Aufgabe 1.1: **(Aussagen und Quantoren)** (6+4 P)

(a) Für beliebige Aussagen A, B und C gelten die folgenden Äquivalenzen:

(1) Doppelte Negation:	$\neg(\neg A)$	$\iff$	A
(2) Kommutativgesetz:	$A \wedge B$	$\iff$	$B \wedge A$
	$A \vee B$	$\iff$	$B \vee A$
(3) De Morgansche Regeln:	$\neg(A \wedge B)$	$\iff$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
	$\neg(A \vee B)$	$\iff$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
(4) Assoziativgesetz:	$(A \wedge B) \wedge C$	$\iff$	$A \wedge (B \wedge C)$
	$(A \vee B) \vee C$	$\iff$	$A \vee (B \vee C)$
(5) Distributivgesetz:	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\iff$	$A \wedge (B \vee C)$
	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$\iff$	$A \vee (B \wedge C)$

Zeigen Sie je eine der Äquivalenzen aus (3), (4) und (5) durch Aufstellen der Wahrheitstabelle.

(b) Welche der folgenden Konklusionen ist richtig?

(i) $(\forall a\colon \exists b\colon P(a,b)) \implies (\exists b\colon \forall a\colon P(a,b))$ (ii) $(\exists b\colon \forall a\colon P(a,b)) \implies (\forall a\colon \exists b\colon P(a,b))$

Aufgabe 1.2: **(Mengen und Relationen)** (5+5 P)

(a) Bestimmen Sie für die Mengen $A = \{a, z, 4, 1000, \emptyset, lila\}$, $B = \{gruen, lila, 1000, 4, z, Auto\}$ und $C = \{1, 2, 4, a, b, c, d, x, y, z, Fahrrad\}$ die Mengen

(i) $A \setminus B \;:=\; \{x \mid x \in A \wedge \neg(x \in B)\}$
(ii) $A \cap (B \cap C)$ (iii) $A \cup (B \cup C)$ (iv) $C \cup (B \cap A)$ (v) $C \setminus (B \setminus A)$

(b) Sei $X \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge und $R, S \subset X \times X$ transitive Relationen.

(i) Zeigen Sie, dass $R \cap S$ auch eine transitive Relation ist.

(ii) Finden Sie ein Beispiel für X, R und S, bei welchem $R \cup S$ keine transitive Relation ist.

Aufgabe 1.3: **(Bilder und Urbilder)** (4 P)

Seien $A \subset X$ und $B \subset Y$ und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig ? Inwieweit ändert sich die Antwort, wenn f injektiv, surjektiv oder bijektiv ist ?

(i) $A \subset f^{-1}(f(A))$ (ii) $A \supset f^{-1}(f(A))$ (iii) $B \subset f(f^{-1}(B))$ (iv) $B \supset f(f^{-1}(B))$

Bonus: **(+4 ZP)**

Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f\colon X \to Y$ genau dann injektiv ist, wenn für alle Teilmengen $A, B \subset X$ gilt: $f(A \cap B) \;=\; f(A) \cap f(B)$.

Aufgabe 1.4: **(Verkettung von Abbildungen)** (2+4 P)

(a) Es sei $A \neq \emptyset$ eine Menge und $f\colon A \to A$ sowie $g\colon A \to A$ zwei Abbildungen. Zeigen Sie **oder** widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass $f \circ g \;=\; g \circ f$ gilt.

(b) Es seien A und B nichtleere Mengen sowie $f\colon A \to B$ eine Abbildung und $I_B\colon B \to B$ diejenige Abbildung, welche jedes Element auf sich selbst abbildet. Zeigen Sie:

$$\exists \text{ Abbildung } g\colon B \to A \text{ mit } f \circ g = I_B \qquad \iff \qquad f \text{ surjektiv}$$

Aufgabe 2.1: **(Körperaxiome)** (4+2 P)

Auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen seien die beiden folgenden Abbildungen definiert:

- Tropische Addition $\oplus: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $a \oplus b := \min(a, b)$.
- Tropische Multiplikation $\otimes: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $a \otimes b := a + b$.

Beweisen Sie Ihre Antworten auf die folgenden Fragen!

(a) Sind $\oplus$ bzw. $\otimes$ assoziativ, kommutativ, distributiv?

(b) Wird $\mathbb{Z}$ mit der tropischen Addition und der tropischen Multiplikation zu einem Körper?

Aufgabe 2.2: Zeigen Sie mit Hilfe der Körperaxiome und deren Folgerungen: (2+2 P)

(a) Für beliebige Körperelemente $a, b \in \mathbb{K}$ gilt $a \cdot (-b) \;=\; -(a \cdot b)$.

(b) Für beliebige Körperelemente $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt $a \cdot (b - c) \;=\; (a \cdot b) - (a \cdot c)$.

