **Definition 2.67:** Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$, die eine (und somit jede) der Eigenschaften aus Satz 2.66 besitzt, heißt **d -dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$** . Die Zahl $n-d$ wird gelegentlich als **Codimension** der Untermannigfaltigkeit bezeichnet.

Bem.: Die Formulierung in **Satz 2.66 (a)**, welche wir hauptsächlich brauchen werden, bedeutet, dass eine Untermannigfaltigkeit **lokal mit einer implizit gegebenen Funktion übereinstimmt, welche die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt**.

- **Definition 2.72:** Sei M eine d -dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Die Gesamtheit aller Tangentialvektoren $T_a M$, welche aus allen möglichen Ableitungen $\dot{c}(0)$ von parametrisierten stetig differenzierbaren Kurven $c:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ besteht, die innerhalb von M durch den Punkt $c(0) = a$ verlaufen, wird **Tangentialraum von M im Punkt a** genannt.

Bemerkung: $T_a M$ ist in der Tat ein d -dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$ (siehe Skript).

- **Satz 2.73:** Ist M eine d -dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und lokal bei $a \in M$ das Urbild eines regulären Wertes $z^* \in \mathbb{R}^{n-d}$ unter der C^k -Abbildung $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$, dann gilt

$$T_a M = \text{Ker}(dg(a)) . \quad (9.2)$$

Bemerkung: Die Zeilen von $dg(a)$ bilden dann eine Basis des $n-d$ dimensionalen Vektorraumes $N_a M$, welcher aus der Gesamtheit aller Normalenvektoren an M im Punkt a besteht²⁴).

Notwendiges Kriterium für Extrema unter Nebenbedingung

- **Satz 2.76 [Lagrange'sche Multiplikator-Regel]:** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $g = (g_1, \dots, g_k) \in C^1(U, \mathbb{R}^k)$. Liegt in x^* ein lokales Extremum von f unter den Nebenbedingungen $g = 0$ und ist $dg(x^*) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ surjektiv, d.h. sind die Gradienten $\text{grad } g_1(x^*), \dots, \text{grad } g_k(x^*)$ linear unabhängig, dann gibt es einen Vektor $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ mit

$$\text{grad } f(x^*) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{grad } g_i(x^*) . \quad (9.3)$$

Bemerkung: Da der Tangentialraum nach (9.2) orthogonal zu den Zeilen von $dg(a)$ ist, verschwindet $\text{grad } f(x^*)$ aus (9.3) nach Einschränkung auf den Tangentialraum.

Hinreichendes Kriterium für Extrema unter Nebenbedingungen

- **Satz 2.77:** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ und $g = (g_1, \dots, g_k) \in C^2(U, \mathbb{R}^k)$ mit $k < n$. Desweiteren sei $M = g^{-1}(\{0\})$. Besitzt $dg(x^*)$ für einen Punkt x^* maximalen Rang, gilt mit einem Vektor λ^* die Gleichung $dF(x^*, \lambda^*) = 0$ mit²⁵

$$F: U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, \lambda) \mapsto f(x) - \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(x), \quad (9.4)$$

und ist die Einschränkung der Hesse-Matrix $\text{Hess } F_{\lambda^*}(x^*)$ mit²⁶

$$F_{\lambda^*}: x \mapsto F(x, \lambda^*) \quad (9.5)$$

auf den Tangentialraum $T_{x^*} M = \text{Ker}(dg(x^*))$ positiv bzw. negativ definit, so besitzt f unter den Nebenbedingungen $g = 0$ in x^* ein lokales Minimum bzw. Maximum.

- **Bemerkung:** Besitzt $dg(x^*)$ maximalen Rang k , so finden wir eine Basis $\{b_1, \dots, b_{n-k}\}$ von $\text{Ker}(dg(x^*)) = T_{x^*} M$. Mit $B = (b_1 \dots b_{n-k})$ lässt sich dann ein beliebiges, jedoch festes Element $y \in T_{x^*} M$ in der Gestalt

$$y = \sum_{j=1}^{n-k} \alpha_j b_j = B\alpha$$

mit einem von y abhängigen, eindeutigen $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^{n-k} \in \mathbb{R}^{n-k}$ schreiben. Insbesondere ist $y = 0 \iff \alpha = 0$. Demnach ist die in Satz 2.77 erwähnte Bedingung $y^T \text{Hess } F_{\lambda^*}(x^*) y > 0$ für alle $y \in T_{x^*} M \setminus \{0\}$ äquivalent zu $(B\alpha)^T \text{Hess } F_{\lambda^*}(x^*) B\alpha > 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}^{n-k} \setminus \{0\}$, d.h., zur positiven Definitheit der Matrix

$$G := B^T \text{Hess } F_{\lambda^*}(x^*) B . \quad (9.6)$$

Zusatzaufgabe 9.1: (Untermannigfaltigkeiten und ihre Tangentialräume)

- Zeigen Sie, dass die Tangentialvektoren an eine implizit durch $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$ mit stetig differenzierbarem $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegebene Kurve orthogonal auf $\text{grad } g(x, y)$ stehen.
- Beweisen Sie, dass $M := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit ist. Geben Sie den Tangentialraum $T_a M$ im Punkt $a = (1, 1, 1)$ an.
- Zeigen Sie, dass $M := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + yz + z^2 = 1\}$ eine zweidimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_a M$. Ist M kompakt?

²⁴vergleiche auch Satz 3, Forster II, §9

²⁵Aufgrund der Ableitung nach λ gilt dann insbesondere auch $g(x^*) = 0$, also $x^* \in M$.

²⁶D.h., bei festem λ^* wird nur nach x abgeleitet.

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.1:

- (a) Für jede Parametrisierung $\varphi: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^2$ einer implizit durch $g(x, y) = 0$ gegebenen Kurve im $\mathbb{R}^2$ gilt $(g \circ \varphi)(t) = 0$ und somit $dg(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = \langle \text{grad } g(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t) \rangle = 0$ für $t \in I$. Daher sind die Tangentialvektoren in einem Punkt $(x, y) \in C$ der Kurve C orthogonal zu $\text{grad } g(x, y)$.
- (b) Die Abbildung $g(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2 - 1$ besitzt die Ableitung $dg(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$, und diese verschwindet an keinem Punkt mit $g(x, y, z) = 0$, denn an solchen Punkten gilt $x^2 + y^2 = 1 + z^2 \geq 1$ und somit insbesondere $x \neq 0$ oder $y \neq 0$.

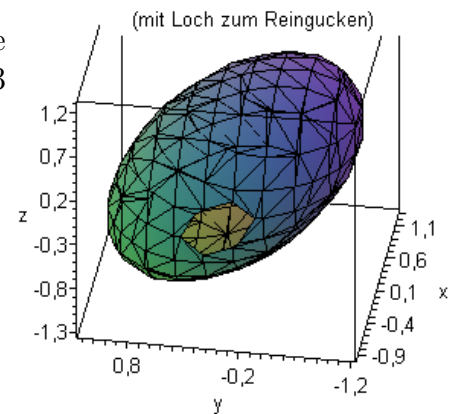
Der Tangentialraum $T_{(1,1,1)}M$ im Punkt $(1, 1, 1)$ stimmt nach Satz 2.73 bzw. nach Satz 3, Forster II, §9 mit $\text{Ker}(dg(1, 1, 1))$ überein. Da der Kern von $dg(1, 1, 1) = (2, 2, -2)$ beispielsweise durch die Vektoren $(1, -1, 0)^T$ und $(0, 1, 1)^T$ aufgespannt wird, folgt

$$T_{(1,1,1)}M = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (c) Der Wert 1 ist ein regulärer Wert der als Polynom beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + yz + z^2$, denn $dg(x, y, z) = (2x, 2y + z, y + 2z)$ verschwindet nur im Punkt $(0, 0, 0)$, da $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ regulär ist. Wegen $g(0, 0, 0) = 0 \neq 1$ ist aber $(0, 0, 0) \notin M$.

Somit ist $M = g^{-1}(\{1\})$ nach Satz 2.66(b) eine zweidimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit. Mit $a = (x, y, z)$ ist nach Satz 2.73 dann $T_a M = \text{Ker}(dg(x, y, z))$. Es gilt beispielsweise

$$T_a M = \begin{cases} \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2y + z \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y + 2z \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix} \right\} & \text{im Fall } x \neq 0, \\ \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y + 2z \\ -(2y + z) \end{pmatrix} \right\} & \text{im Fall } x = 0. \end{cases}$$



Die Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^3$ ist nach Satz 1.58 sogar kompakt, denn sie ist abgeschlossen als Urbild von $\{1\}$ unter der stetigen Funktion g und – da $2g(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + (y + z)^2 + z^2 > 4$ für $\max\{|x|, |y|, |z|\} > 2$ ist und demnach $M \subset [-2, 2]^3$ gilt – beschränkt.

Zusatzaufgabe 9.2:

(Extrema auf kompakten Untermannigfaltigkeiten)

- (a) Bestimmen Sie die Punkte auf der Ellipse $x^2 + xy + y^2 = 3$, die den größten bzw. kleinsten Abstand vom Ursprung $(0, 0)$ haben.
- (b) Auf der Sphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ sei $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = \prod_{j=1}^n x_j^2$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\max_{x \in S^{n-1}} f(x) = n^{-n}$ gilt.
- (c) Bestimmen Sie Maximum und Minimum der Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ unter der Nebenbedingung, dass (x, y) auf dem Einheitskreis im Euklidischen $\mathbb{R}^2$ liegt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.2:

- (a) Der Abstand eines Punktes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vom Nullpunkt ist gegeben durch

$$d_2((x, y), (0, 0)) = \|(x, y) - (0, 0)\|_2 = \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Es genügt jedoch, die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung

$$g(x) = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$

zu maximieren/minimieren. Zunächst halten wir fest, dass es sich bei $M = g^{-1}(\{0\})$ als Urbild einer abgeschlossenen (da einelementigen) Menge unter einer stetigen (als Polynom sogar beliebig oft stetig differenzierbaren) Funktion wieder um eine abgeschlossene Menge handelt. Da außerdem

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \geq \frac{9}{2} > 3$$

für alle Punkte $(x, y) \notin B_3((0, 0)) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_2((x, y), (0, 0)) < 3\}$ erfüllt ist, folgt $M \subset B_3((0, 0))$, also auch die Beschränktheit von M . Nach dem Satz von Heine-Borel ist M demnach kompakt.

Da $dg(x, y) = (2x + y \quad x + 2y)$ wegen $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$ surjektiv für alle $(x, y) \neq (0, 0)$ ist und $(0, 0) \notin M$ gilt, handelt es sich bei M um eine sogar kompakte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ (der Klasse C^∞). Als stetige (da als Polynom sogar beliebig oft stetig differenzierbare) Funktion muss f auf dem Kompaktum M sowohl ihr Minimum als auch ihr Maximum annehmen. Für jeden Punkt $(x^*, y^*) \in M$, an dem f ein Extremum besitzt, existiert dann (da alle Voraussetzungen von Satz 2.76 erfüllt sind) in diesem Fall ein sogenannter Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}^1$, welcher $df(x^*, y^*) = \lambda dg(x^*, y^*)$ löst. Daher ist nun das (nichtlineare) Gleichungssystem

$$2x = \lambda(2x + y), \quad 2y = \lambda(x + 2y), \quad x^2 + xy + y^2 = 3$$

zu lösen. Nun lässt sich das Teilsystem der ersten beiden Gleichungen als (in x und y) lineares Gleichungssystem mit Parameter λ auffassen. Da $(0, 0) \notin M$, interessieren nur Parameter λ , für welche die Matrix $\begin{pmatrix} 2\lambda - 2 & \lambda \\ \lambda & 2\lambda - 2 \end{pmatrix}$ singulär ist. Die Determinante $4(\lambda - 1)^2 - \lambda^2$ verschwindet nun genau bei $\lambda = \frac{4}{3} \pm \frac{2}{3}$, d.h., es muss $\lambda = 2$ oder $\lambda = \frac{2}{3}$ gelten.

Im ersten Fall ist $y = -x$, so dass die Nebenbedingung $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ und $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ als Kandidaten für Extrema liefert. Der Abstand vom Ursprung ist hier jeweils $\sqrt{6}$.

Im zweiten Fall ist $x = y$, so dass die Nebenbedingung $(1, 1)$ und $(-1, -1)$ als weitere Kandidaten für Extrema liefert, welche den Abstand $\sqrt{2}$ vom Ursprung haben.

- (b) **Variante A:** Zunächst halten wir fest, dass $f(x) \geq 0$ ist, also ohne Einschränkung nur Punkte betrachtet werden können, für die keine Komponente verschwindet (da sonst nur das Minimum $f(x) = 0$ erwischt würde). Wir maximieren also die nichtnegative Funktion $f(x)$ unter der Nebenbedingung $g(x) = \|x\|_2^2 - 1 = 0$ mittels Lagrange-Multiplikator-Methode, denn $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar und $dg(x) = 2x^T$ ist für alle $x \in S^{n-1}$ surjektiv (was in diesem Fall ungleich der Nullabbildung heißt). Wir suchen also die stationären Punkte der Funktion $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $F(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$. Insbesondere folgt an diesen Punkten

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, \lambda) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x_i \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j^2 - \lambda \right) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (9.7)$$

Wie erwähnt, interessiert der Fall nicht, dass $x_i = 0$ für mindestens ein i ist. Also muss

$$\lambda = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j^2 \neq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

gelten. Dies ist jedoch nur möglich, wenn alle Komponenten (betragsmäßig) gleich sind. Aus der Nebenbedingung ergibt sich dann

$$1 = \sum_{k=1}^n x_k^2 = nx_i^2 \quad \Longrightarrow \quad x_i = \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (i = 1, \dots, n)$$

und somit wie behauptet $f(x) = n^{-n}$. Aufgrund der Kompaktheit von S^{n-1} muss eine Maximalstelle existieren, an welcher nach Satz 2.76 Bedingung (9.7) erfüllt sein muss. Mittels Ausschlusskriterium können wir nun $\max_{x \in S^{n-1}} f(x) = n^{-n}$ schlussfolgern.

Variante B: Für beliebige Zahlen $a_k \geq 0$ ($k = 1, \dots, n$) lässt sich per Induktion die Ungleichung vom arithmetischen-geometrischen Mittel

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k. \quad (9.8)$$

beweisen:

- Für $n = 2$ ergibt sich $0 \leq (a - b)^2 \iff 2ab \leq a^2 + b^2 \iff ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, womit der Induktionsanfang gesetzt ist. Gelte nun die Ungleichung für n und beliebige $a_k > 0, k = 1, \dots, n$ (im Fall $a_k = 0$ für ein k ist nichts zu zeigen). O.B.d.A. sei nun $a_{n+1} \geq \max_{k=1, \dots, n} a_k$ (andernfalls ordne die Elemente um). Dann gelten

$$a_{n+1} \geq \alpha := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{und} \quad x := \frac{a_{n+1} - \alpha}{(n+1)\alpha} \geq 0,$$

so dass nun über die Anwendung der Bernoulli-Ungleichung nacheinander

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^{n+1} &= \alpha^{n+1} \left(\frac{1}{(n+1)\alpha} (n\alpha + a_{n+1})\right)^{n+1} = \alpha^{n+1} (1+x)^{n+1} \\ &\stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} \alpha^{n+1} (1+(n+1)x) = \alpha^{n+1} \left(1 + \frac{a_{n+1} - \alpha}{\alpha}\right) = \alpha^n a_{n+1} \stackrel{\text{IV}}{\geq} \prod_{k=1}^{n+1} a_k \end{aligned}$$

folgt, was äquivalent zur Behauptung im Fall $n+1$ ist.

Für $x \in S^{n-1}$ gilt wegen $\|x\|_2^2 = 1$ somit $f(x) = \prod_{j=1}^n x_j^2 \stackrel{(9.8)}{\leq} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2\right)^n = \frac{1}{n^n}$, wobei die Gleichheit beispielsweise für $x = \frac{1}{\sqrt{n}} (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$ angenommen wird.

- (c) Da $M = g^{-1}(\{1\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ Urbild eines regulären Wertes (aufgrund der Surjektivität von $dg(x, y) = (2x \ 2y)$ für jedes $(x, y) \neq (0, 0)$) der als Polynom C^∞ -Funktion $g(x, y) = x^2 + y^2$ ist, können wir die Lagrange-Multiplikator-Methode anwenden, so dass notwendigerweise zu jeder Extremalstelle (x^*, y^*) ein $\lambda^* \in \mathbb{R}$ existiert, welches das Gleichungssystem $2x^* = \lambda^* 2x^*, -2y^* = \lambda^* 2y^*, g(x^*, y^*) = 1$ erfüllt. Offenbar finden wir als einzige Lösungen $\lambda = 1, y = 0, x = \pm 1$ sowie $\lambda = -1, x = 0, y = \pm 1$. Aufgrund der Kompaktheit von M (nach Satz von Heine-Borel, da beschränkt und abgeschlossen) und der Stetigkeit von f müssen sich unter den gefundenen Paaren (x, y) die entsprechenden Maximal- und Minimalstellen befinden. Als Funktionswerte ergeben sich $f(\pm 1, 0) = 1, f(0, \pm 1) = -1$, also ist 1 das Maximum von f und -1 das Minimum.

Zusatzaufgabe 9.3:

(Extrema auf kompakten Gebieten)

Gegeben sei die Kreisscheibe $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f: E \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 4x^2 - 3xy$.

Warum muss die Funktion f zwingend ihre Extrema annehmen?

Hinweis: Ermitteln Sie zunächst die lokalen Extrema von f im Inneren von E und dann auf dem Rand ∂E , d.h. unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.3:

Wegen $df(x, y) = (8x - 3y \ -3x)$ verschwindet die Ableitung von f nur für $x = y = 0$.

Demnach besitzt f im Inneren von E nur den kritischen Punkt $(x_1, y_1) = (0, 0)$, in welchem $f(x_1, y_1) = 0$ gilt. Jedoch hat f in $(0, 0)$ nur einen Sattelpunkt aufgrund der Eigenwerte 9 und -1 der Hesse-Matrix

$$\text{Hess } f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da f als Polynom eine stetige Funktion auf dem Kompaktum E ist, werden Maximum und Minimum angenommen. Alle Extrema müssen somit auf dem Rand $\partial E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ liegen, also die Nebenbedingung $g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$ erfüllen. Notwendigerweise existiert zu jeder Extremalstelle (x^*, y^*) ein Lagrange-Multiplikator λ^* , für den $df(x^*, y^*) = \lambda^* dg(x^*, y^*)$ gilt (da $dg(x, y) = (2x \ 2y)$ in allen Punkten $(x, y) \in \partial E$ surjektiv ist, d.h., maximalen Rang besitzt). Somit erhalten wir insgesamt das Gleichungssystem

$$\begin{cases} (8 - 2\lambda)x - 3y = 0 & (1) \\ -3x - 2\lambda y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

für x, y und λ . Gleichungen (1) und (2) sind linear in x, y und die zugehörigen Lösungen des homogenen Systems können (3) höchstens dann erfüllen, wenn die zugehörige Koeffizientenmatrix

$$K := \begin{pmatrix} (8 - 2\lambda) & -3 \\ -3 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

singulär ist. Folglich erhalten wir aus $\det K = -(8 - 2\lambda)2\lambda - 9 = 4\lambda^2 - 16\lambda - 9 = 0$ die beiden Lösungen $\lambda = 2 \pm \frac{5}{2}$.

- Für $\lambda = -\frac{1}{2}$ führt (2) auf $y = 3x$ und (3) auf $10x^2 = 1$, was somit die beiden Punkte $(x_2, y_2) = \left(\sqrt{\frac{1}{10}}, \sqrt{\frac{9}{10}}\right)$ und $(x_3, y_3) = \left(-\sqrt{\frac{1}{10}}, -\sqrt{\frac{9}{10}}\right)$ liefert.
- Für $\lambda = \frac{9}{2}$ impliziert (2) hingegen $y = -\frac{x}{3}$ und (3) damit $\frac{10x^2}{9} = 1$, woher wir die beiden Punkte $(x_4, y_4) = \left(\sqrt{\frac{9}{10}}, -\sqrt{\frac{1}{10}}\right)$ und $(x_5, y_5) = \left(-\sqrt{\frac{9}{10}}, \sqrt{\frac{1}{10}}\right)$ erhalten

Da es keine weiteren Lösungen gibt, entscheidet ein Funktionswertvergleich über die Art der Extrema. Aus

$$f(x_2, y_2) = f(x_3, y_3) = 4 \cdot \frac{1}{10} - 3 \cdot \frac{3}{10} = -\frac{1}{2}$$

und

$$f(x_4, y_4) = f(x_5, y_5) = 4 \cdot \frac{9}{10} - 3 \cdot \frac{-3}{10} = \frac{9}{2}$$

sehen wir, dass f auf der Kreisscheibe E ihr Maximum mit dem Wert $\frac{9}{2}$ in den Punkten $(x_4, y_4), (x_5, y_5)$ und ihr Minimum mit dem Wert $-\frac{1}{2}$ in den Punkten $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$ annimmt.

Zusatzaufgabe 9.4:

- (a) Sei $y = y(x)$ eine durch $F(x, y(x)) = 0$ implizit gegebene Funktion, wobei $F(x, y)$ zweimal stetig differenzierbar mit $F_y(a, b) \neq 0$ gelte. Beweisen Sie mit $b = y(a)$ die Formel

$$y''(a) = \frac{1}{F_y^3(a, b)} \det \begin{pmatrix} 0 & F_x & F_y \\ F_x & F_{xx} & F_{xy} \\ F_y & F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix} (a, b). \quad (9.9)$$

- (b) Untersuchen Sie die durch $F(x, y) := ye^{y^2} + x^3 - 3x + 2 = 0$ implizit gegebene Funktion $y = f(x)$ auf lokale Extrema.

