Zusatzmaterial zum Übungsblatt 1

Aussagen und Quantoren:

(a) In der mathematischen Sprache verwendet man

- Symbole für **Variablen** (meist $x, y, \dots$ oder $x_1, x_2, \dots$)
- Symbole für **Konstanten** (meist $c, d, \dots$),
- Symbole für n-**stellige Funktionen** (meist $f(\cdot, \dots, \cdot), g(\cdot, \dots, \cdot), \dots$) und
- Symbole für n-**stellige Relationen** (meist $R(\cdot, \dots, \cdot), S(\cdot, \dots, \cdot), \dots$).

(b) Mit Hilfe von Symbolen für **Variablen**, **Konstanten**, **Funktionen** und **Relationen** kann man **Terme** und **Aussagen** bilden:

- Jede Variable und jede Konstante ist ein Term. Sind $t_1, \dots, t_n$ Terme und ist f eine n-stellige Funktion, so ist auch $f(t_1, \dots, t_n)$ ein Term.
- Sind $t_1, \dots, t_n$ Terme und ist R eine n-stellige Relation, dann ist $R(t_1, \dots, t_n)$ eine Aussage, in der alle vorkommenden Variablen **frei** sind.

(c) Aus vorhandenen Aussagen kann man mittels logischer Symbole neue Aussagen bilden: Sind A und B Aussagen, dann sind auch

- $\neg A$ („nicht A“)
- $A \wedge B$ („A und B“)
- $A \vee B$ („A oder B“– **Vorsicht:** Damit ist kein exklusives „Oder“gemeint.)

Aussagen. Abkürzend führt man noch

- $A \Longrightarrow B$ („A impliziert B“, d.h., „aus A folgt B“)

für $(\neg A) \vee B$ sowie

- $A \Longleftrightarrow B$ („A ist äquivalent zu B“, d.h., „A gilt genau dann, wenn B gilt“)

an Stelle von $(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$ ein.

(d) Logische Axiome werden durch folgende Wahrheitstafeln festgelegt:

A	$\neg A$
w	f
f	w

sowie

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

(e) Ist x eine freie Variable in der Aussage A, so erlaubt man sich auch, mittels der Quantoren $\forall$ und $\exists$ die Aussagen $\forall x\colon A(x)$ („für jedes x gilt $A(x)$“) und $\exists x\colon A(x)$ („es gibt ein x, für das $A(x)$ gilt“) zu bilden, und in diesen ist dann x keine freie Variable mehr, sondern **gebunden**.

Mengen

(a) In der Mengenlehre gibt man sich das zweistellige Relationssymbol $\in$ vor, mit dessen Hilfe man Aussagen wie $x \in y$ („x ist Element von y“) formen kann.

(b) Ist $A(x)$ eine Aussage mit freier Variable x, so bezeichnet $\{x \,|\, A(x)\}$ die **Ansammlung (Klasse)** aller x, für welche die Aussage $A(x)$ wahr ist. Als grundlegendes nicht-logisches Axiom gibt man sich $(y \in \{x \,|\, A(x)\}) \Longleftrightarrow A(y)$ vor. **Mengen** sind spezielle Ansammlungen. Beispielsweise

- ist die **leere Menge** $\{\} := \emptyset := \{x \mid x \neq x\} := \{x \mid \neg(x = x)\}$ eine Menge,

- ist mit zwei Mengen x, y die **Paarmenge** $\{x, y\} := \{z \,|\, (z = x) \vee (z = y)\}$ eine Menge,
- ist mit einer Menge x bei $z \subset x$, d.h. $\forall u\colon\ (u \in z \Longrightarrow u \in x)$, auch z eine Menge (**Teilmenge von** x genannt),[1]
- sind mit zwei Mengen x, y auch $x \cup y := \{u \,|\, u \in x \vee u \in y\}$ (welche **Vereinigung** genannt wird) und $x \cap y := \{u \,|\, u \in x \wedge u \in y\}$ (welche **Durchschnitt** genannt wird) Mengen,
- ist mit Mengen x und y auch $x \setminus y := \{u \,|\, u \in x \wedge \neg(u \in y)\}$ eine Menge,
- ist mit einer Menge x auch $\mathcal{P}(x) := \{z \,|\, z \subset x\}$ eine Menge (**Potenzmenge** genannt).

(c) In analoger Weise wie Paarmengen kann man **geordnete Paare** und damit auch das **Produkt** $M \times N := \{(m, n) \,|\, m \in M, n \in N\}$ zweier Mengen M, N definieren. Allgemein können wir natürlich ebenso die Menge aller geordneten n-tupel einführen.

Relationen und Abbildungen

- Sei M eine nichtleere Menge. Dann heißt $R \subset M \times M$ eine **Relation** auf M.

  (1) Insbesondere nennen wir eine Relation

  (i) **reflexiv** $:\Longleftrightarrow \quad \forall x \in M\colon (x, x) \in R$

  (ii) **transitiv** $:\Longleftrightarrow \forall x \in M\colon \forall y \in M\colon \forall z \in M\colon \Big(\big((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R\big) \Longrightarrow (x, z) \in R\Big)$

  (iii) **symmetrisch** $:\Longleftrightarrow \quad \forall x \in M\colon \forall y \in M\colon \big((x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R\big)$

  (iv) **antisymmetrisch** $:\Longleftrightarrow \quad \forall x \in M\colon \forall y \in M\colon \Big(\big((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R\big) \Longrightarrow x = y\Big)$

  (2) Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation heißt **Äquivalenzrelation**.