Aufgabe 2.3: **(Rechnen in angeordneten Körpern)** (6+2 P)

(a) Seien a, b Elemente eines angeordneten Körpers mit $0 < a \leq b$. Zeigen Sie die Ungleichungskette

$$a^2 \;\leq\; \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 \;\leq\; ab \;\leq\; \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \;\leq\; \frac{a^2+b^2}{2} \;\leq\; b^2\,. \tag{2.1}$$

Wann gilt jeweils das Gleichheitszeichen ?

(b) Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt: $(a-b)^4 \;\leq\; 4(a^3 - b^3)(a - b)$.
Hinweis: Verwenden Sie auch Gleichung (2.3).

Aufgabe 2.4: **(Vollständige Induktion)** (2+2+2+2+2+2 P)

(a) Zeigen Sie, dass $5^{2n+1} + 3^{n+2}2^{n-1}$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ durch 19 teilbar ist.

(b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n - 5 > n^2$? Begründen Sie Ihre Aussage.

(c) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n^3$? Begründen Sie Ihre Aussage.

(d) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Gültigkeit von

$$\forall n \in \mathbb{N}_0\ \forall q \in \mathbb{K} \setminus \{1\}\colon\ \sum_{k=0}^{n} q^k \;=\; \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad (\textbf{geometrische Summenformel}). \tag{2.2}$$

(e) Es seien a, b beliebige Körperelemente. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Gleichung:

$$a^{n+1} - b^{n+1} \;=\; (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k\,. \tag{2.3}$$

(f) Was ist an folgendem „Induktionsbeweis“ für die Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}_0 : 4n = 0$ falsch?

Induktionsanfang: $4 \cdot 0 = 0$.
Induktionsschluss: Gilt $4k = 0$ für alle $k < n$, so gilt auch $4n = 0$. Denn es gibt $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $n = k_1 + k_2$ und $k_1, k_2 < n$, also gilt $4n = 4k_1 + 4k_2 = 0$.

Aufgabe 3.1: (6+6 P)

(a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

(i) $x < x^2$, (ii) $\dfrac{10}{x} - 3 < \dfrac{4}{x} + 1$, (iii) $3x^2 + 6x - 8 > 1$.

(b) Lösen Sie über dem Körper der reellen Zahlen die folgenden Ungleichungen und skizzieren Sie die Lage der jeweiligen Lösungsmenge auf der x-Achse:

(i) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}x \le x - \dfrac{7}{6}$ (ii) $\dfrac{5}{2}(x-3) \le (x-3)$ (iii) $|x^2 - 4| - |x+2|(x^2 + x - 6) > 0$

Aufgabe 3.2: (2+2 P)

(a) Beweisen Sie, dass die durch $a_n := \dfrac{1}{n^2+1}$ gegebene Folge gegen Null konvergiert, indem Sie zu $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ angeben, mit dem $\forall n \ge N(\varepsilon)\colon |a_n| \le \varepsilon$ gilt.

(b) Beweisen Sie mittels Definition, dass $a_n := \dfrac{1}{n^2 - n + 2}$ gegen Null konvergiert.

Aufgabe 3.3: **(Weitere Rechenregeln für bestimmt divergente Folgen)** (4+2 P)

(a) Zeigen Sie **direkt mit der Definition bestimmter Divergenz** $\boxed{\text{genau zwei}}$ der Aussagen

(i) $\left(a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \ \wedge\ b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\right) \implies a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$

(ii) $\left(a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \ \wedge\ b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty\right) \implies a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.$

(iii) $\left(a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \ \wedge\ b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\right) \implies a_n b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$

(iv) $\left(a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \ \wedge\ b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty\right) \implies a_n b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$

(b) Zeigen Sie, dass die durch $a_n := n^5 - 8n^2 + 5n$ für $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge (a_n) bestimmt divergent gegen ∞ ist, indem Sie zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $N(K)$ bestimmen, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \ (n \ge N(K) \Longrightarrow a_n > K) \ .$$

Bonus: **(+2 ZP)**

Geben Sie ein Beispiel für eine unbeschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so dass $a_n > 0$ für alle n gilt, die jedoch nicht bestimmt divergent ist.

Aufgabe 3.4: (6+2 P)

(a) Bestimmen Sie mittels Rechenregeln für konvergente Folgen die Grenzwerte

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 5n + 1}{4n^3 - 2n^2 + 2}$ (ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 6n + 1}{n^2 - 6n - 1}$ (iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n+3} - \frac{n^3+1}{2n^2-1}\right)$

(b) Konvergiert die Folge $\dfrac{n + \frac{1}{4n+2}}{3n + \frac{2n^2}{n+1}}$, und wenn ja, gegen welchen Wert ?