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.4:

- (a) Da auf einer Umgebung eines Punktes x_0 , an dem obige Gleichung auflösbar ist, offenbar

$$\forall x \in U: 0 = G(x) = F(x, y(x)) \quad \text{mit} \quad G = F \circ H \quad \text{und} \quad H: x \mapsto (x, y(x)) \quad (9.10)$$

gilt, folgt nach Anwendung der Kettenregel

$$\forall x \in U: 0 = G'(x) = dG(x) = (dF \circ H)(x) \cdot dH(x) = (F_x \circ H)(x) + (y'(F_y \circ H))(x) \quad (9.11)$$

und – falls $0 = F(a, b)$ gilt – somit

$$y'(a) = -\frac{F_x(a, b)}{F_y(a, b)}. \quad (9.12)$$

Nun können wir wiederum mittels Ketten- sowie Produktregel die Gleichung (9.11) ableiten und erhalten analog für alle $x \in U$ die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= G''(x) = d^2G(x) = d(dG)(x) = d(F_x \circ H)(x) + d(y'(F_y \circ H))(x) \\ &= [(dF_x \circ H)(x) \cdot dH(x)] + [(y''(F_y \circ H))(x) + y'(x)d(F_y \circ H)(x)] \\ &= [(F_{xx} \circ H)(x) + (y'(F_{xy} \circ H))(x)] + (y''(F_y \circ H))(x) + y'(x) \underbrace{[(dF_y \circ H)(x) \cdot dH(x)]}_{= (F_{yx} + y'(x)(F_{yy}))(H(x))}. \end{aligned}$$

Mit (9.12) können wir nun wieder – falls $0 = F(a, b)$ gilt – nach $y''(a)$ umstellen und erhalten unter Verwendung des Satzes von Schwarz (beachte, dass $F_{xy} = F_{yx}$ gelten muss) insgesamt

$$\begin{aligned} y''(a) &= -\frac{1}{F_y(a, b)} \left[F_{xx}(a, b) + 2y'(a)F_{xy}(a, b) + (y'(a))^2 F_{yy}(a, b) \right] \\ &= -\frac{1}{F_y(a, b)} \left(F_{xx}(a, b) - 2 \frac{F_x(a, b)F_{xy}(a, b)}{F_y(a, b)} + \frac{(F_x(a, b))^2 F_{yy}(a, b)}{(F_y(a, b))^2} \right) \\ &= \frac{1}{(F_y(a, b))^3} (2F_x(a, b)F_y(a, b)F_{xy}(a, b) - (F_y(a, b))^2 F_{xx}(a, b) - (F_x(a, b))^2 F_{yy}(a, b)) \end{aligned} \quad (9.13)$$

Dies ist aber genau die Determinante aus (9.9).

(b) Wir bestimmen zunächst die Ableitung sowie die Hesse-Matrix von $F(x, y)$:

$$\begin{aligned} dF(x, y) &= (F_x(x, y) \quad F_y(x, y)) = (3(x^2 - 1) \quad e^{y^2}(1 + 2y^2)), \\ \text{Hess } F(x, y) &= \begin{pmatrix} F_{xx}(x, y) & F_{xy}(x, y) \\ F_{yx}(x, y) & F_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2e^{y^2}(3y + 2y^3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analog zu (a) erhalten wir wegen (9.12) somit für die Ableitung²⁷

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))} = \frac{3(1 - x^2)}{e^{(y(x))^2}(1 + 2(y(x))^2)}$$

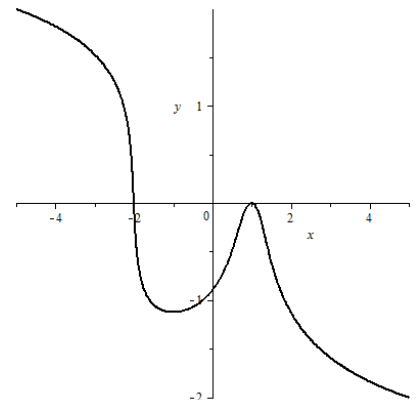
welche genau für $x = \pm 1$ verschwindet. Nach (9.9) bzw. (9.13) folgt für $y = y(x)$ weiter

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{1}{(F_y(x, y))^3} (2F_x F_y F_{xy} - (F_y)^2 F_{xx} - (F_x)^2 F_{yy})(x, y) \\ &= \frac{1}{(e^{y^2}(1 + 2y^2))^3} \left(-(e^{y^2}(1 + 2y^2))^2 6x - (3(x^2 - 1))^2 2e^{y^2}(3y + 2y^3) \right) \\ &= -\frac{6x}{e^{y^2}(1 + 2y^2)} - \frac{18(x^2 - 1)^2(3y + 2y^3)}{e^{2y^2}(1 + 2y^2)^3}. \end{aligned}$$

Da im Nenner nur Werte ≥ 1 angenommen werden, gilt

$$\begin{aligned} y''(1) &= \frac{-6}{e^{y^2}(1 + 2y^2)} < 0 \quad \text{sowie} \\ y''(-1) &= \frac{6}{e^{y^2}(1 + 2y^2)} > 0. \end{aligned}$$

Demnach erreicht die Funktion $y = f(x)$ bei $x = 1$ ein lokales Maximum und bei $x = -1$ ein lokales Minimum.



²⁷Beachte, dass $F_y(x, y) \geq 1$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, also insbesondere $F_y(x, y) \neq 0$ gilt.

Zusatzaufgabe 9.5:**(Extrema auf nichtkompakten Untermannigfaltigkeiten)**

Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := 3x^2 + 7y^2$, auf der nichtkompakten Untermannigfaltigkeit $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy - y^2 = 55\}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.5:

Zunächst bemerke man, dass M eine eindimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit ist, denn die Ableitung $dg(x, y) = (2x - y \quad -x - 2y)$ von $g(x, y) := x^2 - xy - y^2 - 55$ ist nur im Punkt $(0, 0)$ nicht surjektiv, welcher jedoch nicht in M liegt. Somit sind nach Satz 2.76 die stationären Punkte von $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ Kandidaten für lokale Extrema von $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Da sich aus $dF(x, y, \lambda) = (0 \quad 0 \quad 0)$ insbesondere für x und y das lineare Gleichungssystem $6x = \lambda(2x - y)$, $14y = \lambda(-x - 2y)$ ergibt, welches nur für $\lambda_1 = -6$ oder $\lambda_2 = \frac{14}{5}$ singular ist (und damit eine Lösung $\neq (0, 0)$ besitzen kann), ergibt sich im Fall $\lambda = -6$ die Lösungsmenge $\{(x, y) \in M : 3x = y\} = \emptyset$ und für $\lambda = \frac{14}{5}$ die Lösungsmenge

$$\{(x, y) \in M : x = -7y\} = \{(7, -1), (-7, 1)\},$$

wobei M genau an diesen Punkten die Niveaumenge

$$N_{154}f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 154\}$$

tangiert. Die entsprechenden Tangentialräume sind

$$\begin{aligned} T_{(7, -1)}^T &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 15 & -5 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}^T \right\} \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} -15 & 5 \end{pmatrix} = T_{(-7, 1)}^T. \end{aligned}$$

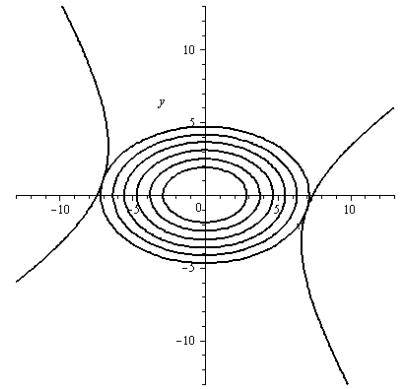
Die Einschränkung der (in diesem Fall konstanten, für beide Punkte gleiche) Hesse-Matrix

$$\text{Hess } F_{\frac{14}{5}}(x, y) = \text{Hess } f(x, y) - \frac{14}{5} \text{Hess } g(x, y) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} - \frac{14}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 49 \end{pmatrix}$$

auf den Tangentialraum $T_{(7, -1)}^T = T_{(-7, 1)}^T$ ist an beiden Punkten positiv definit, denn

$$\begin{pmatrix} c & 3c \end{pmatrix} \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 3c \end{pmatrix} = \frac{2c^2}{5} (1 + 2 \cdot 21 + 49 \cdot 9) = \frac{968}{5} c^2 > 0.$$

gilt für alle $c \neq 0$. Nach Satz 2.77 besitzt $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ lokale Minima bei $(7, -1)$ und $(-7, 1)$.



Zusatzmaterial zum Übungsblatt 10

Intervalle – (vgl. Skript, Abschnitte 1, 2 – Kapitel III: Maß- und Integrationstheorie)

- Falls X, Y, A, B Mengen mit $A \subset X$ und $B \subset Y$ und $f: X \rightarrow Y$, so bezeichnet $f[A]$ das Bild von A unter f und $f^{-1}[B]$ das Urbild von B unter f .
- In der Integrationstheorie arbeitet man mit den unendlichen Zahlen $-\infty$ und $\infty = +\infty$. Für alle $a \in \mathbb{R}$ gelten definitionsmäßig folgende Aussagen:

- (1) $-\infty < a, a < \infty, -\infty < \infty$.
- (2) $|\infty| = |\infty| = \infty$.
- (3) $-\infty + a = a - \infty = -\infty - \infty = -\infty$.
- (4) $\infty + a = a + \infty = \infty + \infty = \infty$.
- (5) Für $a > 0$ gilt $(-\infty) \cdot a = a \cdot (-\infty) = -\infty$ und $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$.
- (6) Für $a < 0$ gilt $(-\infty) \cdot a = a \cdot (-\infty) = \infty$ und $\infty \cdot a = a \cdot \infty = -\infty$.
- (7) $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty \cdot \infty = \infty, \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$.
- (8) $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = (-\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = 0$.

- Beachte, dass für $x, y \in [-\infty, \infty]$, der Ausdruck $x + y$ genau dann nicht definiert ist, wenn $(x = -\infty \text{ und } y = \infty)$ oder $(x = \infty \text{ und } y = -\infty)$.
- Wir setzen: $x^+ = \max(x, 0)$ und $x^- = -\min(x, 0)$.
- Grenzwerte von Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus $[-\infty, \infty]$ gegen $x \in [-\infty, \infty]$ werden wie folgt definiert:

- (a) Falls $x \in \mathbb{R}$: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \iff \forall \varepsilon \in]0, \infty[\exists N \in \mathbb{N} : (\forall k \geq N : x_k \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[)$
- (b) Falls $x = -\infty$: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \iff \forall M \in]0, \infty[\exists N \in \mathbb{N} : (\forall k \geq N : x_k < -M)$
- (c) Falls $x = +\infty$: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \iff \forall M \in]0, \infty[\exists N \in \mathbb{N} : (\forall k \geq N : x_k > M)$

- Lemma 1.1:** Für $x, y \in [-\infty, \infty]$ gilt: $x^- = (-x)^+$, $|x| = x^+ + x^-$, $x = x^+ - x^-$, $(xy)^+ = x^+y^+ + x^-y^-$, $(xy)^- = x^-y^+ + x^+y^-$. Falls $x \leq y$, so gilt $x^+ \leq y^+$ und $x^- \geq y^-$. Falls $x+y$ definiert ist, so gilt auch $(x+y)^+ \leq x^+ + y^+$, $(x+y)^- \leq x^- + y^-$ sowie $(x+y)^+ + x^- + y^- = (x+y)^- + x^+ + y^+$.
- Lemma 1.2:** Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x, y \in [-\infty, \infty]$ mit $x+y$ definiert gilt: $x+y \leq \alpha \iff y \leq -x + \alpha$.
- Lemma 1.3:** Zu jeder offenen Menge U in $\mathbb{R}^n$ existiert eine aufsteigende Folge $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Mengen mit $U = \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$ und derart, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$, U_k offen, $\overline{U_k}$ kompakt und $\overline{U_k} \subset U$.
- Sind j und k ganze Zahlen mit $j \leq k$, so schreiben wir im Folgenden $[j..k] = [j, k] \cap \mathbb{Z}$.
- Ein **Intervall** I in $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge I der Gestalt $I = \bigtimes_{k=1}^n I_{(k)}$, wobei $I_{(k)}$ für jedes $k \in [1..n]$, ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit $b_k := \sup I_{(k)}$ und $a_k := \inf I_{(k)}$ ist. Wir definieren den **Inhalt** eines Intervalls $I \subset \mathbb{R}^n$ durch

$$\text{Vol}(I) := \text{Vol}_n(I) := \prod_{k=1}^n \text{Laenge}(I_{(k)}) \quad \text{mit} \quad \text{Laenge}(I_{(k)}) := \begin{cases} b_k - a_k & \text{für } b_k \geq a_k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Ein Intervall I in $\mathbb{R}^n$ heißt **nichtdegeneriert** genau dann, wenn $a_k < b_k$ für alle $k \in [1..n]$ gilt, anderenfalls nennen wir I **degeneriert**.

Dyadische Ausschöpfung offener Intervalle/ Äußeres Lebesgue-Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

- **Lemma 3.1:** Für jedes $a \in \mathbb{Z}^n$ und $k \in \mathbb{N}_0$ sei $I_k^a = \bigtimes_{i=1}^n (2^{-k}) \cdot [a_i, a_i + 1[$ (dyadisches Intervall).

Dann ist für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ die Familie $(I_k^a)_{a \in \mathbb{Z}^n}$ eine Überdeckung von $\mathbb{R}^n$ mit paarweise disjunkten Intervallen.

- **Satz 3.3:** $\forall G \subset \mathbb{R}^n$ offen existiert eine Folge $(I_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ paarweise disjunkter Intervalle mit $G = \bigcup_{m=0}^{\infty} I_m$ und $\overline{I_m} \subset G$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Ist G nichtleer, können die Intervalle I_m , $m \in \mathbb{N}_0$, dyadisch gewählt werden.

- **Satz 3.4:** Zu einer offenen Menge G in $\mathbb{R}^n$ sei $(I_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge paarweise disjunkter Intervalle mit $G = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k$. Dann ist die Zahl
$$\lambda(G) := \lambda_n(G) := \sum_{k=0}^{\infty} \text{Vol}(I_k)$$

unabhängig von der Wahl der $(I_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und heißt das (**n -dimensionale**) **Lebesgue-Maß** von G . Falls G ein Intervall ist, dann gilt $\lambda(G) = \text{Vol}(G)$. Insbesondere gilt $\lambda(\emptyset) = 0$.

- **Definition 3.7 [Das äußere Lebesgue-Maß]:** Die Funktion $\lambda^* = \lambda_n^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$, $A \mapsto \lambda^*(A)$, welche durch $\lambda^*(A) := \lambda_n^*(A) := \inf \{ \lambda(G) \mid A \subset G \text{ und } G \text{ offen in } \mathbb{R}^n \}$ für eine beliebige Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ definiert ist, heißt das (**n -dimensionale**) **äußere Lebesgue-Maß**.
- **Satz 3.8:** Die Funktion λ^* besitzt die folgenden Eigenschaften:

- (a) $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ offen : $\lambda^*(A) = \lambda(A)$, insbesondere $\lambda^*(\emptyset) = 0$. (b) $A \subset B \implies \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$.
- (b) Ist $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, dann gilt:
$$\lambda^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^*(A_k).$$
- (c) Ist I ein Intervall in $\mathbb{R}^n$, so gilt $\lambda^*(I) = \text{Vol}(I)$.

Lebesgue-messbare Mengen/ Lebesgue-Maß auf $\mathfrak{L}$

- **Definition 4.1 (Lebesgue-messbar):** $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt (**n -**)**Lebesgue-messbar** genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon \in]0, \infty[$ eine in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossene Menge F und eine in $\mathbb{R}^n$ offene Menge G existieren, so dass $F \subset A \subset G$ und $\lambda(G \setminus F) < \varepsilon$. ($G \setminus F$ offen in $\mathbb{R}^n$, somit ist $\lambda(G \setminus F)$ nach Satz 3.4 wohldefiniert.) Sei $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_n$ die Menge aller (**n -**)**Lebesgue-messbaren** Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

- **Lemma 4.2:** (a) $A \subset \mathbb{R}^n \wedge \lambda^*(A) = 0 \implies A \in \mathfrak{L}$. (b) $I \subset \mathbb{R}^n$ Intervall $\implies I \in \mathfrak{L}$.
- **Lemma 4.3:** (a) $A \in \mathfrak{L} \implies \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathfrak{L}$, (b) $A_1, A_2 \in \mathfrak{L} \implies A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{L}$,
(c) $A_1, A_2 \in \mathfrak{L} \implies A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{L} \wedge A_1 \setminus A_2 \in \mathfrak{L}$.

- **Lemma 4.4:** Für eine paarweise disjunkte Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{L}$ gilt
$$\lambda^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^*(A_k).$$

- **Lemma 4.6:** Ist $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus $\mathfrak{L}$, dann gilt $A := \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathfrak{L}$.

- **Corollar 4.7:** Offene und abgeschlossene Mengen liegen in $\mathfrak{L}$. Der Durchschnitt einer Folge aus $\mathfrak{L}$ liegt in $\mathfrak{L}$.

- **Definition 4.10 (σ -Algebra auf Ω):** Sei Ω eine beliebige Menge und $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, so dass

- (a) $\Omega \in \mathfrak{A}$; (b) $\forall A \in \mathfrak{A}$ gilt: $\Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$; (c) $\forall$ Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{A}$ gilt: $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}$.

Dann heißt $\mathfrak{A}$ eine **σ -Algebra auf Ω** und das Paar $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein **Messraum**.

- **Bemerkung 4.11:** Es folgt aus der obigen Definition, dass $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathfrak{A}$. Damit liegen auch Vereinigungen von endlich vielen Elementen aus $\mathfrak{A}$ selbst in $\mathfrak{A}$. Durch Komplementbildung folgt daraus, dass auch Durchschnitte von endlich oder abzählbar unendlich vielen Elementen aus $\mathfrak{A}$ selbst in $\mathfrak{A}$ liegen.

- **Definition 4.14:** Sei $\mathfrak{E}$ die Menge aller offenen Teilmengen von $\Omega = \mathbb{R}^n$. Dann heißt $\mathcal{B}_n := \sigma_\Omega(\mathfrak{E})$ die σ -Algebra der Borelmengen auf $\mathbb{R}^n$.
- **Bemerkung 4.15:** Nach Corollar (3.)4.7 gilt $\mathcal{B}_n \subset \mathfrak{L}_n$. Man kann jedoch zeigen, dass $\mathcal{B}_n \neq \mathfrak{L}_n$ und ebenso $\mathfrak{L}_n \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ gilt.
- **Definition 4.16 (Maß/Maßraum):** Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum und $\mu: \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty]$ derart, dass
 - (a) $\mu(\emptyset) = 0$;
 - (b) für jede paarweise disjunkte Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{A}$ gilt: $\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$.

Dann heißt μ ein **Maß auf** $(\Omega, \mathfrak{A})$ (bzw. kurz: **Maß auf** $\mathfrak{A}$). Das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ heißt dann ein **Maßraum**. Ist speziell $\mu(\Omega) = 1$, so heißt μ ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** und $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein **Wahrscheinlichkeitsraum**.

- **Satz 4.17/Definition:** Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{L}_n$ die Menge der n -Lebesgue-messbaren Mengen. Weiterhin sei $\mu = \lambda = \lambda_n$ die Einschränkung des n -dim. äußeren n -Lebesgue-Maßes $\lambda^* = \lambda_n^*$ auf $\mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{A}$ eine σ -Algebra auf Ω und μ ist ein Maß auf $\mathfrak{A}$. μ heißt das **(n -dimensionale) Lebesgue-Maß**. $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}_n, \lambda_n)$ heißt der **(n -dimensionale) Lebesguesche Maßraum**.
- **Satz 4.18:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum. Dann gelten:

- (a) $A, B \in \mathfrak{A} \wedge A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$. Falls noch $\mu(A) < \infty$, ist $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
- (b) Ist $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ aus $\mathfrak{A}$ mit $A_k \subset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so gilt: $\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$.
- (c) Ist $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ aus $\mathfrak{A}$ mit $A_k \supset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0 \wedge \mu(A_0) < \infty \implies \mu\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$.

Zusatzaufgabe 10.1: Sei $\Omega \neq \emptyset$. Bestimmen Sie die minimale und die maximale σ -Algebra in Ω .

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.1: Es ist $\mathfrak{A}_{\min} = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathfrak{A}_{\max} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Zusatzaufgabe 10.2: (a) Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Bestimmen Sie $\sigma(\{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}\})$ und $\sigma(\{\emptyset, \{1, 2, 4\}\})$.

- (b) Sei $\mathcal{A}$ die Menge derjenigen Teilmengen von $\mathbb{R}$, die abzählbar sind oder ein abzählbares Komplement in $\mathbb{R}$ besitzen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra ist.
- (c) Auf der σ -Algebra $\mathcal{A}$ aus (b) sei eine Abbildung μ durch $\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar,} \\ 1, & \text{falls } \mathbb{R} \setminus A \text{ abzählbar,} \end{cases}$ definiert. Ist μ ein Maß?

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.2:

- (a) Zu $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ ist $\sigma(\{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}\}) = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, denn sie enthält die leere Menge, zu jedem Element auch das Komplement, und alle abzählbaren Vereinigungen $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, denn
 - $(\exists n_0: A_{n_0} = \Omega) \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$;
 - $(\exists n_0: A_{n_0} = \{1, 2\}) \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \begin{cases} \Omega, & \text{falls } \exists n'_0: A_{n'_0} = \Omega \vee A_{n'_0} = \{3, 4\}, \\ \{1, 2\} & \text{sonst;} \end{cases}$
 - $(\exists n_0: A_{n_0} = \{3, 4\}) \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \begin{cases} \Omega, & \text{falls } \exists n'_0: A_{n'_0} = \Omega \vee A_{n'_0} = \{1, 2\}, \\ \{3, 4\} & \text{sonst;} \end{cases}$
 - $(\forall n \in \mathbb{N}: A_n = \emptyset) \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Zu $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ ist $\sigma(\{\emptyset, \{1, 2, 4\}\}) = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2, 4\}, \{3\}\}$, denn sie enthält die leere Menge, zu jedem Element auch das Komplement, und alle abzählbaren Vereinigungen $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, denn

- $(\exists n_0: A_{n_0} = \Omega) \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega;$
- $(\exists n_0: A_{n_0} = \{1, 2, 4\}) \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \begin{cases} \Omega, & \text{falls } \exists n_0: A_{n'_0} = \Omega \vee A_{n'_0} = \{3\}, \\ \{1, 2, 4\} & \text{sonst;} \end{cases}$
- $(\exists n_0: A_{n_0} = \{3\}) \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \begin{cases} \Omega, & \text{falls } \exists n_0: A_{n'_0} = \Omega \vee A_{n'_0} = \{1, 2, 4\}, \\ \{3\} & \text{sonst;} \end{cases}$
- $(\forall n \in \mathbb{N}: A_n = \emptyset) \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset.$

(b) (vergleiche Elstrodt I.3.9(b)): Es sind die drei Eigenschaften einer σ -Algebra zu überprüfen.

- Es gilt $\emptyset \in \mathcal{A}$, da sie abzählbar ist bzw. da $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ abzählbar, gilt $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$.
- Für $A \in \mathcal{A}$ beliebig gilt A abzählbar oder $\Omega \setminus A$ abzählbar, also offensichtlich auch $B := \Omega \setminus A$ abzählbar oder $\Omega \setminus B = A$ abzählbar und damit auch $B \in \mathcal{A}$, also $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.
- Sei nun $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus $\mathcal{A}$. Sind nun alle A_k abzählbar, dann auch ihre abzählbare Vereinigung, also $\bigcup A_k \in \mathcal{A}$. Andernfalls existiert ein k_0 , so dass $\Omega \setminus A_{k_0}$ abzählbar ist. Da Teilmengen abzählbarer Mengen selbst abzählbar sind, folgt nun auch die Abzählbarkeit von $\Omega \setminus (\bigcup A_k) \subset \Omega \setminus A_{k_0}$ und somit ebenfalls $\bigcup A_k \in \mathcal{A}$.