  Bemerkung:

  Zu jeder Äquivalenzrelation R auf einer nichtleeren Menge M kann man die Menge $\{[x]_R \mid x \in M\}$ der **Äquivalenzklassen** $[x]_R := \{y \in M \mid (x, y) \in R\}$ betrachten.

  (3) Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation heißt **Ordnungsrelation**.

  Bemerkung:

  Wir sprechen von einer **totalen** Ordungsrelation R auf einer nichtleeren Menge M, falls $\forall x, y \in M\colon (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$ gilt.

- Besitzt eine nichtleere Teilmenge $G \subset A \times B$ die Eigenschaft, dass es zu jedem $x \in A$ **genau ein** $y \in B$ mit $(x, y) \in G$ gibt, so nennen wir G den **Graphen einer Abbildung** $f\colon A \to B$. Man schreibt dann $y = f(x)$ und kann G mit der Menge $\mathrm{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \in A \times B \,|\, x \in A\}$ identifizieren.

  (1) Insbesondere können wir also unter einer **Abbildung** $f\colon A \to B$ von der Menge $A \neq \emptyset$ in die Menge B eine (durch den Graphen festgelegte) Vorschrift verstehen, die jedem Element $x \in A$ ein eindeutiges Element $f(x) \in B$ zuordnet, d.h. $x \mapsto f(x)$.

  (2) Weiterhin nennen wir für $U \subset A$ die Menge $f(U) := \{y \in B \mid \exists x \in U\colon f(x) = y\}$ das **Bild von** U **unter** f. Gilt $f(A) = B$, so heißt die Funktion $f\colon A \to B$ **surjektiv**.

  (3) Sind $f\colon A \to B$ und $g\colon C \to D$ Abbildungen mit $f(A) \subset C$, so ist durch $g \circ f\colon x \mapsto g(f(x))$ (sprich: „g nach f") eine Abbildung $g \circ f\colon A \to D$ gegeben, welche die **Verkettung** oder auch die **Hintereinanderausführung** zweier Abbildungen genannt wird.[2]

  (4) Für eine Menge $V \subset B$ heißt die Menge $f^{-1}(V) := \{x \in A \mid f(x) \in V\}$ das **Urbild von** V **unter** f. Gilt $\forall x, \tilde{x} \in A\colon\ (f(x) = f(\tilde{x}) \Longrightarrow x = \tilde{x})$, so heißt die Funktion $f\colon A \to B$ **injektiv**.

  (5) Eine **Abbildung** $f\colon A \to B$ heißt **bijektiv**, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

[1] Es gilt stets $x \subset x$, d.h., x ist immer Teilmenge von sich selbst. Um anzuzeigen, dass eine Menge eine echte Teilmenge einer anderen ist, vereinbaren wir $x \subsetneq y \ :\Longleftrightarrow\ \big(x \subset y \ \wedge\ \neg(x = y)\big)$.

[2] **Vorsicht:** Im Allgemeinen gilt $g \circ f \neq f \circ g$, falls überhaupt beide Seiten gleichzeitig existieren.

Zusatzaufgabe 1.1: **(Aussagen und Quantoren)**

(a) Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien, d.h., für beliebige Aussagen A, B wahr?

(i) $A \implies A$ (ii) $(A \vee B) \implies B$ (iii) $(A \wedge B) \implies A$ (iv) $A \implies (B \implies A)$

(b) Geben Sie die Verneinungen der folgenden Aussagen an:

(i) $\forall a\colon \exists b\colon P(a,b)$, (ii) $\forall a\colon \forall b\colon P(a,b)$, (iii) $\exists a\colon \forall b\colon P(a,b)$, (iv) $\exists a\colon \exists b\colon P(a,b)$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.1:

(a) Wir überprüfen die Aussagen anhand von Wahrheitstafeln

(i) Nach den Wahrheitstafeln sind sowohl $w \implies w$ und $f \implies f$ wahre Aussagen, also ist $A \implies A$ für jede Belegung von A wahr.

(ii) + (iv) Aus den Wahrheitstafeln ergeben sich

A	B	$C := (A \vee B)$	$C \implies B$
w	w	w	w
w	f	w	f
f	w	w	w
f	f	f	w

und

A	B	$C := (B \implies A)$	$A \implies C$
w	w	w	w
w	f	w	w
f	w	f	w
f	f	w	w

Also ist die Aussage $A \vee B \implies B$ aufgrund der zweiten Zeile NICHT für alle Belegungen von A, B wahr.
Dagegen ist die Aussage $A \implies (B \implies A)$ tatsächlich für alle Belegungen von A, B wahr.

(iii) Da die Einträge in der zu $A \wedge B$ gehörigen Spalte innerhalb der Wahrheitstafel bis auf die erste Zeile immer falsch sind, in der ersten Zeile aber B wahr ist, ist die Aussage $\neg(A \wedge B) \vee B$ bei jeder Belegung der Variablen A, B wahr, also eine Tautologie.

(b) (i) $\exists a\colon \forall b\colon \neg P(a,b)$, (ii) $\exists a\colon \exists b\colon \neg P(a,b)$, (iii) $\forall a\colon \exists b\colon \neg P(a,b)$, (iv) $\forall a\colon \forall b\colon \neg P(a,b)$.