Bonus: Berechnen Sie den Grenzwert der Folge **(+2 ZP)**

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \ = \ \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} \ .$$

Aufgabe 4.1: **(Unerwartete Grenzwerte)** (3+4 P)

(a) Beweisen Sie das sogenannte **„Sandwich-Lemma“**: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ und $c_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$. Desweiteren existiere zu einer Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \geq K$. Dann ist auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (a) die Aussage: $\sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

Tipp: Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz für $(\sqrt[n]{n})^n = (1+x_n)^n$.

Bonus: Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (a) die Aussage: $a > 0 \implies \sqrt[n]{a} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ **(+3 ZP)**

Tipp: Betrachten Sie zuerst $a \geq 1$ und verwenden Sie Satz 3.2 (Bernoulli-Ungleichung).

Aufgabe 4.2: **(Der goldene Schnitt als Grenzwert rekursiv definierter Folgen)** (4+2 P)

(a) Die durch $g^2 = 1 + g$ eindeutig bestimmte positive reelle Zahl g heißt **goldener Schnitt**.

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Wurzeln $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$, welche präziser durch die Rekursionsvorschrift $a_1 := 1$, $a_{n+1} := \sqrt{1+a_n}$ definiert ist, gegen g konvergiert.

Tipp: Zeigen Sie zunächst per Induktion $|a_n - g| \leq \dfrac{1}{g^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und danach $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

Bonusfrage: Kann der goldene Schnitt g in $\mathbb{Q}$ liegen? **(+2 ZP)**

(b) Wogegen konvergiert die Folge $\left(n\left(1-\sqrt{1-\dfrac{a}{n}}\right)\right)_{n\geq a}$ mit $a > 0$?

Aufgabe 4.3: **(Versteckte Reihen)** (6+3+3 P)

(a) Sei $q \in \mathbb{R}$ beliebig und $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch $S_0 = 1$, $S_n = S_{n-1} + q^n$ rekursiv definierte Folge.

(i) Finden Sie mittels Summenformel (2.2) eine explizite Darstellung der Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und begründen Sie, warum sie genau für $|q| < 1$ konvergiert.

(ii) Beweisen Sie im Fall $q \in \,]0,1[$ erneut die Konvergenz der Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, in dem Sie zeigen, dass es sich um eine monotone und beschränkte Folge handelt.

(b) Konvergiert die durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := a_n + \dfrac{1}{a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit der Eigenschaft, dass für alle natürlichen Zahlen n die Ungleichung

$$|a_n - a_{n+1}| \;<\; \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

gilt. Zeigen Sie die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Aufgabe 4.4: **(Häufungspunkte und Teilfolgen)** (3+2 P)

(a) Gegeben sei eine Folge b_n, für welche die Teilfolgen b_{2n}, b_{2n+5} und b_{7n} konvergieren. Zeigen oder widerlegen Sie, dass dann auch b_n konvergent ist.

(b) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge $a_n := \left(\dfrac{(125)^{\frac{n}{3}} - (-5)^n}{2\cdot(25)^{\frac{n}{2}}}\right)^n$.

Aufgabe 5.1: (6 P)

Die Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv durch $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{1+a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

(a) Weisen Sie nach, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $1 \leq a_n \leq 2$ gilt.
(b) Zeigen Sie, dass die Folge monoton ist.
(c) Begründen Sie nun, warum die Folge konvergieren muss.
(d) Gegen welchen Wert konvergiert die Folge ? (Begründung)

Bonus: Sei $a > 0$. Beweisen Sie, dass für jeden Startwert $0 < x_0 < \frac{1}{a}$ die durch **(+4 ZP)**

$$x_{n+1} := x_n(2 - ax_n)$$

rekursiv definierte Folge x_n gegen $\frac{1}{a}$ konvergiert.

Aufgabe 5.2: (3+1 P)

(a) Berechnen Sie für jedes $N \in \mathbb{N}$ die N-te Partialsumme $S_N := \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{4n^2-9}$.

(b) Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-9}$? Falls ja, geben Sie den Grenzwert an.

Bonus: Ermitteln Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. **(+4 ZP)**

Tipp: Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $k \mapsto \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ und überprüfen Sie, welche Terme sich in der n-ten Partialsumme aufheben.

Aufgabe 5.3: **(b-adische Brüche)** (3+3+4 P)

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ mit $S_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k 8^{-k}$ und $a_k := \begin{cases} 5\,, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ 3\,, & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$

(b) Begründen Sie, warum die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k 8^{-k}$ für jede beliebige Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ gegen ein $a \in [0, 1]$ konvergiert.

(c) Begründen Sie, warum eine periodische Dezimalzahl rational sein muss.

Aufgabe 5.4: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz: (10 P)

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3(1+n)}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{2^n 3^{n+1}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - a^n)$ für eine reelle Zahl $0 < a < 1$.