(c) (vergleiche Elstrodt II.1.5(e)): Es sind die beiden Eigenschaften eines Maßes zu zeigen:

- Da die leere Menge abzählbar ist, folgt $\mu(\emptyset) = 0$.
- Sei nun $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus $\mathcal{A}$, so dass die A_k paarweise disjunkt sind.
 - Sind alle A_k abzählbar, so folgt mittels Cantorschen Diagonalargument auch die Abzählbarkeit von $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, also
$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = 0 = \sum_{k \in \mathbb{N}} 0 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k).$$
 - Existiert ein ℓ mit $\mathbb{R} \setminus A_\ell$ abzählbar, dann folgt aufgrund der paarweisen Disjunktheit, dass $A_k \in \mathbb{R} \setminus A_\ell$ für alle $k \neq \ell$ als Teilmenge einer abzählbaren Menge selbst abzählbar ist, also $\mu(A_k) = 0$ für alle $k \neq \ell$. Wegen
$$\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \subset \mathbb{R} \setminus A_\ell,$$

besitzt auch die Vereinigung ein abzählbares Komplement. Somit ergibt sich nun

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = 1 = \mu(A_\ell) = \mu(A_\ell) + \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \{\ell\}} \mu(A_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k).$$

Zusatzaufgabe 10.3: Zeigen Sie: (a) $\forall r \in \mathbb{R}^n: \{r\} \subset \mathbb{R}^n$ ist eine LEBESGUESche Nullmenge.

(b) Jede abzählbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist eine LEBESGUESche Nullmenge

(c) $\mathbb{Q}^n$ ist eine LEBESGUESche Nullmenge.

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.3:

- Sei $A = \{a\}$ mit $a \in \mathbb{R}^n$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ finden wir eine offene Menge $G := B_\delta(a) \supset A$ mit $\delta := \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$ ($B_\delta(a) :=]a - \delta, a + \delta[\times \dots \times]a - \delta, a + \delta[$) und eine abgeschlossene Menge $F := \emptyset \subset A$, so dass

$$\lambda(G \setminus F) = \lambda(G) \leq \min\left\{1, \frac{2^n \varepsilon^n}{3^n}\right\} < \varepsilon.$$

Somit ist jede einelementige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ nach Definition 4.1 LEBESGUE-messbar. Dazu gilt

$$\lambda(A) := \inf_{\substack{A \subset G \subset \mathbb{R}^n \\ G \text{ offen}}} \mu(G) \leq \inf_{B_\delta(a)} \mu(B_\delta(a)) = 0.$$

Wegen der Isotonie von λ (vgl. Satz 4.17 und Satz 4.18 (a)) und $\lambda(\emptyset) = 0$ folgt $\lambda(A) = 0$.

- (b) Jede abzählbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich als abzählbare Vereinigung von einelementigen Mengen $A_k \in \mathbb{R}^n$ darstellen. Aufgrund der σ -Additivität des Lebesgue-Maßes und (a) folgt somit

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\lambda(A_k)}_{=0} = 0.$$

- (c) Da $\mathbb{Q}$ eine abzählbare Teilmenge des $\mathbb{R}$, folgt wiederum mit dem Diagonalargument die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}^n$. Die Behauptung folgt dann mit (b).

Zusatzaufgabe 10.4:

- (a) Bestimmen Sie das Lebesgue-Maß von $A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left]1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[$ und $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left]n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}\right[$.

- (b) Sind die folgenden Teilmengen Lebesgue-messbar?

(i) $A := [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$

(ii) $B := \bigcup_{k=1}^{\infty} \left] \frac{k-1}{k+1}, \frac{k}{k+2} \right] \times \left] \frac{1}{k}, 1 \right] \subset \mathbb{R}^2$

(iii) $C := \left\{ x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} \mid \forall k \in \mathbb{N} : a_k \in \{0, 2\} \right\} \subset \mathbb{R}$

(iv) $D := \bigcup_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k} + \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$

(v) $E := \bigcup_{k=1}^{\infty} \left] k, \frac{k^2+1}{k} \right] \times \left] 0, 1 \right] \subset \mathbb{R}^2$ Falls ja, besitzen sie ein endliches Lebesgue-Maß?

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.4:

- (a) Da die Folge $A_n := \left]1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[$ einerseits $\lambda(A_1) = 2 - 0 = 2 < \infty$ und andererseits die Eigenschaft $A_{n+1} \subset A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ besitzt, gilt nach Satz 4.18 (c) für $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ die Gleichung

$$\lambda(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0.$$

Somit besitzt die Menge $A = \{1\}$ das Maß Null (was auch ZA 10.3 (a) liefern würde).²⁸

Für $n \geq 2$ sind die Mengen $B_n := \left]n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}\right[$ disjunkt. Für $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ gilt daher

$$\lambda(B) \geq \lambda\left(\bigcup_{n \geq 2} \left]n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}\right[\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda(B_n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n} = +\infty.$$

Also hat B unendliches Maß.²⁹

- (b) (i) Nach Lemma 4.2 liegen für alle $k \in \mathbb{N}$ die Intervalle $A_k := \left] -\frac{1}{k}, 1 \right] \times \left] -\frac{1}{k}, 1 \right]$ in $\mathfrak{L}$, so dass nach Corollar 4.7 auch $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ in $\mathfrak{L}$ liegt. Wegen $\lambda(A_1) = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 = 4 < \infty$ und da $\forall k \in \mathbb{N} : A_{k+1} \subset A_k$ gilt, liefert Satz 4.18 (c) für das Lebesgue-Maß

$$\lambda(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 = 1.$$

²⁸Da die einzelnen A_n offene Mengen sind, welche nach Corollar 4.7 in $\mathfrak{L}$ liegen, ist die Menge A als Durchschnitt einer Folge aus $\mathfrak{L}$ ebenfalls nach Corollar 4.7 in der Tat selbst wieder in $\mathfrak{L}$. Somit ist das Lebesgue-Maß hier auch definiert.

²⁹Nach Corollar 4.7 gilt $B_n \in \mathfrak{L}$. Da $\mathfrak{L}$ nach Satz 4.17 eine σ -Algebra, folgt auch $B \in \mathfrak{L}$. Also ist λ hier definiert.

(ii) Die Menge B ist eine disjunkte Vereinigung der Intervalle

$$B_k := \left] \frac{k-1}{k+1}, \frac{k}{k+2} \right] \times \left] \frac{1}{k}, 1 \right] ,$$

also – da Intervalle beispielsweise nach Lemma 4.2 in $\mathfrak{L}$ liegen – insbesondere Lebensgummessbar und es gilt

$$\lambda(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1) - (k-1)(k+2)}{(k+1)(k+2)} \cdot \frac{k-1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(k-1)}{k(k+1)(k+2)} < \infty.$$

(iii) Die Cantor-Menge C ist als Durchschnitt der abgeschlossenen Mengen

$$A_k := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot 3^{-i} \mid x_i \in \{0, 1, 2\}, x_j \neq 1 \text{ für } j \leq k \right\}$$

selbst wieder abgeschlossen und somit nach Corollar 4.7 in $\mathfrak{L}$. Nun gilt für die Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ einerseits $\lambda(A_0) = \lambda([0, 1]) = 1 < \infty$ und $\forall k \in \mathbb{N}_0: A_{k+1} \subset A_k$, so dass Satz 4.18 (c) anwendbar ist. Darüber hinaus entsteht das Folgenglied A_{k+1} aus A_k durch das Entfernen von 2^k offenen Intervallen der Länge $\frac{1}{3^{k+1}}$, nämlich genau der Intervalle aus den Zahlen, bei welchen an der $(k+1)$ -Stelle eine 1 vor den Exponenten $3^{-(k+1)}$ auftaucht. Also gilt nach Satz 4.18 (a) hier

$$\lambda(A_{k+1}) = \lambda(A_k) - \frac{2^k}{3^{k+1}} = 1 - \frac{1}{3} \sum_{\ell=0}^k \left(\frac{2}{3} \right)^{\ell},$$

und nach Satz 4.18 (c) somit

$$\lambda(C) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(A_k) = 1 - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \sum_{\ell=0}^k \left(\frac{2}{3} \right)^{\ell} = 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 0.$$

Also ist die Cantor-Menge C eine Nullmenge, und zwar eine überabzählbare.

(iv) Die Menge D ist abzählbar, und somit nach ZA 10.3 (b) eine Nullmenge, d.h. $\lambda(D) = 0$.

(v) Die Menge E ist die (sogar disjunkte) Vereinigung der Intervalle

$$E_k := \left] k, \frac{k^2+1}{k} \right] \times \left] 0, 1 \right] ,$$

welche etwa nach Lemma 4.2 in $\mathfrak{L}$ liegen. Da $\mathfrak{L}$ eine σ -Algebra nach Satz 4.17, folgt somit auch $E \in \mathfrak{L}$. Mit der σ -Additivität ergibt sich nun

$$\lambda(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty .$$

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 11

Numerische Funktionen, ($\mathcal{A}$ -)messbare Funktionen, ($\mathcal{A}$ -)Elementarfunktionen

- **Definition 5.1:** Sei X eine Menge. Eine Funktion $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ heißt eine **numerische Funktion auf X** . Die Funktion $f^+: X \rightarrow [0, \infty]$, $\omega \mapsto (f(\omega))^+$ heißt **der Positivteil von f** , die Funktion $f^-: X \rightarrow [0, \infty]$, $\omega \mapsto (f(\omega))^-$ heißt **der Negativteil von f** und die Funktion $|f|: X \rightarrow [0, \infty]$, $\omega \mapsto |f(\omega)|$ heißt **der Absolutbetrag von f** .
- **Satz 5.2:** Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, $E \in \mathcal{A}$ und $f: E \rightarrow [-\infty, \infty]$. Dann sind äquivalent:
 - (a) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{ \omega \in E \mid f(\omega) \leq \alpha \} \in \mathcal{A}$.
 - (b) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{ \omega \in E \mid f(\omega) < \alpha \} \in \mathcal{A}$.
 - (c) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{ \omega \in E \mid f(\omega) \geq \alpha \} \in \mathcal{A}$.
 - (d) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{ \omega \in E \mid f(\omega) > \alpha \} \in \mathcal{A}$.
- **Definition 5.3:** Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, $E \in \mathcal{A}$. Eine numerische Funktion f auf E heißt genau dann **$\mathcal{A}$ -messbar**, wenn eine (und damit jede) der Aussagen (a) – (d) aus Satz 5.2 gilt.
- **Satz 5.4:** Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und f, g numerische $\mathcal{A}$ -messbare Funktionen auf einem $E \in \mathcal{A}$. Dann gelten

$$\begin{aligned} \{ \omega \in E \mid f(\omega) < g(\omega) \} &\in \mathcal{A}, & \{ \omega \in E \mid f(\omega) \leq g(\omega) \} &\in \mathcal{A}, \\ \{ \omega \in E \mid f(\omega) = g(\omega) \} &\in \mathcal{A}, & \{ \omega \in E \mid f(\omega) \neq g(\omega) \} &\in \mathcal{A}. \end{aligned}$$
- **Lemma 5.5:** Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, $E \in \mathcal{A}$.

- (a) Auf E definierte konstante numerische Funktionen sind $\mathcal{A}$ -messbar.
- (b) Für $A \in \mathcal{A}$ ist die **Indikatorfunktion** von A auf E , d.h. die Funktion $\mathbf{1}_A^E: E \rightarrow [-\infty, \infty]$, welche durch

$$\mathbf{1}_A^E(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \omega \in A \\ 0, & \text{wenn } \omega \in E \setminus A, \end{cases} \quad (11.1)$$

definiert wird, $\mathcal{A}$ -messbar.

- (c) Ist $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{A} = \mathcal{L}_n$ die σ -Algebra der n -Lebesgue-messbaren Mengen, so ist jede auf E definierte stetige reellwertige Funktion $\mathcal{A}$ -messbar.
- **Satz 5.6:** Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, $E \in \mathcal{A}$ sowie f, g, f_k , $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$ -messbare numerische Funktionen auf E . Dann sind auch die folgenden Funktionen $\mathcal{A}$ -messbar:

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k, \quad \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k, \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \quad (\text{falls auf } E \text{ definiert}),$$

$f \cdot g$, $|f|$, $f^+ := \max(f, 0)$, $f^- := -\min(f, 0)$ sowie $f + g$ und $f - g$ (falls auf E definiert).

- **Definition 5.7:** Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, $E \in \mathcal{A}$. Ist $f: E \rightarrow [0, \infty[$ eine $\mathcal{A}$ -messbare, nichtnegative, reellwertige Funktion mit endlichem Bild $f[E]$, dann heißt f eine **$\mathcal{A}$ -Elementarfunktion (auf E)**. Sind α_j , $j = [0..k]$, die aufsteigend geordneten paarweise verschiedenen Elemente von $f[E]$ und $A_j = f^{-1}[\{\alpha_j\}]$, $j = [0..k]$, die entsprechenden Urbildmengen, so gilt

$$f = \sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}^E, \quad (11.2)$$

welche **kanonische Darstellung von f** heißt. Beachte, dass $A_j \in \mathcal{A}$ für alle $j = [0..k]$.

- **Satz 5.8:** Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, $E \in \mathcal{A}$. Ist f eine numerische, nichtnegative und $\mathcal{A}$ -messbare Funktion auf E , so existiert eine aufsteigende Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{A}$ -Elementarfunktionen auf E mit $f_k \leq f_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$.

- **Definition 6.1:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$. Für eine $\mathfrak{A}$ -Elementarfunktion $f: E \rightarrow [0, \infty[$ mit kanonischer Darstellung (11.2) definieren wir das **Integral von f auf E bzgl. μ** , in Zeichen $\int_E f d\mu$, als

$$\int_E f d\mu := \sum_{j=0}^k \alpha_j \mu(A_j) \in [0, \infty]. \quad (11.3)$$

- **Satz 6.2:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$, $\alpha \in [0, \infty[$ und f, g seien $\mathfrak{A}$ -Elementarfunktionen auf E . Dann gelten:

- (a) αf und $f + g$ sind $\mathfrak{A}$ -Elementarfunktionen auf E . (b) $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$.
(c) $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$. (d) $f \leq g \implies \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

- **Definition 6.3:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$. Für eine beliebige nichtnegative $\mathfrak{A}$ -messbare numerische Funktion f auf E definieren wir das **Integral von f auf E bzgl. μ** , in Zeichen $\int_E f d\mu$, als

$$\int_E f d\mu := \sup \left\{ \int_E e d\mu \mid e: E \rightarrow [0, \infty[\text{ ist eine } \mathfrak{A}\text{-Elementarfunktion und } e \leq f. \right\} \quad (11.4)$$

- **Corollar 6.4:** Sind $f, g: E \rightarrow [0, \infty]$ $\mathfrak{A}$ -messbar mit $f \leq g$, so gilt $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

- **Satz 6.5 (Beppo Levi – Satz von der monotonen Konvergenz):** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$. Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer $\mathfrak{A}$ -messbarer numerischer Funktionen auf E , so dass $f_k \leq f_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k$. Dann gilt

$$\int_E f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu = \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_E f_k d\mu.$$

- **Satz 6.6:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$, $\alpha \in [0, \infty[$ und $f, g: E \rightarrow [0, \infty]$ seien $\mathfrak{A}$ -messbar. Dann gelten:

- (a) αf und $f + g$ sind $\mathfrak{A}$ -messbar. (b) $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$.
(c) $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$. (d) Falls $f \leq g$, so gilt: $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

- **Satz 6.7:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$. Sei $(g_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer $\mathfrak{A}$ -messbarer numerischer Funktionen auf E . Dann ist $g = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu$ eine nichtnegative auf E definierte $\mathfrak{A}$ -messbare numerische Funktion und es gilt

$$\int_E g d\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_E g_\nu d\mu.$$

- **Satz 6.8 (Lemma von Fatou):** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$. Ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer $\mathfrak{A}$ -messbarer numerischer Funktionen auf E , so gilt

$$\int_E \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu.$$

μ -Integrierbarkeit, μ -Nullmengen, vollständige Maßräume

- **Definition 6.9:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$. Ist f eine $\mathfrak{A}$ -messbare numerische Funktion auf E und gelten sowohl $\int_E f^+ d\mu < \infty$ als auch $\int_E f^- d\mu < \infty$, so heißt f **μ -integrierbar (auf E)**. In diesem Fall definieren wir das **Integral von f auf E bzgl. μ** , in Zeichen $\int_E f d\mu$, als

$$\int_E f d\mu := \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu. \quad (11.5)$$

- **Satz 6.10:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ sowie $f, g: E \rightarrow [0, \infty]$ zwei μ -integrierbare Funktionen. Dann sind αf und (falls $f + g$ auf E definiert) $f + g$ ebenso μ -integrierbar. Es gilt:

$$(a,b) \int_E (\alpha f + g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \int_E g d\mu. \quad (c) \text{ Für } f \leq g \text{ ist } \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

- **Satz 6.11:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{A}$ und f eine $\mathfrak{A}$ -messbare numerische Funktion auf E . Dann gelten:

$$(a) f \text{ ist } \mu\text{-integrierbar} \iff \int_E |f| d\mu < \infty.$$

$$(b) \text{ Ist } f \text{ eine } \mu\text{-integrierbare Funktion auf } E, \text{ so gilt } \left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

- **Definition 6.18:** Eine Menge $A \subset \Omega$ heißt eine μ -Nullmenge $\iff A \in \mathfrak{A}$ und $\mu(A) = 0$.
- **Definition 6.19:** Sei P eine Eigenschaft, die Elemente von E haben können. Wir sagen, dass P μ -fast überall (auf E) gilt genau dann, wenn die (Ausnahme-)Menge A der Elemente von E , welche die Eigenschaft P nicht haben, Teilmenge einer μ -Nullmenge N ist.
- **Definition 6.20:** Ein Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ heißt **vollständig** genau dann, wenn für alle N und $A \subset \Omega$ gilt: Ist N eine μ -Nullmenge und $A \subset N$, so gilt $A \in \mathfrak{A}$.
- **Satz 6.21:** Der Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}_n, \lambda_n)$ ist vollständig, jedoch ist $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \lambda_n|_{\mathcal{B}_n})$ nicht vollständig.
- **Satz 6.22:** Ist $f: E \rightarrow [-\infty, \infty]$ μ -integrierbar, so ist f μ -fast überall endlich auf E .

- **Satz 6.23:** Ist $f: E \rightarrow [0, \infty]$ eine $\mathfrak{A}$ -messbare Funktion, so gilt $\int_E f d\mu = 0 \iff f = 0$ μ -f. ü.

- **Corollar 6.24:** Ist $f: E \rightarrow [-\infty, \infty]$ eine $\mathfrak{A}$ -messbare Funktion mit $\mu(E) = 0$, dann ist f sogar μ -integrierbar auf E und es gilt $\int_E f d\mu = 0$.

Zusatzaufgabe 11.1:

- Zeigen Sie: Sind μ und ν zwei endliche Maße auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ und a, b nichtnegative reelle Zahlen, dann ist auch $\lambda := a\mu + b\nu$ ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$.
- Wann wird das Maß λ zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß?

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.1:

- Wegen $\lambda(\emptyset) = a\mu(\emptyset) + b\nu(\emptyset) = a \cdot 0 + b \cdot 0$ ergibt sich zunächst $\lambda(\emptyset) = 0$. Da a, b nichtnegative reelle (und damit insbesondere endliche) Zahlen sind, folgt mit der Endlichkeit und Isotonie von μ und ν ebenso die Nichtnegativität und Endlichkeit von λ , also $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, denn für beliebiges $A \in \mathcal{A}$ gilt nach (a.iii)

$$\lambda(A) = a \underbrace{\mu(A)}_{< \infty} + b \underbrace{\nu(A)}_{< \infty} < \infty$$

Für eine Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter $\mathcal{A}$ -messbarer Mengen gilt – aufgrund der Endlichkeit des Maßes und der Nichtnegativität aller beteiligten Größen – offensichtlich auch

$$\begin{aligned} \infty > \lambda\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) &= a\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) + b\nu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = a \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) + b \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu(A_k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} (a\mu(A_k) + b\nu(A_k)) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(A_k), \text{ womit die } \sigma\text{-Additivität gezeigt ist.} \end{aligned}$$

- (b) Stimmen sowohl μ als auch ν mit dem Nullmaß überein, so haben wir keine Chance. Ist jedoch $\mu(\Omega) > 0$, so können wir $a = \frac{1}{\mu(\Omega)}$ und $b = 0$ wählen. Gilt zusätzlich $\nu(\Omega) > 0$, so ist jede Wahl $a = \frac{p}{\mu(\Omega)}, b = \frac{q}{\nu(\Omega)}$ mit $p + q = 1$ und $p, q \geq 0$ möglich.

Zusatzaufgabe 11.2: (Beispiele messbarer Funktionen)

- (a) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum.
- Bestimmen Sie alle $\mathcal{A}$ -messbaren Funktionen für den Fall, dass $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
 - Bestimmen Sie alle $\mathcal{A}$ -messbaren Funktionen für den Fall, dass $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$.
- (b) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum. Zeigen Sie für $\mathcal{A}$ -messbare numerische Funktionen f, g auf Ω :
- $\{x \in \Omega : f(x) < g(x)\} \in \mathcal{A}$,
 - $\{x \in \Omega : f(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{A}$,
 - $\{x \in \Omega : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{A}$,
 - $\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{A}$.
- (c) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $A \subset \Omega$ beliebig. Unter welcher Bedingung ist die **charakteristische Funktion/Indikatorfunktion** $\mathbf{1}_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ von A messbar?

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.2:

- (a) (i) Alle Funktionen sind in diesem Fall messbar, denn:
Sei $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ eine beliebige (numerische) Funktion, dann ist für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ nach den Eigenschaften des Urbildes die Menge $f^{-1}(] \alpha, \infty])$ eine Teilmenge von Ω , also liegt $f^{-1}(] \alpha, \infty])$ demnach in der σ -Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- (ii) Lediglich konstante Funktionen sind in diesem Fall messbar, denn:
- Ist $f \equiv \beta \in [-\infty, \infty]$ konstant, dann gilt

$$f^{-1}(] \alpha, \infty]) = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{A}, & \text{falls } \beta \notin] \alpha, \infty] , \\ \Omega \in \mathcal{A}, & \text{falls } \beta \in] \alpha, \infty] . \end{cases}$$
 - Existieren $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ und $a, b \in [-\infty, \infty]$ mit $a \neq b$ und $f(\omega_1) = a < b = f(\omega_2)$, dann existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $a < \alpha < b$. Nach den Eigenschaften des Urbildes folgen nun $\emptyset \neq \{\omega_1\} \subset \Omega \setminus f^{-1}(] \alpha, \infty])$ und $\emptyset \neq \{\omega_2\} \subset f^{-1}(] \alpha, \infty])$, also $f^{-1}(] \alpha, \infty]) \notin \mathcal{A}$, so dass f nicht mehr $\mathcal{A}$ -messbar sein kann.
- (b) **Vorbemerkung:** Da Komplemente sowie abzählbare Vereinigungen messbarer Mengen wieder messbar, also Elemente der σ -Algebra sind, folgt zusammen mit den de Morganschen Regeln auch

$$\forall k \in \mathbb{N} : A_k \in \mathcal{A} \quad \implies \quad \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \Omega \setminus \left(\Omega \setminus \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) = \Omega \setminus \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\Omega \setminus A_k) \right) \in \mathcal{A} .$$

Wählen wir nur endlich viele $A_k \neq \emptyset$, so folgt auch die Messbarkeit endlicher Durchschnitte messbarer Mengen.