Zusatzaufgabe 1.2: **(Mengen)**

(a) Zeichnen Sie die Venn-Diagramme für Durchschnitt und Vereinigung zweier nichtleerer beliebiger Mengen A und B in den Fällen

(i) $\big(\neg(A \cap B = \emptyset) \wedge \neg(A \subset B)\big) \wedge \big(\neg(B \subset A)\big)$ (ii) $A \cap B = \emptyset$ (iii) $(A \subset B) \wedge \big(\neg(A = B)\big)$

(b) Bestimmen Sie für die Mengen $A = \{a, 4, 1000, \emptyset, \mathit{sieben}\}$, $B = \{\mathit{gruen}, \mathit{lila}, \mathit{rot}, 1000, 4, z\}$ und $C = \{2, 4, a, c, x, z, \mathit{lila}\}$ die Mengen

(i) $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge \neg(x \in B)\}$ (ii) $A \cap B$ (iii) $C \setminus (B \setminus A)$ (iv) $C \cap (A \setminus B)$

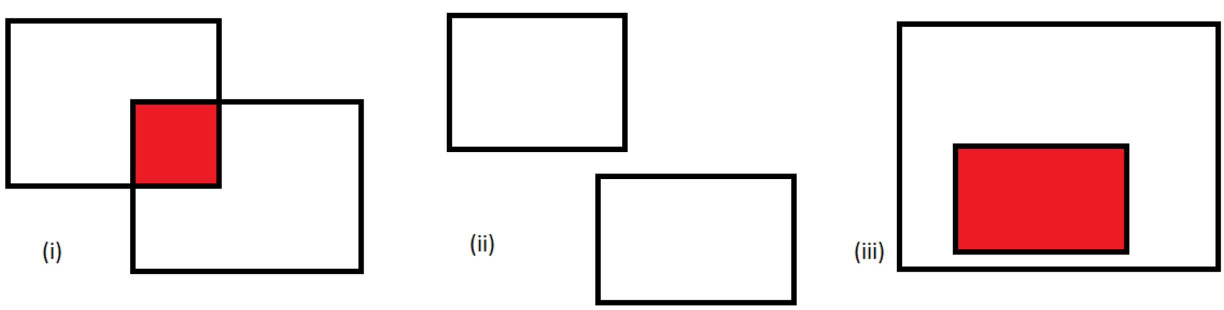
(c) Beweisen oder widerlegen Sie für beliebige Mengen U und W die Aussage

$$(U \cup W) \setminus (U \cap W) = (U \setminus W) \cup (U \setminus W) .$$

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 1.1 (a).

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.2:

(a)



(b) (i) $A \setminus B = \{a, \emptyset, sieben\}$ (ii) $A \cap B = \{1000, 4\}$ (iii) $C \setminus (B \setminus A) = \{2, 4, a, c, x\}$
(iv) $C \cap (A \setminus B) = \{a\}$

(c) Die Aussage ist wahr, denn da $\neg\big(x \in V \wedge \neg(x \in V)\big)$ eine Tautologie ist, gelten

$$\begin{aligned}
x \in (U \cup W) \setminus (U \cap W) &\iff x \in (U \cup W) \wedge \neg\,(x \in (U \cap W)) \qquad \ldots \text{ nach Definition}\\
&\iff (x \in U \vee x \in W) \wedge \neg\,(x \in U \wedge x \in W) \qquad \ldots \text{ nach Definition}\\
&\overset{\text{Morgan}}{\iff} (x \in U \vee x \in W) \wedge \Big(\neg(x \in U) \vee \neg(x \in W)\Big)\\
&\overset{\text{Distrib.}}{\iff} \Big((x \in U \vee x \in W) \wedge \neg(x \in U)\Big) \vee \Big((x \in U \vee x \in W) \wedge \neg(x \in W)\Big)\\
&\overset{\text{Distrib.}}{\iff} \Big(x \in W \wedge \neg(x \in U)\Big) \vee \Big(x \in U \wedge \neg(x \in W)\Big)\\
&\iff x \in W \setminus U \vee x \in U \setminus W \iff x \in \Big((U \setminus W) \cup (W \setminus U)\Big)
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 1.3: **(Relationen)**

(a) Konstruieren Sie auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ Relationen R_1, R_2, R_3, R_4, für die gelten:
  (i) R_1 ist reflexiv, transitiv, aber nicht symmetrisch.
  (ii) R_2 ist reflexiv, symmetrisch, aber nicht transitiv.
  (iii) R_3 ist transitiv, symmetrisch, aber nicht reflexiv.
  (iv) R_4 ist reflexiv, aber nicht transitiv und nicht symmetrisch.

(b) Ist die Relation $x \sim y \;:\iff\; \neg(x = y)$ reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch auf $\mathbb{Q}$?

(c) Welche der folgenden Relationen ist reflexiv, symmetrisch bzw. transitiv auf $\mathbb{Q}$?

(i) $x \sim y \;:\iff\; x \leq y$ (ii) $x \sim y \;:\iff\; x^2 + x = y^2 + y$ (iii) $x \sim y \;:\iff\; x^2 + y^2 = 1$

(d) Welche von den Relationen aus (c) sind antisymmetrisch ?