Bonusfrage: Für welche $a > 0$ konvergiert $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \sqrt[n]{a}\right)$? **(+3 ZP)**

Aufgabe 6.1: (2+2+6 P)

(a) Zeigen Sie, dass das Quotientenkriterium nicht notwendig für die Konvergenz einer Reihe ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Wurzelkriterium nicht notwendig für die Konvergenz einer Reihe ist.

(c) Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2+1} \qquad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

Bonus: **(+4 ZP)**

Untersuchen Sie die Reihen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{(n+\sqrt{n})^2}$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2+\sqrt{n^4+1}}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 6.2: (4+4 P)

(a) Zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen heißen **asymptotisch proportional**, wenn es ein $c>0$ mit $\frac{a_n}{b_n}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$ gibt. In diesem Fall schreiben wir $(a_n)\sim(b_n)$. Zeigen Sie:

$$(a_n)\sim(b_n) \implies \left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty}b_n < \infty\right).$$

(b) Untersuchen Sie die Reihen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt[n]{n}}$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n^5}}$ auf Konvergenz.

Bonus: Zeigen **oder** widerlegen Sie: **(+4 ZP)**

(i) Existiert $c\in\mathbb{R}$ mit $n^2a_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$, dann konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

(ii) Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ und gilt $\forall n\colon a_n\geq 0$, dann ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ konvergent.

Aufgabe 6.3: Sei $|x|<1$. Berechnen Sie jeweils das Cauchy-Produkt von (2+2 P)

$$\text{(a)} \left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^k\right) \qquad \text{und} \qquad \text{(b)} \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^k\right).$$

Aufgabe 6.4: (6+2 P)

(a) Bestimmen Sie Supremum und Infimum folgender Mengen. Entscheiden Sie jeweils, ob ein Maximum und/oder ein Minimum existiert.

$$\text{(i)}\ M_1:=\left\{\frac{1}{n}\;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\} \qquad \text{(ii)}\ M_2:=\left\{\frac{n}{2n+1}\;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\} \qquad \text{(iii)}\ M_3:=\left\{\frac{|x|}{|x|+1}\;\middle|\; x\in\mathbb{R}\right\}$$

(b) Zeigen **oder** widerlegen Sie:
Die Menge $\{A\subset\mathbb{N}\mid \mathbb{N}\setminus A \text{ endlich }\}$ aller coendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

Bonus: **(+4 ZP)**

Beweisen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \left(\limsup\limits_{n\to\infty}a_n\right)+\left(\limsup\limits_{n\to\infty}b_n\right)$ und geben Sie Beispielfolgen an, für die eine echte Ungleichung vorliegt.

Aufgabe 7.1: (2+5+4+2 P)

(a) Ermitteln Sie Limes Superior und Limes Inferior der Folge $a_n := \dfrac{(-2)^n}{(3+(-1)^n)^n}$.

(b) Bestimmen Sie die Menge aller Häufungspunkte, den Limes Superior und den Limes Inferior für die nachstehenden Folgen (b_n) und (c_n):

$$b_n = (1+(-1)^n)\, n\ , \qquad c_n = (-1)^{n-1}\left(2-\frac{4}{n}\right)+(-1)^{\lfloor \frac{n}{3}\rfloor}\left(1+\frac{1}{n}\right) .$$

(c) Seien $V, W \subset \mathbb{R}$ nichtleer, beschränkt und $V - W := \{v - w \mid v \in V, w \in W\}$. Zeigen Sie:

(i) $V - W$ ist nach unten beschränkt. (ii) Es gilt $\inf(V - W) = \inf(V) - \sup(W)$.

(d) Sind die Mengen $]0,1[$ und $[0,1]$ gleichmächtig ?

Bonus: **(+3 ZP)**

Bestimmen Sie den Limes Superior und den Limes Inferior der Folgen $a_n := (-1)^n(1+\frac{1}{n})$ und $b_n := (-1)^n p_n$, wobei p_n der kleinste Primteiler von n sei.

Aufgabe 7.2: (3+2 P)

(a) Gegeben seien Funktionen $u, v, w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass die Ungleichungskette $u(x) \leq v(x) \leq w(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt sei. Desweiteren seien die Funktionen u und w stetig in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $u(x_0) = w(x_0)$. Zeigen Sie, dass dann auch v in x_0 stetig ist.

(b) Berechnen Sie für $m, n \in \mathbb{N}$ den Grenzwert $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{x^m-1}{x^n-1}$.

Bonus: **(+3 ZP)**

Berechnen Sie die Grenzwerte (i) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2+4x+3}$ (ii) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 3\\ x\neq 3}}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$ (iii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.