- (i) Nach der $\mathcal{A}$ -Messbarkeit von f und g und der Vorbemerkung gilt für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f^{-1}([-\infty, \alpha[) &:= \{x \in \Omega : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A} , \\ g^{-1}(] \alpha, \infty]) &:= \{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

und somit – da $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra ist – auch

$$\{x \in \Omega : f(x) < \alpha\} \cap \{x \in \Omega : \alpha < g(x)\} \in \mathcal{A} .$$

Betrachten wir nur rationale (also abzählbar viele) α , ergibt sich nun – wiederum weil $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra ist –

$$\{x \in \Omega : f(x) < g(x)\} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}} \underbrace{\left(\underbrace{\{x \in \Omega : f(x) < \alpha\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{x \in \Omega : \alpha < g(x)\}}_{\in \mathcal{A}} \right)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A} .$$

- (ii) Wiederum weil $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra ist, folgt $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ aus $A \in \mathcal{A}$ und mit den Eigenschaften des Urbildes dann auch

$$\{x \in \Omega : f(x) \leq g(x)\} = \Omega \setminus \underbrace{\{x \in \Omega : g(x) < f(x)\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

- (iii) Da endliche Schnitte messbarer Mengen nach der Vorbemerkung messbar sind, ergibt sich wiederum mit den Eigenschaften des Urbildes

$$\{x \in \Omega : f(x) = g(x)\} = \underbrace{\{x \in \Omega : g(x) \leq f(x)\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{x \in \Omega : f(x) \leq g(x)\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

- (iv) Mit der gleichen Argumentation wie in (ii) erhalten wir schließlich auch

$$\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\} = \Omega \setminus \underbrace{\{x \in \Omega : f(x) = g(x)\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

- (c) Nach Definition 5.3 genügt es, die Frage zu beantworten, wann für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ das Urbild $\mathbf{1}_A^{-1}(] \alpha, \infty]) = \{\omega \in \Omega \mid \mathbf{1}_A(\omega) > \alpha\}$ Element der σ -Algebra ist.

- Sei $\alpha \geq 1$, dann gilt $0 \notin] \alpha, \infty]$ und ebenso $1 \notin] \alpha, \infty]$, d.h., kein $\omega \in \Omega$ wird unter $\mathbf{1}_A$ in die Menge $] \alpha, \infty] := \{x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} \mid x > \alpha\}$ abgebildet, wonach das Urbild $\mathbf{1}_A^{-1}(] \alpha, \infty])$ identisch der leeren Menge ist. Die leere Menge ist jedoch Element jeder σ -Algebra, also ergibt sich in diesem Fall $\mathbf{1}_A^{-1}(] \alpha, \infty]) \in \mathcal{A}$.
- Sei $\alpha < 0$, dann gilt $\{0, 1\} \subset] \alpha, \infty]$. Da jedes $\omega \in \Omega$ unter $\mathbf{1}_A$ in die Menge $\{0, 1\}$ abgebildet wird, folgt in diesem Fall für das Urbild $\mathbf{1}_A^{-1}(] \alpha, \infty]) = \Omega$. Da die leere Menge Element jeder σ -Algebra ist und das Komplement einer messbaren Menge wieder messbar, folgt auch in diesem Fall $\mathbf{1}_A^{-1}(] \alpha, \infty]) \in \mathcal{A}$.
- Sei nun $\alpha \in [0, 1[$, dann gilt $0 \notin] \alpha, \infty]$ und $1 \in] \alpha, \infty]$, also

$$\mathbf{1}_A^{-1}(] \alpha, \infty]) = \mathbf{1}_A^{-1}(\{1\}) = A.$$

Daher folgt die Äquivalenz

$$\mathbf{1}_A^{-1}(] \alpha, \infty]) \in \mathcal{A} \iff A \in \mathcal{A}.$$

Daher gilt nun offenbar $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \mathbf{1}_A^{-1}(] \alpha, \infty]) \in \mathcal{A}$ genau dann, wenn $A \in \mathcal{A}$, d.h., die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_A$ ist genau messbar, wenn es die Menge A ist.

Bemerkung: Eine charakteristische Funktion haben wir bereits in der Analysis 1 kennengelernt, nämlich die **Dirichlet-Funktion** $\mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}^{\mathbb{R}}$. Aufgrund von $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ und $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subset \mathbb{Q}$ folgt etwa nach Satz 6.10 (c), dass $\int \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}^{\mathbb{R}} d\lambda = 0$ ist.

Zusatzaufgabe 11.3: Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f, g : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ $\mathfrak{A}$ -messbar. Zeigen Sie:

- (a) **Satz 6.8: Fatou's Lemma.**
- (b) **Satz 6.11 (a):** f ist μ -integrierbar $\iff |f|$ ist μ -integrierbar,
- (c) $|f| \leq g$ und g ist μ -integrierbar $\implies f$ ist μ -integrierbar,
- (d) f, g sind μ -integrierbar $\implies \max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ sind μ -integrierbar,
- (e) **Satz 6.11 (b):** f ist μ -integrierbar $\implies \left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.3: Nach Satz 5.6 sind $|f|$, f^+ und f^- $\mathfrak{A}$ -messbar.

- (a) Nach Satz 5.6 wird durch $h_k := \inf_{j \geq k} f_j$ eine Folge $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ $\mathfrak{G}$ -messbarer Funktionen definiert, für welche

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} h_k$$

sowie $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots$ und

$$\forall k \in \mathbb{N} : h_k \leq f_k$$

gilt. Mit dem Satz von Beppo Levi (Satz von der monotonen Konvergenz) folgt somit

$$\int \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \right) d\mu = \int \lim_{k \rightarrow \infty} h_k d\mu \stackrel{\text{Beppo Levi}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int h_k d\mu = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int h_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\mu .$$

- (b) „ $\Rightarrow$ “: Nach Definition 6.9 ist eine $\mathfrak{A}$ -messbare numerische Funktion f genau dann μ -integrierbar, wenn f^+ und f^- endliches μ -Integral besitzen. Aufgrund der Linearität des Integrals (und da $f^+ f^- = 0$ nach Abschnitt 1, also die Summe überall definiert ist) besitzt dann auch die nichtnegative $\mathfrak{A}$ -messbare Funktion $|f| = f^+ + f^-$ ein endliches μ -Integral und ist somit μ -integrierbar (wegen $|f|^- = 0$ und folglich $\int_{\Omega} |f|^- d\mu = 0 < \infty$).
 „ $\Leftarrow$ “: Zunächst halten wir fest, dass $|f| = |f|^+$ und aufgrund der μ -Integrierbarkeit $\int |f| d\mu < \infty$ gilt. Wegen $0 \leq f^+ + f^- = |f|$ und somit auch $0 \leq f^+ \leq |f|$ und $0 \leq f^- \leq |f|$ folgt nach Satz 6.6 (d), also nach der Monotonie des Integrals für $\mathfrak{A}$ -messbare nichtnegative numerische Funktionen

$$\int f^+ d\mu \leq \int |f| d\mu < \infty \quad \text{sowie} \quad \int f^- d\mu \leq \int |f| d\mu < \infty ,$$

also nach Definition 6.9 die μ -Integrierbarkeit von f .

- (c) Da $|f| \leq g$, also $0 \leq f^+ + f^- \leq g$ gilt, besitzen f^+ und f^- wegen $0 \leq f^+ \leq g$ bzw. $0 \leq f^- \leq g$ und der Monotonie des Integrals aufgrund der μ -Integrierbarkeit von g ebenso ein endliches Integral, wonach f entsprechend Definition 6.9 ebenso μ -integrierbar ist.
- (d) Folgt aus (b) und (c) wegen $|\max\{f, g\}| \leq |f| + |g|$ und $|\min\{f, g\}| \leq |f| + |g|$.
- (e) Da $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$ folgen $\int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu$ und $-\int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu$, also

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu .$$

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 12

Satz von der majorisierten Konvergenz (Lebesgue)

- **Satz 6.12 (Satz von Lebesgue – Satz von der majorisierten Konvergenz):** Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge $\mathfrak{A}$ -messbarer reellwertiger Funktionen auf E , $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ und es gebe eine μ -integrierbare reellwertige Funktion g auf E derart, dass $|f_k| \leq g$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dann sind die Funktionen $f, f_k, k \in \mathbb{N}$, jeweils μ -integrierbar auf E , die Integralfolge $(\int_E f_k d\mu)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert und es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu = \int_E f d\mu. \quad (12.1)$$

- **Bemerkung 6.14:** Sei f eine numerische Funktion auf E und $A \subset E, A \in \mathfrak{A}$. Falls $f|_A$ nichtnegativ und $\mathfrak{A}$ -messbar oder falls $f|_A$ μ -integrierbar ist, so setzen wir, wie üblich, $\int_A f d\mu := \int_A f|_A d\mu$.
- **Satz 6.16:** Sei S eine abzählbare Indexmenge, $(A_k)_{k \in S}$ eine Familie aus $\mathfrak{A}$ mit $E = \bigcup_{k \in S} A_k$ und $f: E \rightarrow [-\infty, \infty]$. Ist $f|_{A_k}$ nun $\mathfrak{A}$ -messbar für alle $k \in S$, so ist f auch $\mathfrak{A}$ -messbar.

μ -fast überall erfüllte Eigenschaften, vollständige Maßräume, Dichte

- **Satz 6.25:** Für $\mathfrak{A}$ -messbare Funktionen $f, g: E \rightarrow [-\infty, \infty]$ sei $f = g$ μ -fast überall. Dann gilt:
 - (a) Sind f und g nichtnegativ, dann gilt: $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$.
 - (b) Ist f μ -integrierbar, so ist g μ -integrierbar und $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$.
- **Satz 6.26:** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ vollständig, $E \in \mathfrak{A}$ und $f, g: [-\infty, \infty]$ mit $f = g$ μ -fast überall auf E . Dann gilt: Ist f eine $\mathfrak{A}$ -messbare Funktion, dann ist auch g eine $\mathfrak{A}$ -messbare Funktion.
- **Satz 6.28:** Sei $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ $\mathfrak{A}$ -messbar. Für jedes $A \in \mathfrak{A}$ sei $\boxed{\nu(A) := \int_A f d\mu}$. Dann ist ν ein Maß auf $\mathfrak{A}$ und $(\Omega, \mathfrak{A}, \nu)$ ein Maßraum. Wir sagen: ν besitzt die **Dichte f bezüglich μ** . Sei $E \in \mathfrak{A}$ und g eine numerische Funktion auf E . Falls g nichtnegativ und $\mathfrak{A}$ -messbar ist (bzw. falls g ν -integrierbar ist), so ist $g \cdot (f|_E)$ nichtnegativ und $\mathfrak{A}$ -messbar (bzw. $g \cdot (f|_E)$ ist μ -integrierbar) und

$$\int_E g d\nu = \int_E g \cdot (f|_E) d\mu.$$

Parameterabhängige Lebesgue-Integrale

- **Vorbemerkung:**

Ist $f(x, y)$ stetig auf dem Rechteck $[a, b] \times [c, e]$ und existiert dort überall $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$, dann existiert nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aufgrund der Stetigkeit von f zu beliebigem $\eta \in [c, e]$ eine Stammfunktion $F_\eta(\xi) = F(\xi, \eta)$ von $f_\eta(\xi) := f(\xi, \eta)$ mit $F_\eta(\xi) = \int_a^\xi f_\eta(s) ds = \int_a^\xi f(s, \eta) ds$. Sind darüber hinaus $\alpha: [c, e] \rightarrow [a, b]$ und $\beta: [c, e] \rightarrow [a, b]$ differenzierbare Kurven, so folgt mit Hilfe des Satzes über die Differentiation parameterabhängiger Integrale und nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right) &= \frac{d}{dy} (F_y(\beta(y)) - F_y(\alpha(y))) = \frac{d}{dy} F(\beta(y), y) - \frac{d}{dy} F(\alpha(y), y) \\ &= dF(\beta(y), y) \cdot \begin{pmatrix} \beta'(y) \\ 1 \end{pmatrix} - dF(\alpha(y), y) \cdot \begin{pmatrix} \alpha'(y) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi} F(\beta(y), y) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} F(\beta(y), y) \right) \begin{pmatrix} \beta'(y) \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial}{\partial \xi} F(\alpha(y), y) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} F(\alpha(y), y) \right) \begin{pmatrix} \alpha'(y) \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(\beta(y), y) \cdot \beta'(y) + \int_a^{\beta(y)} \frac{\partial}{\partial \eta} f(s, y) ds - f(\alpha(y), y) \cdot \alpha'(y) - \int_a^{\alpha(y)} \frac{\partial}{\partial \eta} f(s, y) ds \\
&= f(\beta(y), y) \cdot \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \cdot \alpha'(y) + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(s, y) ds .
\end{aligned}$$

- **Lemma 6.31 [Stetigkeitslemma für parameterabhängige Integrale]:** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{A}$, (X, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $f: X \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, \omega) \mapsto f(x, \omega)$, eine Funktion, für die gilt:

- (a) $\omega \mapsto f(x, \omega)$ ist μ -integrierbar für jedes $x \in X$.
- (b) $x \mapsto f(x, \omega)$ ist stetig im Punkt x_0 für jedes $\omega \in E$.
- (c) Es gibt ein μ -integrierbares $h: E \rightarrow [0, \infty]$, so dass $|f(x, \omega)| \leq h(\omega)$ für alle $(x, \omega) \in X \times E$.

Dann ist die Funktion $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \int_E f(x, \omega) d\mu(\omega)$, stetig im Punkt x_0 .

- **Lemma 6.32 [Differentiationslemma für parameterabhängige Integrale]:** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{A}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtdegeneriertes Intervall, $f: X \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, \omega) \mapsto f(x, \omega)$, eine Funktion, für die gilt:

- (a) $\omega \mapsto f(x, \omega)$ ist μ -integrierbar für jedes $x \in X$.
- (b) $x \mapsto f(x, \omega)$ ist differenzierbar auf I für jedes $\omega \in E$.
- (c) $\exists h: E \rightarrow [0, \infty]$ μ -integrierbar, so dass $|\partial_x f(x, \omega)| \leq h(\omega)$ für alle $(x, \omega) \in X \times E$.

Dann ist die Funktion $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $\varphi(x) = \int_E f(x, \omega) d\mu(\omega)$, differenzierbar auf I , die Funktion $\omega \mapsto \partial_x f(x, \omega)$ ist μ -integrierbar für jedes $x \in I$ und es gilt:

$$\varphi'(x) = \int_E \partial_x f(x, \omega) d\mu(\omega) \quad \text{für jedes } x \in I.$$

Normalbereiche

- Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ wird als **Normalbereich im $\mathbb{R}^2$** bezeichnet, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a) $\exists \varphi_1, \varphi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$.
- (b) $\exists \psi_1, \psi_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$.

Der **Flächeninhalt** eines Normalbereiches $D \in \mathbb{R}^2$ ist dann beispielsweise

$$\lambda_2(D) := \int_D 1 d\mu(x, y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} 1 d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x)$$

- Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^3$ wird als **Normalbereich im $\mathbb{R}^3$** bezeichnet, falls stetige Funktionen $\varphi_1, \varphi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\xi_1, \xi_2: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \xi_1(x, y) \leq z \leq \xi_2(x, y)\}$$

existieren (ggf. (x, y, z) permutiert). Das **Volumen** eines Normalbereiches $D \in \mathbb{R}^3$ ist

$$V(D) := \int_D 1 d\lambda_3(x, y, z) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\xi_1(x, y)}^{\xi_2(x, y)} 1 d\lambda_1(z) \right) d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x) .$$

(Uneigentliches) Riemann- versus Lebesgue-Integral

- **Satz 7.1:** Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $I = [a, b]$. Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

(a) f ist $\mathbb{R}$ -integrierbar $\iff$ Die Menge der Unstetigkeitsstellen von f ist eine λ_1 -Nullmenge.

(b) f $\mathbb{R}$ -integrierbar mit $\mathbb{R}$ -Int. $\int_a^b f(x) dx \implies f$ λ_1 -int. auf I und $\int_I f d\lambda_1 = \int_a^b f(x) dx$.

- **Satz 7.2:** Sei $a \in \mathbb{R}$ und f eine auf $[a, \infty[$ definierte numerische Funktion, die $\mathcal{L}_1$ -messbar und nichtnegativ oder aber λ_1 -integrierbar ist. Dann gilt:

$$\int_{[a, \infty[} f d\lambda_1 = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} f d\lambda_1.$$

Zusatzaufgabe 12.1:

- (a) Zeigen Sie: Die Komposition messbarer Abbildungen ist wieder messbar.
- (b) Beweisen Sie, dass für eine Lebesgue-integrierbare Funktion f und jedes $c > 0$ die Lebesgue-messbare Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| \geq c\}$ ein endliches Maß hat.

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.1:

- (a) Dies ist offenbar der Fall, denn es gilt $(f \circ g)^{-1}[[A]] = f^{-1}[[g^{-1}[[A]]]]$.
- (b) Sei $A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| \geq c\}$. Wegen $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| d\mu(x) < +\infty$ gilt dann auch

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A(x) d\mu(x) \leq \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| d\mu(x) < +\infty.$$

Zusatzaufgabe 12.2:

- (a) Zeigen Sie, dass der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, $\mu \equiv 0$ nicht vollständig ist. Was ist seine Vervollständigung?
- (b) Seien $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\}$ gegeben. Auf der σ -Algebra $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ sei ν ein Maß, so dass $\nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = 0$ und $\nu(\{3\}) = \nu(\{4\}) = 1$ gelte. Zeigen Sie:
- Mit $\mu = \nu|_{\mathcal{A}}$ ist der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ nicht vollständig.
 - Finden Sie die kleinste σ -Algebra $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$, so dass $(\Omega, \mathcal{B}, \nu|_{\mathcal{B}})$ vollständig ist.
 - Was ist die Vervollständigung von $(\Omega, \mathcal{A}, \nu|_{\mathcal{A}})$?

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.2:

- (a) Der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, $\mu \equiv 0$ ist nicht vollständig, da beispielsweise $\mathbb{R}$ eine μ -Nullmenge ist, jedoch jede nichtleere echte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ kein Element von $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ ist. Für die Vervollständigung benötigen wir die σ -Algebra

$$\overline{\mathcal{A}} := \{M \cup N \mid M \in \mathcal{A} \wedge N \in \mathcal{N}\},$$

wobei $\mathcal{N} = \{A \subset \mathbb{R} \mid \exists B \in \mathcal{A} : (\mu(B) = 0 \wedge A \subset B)\}$. Einerseits gilt stets (wähle etwa $M = \emptyset$) die Inklusion $\mathcal{N} \subset \overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Wegen $\mu(\mathbb{R}) = 0$ folgt andererseits auch

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}) \subset \{A \subset \mathbb{R} \mid \exists B \in \mathcal{A} : (\mu(B) = 0 \wedge A \subset B)\} = \mathcal{N},$$

also insgesamt $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Aufgrund der Isotonie muss $\bar{\mu} \equiv 0$ gelten. Somit ist die gesuchte Vervollständigung $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), 0)$.

- (b) (i) Wir betrachten zunächst den (vollständigen) Maßraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \nu)$. Aufgrund der σ -Additivität von Maßen folgt, dass neben $\emptyset, \{1\}, \{2\}$ auch $\{1, 2\}$ eine ν -Nullmenge ist. Aus $0 = \nu(\{1, 2\}) = \nu|_{\mathcal{A}}(\{1, 2\})$ ergibt sich weiter, dass $\{1, 2\}$ ebenso eine μ -Nullmenge ist. Jedoch ist $\{1\} \subset \{1, 2\}$ kein Element von $\mathcal{A}$, wonach der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ nicht vollständig sein kann.

- (ii) Wir betrachten wiederum zunächst den (vollständigen) Maßraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \nu)$. Aufgrund der Isotonie, können Teilmengen von Ω , welche Obermengen von $\{3\}$ oder $\{4\}$ sind, keine ν -Nullmengen sein. Somit sind $\emptyset, \{1\}, \{2\}$ und $\{1, 2\}$ die einzigen ν -Nullmengen. Da letztere – wie bereits in (i) erwähnt – in $\mathcal{A}$ liegt und erstere jeweils Teilmengen von $\{1, 2\} \in \mathcal{A}$ sind, müssen diese in jedem Fall zur σ -Algebra $\mathcal{A}$ hinzugefügt werden. Mit der σ -Algebra

$$\mathcal{B} = \sigma(\{\{1\}, \{2\}\} \cup \mathcal{A}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\}$$

wird $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ mit $\mu = \nu|_{\mathcal{B}}$ dann zu einem vollständigen Maßraum, da $\mathcal{B}$ bereits alle ν -Nullmengen enthält.

- (iii) Die Vervollständigung $(\Omega, \mathcal{B}, \nu)$ eines Maßraumes $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist minimal, in dem Sinne, dass für jeden vollständigen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$ und $\mu = \mu_1|_{\mathcal{A}}$ schon $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_1$ und $\nu = \mu_1|_{\mathcal{B}}$ gilt. Somit ist der Maßraum aus (ii) die gesuchte Vervollständigung.