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.3:

(a) (i) Eine Relation R ist eine Teilmenge von $M \times M := \{(a, b) \;:\; a \in M \wedge b \in M\}$. Eine reflexive Relation muss alle Tupel (a, a) aus $M \times M$ enthalten. Eine transitive Relation muss mit den Tupel (a, b) und (b, c) auch stets das Tupel (a, c) enthalten. Bei einer nicht symmetrischen Relation gibt es (mindestens) ein Tupel $(a, b) \in R$, so dass $(b, a) \notin R$ gilt. Daher ist

$$R_1 = \left.\begin{matrix}\{(1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4),\\ & (2,2), & & (2,4),\\ & & (3,3), & \\ & & & (4,4)\end{matrix}\right\} \quad \text{oder} \quad R_1 = \left.\begin{matrix}\{(1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4),\\ & (2,2), & (2,3), & (2,4),\\ & & (3,3), & (3,4),\\ & & & (4,4)\end{matrix}\right\}$$

ein Beispiel für eine reflexive, transitive, aber nicht symmetrische Relation auf $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Dabei kennen wir die linke Relation als $a|b$ (d.h. a ist Teiler von b) und die rechte Relation als $a \leq b$. Weitere abstrakte Relationen wären beispielsweise

$$R_1 = \left.\begin{matrix}\{(1,1), & (1,2), & & \\ & (2,2), & & \\ & & (3,3), & \\ & & & (4,4)\end{matrix}\right\} \quad \text{oder} \quad R_1 = \left.\begin{matrix}\{(1,1), & (1,2), & & (1,4),\\ & (2,2), & & (2,4),\\ & & (3,3), & \\ & & & (4,4)\end{matrix}\right\}$$

(ii) Für die Reflexivität müssen alle Tupel (a, a) aus $M \times M$ in R enthalten sein. Für die Symmetrie muss mit jedem $(a, b) \in R$ auch $(b, a) \in R$ gelten. Um die Relation nicht transitiv zu gestalten, muss es mindestens zwei Tupel $(a,b) \in R$ und $(b,c) \in R$ geben, für die dann $(a,c) \notin R$ erfüllt ist. Daher ist

$$R_2 = \left\{ \begin{array}{llll} (1,1), & (1,2), & & \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & \\ & (3,2), & (3,3), & \\ & & & (4,4) \end{array} \right\} \quad \text{oder} \quad R_2 = \left\{ \begin{array}{llll} (1,1), & (1,2), & (1,3), & \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), \\ & (4,2), & (4,3), & (4,4) \end{array} \right\}$$

ein Beispiel für eine reflexive, symmetrische, aber nicht transitive Relation auf $M = \{1,2,3,4\}$. Ein weiteres Beispiel ist die Relation $|a-b| < 2$. Diese lässt sich darstellen durch

$$R_2 = \left\{ \begin{array}{llll} (1,1), & (1,2), & & \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & \\ & (3,2), & (3,3), & (3,4), \\ & & (4,3), & (4,4) \end{array} \right\}$$

(iii) Für die Transitivität muss mit je zwei Tupeln $(a,b) \in R$ und $(b,c) \in R$ auch $(a,c) \in R$ gelten. Für die Symmetrie muss mit jedem $(a,b) \in R$ auch $(b,a) \in R$ gelten. Um die Relation nicht reflexiv zu gestalten, muss $(a,a) \notin R$ für (mindestens) ein $a \in M$ gelten. Daher ist

$$R_3 = \{(1,1)\} \quad \text{oder} \quad R_3 = \left\{ \begin{array}{ll} (1,1), & (1,2), \\ (2,1), & (2,2) \end{array} \right\} \quad \text{oder} \quad R_3 = \left\{ \begin{array}{lll} (1,1), & (1,2), & (1,3), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3) \end{array} \right\}$$

ein Beispiel für eine transitive, symmetrische, nicht reflexive Relation auf $M = \{1,2,3,4\}$.

(iv) Für die Reflexivität müssen alle Tupel (a,a) aus $M \times M$ in R enthalten sein. Bei einer nicht symmetrischen Relation gibt es (mindestens) ein Tupel $(a,b) \in R$, so dass $(b,a) \notin R$ gilt. Um die Relation nicht transitiv zu gestalten, muss es mindestens zwei Tupel $(a,b) \in R$ und $(b,c) \in R$ geben, für die dann $(a,c) \notin R$ erfüllt ist. Daher ist

$$R_4 = \left\{ \begin{array}{llll} (1,1), & (1,2), & & \\ & (2,2), & (2,3), & \\ & (3,2), & (3,3), & \\ & & & (4,4) \end{array} \right\} \quad \text{oder} \quad R_4 = \left\{ \begin{array}{llll} (1,1), & (1,2), & (1,3), & \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4) \end{array} \right\}$$

ein Beispiel für eine reflexive, aber nicht transitive und nicht symmetrische Relation auf $M = \{1,2,3,4\}$. Dabei lässt sich die rechte Relation durch $b - a \leq 2$ ausdrücken. Ein weiteres Beispiel ist die Relation $a + 1 \neq b$. Diese lässt sich darstellen durch

$$R_4 = \left\{ \begin{array}{llll} (1,1), & & (1,3), & (1,4), \\ (2,1), & (2,2), & & (2,4), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4) \end{array} \right\}.$$

(b) Die Relation $x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; \neg(x = y)$ ist

- **nicht** reflexiv, da sogar $\forall x \colon \neg(x \sim x)$ wegen $\neg(x \sim x) \Longleftrightarrow x = x$ gilt,
- symmetrisch, da aus $\neg(x = y)$ stets auch $\neg(y = x)$ folgt,
- **nicht** transitiv, da (wähle $z = x$) im Fall $\neg(x = y)$, also $x \sim y$, und $\neg(y = x)$, also $y \sim x$, dennoch $\neg(x \sim x)$ wegen $x = x$ gilt,
- **nicht** antisymmetrisch, da beide Aussagen $\neg(x = y)$, also $x \sim y$, und $\neg(y = x)$, also $y \sim x$, genau die Negation von $x = y$ sind, so dass letzteres nicht daraus folgen kann.