Aufgabe 7.3: **(Grenzwerte von Funktionen & Stetigkeit)** (3+3 P)

(a) Bestimmen Sie die Menge aller Punkte in denen die folgende Funktion stetig ist:

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ , \qquad f(x) := \begin{cases} \dfrac{(x-1)x}{x^2-1} & \text{für } x \notin \{-1,1\}\ , \\ \dfrac{1}{2} & \text{für } x = 1\ , \\ 0 & \text{für } x = -1\ . \end{cases}$$

(b) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $\forall x \in [0,1]\colon f(x) = f(x^2)$.
Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 7.4: **(Anwendung des Nullstellen- bzw. Zwischenwertsatzes)** (3+3 P)

(a) Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) := x^3 - 3x + 1$ genau drei reelle Nullstellen besitzt.

(b) Folgt aus der Stetigkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ schon, dass f konstant ist ?

Bonus: Zeigen Sie: **(+3 ZP)**

Ist $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(1)$, dann gibt es ein $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ mit $f(p) = f\left(p + \frac{1}{2}\right)$.

Aufgabe 8.1: (4+4+4 P)

(a) Beweisen Sie direkt mittels ε-δ-Charakterisierung, dass die Wurzelfunktion $f(x) := \sqrt{x}$ im Punkt $a := 1$ stetig ist.

(b) Zeigen Sie: Ist $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $h(0) = 0$, $\eta > 0$ und $g\colon [-\eta, \eta] \to \mathbb{R}$ beschränkt, dann ist die Funktion $x \mapsto g(x) \cdot h(x)$ in 0 stetig.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Funktion $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mit $$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x^2 < 2, \\ 1, & \text{falls } x^2 > 2, \end{cases}$$ ist auf ganz $\mathbb{Q}$ stetig.

Aufgabe 8.2: (4 P)

Bestimmen Sie zu $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, die Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ derart, dass für die Funktion
$$f(x) \;:=\; \sqrt{ax^2 + bx + c} - \alpha x - \beta \tag{8.1}$$
die Konvergenz $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ gilt.

Bonus: **(+4 ZP)**

Zeigen Sie, dass die in (8.1) ermittelte Funktion f auf $[K, \infty[$ gleichmäßig stetig ist, wobei $K \in \mathbb{R}$ so groß sei, dass $f(x)$ für $x \geq K$ wohldefiniert ist.

Aufgabe 8.3: **(Sätze über stetige Funktionen)** (2+4 P)

(a) Hat zu gegebenen $c, d \in \mathbb{R}$ die Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) := cx + d$ ein Minimum ? Wenn ja, wie lautet es ?

(b) Zeigen Sie:
Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, so besitzt f ein Maximum oder ein Minimum.

Bonus: Zeigen Sie: **(+3 ZP)**

Zu vorgegebenen Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \,]a, b[$ finden wir zu einer auf $]a, b[$ stetigen Funktion f ein $\xi \in \,]a, b[$ mit $nf(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$.

Hinweis: Für eine Teilmenge E eines angeordneten Körpers mit Elementen $e_1, \ldots, e_n$ gilt
$$\min E \;\leq\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k \;\leq\; \max E\ .$$

Aufgabe 8.4: **(Sätze über stetige Funktionen)** (2+3+3 P)

(a) Ist der **Cosinus Hyperbolicus** stetig, d.h., die Funktion
$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , \qquad x \mapsto \cosh(x) \;:=\; \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\ ? \tag{8.2}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion in (8.2) nur ein Minimum, aber kein Maximum besitzt.

Bonus: Warum widerspricht dies nicht dem Satz vom Minimum/Maximum ? **(+1 ZP)**

(c) Begründen Sie (ohne explizite Bestimmung), warum cosh auf $[0, \infty[$ eine Umkehrfunktion $\operatorname{arcosh}\colon [1, \infty[\to [0, \infty[$ (**Area Cosinus Hyperbolicus**) besitzen muss.

Aufgabe 9.1: (4+5 P)

(a) Zeigen Sie: Die Funktion $x \mapsto a^x$ ist

(i) streng monoton wachsend, falls $a > 1$; (ii) streng monoton fallend, falls $1 > a > 0$.

(b) Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen $h\colon\ ]0,\infty[\to\mathbb{R}$, die für beliebige $x, y > 0$ die Gleichung $h(x \cdot y) = h(x) + h(y)$ erfüllen.

Bonus: **(+3 ZP)**

(i) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 3} \ln(|x^2 - 5x + 6|) - \ln(|x - 3|)$.

(ii) Zeigen Sie: Die Umkehrfunktion von sinh erfüllt $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Aufgabe 9.2: (3 P)

Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$, $f(x) := 2^x$, stetig? Ist auch die Umkehrfunktion von f stetig?

Aufgabe 9.3: **(Rechnen mit komplexen Zahlen in kartesischen Koordinaten)** (3+3+5 P)

(a) Zeigen Sie die **Parallelogramm-Gleichung**: $\forall z, w \in \mathbb{C}\colon\ |z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\,(|z|^2 + |w|^2)$.

(b) Sei $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n$.

Beweisen Sie: Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, dann ist auch $\bar{z}$ eine Nullstelle von p.