Zusatzaufgabe 12.3:

(Parameterabhängige Integrale)

- (a) Berechnen Sie $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, für die folgenden Funktionen:

$$(i) \quad F(x) := \int_{[1,2]} \frac{e^{xy}}{y} d\lambda_1(y); \quad (ii) \quad F(x) := \int_{[0,x]} e^{(x-y)^2} d\lambda_1(y).$$

- (b) Berechnen Sie $F(a) = \int_{[0,\infty[} \frac{e^{-ax} - e^{-x}}{x} d\lambda_1(x)$, $a > 0$, durch Differentiation von F nach a , $a > 0$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.3:

- (a) (i) Mit Hilfe des Satzes über die Differentiation parameterabhängiger Integrale ergibt sich

$$\frac{d}{dx} \int_{[1,2]} \frac{e^{xy}}{y} d\lambda_1(y) = \int_{[1,2]} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{xy}}{y} \right) d\lambda_1(y) = \int_{[1,2]} e^{xy} d\lambda_1(y) = \frac{e^{xy}}{x} \Big|_{y=1}^{y=2} = \frac{e^x(e^x - 1)}{x}.$$

Alternative: Mittels Substitutionsregel und der Vorbemerkung erhalten wir ebenfalls

$$\frac{d}{dx} \int_{[1,2]} \frac{e^{xy}}{y} d\lambda_1(y) = \frac{d}{dx} \int_1^2 \frac{e^{xy}}{xy} x dy = \frac{d}{dx} \int_x^{2x} \frac{e^z}{z} dz = \frac{e^{2x}}{2x} \cdot 2 - \frac{e^x}{x} \cdot 1 + 0 = \frac{e^x(e^x - 1)}{x}.$$

- (ii) Mit der Vorbemerkung folgt hier

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} F(x) = e^{(x-x)^2} \cdot 1 - e^{(x-0)^2} \cdot 0 + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} e^{(x-y)^2} d\lambda_1(y) \\ &= 1 + \int_0^x 2(x-y) e^{(x-y)^2} = 1 - e^{(x-y)^2} \Big|_{y=0}^{y=x} = e^{x^2}. \end{aligned}$$

Alternative: Mittels Substitutionsregel und der Vorbemerkung erhalten wir ebenfalls

$$F'(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x e^{z^2} dz = e^{x^2} \cdot 1 - e^{0^2} \cdot 0 + 0 = e^{x^2}.$$

- (b) Differentiation von F nach a liefert zunächst

$$\frac{d}{da} \int_{[0,\infty[} \frac{e^{-ax} - e^{-x}}{x} d\lambda_1(x) = \int_{[0,\infty[} \frac{\partial}{\partial a} \frac{e^{-ax} - e^{-x}}{x} d\lambda_1(x) = \int_0^\infty -e^{-ax} dx = -\frac{1}{a}.$$

Aufgrund von $F(1) = 0$ ergibt sich nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung dann

$$F(a) = - \int_1^a \frac{1}{s} ds = -\ln(a).$$

Zusatzaufgabe 12.4:**(Normalbereiche)**

- (a) Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge der nachstehenden Integrale

$$(i) \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx ; \quad (b) \int_{-1}^1 \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x, y) dx dy .$$

- (b) Berechnen Sie das Integral $\int_0^\pi \int_0^x \cos(x+2y) dy dx$ und skizzieren Sie das Gebiet, über welches integriert wird und geben Sie die beiden möglichen Darstellungen als Normalbereiche an.
- (c) Sei $Q = [-1, 1] \times [-3, 3]$ und $G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in Q \wedge 0 \leq z \leq 4 - x^3 - y\}$. Berechnen Sie das Volumen von G .

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.4:

- (a) (i) Zusammen mit der Monotonie der Wurzel- und Potenzfunktionen auf dem Intervall
- $[0, 1]$
- erhalten wir

$$(0 \leq x \leq 1 \wedge x^3 \leq y \leq \sqrt{x}) \iff (0 \leq y \leq 1 \wedge y^2 \leq x \leq \sqrt[3]{y}) .$$

Demnach stimmt die Menge $N_x := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ mit der Menge $N_y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \wedge y^2 \leq x \leq \sqrt[3]{y}\}$ überein. Daher folgt nun insgesamt für eine über N_x (und damit auch über N_y) integrierbare Funktion $f(x, y)$ die Gültigkeit von

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx dy .$$

- (ii) Aus der Gleichheit der Mengen $N_y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1 \wedge y^2 - 1 \leq x \leq 1 - y^2\}$ und $N_x := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \wedge -\sqrt{1-|x|} \leq y \leq \sqrt{1-|x|}\}$ folgt für eine dort integrierbare Funktion

$$\int_{-1}^1 \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-|x|}}^{\sqrt{1-|x|}} f(x, y) dy dx .$$

- (b) Das Gebiet $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq \pi\}$, über welchem integriert wird, ist ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen $a = \pi$, $b = \pi$ und $c = \sqrt{2}\pi$. Für das Integral ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(\int_0^x \cos(x+2y) dy \right) dx &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} \sin(x+2y) \right]_{y=0}^{y=x} dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\sin(3x) - \sin(x)) dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \cos(3x) - \cos(x) \right]_0^\pi = \frac{2}{3} . \end{aligned}$$

Die Darstellungen als Normalbereiche sind $N_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq x\}$ sowie $N_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \pi, y \leq x \leq \pi\}$.

- (c) Als Normalbereich geschrieben ist

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 4 - x^3 - y\} ,$$

so dass sich zusammen mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \lambda_3(G) &= \int_G 1 d\lambda_3(x, y, z) = \int_{-1}^1 \left(\int_{-3}^3 \left(\int_0^{4-x^3-y} 1 dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-3}^3 [z]_{z=0}^{z=4-x^3-y} dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\int_{-3}^3 (4 - x^3 - y) dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[(4 - x^3)y - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=-3}^{y=3} dx = 6 \int_{-1}^1 (4 - x^3) dx = 6 \left[4x - \frac{1}{4}x^4 \right]_{-1}^1 = 48 \end{aligned}$$

für das Volumen ergibt. Da $-x^3$ und $-y$ jeweils ungerade Funktionen sind, ist es aufgrund der Symmetrie nicht überraschend, dass $\lambda_3(G) = \lambda_3([-1, 1] \times [-3, 3] \times [0, 4])$ gilt.

Zusatzaufgabe 12.5: ((Uneigentliches) Riemann- versus Lebesgue-Integral)

- (a) Zeigen Sie: Ist $A_k \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge Lebesgue-messbarer Mengen mit $A_k \subset A_{k+1}$ und $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, dann gilt:
- $$f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue-integrierbar} \iff \exists M < \infty \forall k \in \mathbb{N} : \int_{A_k} |f(x)| d\mu(x) < M.$$
- (b) Ist die Funktion $f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, Lebesgue- bzw. uneigentlich Riemann-integrierbar?
- (c) Untersuchen Sie die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \frac{\cos(x)}{x} \mathbf{1}_{] \pi, \infty[}(x)$, einerseits auf (uneigentliche) Riemann-Integrierbarkeit und andererseits auf Lebesgue-Integrierbarkeit.

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.5:

- (a) Einerseits folgt aus der Integrierbarkeit von f über A die Ungleichung

$$\int_{A_k} |f(x)| d\mu(x) \leq \int_A |f(x)| d\mu(x) =: M < +\infty,$$

also ist die Beschränktheit der Integrale $\int_{A_k} |f(x)| d\mu(x)$ notwendig.

Andererseits ist die Folge $|f \cdot \mathbf{1}_{A_k}|$ monoton und konvergiert punktweise gegen den Betrag von f auf A . Daher folgt aus der Beschränktheit der Integrale $\int_{A_k} |f(x)| d\mu(x)$ nach dem Satz von Beppo-Levi über monotone Konvergenz die Integrierbarkeit von $|f|$ über A , also insbesondere die Integrierbarkeit von f über A .

- (b) (i) Die Funktion $|f|$ ist als stetige Funktion über jedes Intervall $I_n := [\frac{1}{n}, 1]$ Lebesgue-integrierbar. Da die Folge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Intervalle $[\frac{1}{n}, 1]$ eine Ausschöpfung von $]0, 1]$ ist und die Folge der Integrale

$$\int_{I_n} |f(x)| d\mu(x)$$

wegen $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in]0, 1]$ durch Eins beschränkt ist, ist $|f|$ und somit auch f nach (a) Lebesgue-integrierbar.

- (ii) Mit der Substitution $y := \frac{1}{x}$ folgt $dy = -\frac{1}{x^2} dx$, d.h. $dx = -\frac{1}{y^2} dy$, und das uneigentliche Riemann-Integral wird zu

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = - \int_1^{\infty} \frac{1}{y^2} \sin(y) dy.$$

Nun besitzt aber das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{y^2} \sin(y) dy$$

die Majorante

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{y^2} dy = \lim_{R \rightarrow \infty} -\frac{1}{R} + 1 = 1$$

und ist somit selbst konvergent. Also ist $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ uneigentlich Riemann-integrierbar über $]0, 1]$.

- (iii) Die uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit von f hätte man auch aus dem abstrakten Argument erschließen können, dass eine stetige Funktion auf einem halboffenen Intervall I genau dann Lebesgue-integrierbar ist, wenn ihr Betrag $|f|$ (und dann auch f) uneigentlich Riemann-integrierbar über I ist.

(c) Einerseits existiert das (uneigentliche) RIEMANN-Integral, denn es gilt mit partieller Integration

$$\int f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{\sin(x)}{x} \right]_{\pi}^b + \int_{\pi}^b \frac{\sin(x)}{x^2} dx \right) = 0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\pi}^b \frac{\sin(x)}{x^2} dx ,$$

wobei der Grenzwert wegen $\left| \frac{\sin(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ und $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\pi}^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_{\pi}^b = \frac{1}{\pi}$ existiert. Andererseits gilt für $\delta \leq \frac{\pi}{4}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int |f(x)| d\lambda_1(x) &\geq \sum_{k=2}^{\infty} \int_{]k\pi-\delta, k\pi+\delta[} \frac{|\cos(x)|}{x} d\lambda_1(x) \geq 2\delta \sum_{k=2}^{\infty} \inf_{x \in]k\pi-\delta, k\pi+\delta[} \frac{|\cos(x)|}{x} \\ &\geq 2\delta \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(\delta)}{k\pi + \delta} \geq 2\delta \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{4k\pi + \pi} \\ &\geq 2\delta \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{4k\pi + 4k\pi} \geq \frac{\delta}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} , \end{aligned}$$

wobei die letzte Reihe (bis auf den ersten Summanden) offenbar ein Vielfaches der als divergent bekannten harmonischen Reihe $\sum \frac{1}{k}$ ist. Somit kann f nach Satz 6.11 nicht Lebesgue-integrierbar sein.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 13

Substitutionsregel/Transformationssatz

- **Satz 7.5 [Translationsinvarianz]:**

Für jedes $A \in \mathcal{L}_n, c \in \mathbb{R}^n$ gilt $A + c \in \mathcal{L}_n$ und $\lambda_n(A + c) = \lambda_n(A)$.

- **Satz 7.6:**

Sei $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear, bijektiv. Für $A \in \mathcal{L}_n$ gilt $T[A] \in \mathcal{L}_n$ und $\lambda_n(T[A]) = |\det T| \lambda_n(A)$.

- **Satz 7.10 [Substitutionsregel/Transformationssatz]:** Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $h: U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Dann gilt $h[A] \in \mathcal{L}_n$ für jede Menge $A \subset U$ mit $A \in \mathcal{L}_n$ und

$$\lambda_n(h[A]) = \int_A |\det(dh(x))| d\lambda_n(x). \quad (13.1)$$

Für alle $E \subset U$ mit $E \in \mathcal{L}_n$ und alle $\mathcal{L}_n$ -messbaren Funktionen $f: h[E] \rightarrow [0, \infty]$ (bzw. alle λ_n -integrierbaren Funktionen $f: h[E] \rightarrow [-\infty, \infty]$) gilt, dass die auf E definierte Funktion $x \mapsto (f \circ h)(x) \cdot |\det(dh(x))|$ $\mathcal{L}_n$ -messbar (bzw. $\mathcal{L}_n$ -integrierbar) ist und

$$\int_{h[E]} f d\lambda_n = \int_E (f \circ h)(x) \cdot |\det(dh(x))| d\lambda_n(x). \quad (13.2)$$

Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge

- Im Folgenden bezeichnet $\mathcal{L}_n$ die σ -Algebra der Lebesgue-messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

- **Satz 7.12:** Falls $E_1 \in \mathcal{L}_{n_1}$ und $E_2 \in \mathcal{L}_{n_2}$, so gilt $E = E_1 \times E_2 \in \mathcal{L}_{n_1+n_2}$.

Achtung: Die Umkehrung ist im Allgemeinen **falsch**:

Wegen $\mathcal{L}_{n_1} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n_1})$ (Satz von Vitali, Beweis siehe beispielsweise Elstrodt) ist die Menge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{n_1}) \setminus \mathcal{L}_{n_1}$ nicht leer, d.h., wir können eine nicht-Lebesgue-messbare Teilmenge $E_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ finden, jedoch ist die Menge $E_1 \times \{0_{n_2}\} \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ als Teilmenge der $\lambda_{n_1+n_2}$ -Nullmenge $\mathbb{R}^{n_1} \times \{0_{n_2}\}$ aufgrund der Vollständigkeit (vergleiche Lemma 4.2 (1)) in $\mathcal{L}_{n_1+n_2}$.

- Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{A}$. Ist μ -f.ü. definiert und (außerhalb einer μ -Nullmenge N) $\mathcal{A}$ -messbar und nichtnegativ (bzw. μ -integrierbar), dann definieren wir $\int_E f d\mu := \int_{E \setminus N} f|_{E \setminus N} d\mu$.

- **Satz 7.19 [Satz v. Fubini/Tonelli (μ -f. ü. Fassung)]:**

Seien $n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_1, n_2 \geq 1$ und $n = n_1 + n_2$. Weiter seien $E_i \in \mathcal{L}_{n_i}$, $i \in \{1, 2\}$ und $f: E_1 \times E_2 \rightarrow [-\infty, \infty]$ $\mathcal{L}_n$ -messbar und nichtnegativ (bzw. λ_n -integrierbar).

Dann ist die partielle Funktion $f^{\omega_1}: E_2 \rightarrow [-\infty, \infty]$, $\omega_2 \mapsto f(\omega_1, \omega_2)$ für λ_1 -fast alle $\omega_1 \in E_1$ $\mathcal{L}_{n_2}$ -messbar und nichtnegativ (bzw. λ_{n_2} -integrierbar), die Funktion $g: \omega_1 \mapsto \int_{E_2} f^{\omega_1} d\lambda_{n_2}$ λ_1 -fast überall auf E_1 definiert, (außerhalb einer λ_1 -Nullmenge) $\mathcal{L}_{n_1}$ -messbar und nichtnegativ (bzw. λ_{n_1} -integrierbar) und es gilt

$$\int_{E_1 \times E_2} f d\lambda_n = \int_{E_1} g d\lambda_{n_1}, \quad \text{also} \quad \int_{E_1 \times E_2} f d\lambda_n = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(\omega_1, \omega_2) d\lambda_{n_2}(\omega_2) \right) d\lambda_{n_1}(\omega_1).$$

Zusatzaufgabe 13.1:

(a) Berechnen Sie für

$$g: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{y^2} & \text{für } 0 < x < y < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{für } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die iterierten Integrale $\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x, y) dx \right) dy$ und $\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x, y) dy \right) dx$. Gilt $g \in \mathcal{L}([0, 1]^2)$?

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) dx$$

gilt. Warum widerspricht dies nicht dem Satz von Fubini?

(c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{[0,\infty)} \left(\int_{[0,\infty)} y e^{-(1+x^2)y^2} d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x).$$

Zeigen Sie dann mittels des Satzes von Fubini

$$\int_{[0,\infty)} e^{-x^2} d\lambda_1(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 13.1:

(a) Für die iterierten Integrale ergeben sich

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y) dx \right) dy &= \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{1}{y^2} dx - \int_y^1 \frac{1}{x^2} dx \right) dy = \int_0^1 \left(\left[\frac{x}{y^2} \right]_{x=0}^{x=y} + \left[\frac{1}{x} \right]_{x=y}^{x=1} \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\left(\frac{y}{y^2} - 0 \right) + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{y} \right) \right) dy = \int_0^1 1 dy = 1 \end{aligned}$$

$$\text{und analog } \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\left[-\frac{y}{x^2} \right]_{y=0}^{y=x} + \left[-\frac{1}{y} \right]_{y=x}^{y=1} \right) dx = - \int_0^1 1 dx = -1 \neq 1.$$

Die Funktion ist nicht Lebesgue-integrierbar, da die beiden iterierten Integrale anderenfalls nach dem Satz von Fubini übereinstimmen müssten.

(b) Für jedes feste $y \in]0, 1[$ ist die stetige Funktion $]0, 1[\ni x \mapsto \frac{x-y}{(x+y)^3} \in \mathbb{R}$ auf der messbaren Menge $]0, 1[$ beschränkt und somit Lebesgue-integrierbar mit dem Wert

$$\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} d\mu(x) = \int_y^{1+y} \frac{t-2y}{t^3} dt = \left[\frac{y}{t^2} - \frac{1}{t} \right]_{t=y}^{t=1+y} = -\frac{1}{(1+y)^2}.$$

Nun ist die Funktion $]0, 1[\ni y \mapsto -\frac{1}{(1+y)^2} \in \mathbb{R}$ gemäß

$$\int_0^1 -\frac{1}{(1+y)^2} dy = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{-1}{(1+y)^2} dy = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{1+y} \Big|_{y=\varepsilon}^1 = -\frac{1}{2}.$$

uneigentlich Riemann-integrierbar, und da eine vollständig analoge Rechnung auch die uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit der zugehörigen Betragsfunktion zeigt, ist sie insbesondere Lebesgue-integrierbar mit dem selben Wert. Sprich es gilt

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} d\mu(x) \right) d\mu(y) = -\frac{1}{2}.$$

In der gleichen Art und Weise wie oben folgt aber auch

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} d\mu(y) \right) d\mu(x) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) d\mu(x) \\ &= \int_0^1 \left(\int_x^{1+x} \frac{2x-t}{t^3} dt \right) d\mu(x) = \int_0^1 \left[\frac{1}{t} - \frac{x}{t^2} \right]_{t=x}^{t=1+x} d\mu(x) \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{(1+x)^2} d\mu(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[\frac{-1}{1+x} \right]_{x=\varepsilon}^{x=1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Also kann in der angegebenen Situation die Integration nicht vertauscht werden. Dies widerspricht auch nicht dem Satz von FUBINI, da die Betragsfunktion des Integranden, sprich die Funktion

$$]0, 1[\times]0, 1[\ni (x, y) \mapsto \left| \frac{x-y}{(x+y)^3} \right| \in \mathbb{R},$$

nicht über den Produktraum $]0, 1[\times]0, 1[$ Lebesgue-integrierbar ist. Seien nämlich $0 < \delta \leq \varepsilon < 1$ gegeben. Dann ist die Restriktion der oben angegebenen Betragsfunktion über der messbaren Menge $]\varepsilon, 1[\times]\delta, 1[$ als beschränkte stetige Funktion Lebesgue-integrierbar mit einem Wert der gemäß

$$\begin{aligned} \int_{]\varepsilon, 1[\times]\delta, 1[} \left| \frac{x-y}{(x+y)^3} \right| d\mu(x, y) &= \int_{\varepsilon}^1 \left(\int_{\delta}^1 \left| \frac{x-y}{(x+y)^3} \right| d\mu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_{\varepsilon}^1 \left(\int_{\delta}^x \frac{x-y}{(x+y)^3} dy - \int_x^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) dx = \int_{\varepsilon}^1 \left(\left[\frac{1}{t} - \frac{x}{t^2} \right]_{t=x+\delta}^{t=2x} - \left[\frac{1}{t} - \frac{x}{t^2} \right]_{t=2x}^{t=x} \right) dx \\ &= \int_{\varepsilon}^1 \left(\frac{1}{2x} - \frac{\delta}{(x+\delta)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} \right) dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x) + \frac{\delta}{x+\delta} + \frac{1}{x+1} \right]_{x=\varepsilon}^1 \geq -\frac{1}{2} \ln(\varepsilon) - 2 \end{aligned}$$

in der Tat für $\varepsilon \rightarrow 0$ beliebig groß wird.

(c) Da sowohl für beliebiges $x \geq 0$ das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^{\infty} y e^{-(1+x^2)y^2} dy = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_0^K y e^{-(1+x^2)y^2} dy = \lim_{K \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} e^{-(1+x^2)y^2} \Big|_{y=0}^K \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2}$$

als auch das dann resultierende uneigentliche Riemann-Integral

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \lim_{K \nearrow \infty} \int_0^K \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \lim_{K \nearrow \infty} \arctan(x) \Big|_{x=0}^K = \frac{\pi}{4}$$

existiert und dabei die Integranden jeweils nichtnegative und als stetige somit auch messbare Funktionen sind, sind die einzelnen Integrale aufgrund ihrer Endlichkeit auch Lebesgue-integrierbar. Es gilt

$$\int_{[0, \infty)} \left(\int_{[0, \infty)} y e^{-(1+x^2)y^2} d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Nach dem Satz von TONELLI ist die Funktion $f: [0, \infty[\times [0, \infty[\ni (x, y) \mapsto y e^{-(1+x^2)y^2} \in \mathbb{R}$ ebenso λ_2 -integrierbar und wir können die Integrationsreihenfolge nach dem Satz von FUBINI vertauschen. Mit Hilfe der Potenzgesetze und der Substitution $t = \varphi(x) = xy$, $\varphi'(x) = y$, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \int_{[0, \infty)} \left(\int_{[0, \infty)} f(x, y) d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x) = \int_{[0, \infty)} \left(\int_{[0, \infty)} f(x, y) d\lambda_1(x) \right) d\lambda_1(y) \\ &= \int_{[0, \infty)} \left(\int_{[0, \infty)} y e^{-(1+x^2)y^2} d\lambda_1(x) \right) d\lambda_1(y) = \int_{[0, \infty)} \left(\int_{[0, \infty)} e^{-x^2 y^2} y dx \right) e^{-y^2} dy \\ &= \int_{[0, \infty)} \left(\int_{[0, \infty)} e^{-t^2} dt \right) e^{-y^2} dy = \left(\int_{[0, \infty)} e^{-y^2} dy \right)^2 \end{aligned}$$

und somit nach Wurzelziehen die Behauptung.

Zusatzaufgabe 13.2:

(a) Aus Zusatzaufgabe 8.1 (b) wissen wir, dass die Abbildung $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Phi(x, y) := ((x-y)^2, 2xy)$ ein Diffeomorphismus von $A := \{(x, y) \mid 0 < y < x\} \subset \mathbb{R}^2$ auf $B :=]0, \infty[^2$ ist.

Berechnen Sie nun das Lebesgue-Integral $\int_{\{(x, y) \mid 0 < y < x\}} e^{-(x^2+y^2)} (x^2 - y^2) d\lambda_2(x, y)$, indem Sie den Transformationssatz auf dieses Φ und anschließend den Satz von Fubini anwenden.

- (b) Berechnen Sie das Integral $\int_{]0, \infty[\times]0, \infty[} e^{-(u+v)^2} d\lambda_2(u, v)$, indem Sie den Transformationssatz auf $F(x, y) := (x(1-y), xy)$ als Abbildung von $]0, \infty[\times]0, 1[$ auf $]0, \infty[\times]0, \infty[$ anwenden.
- (c) Berechnen Sie die Fläche des Kreissektors $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0\}$, indem Sie den Transformationssatz auf die Polarkoordinaten-Abbildung anwenden.

Lösung zu Zusatzaufgabe 13.2:

- (a) In Zusatzaufgabe 8.1 (b) haben wir gezeigt, dass die Abbildung $\Phi(x, y) := ((x-y)^2, 2xy)$ in der Nähe jedes Punktes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| \neq |y|$ eine differenzierbare Umkehrabbildung besitzt und dass Φ sogar ein Diffeomorphismus von $\{(x, y) \mid 0 < y < x\} \subset \mathbb{R}^2$ auf $]0, \infty[^2$ ist.