(c) (i) Die Relation ist symmetrisch (denn für alle x gilt $x \leq x$) und transitiv (denn aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt stets auch $x \leq z$), jedoch ist sie nicht symmetrisch (denn aus $x \leq y$ folgt nicht zwingend $y \leq x$, beispielsweise $1 \leq 2$, jedoch $2 \not\leq 1$).

(ii) Die Relation ist reflexiv (denn $x^2+x = x^2+x$ ist für alle x eine wahre Aussage), symmetrisch (denn aus der Symmetrie des Gleichheitszeichen schließen wir auch auf $x^2+x = y^2+y \Longrightarrow y^2+y = x^2+x$) und auch transitiv (denn aus der Transitivität des Gleichheitszeichen schließen wir auch auf $x^2+x = y^2+y \wedge y^2+y = z^2+z \Longrightarrow x^2+x = z^2+z$). Es handelt sich also sogar um eine Äquivalenzrelation.

(iii) Die Relation ist nicht reflexiv (denn nicht alle x erfüllen $x^2+x^2 = 1$, beispielsweise $1^2+1^2 = 2 \neq 1$) und nicht transitiv (da aus $x^2+y^2 = 1$ und $y^2+z^2 = 1$ nicht zwingend $x^2+z^2 = 1$ folgt, beispielsweise ist $1^2+0^2 = 1$ und $0^2+1^2 = 1$, aber $1^2+1^2 = 2 \neq 1$), jedoch ist sie symmetrisch (denn mit der Kommutativität der Addition ergibt sich die Implikation $x^2+y^2 = 1 \Longrightarrow 1 = x^2+y^2 = y^2+x^2$).

(d) (i) Die Relation ist antisymmetrisch, denn aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt zwingend $x = y$.

(ii) Die Relation ist **nicht** antisymmetrisch, denn da $x^2+x = y^2+y$ zu $y^2+y = x^2+x$ und weiter zu $x^2-y^2 = y-x$ und somit auch zu $(x+y)(x-y) = -(x-y)$ äquivalent ist, folgt nur $x = y \vee x+y = -1$. Somit gilt etwa $0^2+0 = (-1)^2-1$, also $0 \sim (-1)$, und $(-1)^2-1 = 0^2+0$, also $(-1) \sim 0$, aber $0 \neq -1$.

(iii) Die Relation ist ebenfalls **nicht** antisymmetrisch, denn es gelten etwa $0^2+1^2 = 1$, also $0 \sim 1$, und $1^2+0^2 = 1$, also $1 \sim 0$, aber $0 \neq 1$.

Zusatzaufgabe 1.4: **(Abbildungen)**

(a) Sei M eine Menge mit m Elementen und N eine Menge mit n Elementen. Begründen Sie:

(i) Es existieren n^m Abbildungen von M nach N.

(ii) Im Fall $m \leq n$ existieren $\dfrac{n!}{(n-m)!}$ injektive Abbildungen von M nach N.

(b) Seien $X := \{0,1,2,3,4\}$, $Y := \{0,5,10,15\}$ und $A := X \times Y$, $B := \{x+y : x \in X, y \in Y\}$. Sei die Menge $R \subset A \times B$ definiert durch $R := \{((x,y), x+y) : x \in X, y \in Y\}$. Zeigen Sie, dass R der Graph einer bijektiven Abbildung von A nach B ist.

(c) Untersuchen Sie f jeweils auf Injektivität, Surjektivität, Bijektivität.

(i) $f\colon \{1,2\} \to \{1\}$, $x \mapsto 1$, (ii) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$, (iii) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $n \mapsto n+1$

(iv) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \begin{cases} m, & \exists m \in \mathbb{N}\colon n = m+m, \\ n, & \text{sonst}, \end{cases}$

(d) (i) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(ii) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

(e) Bestimmen Sie für die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ die folgenden Urbilder:

$$f^{-1}(\mathbb{R}),\quad f^{-1}(\{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}),\quad f^{-1}(\emptyset),\quad f^{-1}(\{1\}),\quad f^{-1}(\{0\}),\quad f^{-1}([-3,4]),\quad f^{-1}([1,9]).$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.4:

(a) (i) Für jedes der m Elemente gibt es n Möglichkeiten einer Zuordnung, also genau n^m verschiedene „Zuordnungsvorschriften".

(ii) Für das erste Element existieren n Möglichkeiten, für das zweite bleiben noch $n-1$ Möglichkeiten (aufgrund der geforderten Injektivität), für das dritte bleiben noch $n-2$ Möglichkeiten, ..., für das $m-1$te Element $n-m+2$ und schließlich für das $m$te Element genau $n-m+1$ Möglichkeiten einer Zuordnung, somit existieren also

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+2) \cdot (n-m+1) \;=\; \frac{n!}{(n-m)!}$$

verschiedene injektive Abbildungen von M nach N.

(b) Da R der Graph der Abbildung $f\colon A \to B$, $(x, y) \mapsto x + y$ ist, genügt es, die Bijektivität dieser Abbildung zu zeigen:

(i) Da das Bild $f(A) = \{x+y : x \in X, y \in Y\}$ mit der Menge B übereinstimmt, ist f offenbar surjektiv.

(ii) Da in der Abbildungstabelle

+	0	5	10	15
0	0	5	10	15
1	1	6	11	16
2	2	7	12	17
3	3	8	13	18
4	4	9	14	19

kein Wert mehrfach auftritt, besitzt jedes $b \in B$ unter f genau ein Urbild in A, d.h., aus $f((x, y)) = f((u, v))$ für $(x, y), (u, v) \in A$ folgt schon $(x, y) = (u, v)$ und somit die Injektivität.