(c) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, den Betrag, das Quadrat sowie das konjugiert Komplexe, das additive und das multiplikative Inverse (jeweils in der Gestalt $x + \mathrm{i}y$ mit reellen x, y) für die komplexe Zahl

$$z := (45 + 15\mathrm{i})\left(\frac{4}{5} + \frac{7}{3}\mathrm{i}\right) .$$

Bonus: Zeigen Sie: **(+5 ZP)**

(i) $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\colon\ \left|\frac{\bar{z}}{z}\right| = 1$ (ii) $\forall z \in \mathbb{C}\colon\ \left(|z| = 1 \Longrightarrow \exists w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\colon\ \frac{\bar{w}}{w} = z\right)$

Aufgabe 9.4: **(Konvergenz und Cauchy-Folgen in $\mathbb{C}$)** (2+3+2 P)

(a) Berechnen Sie $\left|\left(\frac{3+4\mathrm{i}}{5}\right)^n\right|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert die entsprechende Folge?

(b) Zeigen Sie, dass die durch $a_n := \left(\frac{3+4\mathrm{i}}{5}\right)^n$ in $\mathbb{C}$ definierte Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt ist, jedoch keine Cauchy-Folge bildet und folglich nicht konvergieren kann.

Hinweis: Für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3+4\mathrm{i}}{6}\right)^n$.

Bonus: Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene: **(+5 ZP)**

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - 1 + \mathrm{i}| \le 2 \ \wedge\ -1 \le \operatorname{Im}(z) \le 0 \right\} , \quad B = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 2\operatorname{Im}(z) + 1 = \operatorname{Re}(z^2) \right\} .$$

Aufgabe 10.1: (4+4 P)

(a) Beweisen Sie für beliebige $z \in \mathbb{C}$ die absolute Konvergenz der Reihen

$$\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{und} \qquad \sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{10.1}$$

(b) Zeigen Sie: Die so definierten Funktionen $\cos, \sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erfüllen die Gleichungen

$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) \qquad \text{und} \qquad \sin(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)$$

Aufgabe 10.2: **(Anwendungen der Eulerschen Formel)** (1+4 P)

(a) Zeigen Sie die Formel von **Moivre**: $\forall n \in \mathbb{N}_0\colon (\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)$.

(b) Verwenden Sie die in (a) gezeigte Formel, um ein Polynom $P(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{jk} x^j y^k$ mit reellen Koeffizienten $a_{j,k}$ zu finden, so dass $P(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \;=\; \cos(2\varphi) - \sin(3\varphi)$ gilt.

Aufgabe 10.3: (3+3+5 P)

(a) Bestimmen Sie in $\mathbb{C}$ die Nullstellen von $f(z) = z^2 + 36$ und die Nullstellen von $g(z) = 2z^2 + 2z + 5$.

(b) Wieviele Lösungen in $\mathbb{C}$ besitzt die Gleichung $z^5 + \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})^2 = 0$? Geben Sie sie an.

(c) Zeigen Sie, dass es eine reelle und eine rein imaginäre Nullstelle der Gleichung $f(z) = 0$ mit

$$f(z) \;=\; z^4 + 4z^3 + 6z^2 + (6 - 2\mathrm{i})z + 3 - 2\mathrm{i}$$

gibt. Ermitteln Sie anschließend die verbleibenden Nullstellen der Gleichung $f(z) = 0$.

Bonus: Welche $z \in \mathbb{C}$ lösen die Gleichung $z^6 + (1 - 2\mathrm{i}\sqrt{2})z^3 - 2\mathrm{i}\sqrt{2} = 0$. **(+5 ZP)**

Aufgabe 10.4: (2+4 P)

(a) Zeigen Sie die Verdopplungsformel des Cotangens: $2\cot(2z) = \cot(z) - \tan(z)$.

Bemerkung: Mit Hilfe der Funktionen aus (10.1) definieren wir dabei (sofern möglich)

$$\tan(z) \;:=\; \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \qquad \text{und} \qquad \cot(z) \;:=\; \frac{\cos(z)}{\sin(z)}\,. \tag{10.2}$$

(b) Zeigen Sie die Gültigkeit von $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \;=\; \cos(\varphi)$ und $\sin(2\varphi) \;=\; 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)$.