Wegen $\det(d\Phi(x, y)) = 4(x^2 - y^2)$ und $x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$ folgt aus dem Transformationssatz

$$\int_{\{(x, y) \mid 0 < y < x\}} (f(\Phi(x, y))) \cdot |\det(d\Phi(x, y))| d\lambda_2(x, y) = \int_{]0, \infty[^2} f(u, v) d\lambda_2(u, v)$$

mit der nichtnegativen messbaren (da stetigen) Funktion $f(u, v) = e^{-u-v}$ die Gleichung

$$\int_{\{(x, y) \mid 0 < y < x\}} e^{-(x^2+y^2)} (x^2 - y^2) d\lambda_2(x, y) = \frac{1}{4} \int_{(0, \infty)^2} e^{-u-v} d\lambda_2(u, v) = \frac{1}{4} \left(\int_0^\infty e^{-u} du \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

- (b) Mit $g(u, v) := e^{-(u+v)^2}$ und $(g \circ F)(x, y) = e^{-x^2}$ gilt wegen $\det(dF(x, y)) = x$ (vgl. ZA 8.1 (d)) nach dem Transformationssatz (aufgrund der Nichtnegativität existiert das (ggf. unendliche) λ_2 -Integral in jedem Fall) und Satz von Fubini

$$\int_{]0, \infty[\times]0, \infty[} e^{-(u+v)^2} d\lambda_2(u, v) = \int_{]0, \infty[\times]0, 1[} e^{-x^2} x d\lambda_2(x, y) = \int_{]0, 1[} \left(\int_{]0, \infty[} e^{-x^2} x d\lambda_1(x) \right) d\lambda_1(y)$$

Mit Satz 7.2 sowie $z = x^2$, $x dx = \frac{1}{2} dz$ erhält man $\int e^{-x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^{-z} dz = -\frac{1}{2} e^{-z}$ und somit

$$\int_{]0, \infty[\times]0, \infty[} e^{-(u+v)^2} d\lambda_2(u, v) = \int_{]0, \infty[} e^{-x^2} x d\lambda_1(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{1}{2} e^{-z} dz = \frac{1}{2}.$$

- (c) Wegen $1 \circ f = 1$ und $f^{-1}(\Omega) = [1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ mit $f(r, \varphi) := (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ und

$$df(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

also insbesondere $\det(df(r, \varphi)) = r$, liefern der Transformationssatz sowie der Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \lambda_2(\Omega) &= \int_{\Omega} 1 d\lambda_2(x, y) = \int_{f^{-1}(\Omega)} 1 \circ f \cdot |\det df(r, \varphi)| d\lambda_2(r, \varphi) \\ &= \int_{[1, 2]} \left(\int_{[0, \frac{\pi}{2}]} r d\lambda_1(\varphi) \right) d\lambda_1(r) = \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r d\varphi \right) dr = \frac{\pi}{2} \int_1^2 r dr = \frac{\pi}{4} r^2 \Big|_{r=1}^{r=2} = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 13.3:

- (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Psi(\xi, r) := (r\xi, r\sqrt{1-\xi^2})$ in der Nähe jedes Punktes $(\xi, r) \in \mathbb{R}^2$ mit $|\xi| < 1$ und $r \neq 0$ eine differenzierbare Umkehrabbildung besitzt. Beweisen Sie, dass Ψ ein Diffeomorphismus vom Halbstreifen $] -1, 1[\times]0, \infty[$ auf $\mathbb{R} \times]0, \infty[$ ist.

- (b) Berechnen Sie das Integral
$$\int_{]-1,1[\times]0,\infty[} \frac{1}{(1+r^2\xi^2) \cdot (1+r\sqrt{1-\xi^2})^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{1-\xi^2}} d\lambda_2(\xi, r) ,$$

indem Sie den Transformationssatz auf Ψ und anschließend den Satz von Fubini anwenden.

Lösung zu Zusatzaufgabe 13.3:

- (a) Die Jacobi-Matrix $J\Psi(\xi, r) = \begin{pmatrix} r & \xi \\ -\frac{r\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} & \sqrt{1-\xi^2} \end{pmatrix}$ besitzt die Determinante

$$\det(J\Psi(\xi, r)) = r\sqrt{1-\xi^2} + r\frac{\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{r}{\sqrt{1-\xi^2}} (1-\xi^2 + \xi^2) = \frac{r}{\sqrt{1-\xi^2}} ,$$

also ist Ψ in der Nähe jedes Punktes (ξ, r) mit $|\xi| < 1$ und $r \neq 0$ ein lokaler Diffeomorphismus. Tatsächlich ist Ψ sogar ein Diffeomorphismus von $] -1, 1[\times]0, \infty[$ auf $\mathbb{R} \times]0, \infty[$, denn $r\xi = u$ und $r\sqrt{1-\xi^2} = v$ können wir bei $v > 0$, $|\xi| < 1$ und $r > 0$ wegen $r^2 = u^2 + v^2$ auflösen durch

$$r = \sqrt{u^2 + v^2} \quad \text{und} \quad \xi = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} .$$

- (b) Aus dem Transformationssatz folgt mit $f(u, v) = \frac{1}{1+u^2} \frac{1}{(1+v)^2}$

$$\begin{aligned} & \int_{]-1,1[\times]0,\infty[} \frac{1}{(1+r^2\xi^2) \cdot (1+r\sqrt{1-\xi^2})^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{1-\xi^2}} d\lambda_2(\xi, r) \\ &= \int_{]-1,1[\times]0,\infty[} (f \circ \Psi)(\xi, r) \cdot |\det(J\Psi)(\xi, r)| d\lambda_2(\xi, r) = \int_{\mathbb{R} \times]0,\infty[} f(u, v) d\lambda_2(u, v) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+u^2} d\lambda_1(u) \right) \left(\int_{(0,\infty)} \frac{1}{(1+v)^2} d\lambda_1(v) \right) = \left(\arctan(u) \Big|_{-\infty}^{\infty} \right) \left(-\frac{1}{1+v} \Big|_0^{\infty} \right) = \pi . \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 13.4:

- (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\lambda_2(B)$ der Teilmenge $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 2, x^2 \leq y\}$.
- (b) Bestimmen Sie $\lambda_2(K)$ für die von den Kurven $y = 4x$, $y = \frac{1}{x}$ und $y = x$ berandete Menge $K \subset [0, \infty]^2$.
- (c) Skizzieren Sie das Kompaktum $K \subset [0, \infty]^2$, welches von den durch $x^2 + y^2 = 1$, $y = 2x$ und $y = x^2$ gegebenen Kurven berandet wird und den Ursprung enthält. Berechnen Sie mittels des Satzes von FUBINI die Fläche $\mu_2(K)$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 13.4:

- (a) Es ist $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 2 - x\}$, und $x^2 = 2 - x$ gilt bei $x = -2$ und $x = 1$. Also gilt

$$\lambda_2(B) = \int_{-2}^1 \left(\int_{x^2}^{2-x} 1 dy \right) dx = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3} \right) = \frac{9}{2} .$$

- (b) Die Menge B lässt sich mit Hilfe des Schnittpunktes $(\frac{1}{2}, 2)$ von $y = 4x$ und $y = \frac{1}{x}$ sowie mit Hilfe des Schnittpunktes $(1, 1)$ von $y = \frac{1}{x}$ und $y = x$ angeben durch

$$B := \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \min \left(4x, \frac{1}{x} \right) \right\}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mu_2(B) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_B d\mu_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^{4x} 1 dy \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_x^{1/x} 1 dy \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 3x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x} - x \right) dx = \frac{3}{8} + \ln(2) - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \ln(2) . \end{aligned}$$

- (c) Mit dem Schnittpunkt $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ der Kurven $y = 2x$ und $y = \sqrt{1-x^2}$ sowie dem Schnittpunkt $x_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ von $y = x^2$ und $y = \sqrt{1-x^2}$ besitzt unter Berücksichtigung von $x_1 < x_2$ das Gebiet K genau die Gestalt

$$K = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq x_2, x^2 \leq y \leq \min(2x, \sqrt{1-x^2}) \right\}$$

Also gilt für die Fläche $\mu(K)$ die Formel

$$\begin{aligned} \mu_2(K) &= \int_K 1 d\mu_2(x) = \int_{[0, x_1]} \left(\int_{[x^2, 2x]} 1 d\mu_1(y) \right) d\mu_1(x) + \int_{[x_1, x_2]} \left(\int_{[x^2, \sqrt{1-x^2}]} 1 d\mu_1(y) \right) d\mu_1(x) \\ &= \int_0^{x_1} (2x - x^2) dx + \int_{x_1}^{x_2} (\sqrt{1-x^2} - x^2) dx = \int_0^{x_1} 2x dx - \int_0^{x_2} x^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1-x^2} dx. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $x = \sin(t)$ und partieller Integration, anschließendem Umstellen und Rücksubstitution ergibt sich

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int (\cos(t))^2 dt = \frac{\sin(t) \cos(t) + t}{2} = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)}{2}$$

und mit $x_2^2 = \sqrt{1-x_1^2}$ daher dann auch

$$\begin{aligned} \mu_2(K) &= x_1^2 - \frac{1}{3}x_2^3 + \frac{1}{2} \left(x_2\sqrt{1-x_2^2} + \arcsin(x_2) - x_1\sqrt{1-x_1^2} - \arcsin(x_1) \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{3/2} + \frac{\arcsin(x_2) - \arcsin(x_1)}{2} \\ &\approx 0.080978 + \frac{0.904557 - 0.463648}{2} = 0.3014325. \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 13.5:

- (a) Zeigen Sie: Ist $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Tx = Ax + b$ eine affine Transformation mit invertierbarer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie $b \in \mathbb{R}^n$ und ist f über eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ λ_n -integrierbar, dann ist $f \circ T$ über das Urbild $T^{-1}(U)$ λ_n -integrierbar mit

$$\int_{T^{-1}(U)} f(Ax + b) d\lambda_n(x) = \frac{1}{|\det(A)|} \cdot \int_U f(y) d\lambda_n(y).$$

- (b) Zeigen Sie für U und T aus (a) mit Hilfe von (a), dass $\lambda_n(T(U)) = |\det(A)| \cdot \lambda_n(U)$ gilt.
(c) Zeigen Sie für T aus (a): Ist S der Schwerpunkt einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu(K) \neq 0$, so ist $T(S)$ der Schwerpunkt der Bildmenge $T(K)$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 13.5:

- (a) Wir betrachten die Funktion $f \mathbf{1}_U^{\mathbb{R}^n}$. Offenbar gilt dann $(f \mathbf{1}_U^{\mathbb{R}^n}) \circ T = (f \circ T) \mathbf{1}_{T^{-1}(U)}^{\mathbb{R}^n}$. Somit erhalten wir aufgrund der Konstanz der Ableitung von T mit $U = V = \mathbb{R}^n$ nach dem Transformationssatz (bzw. der Substitutionsregel)

$$\begin{aligned} |\det(A)| \int_{T^{-1}(U)} f(Ax + b) d\lambda_n(x) &= \int_{T^{-1}(U)} (f \circ T)(x) \cdot |\det(dT(x))| d\lambda_n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} ((f \circ T) \mathbf{1}_{T^{-1}(U)}^{\mathbb{R}^n})(x) \cdot |\det(dT(x))| d\lambda_n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} ((f \mathbf{1}_U^{\mathbb{R}^n}) \circ T)(x) \cdot |\det(dT(x))| d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f \mathbf{1}_U^{\mathbb{R}^n})(y) d\lambda_n(y) = \int_U f(y) d\lambda_n(y). \end{aligned}$$

Division durch die aufgrund der Regularität von A nichtverschwindende Determinante ergibt die Behauptung.

- (b) Wählen wir in (a) die Funktion $f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}^{\mathbb{R}^n}$ und die Umkehrabbildung T^{-1} , definiert durch $T^{-1}y = A^{-1}y - A^{-1}b$, anstelle von T , so ergibt sich

$$\begin{aligned}\lambda_n(T(U)) &= \int_{T(U)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}^{\mathbb{R}^n}(y) d\lambda_n(y) = \int_{T(U)} (\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}^{\mathbb{R}^n} \circ T^{-1})(y) d\lambda_n(y) \\ &= \frac{1}{(\det(A^{-1}))} \int_U \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}^{\mathbb{R}^n}(x) d\lambda_n(x) = \frac{1}{(\det(A))^{-1}} \cdot \lambda_n(U) = \det(A) \cdot \lambda_n(U) .\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass die Determinante für quadratische Matrizen A und B die Gleichung $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ und somit auch

$$1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = (\det(A))\det(A^{-1}) , \text{ d.h. } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = (\det(A))^{-1}$$

erfüllt. Beachten Sie: Wegen der Konstanz $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}^{\mathbb{R}^n}(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist auch $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}^{\mathbb{R}^n}(T(x)) = 1$ für beliebiges T und alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, d.h., trivialerweise ist $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}^{\mathbb{R}^n} = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}^{\mathbb{R}^n} \circ T$ für irgendein T .

- (c) Aufgrund der Kompaktheit ist K beschränkt, wonach es auch ein endliches Maß $\mu(K)$ besitzt, welches nach Voraussetzung ungleich Null sein soll. Die Aussage folgt nun mit Teil (b), denn dort haben wir gezeigt, dass für Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^n$ und affine Transformationen $T(x) := Ax + b$ mit regulärem A zunächst $\mu(T(K)) = |\det(A)| \cdot \mu(K) \neq 0$ gilt und $T(S)$ wegen

$$T(S) = T\left(\frac{1}{\mu(K)} \int_K x d\mu(x)\right) = \frac{1}{\mu(K)} \int_K (Ax + b) d\mu(x) = \frac{1}{|\det(A)|\mu(K)} \int_{T(K)} y d\mu(y)$$

somit tatsächlich den Schwerpunkt von $T(K)$ beschreibt.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 14

Nachtrag: Fourier-Reihen [vgl. Kapitel 23, O. Forster, Analysis 1]

- Eine ($\mathbb{R}$ - oder $\mathbb{C}$ -wertige) Funktion f auf $\mathbb{R}$ heißt **P -periodisch** für eine Periode $P > 0$, wenn $f(x + P) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
- Wir betrachten den $(2n + 1)$ -dimensionalen linearen Vektorraum $\mathcal{T}_n$, welcher aus den 2π -periodischen Funktionen der Gestalt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad \text{mit} \quad a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R} \quad (14.1)$$

besteht. Elemente aus $\mathcal{T}_n$ heißen **(reelle) trigonometrische Polynome (höchstens) n -ten Grades**. Da mit den Darstellungen $\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$ und $\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix})$ auch

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \frac{a_0}{2} e^{i0x} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx}$$

gilt, können solche trigonometrische Polynome alternativ in komplexer Form als

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

geschrieben werden.

- Für 2π -periodische Funktionen f, g , die über $[0, 2\pi]$ (oder ein anderes Intervall der Länge 2π) Riemann-integrierbar sind, kann man durch

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx \quad (14.2)$$

eine (hermitesche) Sesquilinearform definieren. Diese induziert eine Halbnorm $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

- Zwei Funktionen f, g heißen **orthogonal** zueinander bezüglich (14.2), falls $\langle f, g \rangle = 0$ gilt.
- Eine Familie f_k von Funktionen heißt **Orthonormalsystem**, bezüglich (14.2), falls

$$\forall k, \ell \in \mathbb{N} : \langle f_k, f_\ell \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ 1 & \text{für } k = \ell. \end{cases} \quad (14.3)$$

- **Satz:**³⁰ Das trigonometrische Polynom (höchstens) n -ten Grades, welches unter allen trigonometrischen Polynomen (höchstens) n -ten Grades bezüglich $\|\cdot\|_2$ den geringsten Abstand zu einer über $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbaren 2π -periodischen Funktion f besitzt, d.h., welches das Infimum $\inf_{p \in \mathcal{T}_n} \|p - f\|_2$ annimmt, ist durch

$$S_n f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} a_k &:= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \\ b_k &:= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \end{aligned} \quad (14.4)$$

gegeben und heißt das **(reelle) Fourier-Polynom n -ten Grades zu f** . Die entsprechende Folge der Partialsummen $(S_n f(x))_{n=0}^\infty$ heißt **(reelle) Fourier-Reihe von f** .

³⁰vgl. Satz 134.2 in Heuser, Analysis 2, 12. Auflage

- In der komplexen Form geschrieben nennt man

$$S_n f(x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad \text{mit} \quad c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \langle e^{ikx}, f(x) \rangle \quad (14.5)$$

das **(komplexe) Fourier-Polynom n -ten Grades zu f** . Die entsprechende Folge der Partialsummen $(S_n f(x))_{n=0}^\infty$ heißt **(komplexe) Fourier-Reihe von f** .

- **Bemerkung:** Es stellt sich nun die Frage, welche 2π -periodischen Funktionen sich in welchem Sinne beliebig genau durch trigonometrische Polynome annähern lassen. Die Antwort darauf geben die folgenden Sätze:
- **Hilfsatz 23.1:** Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt für das n -te (komplexe) FOURIER-Polynom (14.5) einer über $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbaren 2π -periodischen Funktion f die **Besselsche Gleichung**

$$\|f - S_n f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \quad (14.6)$$

- **Satz 23.1:** Für beliebige über $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbare 2π -periodische Funktionen f gilt die **Besselsche Ungleichung**

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx. \quad (14.7)$$

- **Satz 23.2:** Für über $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbare 2π -periodische Funktionen f konvergiert die FOURIER-Reihe

$$Sf(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

bezüglich $\|\cdot\|_2$ gegen f , d.h., es gilt $\|f - S_n f\|_2 \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Man sagt, $S_n f$ konvergiert **im quadratischen Mittel** gegen f . Insbesondere gilt die (komplexe) **Parsevalsche Gleichung** oder **Vollständigkeitsrelation**

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \quad (14.8)$$

Die reelle Variante der Vollständigkeitsrelation lautet

$$\frac{1}{2} |a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \quad (14.9)$$

- **Satz[Dirichlet]:** Sei f eine Riemann-integrierbare 2π -periodische Funktion und $x \in \mathbb{R}$. Gibt es Konstanten $\delta > 0$ und $M < \infty$ mit $\forall t \in]-\delta, \delta[: |f(x+t) - f(x)| \leq M|t|$ dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f)(x) = f(x)$.
- **Satz:**³¹ Ist $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$

(a) stückweise monoton und beschränkt oder (b) stückweise stetig differenzierbar,

dann konvergiert $S_n f(x)$ für $n \rightarrow \infty$ auch punktweise in allen Stetigkeitsstellen x von f gegen $f(x)$, und in allen Sprungstellen x gegen den Mittelwert aus links- und rechtsseitigem Grenzwert bei x , d.h., gegen

$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2} \quad \text{mit} \quad f(x-) := \lim_{a \nearrow x} f(a), \quad f(x+) := \lim_{a \searrow x} f(a). \quad (14.10)$$

- **Satz 23.3:** Ist f stetig und stückweise stetig differenzierbar, dann konvergiert die Folge der Fourier-Summen $(S_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ sogar gleichmäßig gegen f .

³¹vgl. Satz 136.3 in Heuser, Analysis 2, 12. Auflage

Fourier-Theorie im $\mathbb{R}^n$ (vgl. Skript Kapitel 3.7)

- **Lemma 3.91:** Die Menge der Äquivalenzklassen von 2π -periodischen Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, die in $] - \pi, \pi[^n$ lokal-integrierbar sind und für die $|f|^2$ über $] - \pi, \pi[^n$ Lebesgue-integrierbar ist, wobei man zwei Funktionen bei Übereinstimmung außerhalb einer Nullmenge identifiziert, bezeichnet man mit $L_{per}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

- **Lemma 3.92:** $L_{per}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ ist ein (komplexer) Vektorraum, und

$$\|f\|_{L_{per}^2} := \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{(-\pi, \pi)^n} |f(x)|^2 d\mu_n(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist (beachte, dass dieser Wert aufgrund der Integrierbarkeit von $|f|^2$ für jedes $f \in L_{per}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ endlich ist) die vom (komplexen) Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{L_{per}^2} := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{(-\pi, \pi)^n} \overline{f(x)} g(x) d\mu_n(x)$$

auf $L_{per}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ induzierte Norm.

- **Satz 3.93:** Der mit der vom Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_{per}^2}$ induzierten Norm $\|\cdot\|_{L_{per}^2}$ versehene Vektorraum $L_{per}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ ist vollständig, d.h. ein Hilbert-Raum.

- **Bemerkung/Definition:**

- (a) Die für jede 2π -periodische Funktion f , deren Einschränkung auf einen der Gitterbereiche von $\mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z}^n)$ Lebesgue-integrierbar ist (wir wählen hier den Gitterbereich $(-\pi, \pi)^n$), durch

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{(-\pi, \pi)^n} f(x) e^{-i\langle k, x \rangle} d\mu_n(x) \quad (14.11)$$

definierte Funktion $\hat{f}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **diskrete Fourier-Transformation**. Dabei ist $k \in \mathbb{Z}^n$ ein n -Tupel ganzer Zahlen und $\langle k, x \rangle = \sum_{i=1}^n k_i x_i$ das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

- (b) Der Integrand $f(x)e^{-i\langle k, x \rangle}$ hat die Lebesgue-integrierbare Majorante $|f|$ und ist somit wirklich Lebesgue-integrierbar.
- (c) Es gilt $L_{per}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \subset L^1(]-\pi, \pi[^n)$, d.h., jede über $] - \pi, \pi[^n$ quadrat-integrierbare Funktion ist auch integrierbar, denn mit $g := 1$ und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\|f\|_{L^1(]-\pi, \pi[^n)} = \|fg\|_{L^1(]-\pi, \pi[^n)} \leq \|f\|_{L_{per}^2} \|g\|_{L_{per}^2} = \sqrt{\lambda_n(]-\pi, \pi[^n)} \|f\|_{L_{per}^2}.$$

- **Lemma 3.95:** Für $f \in L_{per}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ und jede endliche Indexmenge $I \subset \mathbb{Z}^n$ gilt

$$\|f - \sum_{k \in I} \hat{f}(k) e^{i\langle k, x \rangle}\|_{L_{per}^2}^2 = \|f\|_{L_{per}^2}^2 - \sum_{k \in I} |\hat{f}(k)|^2.$$

- **Satz 3.96:** Ist $f \in L_{per}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, so konvergiert die sogenannte **Fourier-Reihe** $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{i\langle k, x \rangle}$ im quadratischen Mittel (also in der $\|\cdot\|_{L_{per}^2}$ -Norm) gegen f .

- **Satz 3.97:** Die diskrete Fourier-Transformation $f \mapsto \hat{f}$ ist eine Bijektion vom Hilbert-Raum $L_{per}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ in den Hilbert-Raum der quadrat-summierbaren (komplexen beidseitigen n -) Folgen $\ell^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{C})$, die $\|f\|_{L_{per}^2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}(k)|^2 = \|\hat{f}\|_{\ell^2}^2$ erfüllt und daher eine Isometrie genannt wird.

- **Bemerkung/Definition:**

- (a) Für (Lebesgue-)integrierbare reell- oder komplex-wertige Funktionen f, g auf dem $\mathbb{R}^n$ ist $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ eine integrierbare Funktion auf dem $\mathbb{R}^{2n}$, und unter der Transformation $(x, y) \mapsto (x - y, y)$ geht diese in die integrierbare Funktion $(x, y) \mapsto f(x - y)g(y)$ über.