(c) (i) Die Abbildung ist surjektiv, da $\{1\} = f(\{1, 2\})$, jedoch nicht injektiv, da $f(1) = 1 = f(2)$ und gleichzeitig $1 \neq 2$ gilt, also auch nicht bijektiv.

(ii) Die Abbildung ist injektiv, da aus $2n = 2m$ nach Kürzungsregeln (entsprechend Folgerung (i)) in einem Körper $n = m$ folgen, jedoch nicht surjektiv, da beispielsweise $3 \notin f(\mathbb{N})$, also auch nicht bijektiv.

(iii) Die Abbildung ist bijektiv, da sie aufgrund von $n + 1 = m + 1 \Longrightarrow n = m$ wieder nach Kürzungsregeln (entsprechend Folgerung (d)) in einem Körper injektiv und aufgrund von $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ surjektiv (denn für alle n außer für $n = 1$ ist $n+(-1)$ eine natürliche Zahl).

(iv) Die Abbildung ist surjektiv, da $\forall m \in \mathbb{N}\colon 2m \in f^{-1}(\{m\})$, also insbesondere $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ gilt, jedoch nicht injektiv, da beispielsweise $f(10) = 5 = f(5)$ und gleichzeitig $5 \neq 10$ gilt, also auch nicht bijektiv.

(d) (i) Etwa die Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 5n$ ist nicht surjektiv, da für alle nicht durch 5 teilbaren Zahlen kein Urbild existiert, etwa gilt $f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$. Dagegen ist sie injektiv, da aus $f(a) = f(b)$ zunächst $5a = 5b$ und weiter $5(a - b) = 0$, also mit der Nullteilerfreiheit eines Körpers $a - b = 0$, also $a = b$ folgt.

(ii) Nehme etwa die in (c.iv) angegebene Abbildung.

(e) (i) $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (ii) $f^{-1}(\{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}) = \emptyset$ (iii) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ (iv) $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$ (v) $f^{-1}(\{0\}) = 0$ (vi) $f^{-1}([-3, 4]) = [-2, 2]$ (vii) $f^{-1}([1, 9]) = [-3, -1] \cup [1, 3]$

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 2

Gruppen- bzw. Körperaxiome und ihre Folgerungen

- Ein Tupel $(M,*)$ mit einer nichtleeren Menge M, auf der eine Abbildung $*\colon M\times M \longrightarrow M$, $(m,n)\mapsto m*n$, definiert ist, heißt **Gruppe**, falls die folgenden Axiome erfüllt sind:

  (i) $\forall k,l,m\in M\colon k*(l*m)=(k*l)*m$ (Assoziativität)

  (ii) $\exists m_0\in M\ \forall m\in M\colon m*m_0=m=m_0*m$ (Existenz eines neutralen Elementes)

  (iii) $\forall m\in M\ \exists n\in M\colon m*n=m_0=n*m$ (Existenz von Inversen)

- Eine Gruppe $(M,*)$ heißt **kommutativ/ abelsch**,[3] falls ihre Verknüpfung $*$ zusätzlich erfüllt:

  (iv) $\forall k,l\in M\ :\ k*l=l*k$ (Kommutativität)

- **Definition (K):** Eine Menge $\mathbb{K}$ zusammen mit zwei Abbildungen $+\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K}$, $\cdot\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ (kurz $(\mathbb{K},+,\cdot)$) heißt ein **Körper**, wenn die folgenden fünf Eigenschaften erfüllt sind (wobei wir die Schreibweisen $x+y:=+(x,y)$ und $x\cdot y:=\cdot(x,y)$ benutzen):

(K1) $\forall x,y,z\in\mathbb{K}\colon \Big(\big((x+y)+z\ =\ x+(y+z)\big)\wedge\big((x\cdot y)\cdot z\ =\ x\cdot(y\cdot z)\big)\Big)$ (Assoziativität)
(K2) $\forall x,y\in\mathbb{K}\colon \Big(\big(x+y\ =\ y+x\big)\wedge\big(x\cdot y\ =\ y\cdot x\big)\Big)$ (Kommutativität)
(K3) $\exists a,b\in\mathbb{K}\colon \Big((a\neq b)\wedge\forall x\in\mathbb{K}\colon \big((x+a=x)\wedge(x\cdot b=x)\big)\Big)$ (Existenz neutraler Elemente)

Aufgrund der Eindeutigkeit (Übungsaufgabe) bezeichnen wir fortan a mit 0 und b mit 1.

(K4) $\forall x\in\mathbb{K}\colon \Big((\exists y\in\mathbb{K}\colon x+y=0)\wedge\big(x\neq 0\Longrightarrow(\exists z\in\mathbb{K}\colon x\cdot z=1)\big)\Big)$ (Existenz der Inversen)
(K5) $\forall x,y,z\in\mathbb{K}\colon x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$ (Distributivität)

- **Folgerungen aus den Körperaxiomen:** Sei $(\mathbb{K},+,\cdot)$ ein beliebiger Körper. Dann gelten:

  (a) Das neutrale Element der Addition ist eindeutig. (Dieses bezeichnen wir mit 0.)

  (b) Jedes $a\in\mathbb{K}$ besitzt ein eindeutiges additives Inverse. (Dieses bezeichnen wir mit $-a$).

  (c) Das neutrale Element der Addition ist zu sich selbst additiv invers.

  (d) Zu beliebigen Körperelementen a,b gibt es genau ein x, so dass $a+x=b$ gilt.