Bonus: Bestimmen Sie nur unter Verwendung von Additionstheoremen die Werte von **(+6 ZP)**

$\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$, $\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$, $\tan\left(\frac{3\pi}{10}\right)$, $\cot\left(\frac{3\pi}{10}\right)$. **Tipp:** Bestimmen Sie zunächst $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Analysis I | **Wintersemester 2016/2017, Universität Rostock**
Serie 11 | **Abgabetermin:** spätestens 10.01.2017, 13:00 Uhr
PROF. DR. P. TAKÁČ | F. BAUSTIAN, DR. K. IHSBERNER, DR. A. JÄNIG

Aufgabe 11.1: (3+3+3 P)

(a) Beweisen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ gilt
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)} .$$

(b) Zeigen Sie nun die **Funktionalgleichung des Arcustangens**: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
$$|\arctan(x)+\arctan(y)| < \frac{\pi}{2} \implies \arctan(x)+\arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) .$$

(c) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und den zugehörigen Wertebereich von
$$f(x) := \arccos\left(\frac{x^2-x}{x^2}\right).$$

Bonus: Lösen Sie auf dem Intervall $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ die Gleichung $\sin(x)+\cos(x) = \frac{1}{2}$. **(+3 ZP)**

Aufgabe 11.2: (4+4 P)

(a) Geben Sie die komplexen Zahlen
$$z_1 := \frac{7+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \qquad \text{und} \qquad z_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
in Polarkoordinaten an, d.h., in der Gestalt $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $A_0^{(n)} A_1^{(n)} \ldots A_n^{(n)}$ der Polygonenzug der Punkte $A_k^{(n)} := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k}{n}x}$, $k = 0, \ldots n$.

(i) Zeigen Sie:
Die Länge $L_n = \sum_{k=1}^{n} \left|A_k^{(n)} - A_{k-1}^{(n)}\right|$ des Polygonenzuges erfüllt $L_n = 2n\left|\sin\left(\frac{x}{2n}\right)\right|$.

(ii) Beweisen Sie die Identität $\lim_{n\to\infty} 2n\sin\left(\frac{x}{2n}\right) = x$.

Aufgabe 11.3: (4+4 P)

(a) Prüfen Sie mit Hilfe der Definition, ob die Funktion $f(x) := \frac{1}{x^4+1}$ differenzierbar ist.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig, fest. Bestimmen Sie $b, c \in \mathbb{R}$, so dass $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existiert, falls
$$f(x) := \begin{cases} x^5 & x \leq a, \\ bx + c\ , & x > a. \end{cases}$$
Tipp: Ist die Funktion f dann auch stetig ?

Aufgabe 11.4: (5 P)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für das Produkt von $n \geq 2$ differenzierbaren Funktionen $f_1, \ldots, f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gültigkeit der **verallgemeinerten Produktregel**
$$\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_k' \cdot \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} f_j\right) . \tag{11.1}$$

Das Team der Analysis wünscht allen Studierenden ein gesegnetes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ...

Auf Wiedersehen bis 2017.

Aufgabe 12.1: (4+4+4 P)

(a) Zeigen Sie, dass die durch
$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$
definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(0) = \frac{1}{2}$ ist, jedoch kein Intervall $]a, b[$, $a < 0 < b$, existiert, auf dem f monoton wächst.

(b) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x) := \frac{1}{p}|x|^p$ ist für $p > 1$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung
$$f'(x) := \begin{cases} |x|^{p-2}x & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0 \,. \end{cases}$$
Ist f konvex?

(c) Wo ist die auf $]0, \infty[$ definierte Funktion $f(x) := x^{\ln(x)}$ konvex bzw. konkav ?

Aufgabe 12.2: (2+4 P)

(a) Sei $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare ungerade (d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $u(-x) = -u(x)$) Funktion. Beweisen Sie, dass die Ableitung von u eine gerade Funktion ist.

(b) Bestimmen Sie die Ableitung $(f^{-1})'(f(x))$ für die Funktion $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^4}\right)$, $x > 0$.

Bonus: Bestimmen Sie die Ableitung von **(+5 ZP)**
$$\frac{1}{\left(\arctan(\sqrt{x^2+1})\right)^2}, \qquad x^{x+\ln(x)}, \qquad \ln\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}\right), \qquad 2x\arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right), \qquad \sqrt[3]{\sqrt{x}+1}.$$

Aufgabe 12.3: (4 P)

Bestimmen Sie alle Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$, für welche die durch $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowohl ein lokales Maximum als auch ein lokales Minimum besitzt.

Bonus: **(+4 ZP)**

Sei $n > 0$. Beweisen Sie, dass die Funktion $f\colon\ ]0, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-x}$ genau an der Stelle $x = n$ ihr globales Maximum annimmt.