(b) Nach dem Satz von Fubini existiert für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ das Integral

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) d\mu_n(y), \quad (14.12)$$

und die so fast überall definierte Funktion $f * g$ nennt man die **Faltung** von f und g .

- **Lemma 3.98:** Sind f, g integrierbare Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$, dann ist auch $f * g$ integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) d\mu_n(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu_n(x) \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) d\mu_n(y) \right)$$

und es gilt $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$. Außerdem ist die Faltung bilinear, assoziativ, kommutativ und erfüllt $\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$ mit $\text{supp}(f) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$.

- **Bemerkung:** Man kann den Wert $(f * g)(x)$ für eine Funktion g mit $g \geq 0$, $\text{supp}(g) \subset B_r(0)$ und $\|g\|_{L^1} = 1$ als das mit g gewichtete Mittel von f in $B_r(x)$ ansehen, denn

$$(f * g)(x) = \int_{B_r(x)} f(y)g(x-y) d\mu_n(y)$$

gilt aufgrund der Kommutativität $f * g = g * f$ und wegen $\text{supp}(g) \subset B_r(0)$.

- **Lemma 3.99:** Ist f eine integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, dann ist $f * g$ beliebig oft differenzierbar mit partiellen Ableitungen

$$\partial^k(f * g) = f * (\partial^k g),$$

wobei ∂^k für $k \in \mathbb{N}_0^n$ angibt, wie häufig nach welcher Variable abgeleitet wird.

- **Bemerkung/Definition:**

- Lemma 3.99 besagt, dass man also selbst unstetige Funktionen f „glätten“ kann, indem man sie mit einer glatten Funktion faltet.
- Eine Folge $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von glatten und integrierbaren Funktionen mit der Eigenschaft $g_k \geq 0$, $\|g_k\|_{L^1} = 1$ und

$$\forall r > 0: \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} g_k(x) d\mu_n(x) = 0$$

heißen **Dirac-Folgen**. Dabei ist notwendigerweise der für den Integralwert Eins von g_k wesentliche Teil für große k in der Nähe des Ursprungs konzentriert.

- Mit $g(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2}}$ ist $g_k(x) := k^n g(kx)$ eine Dirac-Folge. **(Beispiel 3.100)**
- Durch die Faltung mit Dirac-Folgen kann man eine Folge glatter Funktionen gewinnen, die gegen f konvergiert.

- **Satz 3.101:** Sei g_k eine Dirac-Folge glatter Funktionen. Dann konvergiert die Folge glatter Funktionen $f * g_k$ bzgl. der L^1 -Norm gegen f .

- **Bemerkung/Definition:**

- Eine Dirac-Folge besitzt keine L^1 -Funktion als Grenzwert. In der Distributionentheorie erweitert man aber den Funktionen-Begriff so, dass Dirac-Folgen gegen eine Distribution konvergieren, die sogenannte Delta-Distribution.
- Die **kontinuierliche Fourier-Transformierte** einer integrierbaren Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ist die durch

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle \xi, x \rangle} d\mu_n(x),$$

definierte stetige Funktion $\hat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$.

• **Beispiele:**

- (a) Die kontinuierliche Fourier-Transformierte von $g(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2}}$ ist die Funktion $\hat{g}(\xi) = g(\xi)$ selbst.
- (b) Die charakteristische Funktion $1_{[-1,1]}$ des Intervalls $[-1, 1]$, der auch **Rechteckimpuls** genannt wird, besitzt die kontinuierliche Fourier-Transformierte

$$\hat{1}_{[-1,1]}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\langle \xi, x \rangle} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\xi)}{\xi}$$

aber $\xi \mapsto \frac{\sin(\xi)}{\xi}$ ist nicht Lebesgue-integrierbar, sondern nur uneigentlich R-integrierbar.

- **Satz 3.105:** Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion, deren kontinuierliche Fourier-Transformierte $\hat{f}$ wiederum Lebesgue-integrierbar ist, dann gilt fast überall

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\mu_n(\xi).$$

- **Satz 3.106:** Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $\widehat{(f * g)}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$.
- **Satz 3.107:** Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ stetig differenzierbar mit $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j \cdot \hat{f}(\xi)$.
- **Bemerkung/Beispiel:**

- (a) Als Konsequenz des letzten Satzes entsteht etwa aus einer Differentialgleichung für f durch Fourier-Transformation eine algebraische Gleichung für die Fourier-Transformierte $\hat{f}$.
- (b) **Bsp:** Die inhomogene lineare partielle Differentialgleichung

$$-(\Delta u)(x, y) + \lambda u(x, y) := -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \lambda u(x, y) = f(x, y),$$

für eine L^1 -Funktion $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bei vorgegebenem $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ geht unter der Fourier-Transformation in die algebraische Gleichung $(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \lambda)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$ über. Für $\lambda > 0$ kann man ihre Lösung daher durch

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \lambda} e^{i\langle (x, y), (\xi_1, \xi_2) \rangle} d\mu_2(\xi_1, \xi_2)$$

angeben, da der Integrand die integrierbare Majorante $\frac{1}{\lambda} \hat{f}$ besitzt.

- (c) Ähnlich ergibt sich für die diskrete Fourier-Transformation mit der durch

$$(f * g)(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{(-\pi, \pi)^n} f(x - y) g(y) d\mu_n(y) \quad (14.13)$$

definierten Faltung zweier Funktionen $f, g \in L^1_{per}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ die Gleichung $\widehat{f * g}(k) = \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k)$ und für stetig differenzierbare $f \in L^1_{per}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ die Gleichung $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(k) = ik_j \cdot \hat{f}(k)$.

- (d) Nicht jede L^2 -Funktion ist auf dem $\mathbb{R}^n$ auch eine L^1 -Funktion. Die durch $f(x) := \frac{1}{x}$ für $|x| \geq 1$ und $f(x) := 0$ sonst definierte Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ etwa ist quadrat-integrierbar, aber nicht integrierbar über ganz $\mathbb{R}$.

- **Satz 3.111 [Plancherel]:** Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{f}(\xi)} \cdot \hat{g}(\xi) d\mu_n(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} \cdot g(x) d\mu_n(x).$$

- **Korollar 3.112 [Parsevalsche Gleichung]:** Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\mu_n(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 d\mu_n(x).$$

- **Satz 3.113:** Die kontinuierliche Fourier-Transformation ist eine Bijektion von $L^2(\mathbb{R}^n)$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ und sogar eine Isometrie.

Zusatzaufgabe 14.1:

- (a) Zeigen Sie, dass man eine P -periodische Funktion durch Variablentransformation auf eine 2π -periodische Funktion zurückführen kann.
- (b) Auf dem Intervall $]0, \pi]$ sei die folgende Funktion gegeben:
- $$f(x) := \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$
- Setzen Sie diese Funktion auf das Intervall $[-\pi, 0]$ so fort, dass f auf $[-\pi, \pi]$
- (i) gerade und stetig ist; (ii) ungerade und stetig ist; (iii) eine π -periodische Funktion ist.
- Skizzieren Sie jeweils den Funktionenverlauf.
- (c) Beweisen Sie, dass mit der von der (hermiteschen) Sesquilinearform (14.2) induzierten Halbnorm $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ die sogenannte **Parallelogrammgleichung**
- $$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2) \quad (14.14)$$
- für beliebige über $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbare 2π -periodische Funktionen f, g gilt.
- (d) Auf der Menge $\Pi_2 := \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ der Polynome von höchstens zweitem Grad betrachten wir das Skalarprodukt $\langle f, g \rangle := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) dx$. Berechnen Sie $\langle p_k, p_j \rangle$, $j, k = 0, 1, 2$, für $p_0(x) = x^2 - 1$, $p_1(x) = x$ und $p_2(x) = 2$.
- (e) Konstruieren Sie ein ONS aus $\{p_j \mid j = 0, 1, 2\}$ aus (d) mit dem Verfahren von Schmidt.

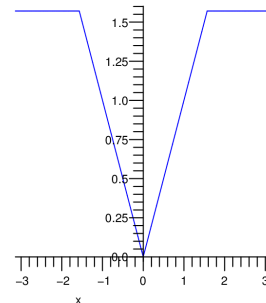
Lösung zu Zusatzaufgabe 14.1:

- (a) Sei f eine P -periodische Funktion. Mit $y(x) = \frac{Px}{2\pi}$ folgt für $F = f \circ y$ dann

$$F(x+2\pi) = f(y(x+2\pi)) = f\left(\frac{P(x+2\pi)}{2\pi}\right) = f\left(\frac{Px}{2\pi} + P\right) = f\left(\frac{Px}{2\pi}\right) = f(y(x)) = F(x).$$

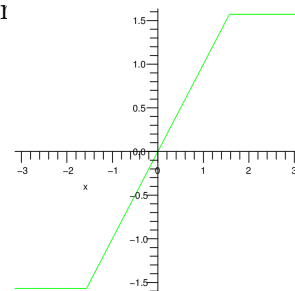
- (b) (i) Für die gerade stetige Fortsetzung ergibt sich die Funktion

$$f_g(x) := \begin{cases} |x|, & 0 \leq |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi \end{cases}$$



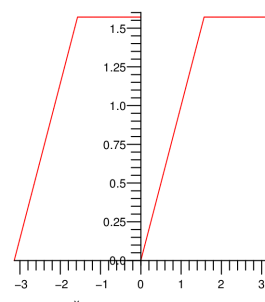
- (ii) Für die ungerade stetige Fortsetzung ergibt sich die Funktion

$$f_u(x) := \begin{cases} x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \\ -\frac{\pi}{2}, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



- (iii) Für die π -periodische Fortsetzung ergibt sich die Funktion

$$f_\pi(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x = -\pi \\ x + \pi, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$



(c) Aufgrund der Linearitätseigenschaften des Skalarproduktes erhalten wir

$$\begin{aligned}\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 &= \langle f + g, f + g \rangle + \langle f - g, f - g \rangle \\ &= \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \overline{\langle f, g \rangle} + \langle g, g \rangle + \langle f, f \rangle - \langle f, g \rangle - \overline{\langle f, g \rangle} + \langle g, g \rangle \\ &= 2\langle f, f \rangle + 2\langle g, g \rangle + 2\operatorname{Re}(\langle f, g \rangle) - 2\operatorname{Re}(\langle f, g \rangle) = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2),\end{aligned}$$

also genau die Parallelogrammgleichung.

(d) Wir erhalten $\langle p_0, p_0 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \frac{8}{15}$ sowie

$$\langle p_1, p_1 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \text{ und } \langle p_2, p_2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 4 dx = 4. \text{ Desweiteren sind}$$

$$\langle p_0, p_1 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0,$$

$$\langle p_0, p_2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)2 dx = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^1 = -\frac{4}{3}, \quad \langle p_1, p_2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 2x dx = 0.$$

(e) Zusammen mit den Ergebnissen aus (d) erhalten wir die ONB $\{b_0, b_1, b_2\}$ von Π_2 bzgl. des obigen Skalarproduktes nach dem üblichen Verfahren von Schmidt. Normierung des ersten Vektors liefert

$$b_0 = \frac{p_0}{\sqrt{\langle p_0, p_0 \rangle}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2}} (x^2 - 1).$$

Normierung der Hilfsgröße $h_1 = p_1 - \langle b_0, p_1 \rangle b_0 = p_1 - \frac{1}{\sqrt{\langle p_0, p_0 \rangle}} \langle p_0, p_1 \rangle b_0 = p_1$ liefert als zweiten Basisvektor

$$b_1 = \frac{h_1}{\sqrt{\langle h_1, h_1 \rangle}} = \frac{p_1}{\sqrt{\langle p_1, p_1 \rangle}} = \sqrt{3}x.$$

Normierung der Hilfsgröße

$$h_2 = p_2 - \langle b_0, p_2 \rangle b_0 - \langle b_1, p_2 \rangle b_1 = 2 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2}} \langle p_0, p_2 \rangle b_0 - \sqrt{3} \langle p_1, p_2 \rangle b_1 = 2 + \frac{5}{2} (x^2 - 1) = \frac{1}{2} (5x^2 - 1)$$

liefert nun wegen $\langle h_2, h_2 \rangle = \frac{1}{8} \int_{-1}^1 (5x^2 - 1)^2 dx = \frac{1}{8} \left[5x^5 - \frac{10}{3}x^3 + x \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$ als dritten Basisvektor

$$b_2 = \frac{h_2}{\sqrt{\langle h_2, h_2 \rangle}} = \frac{\sqrt{6}}{4} (5x^2 - 1).$$

Zusatzaufgabe 14.2:

(a) Das in (14.2) definierte Skalarprodukt der Funktionen $u(x) := \sum_{k=0}^N e^{ikx}$ und $v(x) := \sum_{k=0}^N (-1)^k e^{ikx}$ verschwindet für ungerades N .

(b) Für die (komplexen) FOURIER-Koeffizienten $c_k := \langle e^{ikx}, f(x) \rangle$ (vgl. (14.5)) einer stückweise stetigen Funktion $f:]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{C}$ gilt:

$$\left\| \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \right\|_2^2 = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2. \quad (14.15)$$

(c) Es gelten die Besselsche Gleichung (14.6) und die Besselsche Ungleichung (14.7).

Lösung zu Zusatzaufgabe 14.2:

(a) Da die Funktionen e^{ikx} , $k \in \mathbb{Z}$, wegen

$$\langle e^{ikx}, e^{i\ell x} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{e^{ikx}} e^{i\ell x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\ell-k)x} dx = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dx = 1, & k = \ell, \\ \frac{1}{2\pi(\ell-k)} e^{i(\ell-k)x} \Big|_0^{2\pi} = 0, & k \neq \ell, \end{cases}$$

bezüglich (14.2) ein Orthonormalsystem bilden, gilt

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^N e^{ikx}, \sum_{l=0}^N (-1)^l e^{ilx} \right\rangle = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N (-1)^l \langle e^{ikx}, e^{ilx} \rangle = \sum_{k=0}^N (-1)^k \langle e^{ikx}, e^{ikx} \rangle = \sum_{k=0}^N (-1)^k,$$

wobei die letzte Summe bei ungeradem N Null ist (während sie Eins bei geradem N ist).

(b) Da die Funktionen e^{ikx} , $k \in \mathbb{Z}$, bezüglich (14.2) ein Orthonormalsystem bilden (wie in (a) gesehen), folgt insgesamt

$$\left\| \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \right\|_2^2 = \left\langle \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \sum_{\ell=-n}^n c_\ell e^{i\ell x} \right\rangle = \sum_{k=-n}^n \sum_{\ell=-n}^n \overline{c_k} c_\ell \langle e^{ikx}, e^{i\ell x} \rangle = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} c_k = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2.$$

(c) Zunächst folgen per Definition

$$\langle S_n f, f \rangle = \left\langle \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, f \right\rangle = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} \langle e^{ikx}, f \rangle = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} c_k = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

und – da es sich um reelle Zahlen handelt – auch $\langle f, S_n f \rangle = \overline{\langle S_n f, f \rangle} = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$. Darüber hinaus wissen wir aus (b) bzw. (14.15), dass ebenfalls

$$\langle S_n f, S_n f \rangle = \|S_n f\|_2^2 = \left\| \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \right\|_2^2 = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

gilt. Insgesamt ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \|f - S_n f\|_2^2 &= \langle f - S_n f, f - S_n f \rangle = \langle f, f \rangle - \langle S_n f, f \rangle - \langle S_n f, f \rangle + \langle S_n f, S_n f \rangle \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 + \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2, \end{aligned}$$

also die Besselsche Gleichung (14.6). Aufgrund der Nichtnegativität von Normen erhalten wir daraus

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$$

und im Grenzübergang (aus der Aussage, dass $((\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq M) \wedge a_n \rightarrow a) \implies a \leq M$ gilt) wie gewünscht auch die Besselsche Ungleichung (14.7).

Zusatzaufgabe 14.3:

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\{1, \cos(kx), \sin(kx) \mid k \in \mathbb{N}\} \subset C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ bzgl. des (reellwertigen) Skalarproduktes $\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$ orthogonal zueinander sind.

(b) Konstruieren Sie mittels (a) ein Orthonormalsystem bezüglich (14.2).

- (c) Zeigen Sie, dass die reelle FOURIER-Reihe einer geraden (bzw. ungeraden) 2π -periodischen Funktion f die Form $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$ (bzw. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$) besitzt.
- (d) Ermitteln Sie die reelle Fourier-Reihe von $f(x) := 2(\cos(x))^2$.
- (e) Zeigen Sie: Ist f eine reelle 2π -periodische Funktion, so erfüllen die Koeffizienten c_k der komplexen Fourierreihe die Gleichung $c_{-k} = \overline{c_k}$.
- (f) Leiten Sie die Vollständigkeitsrelation (14.9) für die reelle Fourier-Reihe aus (14.8) her.
- (g) Zeigen Sie: Aufgrund der 2π -Periodizität folgt aus (14.9) ebenso

$$\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx. \quad (14.16)$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 14.3:

- (a) Offenbar gilt $\langle 1, \cos(kx) \rangle = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ wegen $\int_0^{2\pi} \cos(kx) dx = -\frac{\sin(kx)}{k} \Big|_0^{2\pi} = 0$. Aufgrund der 2π -Periodizität und – da es sich insgesamt um ungerade Integranden handelt – folgen

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos(kx) \sin(\ell x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(\ell x) dx = 0$$

für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ und damit auch die Beziehungen $\langle 1, \sin(kx) \rangle = \langle \cos(kx), \sin(\ell x) \rangle = 0$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$. Aus den Additionstheoremen $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) &= \frac{\cos(2\alpha) + \cos(2\beta)}{2} \\ \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) &= \frac{\cos(2\beta) - \cos(2\alpha)}{2} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(\ell x) dx &= \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{k+\ell}{2}x + \frac{k-\ell}{2}x\right) \cos\left(\frac{k+\ell}{2}x - \frac{k-\ell}{2}x\right) dx \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((k+\ell)x) dx}_{=0} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((k-\ell)x) dx = \begin{cases} 0 & k \neq \ell \\ \pi & k = \ell \end{cases} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(\ell x) dx &= \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{k+\ell}{2}x + \frac{k-\ell}{2}x\right) \sin\left(\frac{k+\ell}{2}x - \frac{k-\ell}{2}x\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((k-\ell)x) dx - \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((k+\ell)x) dx}_{=0} = \begin{cases} 0 & k \neq \ell \\ \pi & k = \ell \end{cases} \end{aligned}$$

und daher $\langle \cos(kx), \cos(\ell x) \rangle = \langle \sin(kx), \sin(\ell x) \rangle = 0$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $k \neq \ell$. Wegen $\langle 1, 1 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 1 dx = 2$ folgt nun insgesamt, dass $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(kx), \sin(kx) \mid k \in \mathbb{N} \right\}$ sogar ein Orthonormalsystem ist.

- (b) Da sich (14.2) für reellwertige Funktionen nur im Vorfaktor unterscheiden, liefert (a) bezüglich (14.2) das Orthonormalsystem $\{1, \sqrt{2} \cos(kx), \sqrt{2} \sin(kx) \mid k \in \mathbb{N}\}$.

(c) Ist f gerade, dann ist $f(x) \sin(x)$ ungerade. Daher gilt

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(x) dx = 0.$$

Ist f ungerade, dann ist $f(x) \cos(x)$ ungerade. Daher gilt

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(x) dx = 0.$$

Beim Verschieben des Integrationsbereiches wurde dabei jeweils die 2π -Periodizität ausgenutzt.

(d) Es gilt $2 \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$, also ist die Fourierreihe von $f(x)$ genau $1 + \cos(2x)$, d.h., alle Fourierkoeffizienten a_n, b_n außer $a_0 := 2$ und $a_2 := 1$ sind Null.

(e) Wegen $\forall x \in [0, 2\pi] : \overline{f(x)} = f(x)$ und den Eigenschaften des Komplex-konjugierens gilt

$$\begin{aligned} \overline{c_k} &= \overline{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x) e^{-ikx}} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{e^{-ikx}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i(-k)x} dx = c_{-k}. \end{aligned}$$

(f) Wegen $|c_k|^2 = \frac{1}{4}(a_k^2 + b_k^2) = |c_{-k}|^2$ ergibt sich aus der komplexen Parsevalschen Gleichung (14.8)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \langle f, f \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{4} a_0^2 + 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4} (a_k^2 + b_k^2)$$

und nach Multiplikation mit 2 auf beiden Seiten somit (14.9), also

$$\frac{1}{2} |a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

(g) Aufgrund der 2π -Periodizität von f und daher auch f^2 liefert die Substitutionsregel

$$\int_{\pi}^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^0 |f(x+2\pi)|^2 dx = \int_{-\pi}^0 |f(x)|^2 dx.$$

Demnach können wir die reelle Parsevalsche Gleichung auch umschreiben zu (14.16).

Zusatzaufgabe 14.4:

(a) Entwickeln Sie die 2π -periodische Funktion f mit $f(x) = e^{ax}$ für $x \in [-\pi, \pi]$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, in eine reelle Fourierreihe.

(b) Berechnen Sie unter Verwendung von (a) den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 14.4:

(a) Die reelle Fourier-Reihe der Funktion $f(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$ ist durch

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx),$$

mit $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$ und $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$ gegeben. Daher sind Mit

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} e^{ikx} dx \right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{a + ik} e^{ax} e^{ikx} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{a + ik} (e^{\pi a} - e^{-\pi a}) (-1)^k \right) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + k^2} (e^{\pi a} - e^{-\pi a}) (-1)^k \end{aligned}$$

und $b_k = \frac{1}{\pi} \frac{-k}{a^2 + k^2} (e^{\pi a} - e^{-\pi a}) (-1)^k$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} Sf(x) &= (e^{a\pi} - e^{-a\pi}) \left(\frac{1}{2a\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{a^2 + k^2} (-1)^k \cos(kx) + \frac{-k}{a^2 + k^2} (-1)^k \sin(kx) \right) \right) \\ &= (e^{a\pi} - e^{-a\pi}) \left(\frac{1}{2a\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + k^2} (-1)^k (a \cos(kx) - k \sin(kx)) \right). \end{aligned}$$

(b) Da $S_n f(x)$ im Punkt π gegen den Wert $\frac{f(\pi+) + f(\pi-)}{2} = \frac{e^{a\pi} + e^{-a\pi}}{2}$ strebt, folgt

$$\frac{e^{a\pi} + e^{-a\pi}}{2} = (e^{a\pi} - e^{-a\pi}) \left(\frac{1}{2a\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k} a}{a^2 + k^2} \right) \iff \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + k^2} = \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{e^{a\pi} + e^{-a\pi}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} - \frac{1}{2a^2}.$$

Zusatzaufgabe 14.5:

(a) Seien $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $\beta \neq 0$. Bestimmen Sie jeweils die Fourier-Reihe der Funktionen

$$(i) f(x) = \sin(\alpha x) \quad (ii) f(x) = |\sin(x)| \quad (iii) f(x) = \cosh(\beta x), \beta \neq 0.$$

(b) Finden Sie mittels (a.iii) jeweils den Grenzwert der Reihen $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2 + \beta^2}$ und $\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \frac{1}{k^2 + \beta^2}$.

(c) Ermitteln Sie die Fourier-Reihen zu den 2π -periodischen Fortsetzungen von $f, g: [-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$(i) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } -\pi \leq x \leq 0, \\ x, & \text{für } 0 \leq x < \pi, \end{cases} \quad (ii) g(x) = |x|.$$

(d) Durch $f(x) = x^2$ für $-\pi \leq x \leq \pi$ sei eine 2π -periodische Funktion gegeben.

(i) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe $(Sf)(x)$.

(ii) Bestimmen Sie mittels (i) jeweils den Grenzwert der Reihen $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2}$ und $\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2}$.

(iii) Finden Sie mittels (i) und Parsevalscher Gleichung (14.16) den Grenzwert der Reihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^4}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 14.5:

(a) (i) Da $f(x) = \sin(\alpha x)$ ungerade, gilt $a_k = 0$ nach ZA 14.3 (c). Da die Funktionen $f(x) \sin(kx)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gerade sind, erhalten wir mittels des einfach zu überprüfenden Sachverhaltes $\sin(\alpha x) \sin(kx) = \frac{1}{2} [\cos((k - \alpha)x) - \cos((k + \alpha)x)]$ für die restlichen Koeffizienten

$$\begin{aligned} b_k(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(\alpha x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{k - \alpha} \sin((k - \alpha)x) - \frac{1}{k + \alpha} \sin((k + \alpha)x) \right]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= \frac{\frac{1}{\pi}}{k^2 - \alpha^2} \left((k + \alpha)(-1)^k \underbrace{\sin(-\alpha\pi)}_{-\sin(\alpha\pi)} - (k - \alpha)(-1)^k \sin(\alpha\pi) \right) = (-1)^k \frac{2k \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - k^2)}. \end{aligned}$$

Also lautet die Fourier-Reihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \frac{2k \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - k^2)} \sin(kx)$.

- (ii) Die Funktion $|\sin(x)|$ ist gerade, somit gilt $b_k = 0$ nach ZA 14.3 (c). Aufgrund der sogar vorhandenen π -Periodizität sowie mittels $\cos(kx) \sin(x) = \frac{1}{2} (\sin((k+1)x) - \sin((k-1)x))$ erhalten wir $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\sin(x)| dx = \frac{4}{\pi}$ sowie $a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\sin(x)| \cos(kx) dx = 0$ und für $k \geq 1$ somit

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\sin(x)| \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin((k+1)x) - \sin((k-1)x)) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{k+1} ((-1)^{k+1} - 1) + \frac{1}{k-1} ((-1)^{k-1} - 1) \right) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi(k^2-1)} & k \text{ gerade,} \\ 0 & k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Also lautet die Fourier-Reihe $\frac{2}{\pi} - \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{4}{\pi(4k^2-1)} \cos(2kx)$.

- (iii) Die Funktion $\cosh(\beta x)$, $\beta \neq 0$, ist gerade, somit gilt $b_k = 0$ nach ZA 14.3 (c). Wegen $\cosh(\beta x) = \frac{1}{2} (e^{\beta x} + e^{-\beta x})$ sowie

$$\begin{aligned} h(\gamma) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{\gamma x} \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{-\pi}^\pi e^{\gamma x} e^{ikx} dx \right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\gamma + ik} e^{\gamma x} e^{ikx} \Big|_{-\pi}^\pi \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\gamma + ik} (e^{\pi\gamma} - e^{-\pi\gamma}) (-1)^k \right) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + k^2} (e^{\pi\gamma} - e^{-\pi\gamma}) (-1)^k \end{aligned}$$

und der Linearität des Integrals erhalten wir

$$a_k(f) = \frac{h(\beta) + h(-\beta)}{2} = \frac{(-1)^k}{\beta^2 + k^2} \cdot \frac{\beta (e^{\pi\beta} - e^{-\pi\beta}) - \beta (e^{-\pi\beta} - e^{\pi\beta})}{2\pi} = \frac{2\beta(-1)^k \sinh(\beta\pi)}{\beta^2 + k^2 \pi}.$$

Also lautet die Fourier-Reihe $(Sf)(x) = \frac{\sinh(\beta\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{\beta} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2\beta(-1)^k}{\beta^2 + k^2} \cos(kx) \right)$.

- (b) Da f aus (a.iii) stetig und stückweise stetig differenzierbar, folgt $\forall x \in \mathbb{R}: (Sf)(x) = f(x)$. Somit erhalten wir (vgl. auch ZA 14.4 (b))

$$\begin{aligned} 1 &= f(0) = (Sf)(0) = \frac{\sinh(\beta\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{\beta} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2\beta(-1)^k}{\beta^2 + k^2} \right), \\ \cosh(\beta\pi) &= f(\pi) = (Sf)(\pi) = \frac{\sinh(\beta\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{\beta} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2\beta}{\beta^2 + k^2} \right), \end{aligned}$$

$$\text{also } \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2\beta}{\beta^2 + k^2} = \frac{\pi}{2\beta} \cdot \frac{\cosh(\beta\pi)}{\sinh(\beta\pi)} - \frac{1}{2\beta^2} \quad \text{und} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{\beta^2 + k^2} = \left(\frac{\pi}{2\beta \sinh(\beta\pi)} - \frac{1}{2\beta^2} \right).$$

- (c) (i) Es gelten $a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x dx = \frac{\pi}{2}$ sowie für $k \in \mathbb{N}$ per Definition

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos(kx) dx \stackrel{\text{p.I.}}{=} \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{x}{k} \sin(kx) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(kx)}{k} dx \right) = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}, \\ b_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sin(kx) dx \stackrel{\text{p.I.}}{=} \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{x}{k} \cos(kx) \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{k} dx \right) = -\frac{(-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

Also ist die Fourier-Reihe

$$(Sf)(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x) + \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx).$$

- (ii) Die Funktion $g(x) = |x|$ ist gerade, somit gilt $b_k = 0$ nach ZA 14.3 (c). Für die a_k gelten nun $a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \pi$ sowie für $k \in \mathbb{N}$ analog (i) (da $|x| \cos(kx)$ gerade ist) also

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(kx) \, dx \stackrel{\text{p.I.}}{=} \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{x}{k} \sin(kx) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(kx)}{k} \, dx \right) = 2 \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2},$$

so dass sich die Fourier-Reihe $(Sf)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x)$ ergibt.

- (d) (i) Die Funktion $f(x) = x^2$ ist gerade, somit gilt $b_k = 0$ nach ZA 14.3 (c). Für die a_k gelten nun $a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \, dx = \frac{2\pi^2}{3}$ sowie für $k \in \mathbb{N}$ demnach

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(kx) \, dx \stackrel{\text{p.I.}}{=} \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{x^2 \sin(kx)}{k} \right]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{2}{k} \int_0^\pi x \sin(kx) \, dx \right) \\ &\stackrel{\text{p.I.}}{=} -\frac{4}{k\pi} \left(\left[-\frac{x}{k} \cos(kx) \right]_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{k} \, dx \right) = -\frac{4}{k\pi} \cdot \frac{(-1)^{k+1}\pi}{k} = (-1)^k \frac{4}{k^2}. \end{aligned}$$

Somit lautet die Fourier-Reihe $(Sf)(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$.

- (ii) Da f stetig und stückweise stetig differenzierbar, gilt $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = (Sf)(x)$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \pi^2 &= f(\pi) = (Sf)(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2}, \\ 0 &= f(0) = (Sf)(0) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}. \end{aligned}$$

Somit folgen für die entsprechenden Reihen $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ und $\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

- (iii) Mittels Parsevalscher Gleichung (14.16) gilt

$$\frac{2}{5} \pi^4 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi x^4 \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi |f(x)|^2 \, dx \stackrel{(14.16)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^4}{9} + 16 \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^4},$$

$$\text{also nach Umstellen } \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{16} \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9} \right) \pi^4 = \frac{\pi^4}{90}.$$

Zusatzaufgabe 14.6:

- (a) Bestimmen Sie für die 2π -periodische Funktion $f(x) := \prod_{j=1}^n \cos(x_j)$ auf dem $\mathbb{R}^n$ die diskrete FOURIER-Transformierte

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{(-\pi, \pi)^n} \left(\prod_{j=1}^n \cos(x_j) \right) e^{-i\langle k, x \rangle} d\mu_n(x) \quad (k \in \mathbb{Z}^n).$$

- (b) Bestimmen Sie die diskrete Fouriertransformierte von $f(x, y) := \sin(5x) \cos(3y)$.
 (c) Bestimmen Sie die kontinuierliche Fouriertransformierte von $f(x, y) := (1 - |x|)(1 - |y|)$ für $\|(x, y)\|_\infty \leq 1$ und $f(x, y) := 0$ sonst.

Lösung zu Zusatzaufgabe 14.6:

- (a) Die diskrete FOURIER-Transformierte ist die durch $\hat{f}((\pm 1, \dots, \pm 1)) = \frac{1}{2^n}$ und $\hat{f}(k) = 0$ für alle übrigen $k \in \mathbb{Z}^n$ (die nicht nur Einträge 1 oder -1 haben) gegebene Funktion $\hat{f}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Denn unter Ausnutzung der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, des Satzes von FUBINI und der EULERSchen Formel ergibt sich

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{(-\pi, \pi)^n} \left(\prod_{j=1}^n \cos(x_j) \right) e^{-i \sum_{l=1}^n k_l x_l} d\mu_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{l=1}^n \int_{(-\pi, \pi)} \cos(x_l) e^{-ik_l x_l} d\mu(x_l) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{l=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(x_l) \cos(k_l x_l) - i \cos(x_l) \sin(k_l x_l) \right) dx_l,\end{aligned}$$

wobei wegen $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) \sin(jx) dx = 0$ für alle j und $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) \cos(jx) dx = 0$ für $|j| \neq 1$ einerseits alle Terme mit $|k_l| \neq 1$ verschwinden und für $|k_j| = 1$ andererseits

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) \cos(x) dx = \pi$$

verwendet wird. Mit $\boxed{e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos(x)}$ gilt in der Tat

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{i \langle k, x \rangle} = f(x).$$

- (b) Zur Berechnung der diskreten Fourier-Transformierten von f erinnern wir zunächst für ganze Zahlen $m, \ell \in \mathbb{Z}$ an den Zusammenhang

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mz) \sin(\ell z) dz = \begin{cases} \pi, & \text{für } \ell = m \neq 0 \\ -\pi, & \text{für } \ell = -m \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mz) \cos(\ell z) dz = \begin{cases} \pi, & \text{für } |\ell| = |m| \neq 0 \\ 2\pi, & \text{für } \ell = m = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und schließlich

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mz) \cos(\ell z) dz = 0$$

trigonometrischer Integrale. Ist nämlich $k \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, so ist nach Definition und Ausnutzung des Satzes von Fubini die Fourier-Transformierte von f an der Stelle k genau durch

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{(-\pi, \pi)^2} f(x, y) e^{-i(k_1 x + k_2 y)} d\mu(x, y) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{(-\pi, \pi)} \int_{(-\pi, \pi)} \sin(5x) \cos(3y) e^{-ik_1 x} e^{-ik_2 y} d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin(5x) e^{-ik_1 x} dx \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3y) e^{-ik_2 y} dy \right) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin(5x) (\cos(k_1 x) - i \sin(k_1 x)) dx \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3y) (\cos(k_2 y) - i \sin(k_2 y)) dy \right)\end{aligned}$$

gegeben, so dass $\hat{f}(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(\pm 5, \pm 3)\}$ gilt. Für die restlichen vier Folgenglieder der diskreten Fourier-Transformierten von f erhalten wir $\hat{f}((5, 3)) = -\frac{i}{4}$, $\hat{f}((-5, -3)) = \frac{i}{4}$,

$$\hat{f}((5, -3)) = -\frac{i}{4}, \text{ und } \hat{f}((-5, 3)) = \frac{i}{4}.$$

Um dieses Resultat auf Richtigkeit zu überprüfen, machen wir die Probe:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(k) e^{i(k_1 x + k_2 y)} = f(x, y)$$

gilt gemäß der Rechnung

$$\begin{aligned} \frac{1}{4i} (e^{i(5x+3y)} - e^{-i(5x+3y)}) + \frac{1}{4i} (e^{i(5x-3y)} - e^{-i(5x-3y)}) &= \frac{1}{2} (\sin(5x+3y) + \sin(5x-3y)) \\ &= \sin(5x) \cos(3y). \end{aligned}$$

- (c) Wir beginnen mit der Beobachtung, dass die Funktion f symmetrisch ist, und es deswegen anzunehmen ist, dass sich diese Symmetrie auch in der Fourier-Transformierten widerspiegelt. In der Tat gilt für letztere nach Definition und dem Satz von FUBINI

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-i(x\xi_1 + y\xi_2)} d\mu(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-1,1] \times [-1,1]} f(x, y) e^{-i(x\xi_1 + y\xi_2)} d\mu(x, y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[-1,1]} \int_{[-1,1]} (1 - |x|) (1 - |y|) e^{-ix\xi_1} e^{-iy\xi_2} d\mu(y) d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (1 - |x|) e^{-ix\xi_1} dx \int_{-1}^1 (1 - |y|) e^{-iy\xi_2} dy, \end{aligned}$$

so dass wir zur Kalkulation der Fourier-Transformierten von f letztendlich nur ein Integral der Form

$$g(\zeta) := \int_{-1}^1 (1 - |z|) e^{-iz\zeta} dz = \int_{-1}^0 (1 + z) e^{-iz\zeta} dz + \int_0^1 (1 - z) e^{-iz\zeta} dz$$

mit $\zeta \in \mathbb{R}$ zu berechnen brauchen. Nun während

$$g(0) = \int_{-1}^0 (1 + z) dz + \int_0^1 (1 - z) dz = \frac{1}{2} (1 + z)^2 \Big|_{z=-1}^0 - \frac{1}{2} (1 - z)^2 \Big|_{z=0}^1 = 1$$

gilt, erhalten wir für $\zeta \neq 0$ aus

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (1 + z) e^{-iz\zeta} dz &= \frac{-1}{i\zeta} (1 + z) e^{-iz\zeta} \Big|_{z=-1}^0 + \frac{1}{i\zeta} \int_{-1}^0 e^{-iz\zeta} dz \\ &= -\frac{1}{i\zeta} + \frac{1}{\zeta^2} e^{-iz\zeta} \Big|_{z=-1}^0 = -\frac{1}{i\zeta} + \frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{\zeta^2} e^{i\zeta} \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - z) e^{-iz\zeta} dz &= \frac{-1}{i\zeta} (1 - z) e^{-iz\zeta} \Big|_{z=0}^1 - \frac{1}{i\zeta} \int_0^1 e^{-iz\zeta} dz \\ &= \frac{1}{i\zeta} - \frac{1}{\zeta^2} e^{-iz\zeta} \Big|_{z=0}^1 = \frac{1}{i\zeta} - \frac{1}{\zeta^2} e^{-i\zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \end{aligned}$$

insgesamt

$$g(\zeta) = \frac{2}{\zeta^2} - \frac{1}{\zeta^2} (e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}) = \frac{2}{\zeta^2} (\cos \zeta - 1).$$

Demnach ist die Fourier-Transformierte der Funktion f durch

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2}{\pi \xi_1^2 \xi_2^2} (\cos \xi_1 - 1) (\cos \xi_2 - 1)$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^2$ gegeben, und weist insbesondere die selbe Symmetrie auf wie die Funktion f .

Sachwortverzeichnis

$(\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}_n, \lambda_n)$, 64

σ -Algebra, 64

Abbildung

differenzierbare, 30

k -mal stetig, 35

stetig, 35

zweimal stetig, 35

Grenzwert einer, 14

lineare, 14

affin-, 44

stetige, 13

gleichmäßig, 14

Lipschitz-, 14

stetige Abänderung einer, 14

stetige Fortsetzung einer, 14

Ableitung, 30

Fréchet-, 30

Gâteaux-, 35

partielle, 29

zweite, 29

totale, 30

Algebra

Banach-, 15

Axiom

Hausdorffsches Trennungs-, 2

Basis, 55

Bijektion, 92

Bild

einer Abbildung, 62

C^k -Diffeomorphismus, 48

C^k -invertierbar

lokal, 48

definit

in-, 41

negativ, 41

positiv, 41

semi-

negativ, 41

positiv, 41

Definitheit, 1, 2

Determinante

Hauptabschnitts-, 42

Dichte, 74

Differential

Fréchet-, 30

totales, 30

differenzierbar, 30

k -mal stetig, 35

Fréchet-, 30

Gâteaux-, 29, 35

partiell, 29

stetig, 35

total, 30

zweimal stetig, 35

Divergenz, 36

Einheitskugel, 2

Endomorphismus, 15

Faltung, 91

Folge

beschränkt, 8

Cauchy-, 8

Dirac-, 91

konvergente, 8

gleichmäßig, 14

Form

Linear-

Sesqui-, 42

Funktion

L^1 -, 92

charakteristische, 71

Indikator-, 68, 71

Funktionen

harmonische, 36

Gleichung

Besselsche, 89

Parallelogramm-, 93

Parsevalsche, 89, 92

Potential-, 36

Schwingungs-, 36

Wärmeleitungs-, 36

Wellen-, 36

Gradient, 30, 36

Graph, 36

Höhenlinie, 36

Homöomorphismus, 14

Homogenität, 1

indefinit, 41

Indikatorfunktion, 71

Inhalt, 62

Integrale

parameterabhängige

Differentiationslemma für, 75

Stetigkeitslemma für, 75

integrierbar

Riemann-, 76

Intervall

degeneriertes, 62

dyadisches, 63

- nichtdegeneriertes, 62
- Invarianz
 - Translations-, 81
- kompakt
 - überdeckungs-, 21
 - folgen-, 21
- konvergent
 - im quadratischen Mittel, 2, 89
- Kriterium
 - hinreichendes
 - für lokale Extrema, 42
 - für lokale Extrema unter Nebenbedingung, 55
 - für Sattelpunkte, 42
 - notwendiges
 - für lokale Extrema, 30, 41
 - für lokale Extrema unter Nebenbedingung, 55
- Kurve
 - C^1 -, 22
 - Ableitung einer, 22
 - Bogenlänge einer, 23
 - differenzierbare, 22
 - Kettenregel für, 22
 - stetig, 22
 - immersierte, 23
 - nach Bogenlänge parametrisierte, 23
 - parametrisierte, 22
 - rektifizierbare, 23
 - Parametrisierung einer, 22
 - Tangentialvektor einer, 22
- Lemma
 - Tuben-, 21
- Maß, 64
 - äußeres Lebesgue-
 n -dimensionales, 63
 - Lebesgue-
 n -dimensionales, 63
 - Wahrscheinlichkeits-, 64
- Maß
 - (n -dimensionales) Lebesgue-Maß, 64
- Maßraum
 - (n -dimensionaler) Lebesguescher, 64
- Matrix
 - Hesse-, 35
 - Jacobi-, 30
- Maximum
 - lokales, 30, 41
- Menge
 - abgeschlossene, 9
 - Abschluss einer, 9
 - Durchmesser einer, 9
 - Komplement einer, 10
 - Lebesgue-messbare, 64
 - messbare
 - Lebesgue-, 63
 - offene, 2
 - Rand einer, 9
 - Urbild einer, 13
- Metrik
 - äquivalente, 2
 - diskrete, 5
 - norminduzierte, 2
- Minimum
 - lokales, 30, 41
- Nabla, 36
- Niveaumenge, 36
- Norm, 1
 - p -, 1
 - äquivalente, 3
 - Halb-, 1
 - Maximum-, 1
 - Operator-, 15
 - Spaltensummen-, 20
 - Zeilensummen-, 20
- Normalbereich, 75
- Nullmenge, 70
- Operator
 - Laplace-, 36
- orthogonal, 88
- Orthonormalsystem, 88
- Parabel
 - Neilsche, 28
- periodisch, 88
- Polygon
 - Sehnen-, 23
- Polynom
 - Fourier-
 - komplexes, 89
 - reelles, 88
 - Taylor-, 41
 - trigonometrisches, 88
- Projektion, 13
- Punkt
 - Berühr-, 9
 - Entwicklungs-, 41
 - Fix-, 13
 - Häufungs-, 14
 - innerer, 9
 - regulärer, 23
 - Sattel-, 30, 41
 - singulärer, 23
 - stationärer, 30

- Raum
 - Banach-, 9
 - Hausdorff-, 2
 - Hilbert-, 9
 - linearer, 1
 - Maß-, 64
 - Wahrscheinlichkeits-, 64
 - Mess-, 63
 - metrischer, 2
 - vollständiger, 9
 - wegzusammenhängender, 22
 - zusammenhängender, 21
 - normierter, 1
 - Produkt-, 9
 - Tangential-, 54
 - topologischer, 2
 - Vektor-, 1
 - Euklidischer, 1
- Rechteckimpuls, 92
- Regel
 - Ketten-, 31
 - Lagrange'sche Multiplikator-, 55
 - Produkt-, 31
 - Substitutions-, 81
- Reihe
 - Fourier, 90
 - Fourier-
 - komplexe, 89
 - reelle, 88
 - konvergente, 15
 - absolut, 15
 - Neumann-, 15
- Rotation, 36
- σ -Algebra, 63
 - der Borelmengen, 64
- Satz
 - Banachscher Fixpunkt-, 13
 - Mittelwert-, 29
 - Schranken-, 35
 - Transformations-, 81
 - über die lokale Umkehrbarkeit, 48
 - über implizite Funktionen, 48
 - über lokale Auflösbarkeit, 48
 - vom Minimum/Maximum, 21
 - von Bolzano-Weierstraß, 8
 - von Fubini, 81
 - von Heine Borel, 21
 - von Schwarz, 35
 - von Tonelli, 81
 - Zwischenwert-, 22
- Selbstabbildung
 - kontrahierende, 13
- Skalarprodukt
 - reellwertiges, 1
- Spur, 22
- Symmetrie, 2
- Topologie, 2
 - diskrete, 5
 - indiskrete, 5
 - von einer Metrik induzierte, 2
- Transformation
 - Fourier-
 - diskrete, 90
 - Hauptachsen-, 19
 - Parameter-, 22
- Transformierte
 - Fourier-
 - kontinuierliche, 91
- Überdeckung
 - offene, 21
- Umgebung, 8
 - offene, 2
- Ungleichung
 - Bernoulli-, 58
 - Besselsche, 89
 - Cauchy-Schwarz-, 2
 - Dreiecks-, 1, 2
 - Hölder-, 2
 - Minkowski-, 1
- Untermannigfaltigkeit
 - d -dimensionale, 54
 - Codimension einer, 54
- Urbild
 - einer Abbildung, 62
- Vektor
 - Eigen-, 43
 - Normalen-, 55
- Vektorfeld, 36
- Vollständigkeitsrelation, 89
- Wert
 - regulärer, 54
- Zykloide, 28