Aufgabe 12.4: (4+4 P)

(a) Beweisen Sie den **Satz von Cauchy** (auch „verallgemeinerter Mittelwertsatz“ genannt):

> Seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ im offenen Intervall $]a, b[$ differenzierbare und in den Randpunkten a, b stetige Funktionen. Weiter gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$.
> Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es gibt ein $\xi \in]a, b[$ mit $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

(b) Wo steckt der **Fehler** in dem folgenden scheinbaren Gegenbeispiel zur Regel von L'Hospital?
Für $f(x) = x + \sin(x)\cos(x)$ und $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ offensichtlich nicht. Dennoch gilt
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(\mathrm{e}^{-\sin(x)} \frac{2\cos(x)}{2\cos(x)+f(x)}\right) = 0 \,.$$

Bonus: Berechnen Sie (i) $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{\ln(\sin(5x))}{\ln(\sin(3x))}$ und (ii) $\lim\limits_{x\nearrow 1} \ln(x)\ln(1-x)$ **(+6 ZP)**

Aufgabe 13.1: (2+2+2 P)

Untersuchen Sie jeweils, ob die folgenden Funktionen in $x_0 = 0$ ein lokales Extremum besitzen. Bestimmen Sie gegebenenfalls welcher Art das Extremum ist.

(a) $f(x) = \exp(x^2)\cos(x)$ (b) $g(x) = x^2(\sin(x))^3 + x^2\cos(x)$ (c) $h(x) = \dfrac{1+x^3}{1+x^2}$

Aufgabe 13.2: (4+4 P)

Führen Sie, sofern möglich, für die folgenden Funktionen und Startwerte drei Schritte des Newton-Verfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle durch, und prüfen Sie jeweils, ob das Newton-Verfahren wirklich gegen eine Nullstelle konvergiert:

(a) $4x^2 - 1$ für $x_0 = 1$ sowie $x_0 = 0$ (b) $x^5 - x - \dfrac{1}{5}$ für $x_0 = 0$ sowie $x_0 = 1$

Aufgabe 13.3: (3+2+2 P)

(a) Bestimmen Sie jeweils das Integral der Treppenfunktionen $\varphi\colon [-4,7] \to \mathbb{R}$ und $\psi\colon [-2,1] \to \mathbb{R}$, welche durch

$$\varphi(t) := \begin{cases} 2 & \text{für } t \in [-4,-1], \\ 4 & \text{für } t \in [3,7], \\ -5 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \psi(t) := \begin{cases} -3 & \text{für } t \in [-1,0], \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert sind.

(b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$ mithilfe der Riemann-(Ober- oder Unter-)Summen.

(c) Geben Sie eine Funktion f auf $[0,1]$ an, die nicht Riemann-integrierbar ist, deren Betrag $|f|$ aber Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 13.4: (3+3+3 P)

Bestimmen Sie die Zerlegung der folgenden reellen rationalen Funktionen

(a) $R(x) = \dfrac{x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2}{x^3 - 2x^2 + x}$ (b) $S(x) = \dfrac{x^4}{(x^2-1)^2}$ (c) $T(x) = \dfrac{x+1}{x^4 - x}$

Analysis I **Wintersemester 2016/2017, Universität Rostock**
Serie 14 **Abgabetermin:** spätestens 31.01.2017, 13:00 Uhr
Prof. Dr. P. Takáč F. Baustian, Dr. K. Ihsberner, Dr. A. Jänig

Aufgabe 14.1: (2+4+6 P)

(a) Zeigen Sie:

Ist R eine auf $[a,b] \subset]0,\infty[$ definierte rationale Funktion, so gilt $\displaystyle\int_{\ln(a)}^{\ln(b)} R(\mathrm{e}^x)\,dx = \int_a^b R(t)\,\frac{1}{t}\,dt.$

(b) Bestimmen Sie Stammfunktionen zu (i) $a(x) = \exp(x^2)2x^3$ und (ii) $b(x) = 9^x\cos(3^x)$.

(c) Ermitteln Sie jeweils eine Stammfunktion zu

(i) $u(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}-x}$ (ii) $v(x) := \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$ (iii) $w(x) := \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Aufgabe 14.2: (4 P)

Die rationale Zahl $\dfrac{22}{7}$ ist eine hervorragende Näherung für die Zahl π. Viele Leute behaupten sogar $\pi = \dfrac{22}{7}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$$

und argumentieren Sie mit dessen Hilfe sowie mittels qualitativer Eigenschaften des Integranden sowie des allgemeinen Integrals, warum $\pi \neq \dfrac{22}{7}$ gelten muss.

Bonus: **(+4 ZP)**

Berechnen Sie die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von $g(t) = (t - t^3)\mathrm{e}^{-t^2}$ im Intervall $[-2, 2]$.

Aufgabe 14.3: (4+4 P)

(a) Gegeben seien die beiden Funktionen $f(x) := \dfrac{1}{x\ln(x)}$ und $g(x) := \dfrac{1}{x\,(\ln(x))^2}$. Zeigen Sie:

(i) Es gelten $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$

(ii) Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\infty} g(x)\,dx$ existiert, während $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\infty} f(x)\,dx$ nicht existiert.

(b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx$.

Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^3}$?

Aufgabe 14.4: Die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch (2+1+3 P)

$$F(x) := \begin{cases} |x|^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung f von F.

(b) Ist f Riemann-integrierbar über $[0,1]$?

(c) Ist $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar über $]0,1]$?