  (e) Für jedes Körperelement $a\in\mathbb{K}$ gilt: $-(-a)=a$.

  (f) Für beliebige Körperelemente $a,b\in\mathbb{K}$ gilt: $-(a+b)=(-a)+(-b)$

  (g) Das neutrale Element der Multiplikation ist eindeutig. (Dieses bezeichnen wir mit 1.)

  (h) Jedes $a\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$ besitzt ein eindeutiges multiplikatives Inverse. (Bezeichnung: a^{-1}).

  (i) Zu beliebigen Körperelementen a,b mit $a\neq 0$ gibt es genau ein x, so dass $ax=b$ gilt.

  (j) Für alle Körperelemente $a\in\mathbb{K}$ gilt $0\cdot a=0$.

  (k) Ein Körper ist nullteilerfrei, d.h., $ab=0\Longrightarrow a=0\vee b=0$.

  (l) Für alle $a\in\mathbb{K}$ gilt: $(-1)\cdot a=-a$.

  (m) Für jedes Körperelement $a\in\mathbb{K}$ mit $a\neq 0$ gilt: $(a^{-1})^{-1}=a$.

  (n) Für beliebige Körperelemente $a,b\in\mathbb{K}$ mit $a\neq 0$ und $b\neq 0$ gilt: $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$.

  (o) Für beliebige Körperelemente $a,b\in\mathbb{K}$ gilt $a\cdot(-b)\ =\ -(a\cdot b)$.

  (p) Für beliebige Körperelemente $a,b,c\in\mathbb{K}$ gilt $a\cdot(b-c)\ =\ (a\cdot b)-(a\cdot c)$.

[3] nach dem norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel (1802-1829)

Anordnung, archimedische Körper, induktive Mengen, vollständige Induktion

- **Definition (A):**
  - Eine (nichtleere) Teilmenge $\mathbb{K}^+ \subset \mathbb{K}$ eines Körpers $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ heißt **Anordnung von** $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

  (A1) Für jedes $x \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Alternativen: $x \in \mathbb{K}^+$ oder $x = 0$ oder $-x \in \mathbb{K}^+$.

  (A2) Für alle $x,\, y \in \mathbb{K}$ gilt: $\Big(x, y \in \mathbb{K}^+ \Longrightarrow \big(x + y \in \mathbb{K}^+ \ \wedge\ x \cdot y \in \mathbb{K}^+\big)\Big)$.

  - Ist $\mathbb{K}^+$ eine Anordnung von $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, so heißt $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K}^+)$ ein **angeordneter Körper**.
  - In einem **angeordneten Körper** definieren wir die Relationen $<$, $\leq$, $>$ und $\geq$ wie folgt (wobei x und $y \in \mathbb{K}$ beliebig sind):

    (i) $x < y \ :\Longleftrightarrow\ y - x \in \mathbb{K}^+$.
    (ii) $x \leq y \ :\Longleftrightarrow\ \big(x = y \vee y - x \in \mathbb{K}^+\big)$.
    (iii) $x > y \ :\Longleftrightarrow\ x - y \in \mathbb{K}^+$.
    (iv) $x \geq y \ :\Longleftrightarrow\ \big(x = y \vee x - y \in \mathbb{K}^+\big)$.

- **Folgerungen:** Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K}^+)$ ein angeordneter Körper. Dann folgen die Aussagen:

  (a) Für zwei Elemente $x, y \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Alternativen: $x < y$ oder $x = y$ oder $x > y$.
  (b) $\forall x, y, z \in \mathbb{K}\colon \Big(\big(x < y \wedge y < z\big) \Longrightarrow x < z\Big)$ (Transitivität)
  (c) $\forall x, y, z \in \mathbb{K}\colon \big(x < y \Longrightarrow x + z < y + z\big)$ (Translationsinvarianz)
  (d) $\forall x, y \in \mathbb{K}\colon \big(x < y \Longrightarrow -y < -x\big)$ (Spiegelung)
  (e) $\forall u, v, x, y \in \mathbb{K}\colon \Big(\big(x < y \wedge u < v\big) \Longrightarrow x + u < y + v\Big)$ (Addition von Ungleichungen)
  (f) $\forall x, y, z \in \mathbb{K}\colon \Big(\big(x < y \wedge 0 < z\big) \Longrightarrow xz < yz\Big)$ (Streckung/Stauchung)
  (g) $\forall u, v, x, y \in \mathbb{K}\colon \Big(\big(0 \leq x < y \wedge 0 \leq u < v\big) \Longrightarrow xu < yv\Big)$ (Multiplikation v. Ungleichungen)
  (h) $\forall x, y, z \in \mathbb{K}\colon \Big(\big(x < y \wedge z < 0\big) \Longrightarrow xz > yz\Big)$ (Multiplikation mit Negativen)
  (i) $\forall x \in \mathbb{K}\colon \big(x \neq 0 \Longrightarrow x^2 > 0\big)$. Insbesondere gilt $1 > 0$. (Nichtnegativität von Quadraten)
  (j) $\forall x \in \mathbb{K}\colon \big(x > 0 \Longleftrightarrow x^{-1} > 0\big)$ (Vorzeicheninvarianz bei Inversion)
  (k) $\forall x, y \in \mathbb{K}\colon \big(0 < x < y \Longrightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}\big)$ (Umkehrung bei Inversion)

- Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K}^+)$ ein angeordneter Körper. Das **Maximum** bzw. das **Minimum** zweier Körperelemente definieren wir durch:

$$\max(a, b) \ := \ \begin{cases} a & \text{, falls } a \geq b \text{ ,} \\ b & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \min(a, b) \ := \ \begin{cases} a & \text{, falls } a \leq b \text{ ,} \\ b & \text{sonst.} \end{cases}$$

- **Definition:** Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K}^+)$ ein angeordneter Körper.
  - Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{K}$ heißt **induktiv (bzgl.** $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K}^+)$), falls gilt[4]

$$0 \in S \wedge \big(\forall x \in \mathbb{K}\colon (x \in S \Longrightarrow x + 1 \in S)\big) \ . \tag{2.1}$$

  - Die Menge $\mathbb{N}_{\mathbb{K}} \ := \ \Big\{x \in \mathbb{K} \mid \forall S \subset \mathbb{K}\colon \big(S \text{ induktiv } \Longrightarrow x \in S\big)\Big\}$ nennen wir die **Menge der natürlichen Zahlen (bzgl.** $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K}^+)$).

    Bem.: Die Menge $\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ ist induktiv und darüber hinaus die kleinste (bzgl. Mengeninklusion) induktive Menge (bzgl. $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K}^+)$).
  - Ein angeordneter Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K}^+)$ heißt **archimedisch** $:\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{K}\ \exists n \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}\colon x < n$.

[4] $\mathbb{K}$ selbst ist induktiv, da $0 \in \mathbb{K}$ sowie $1 \in \mathbb{K}$ und die Addition per Definition nicht aus $\mathbb{K}$ hinausführen kann.

- **Lemma (Beweisprinzip der vollständigen Induktion:)**
  Sei $A(n)$ ein Aussage, die für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sinnvoll formuliert werden kann.
  Angenommen, es gelte $A(0) \wedge \Big(\forall n \in \mathbb{N}_0\colon \big(A(n) \Longrightarrow A(n+1)\big)\Big)$.
  Dann folgt bereits, dass die Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen wahr ist.
  Beweis:
  Für die Menge $S = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid A(n) \text{ wahr }\}$ gilt einerseits $S \subset \mathbb{N}_0$ per Konstruktion und andererseits $S \supset \mathbb{N}$, da sie induktiv ist. Also folgt $S = \mathbb{N}_0$, was die Behauptung zeigt.

Zusatzaufgabe 2.1: **(Abbildungen)**

(a) Seien X, Y, Z Mengen und $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ Funktionen. Außerdem sei $h = g \circ f\colon X \to Z$ (sprich „g nach f“) die Verknüpfung von g und f gegeben durch $h(x) = g(f(x))$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen richtig sind:

  (i) Sind f und g injektiv, so ist auch h injektiv.

  (ii) Sind f und g surjektiv, so ist auch h surjektiv.

  (iii) Sind f und g bijektiv, ist auch h bijektiv.

(b) Geben Sie im Fall der Bijektivität in (iii) eine Formel für h^{-1} an ?

(c) Kann man in den Aussagen (i), (ii) oder (iii) eine der Voraussetzungen weglassen ?

(d) Gelten auch die umgekehrten Implikationen in (i), (ii) oder (iii)?

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.1:

(a) Alle drei Aussagen sind wahr, denn

  (i) Sind f und g injektiv und gilt $h(x) = h(y)$, also $g(f(x)) = g(f(y))$, so folgt mit der Injektivität von g zunächst $f(x) = f(y)$ und mit der Injektivität von f schließlich $x = y$.

  (ii) Sind f und g surjektiv und $z \in Z$ beliebig, so folgt aus der Surjektivität von g die Existenz eines $y \in Y$ mit $g(y) = z$ und aus der Surjektivität von f die Existenz eines $x \in X$ mit $f(x) = y$ und somit $z = g(y) = g(f(x)) = h(x)$.

  (iii) Sind f und g bijektiv, so sind insbesondere die Voraussetzungen von (i) und (ii) erfüllt, womit folgt, dass h injektiv und surjektiv, also bijektiv ist.

(b) Sind f und g bijektiv, so gilt wegen $f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f \;=\; \mathrm{Id}_X$ und $g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \;=\; \mathrm{Id}_Z$ für die Inverse $h^{-1} = (g \circ f)^{-1} \;=\; f^{-1} \circ g^{-1}$.

(c) Da wir alle Voraussetzungen beim Nachweis benötigt haben, kann keine weggelassen werden.[5]

(d) Nein: Ein Gegenbeispiel für alle ist $X = Z = \{1\}$ und $Y = \{a, b\}$ sowie $f\colon x \mapsto a$, $g\colon y \mapsto 1$.

Zusatzaufgabe 2.2: **(Folgerungen aus den Körperaxiomen)**

(a) Zeigen Sie die Folgerungen (a) und (g), also die Eindeutigkeit der neutralen Elemente.

(b) Zeigen Sie die Folgerungen (b) und (h), also die Eindeutigkeit inverser Elemente.

(c) Zeigen Sie die Folgerungen (d),(j) und (k), d.h., zeigen Sie:

  (i) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für gegebene $a, b \in \mathbb{K}$ ist eine Lösung x der Gleichung $b = x + a$ eindeutig.

  (ii) In einem Körper $\mathbb{K}$ gilt: Die Multiplikation mit dem neutralen Element der Addition ergibt stets das neutrale Element der Addition, d.h., $\forall x \in \mathbb{K}\colon 0 \cdot x = 0$.

  (iii) Ein Körper ist **nullteilerfrei**: Aus $xy = 0$ folgt zwingend, dass $x = 0$ oder $y = 0$ ist.

[5] Genau genommen, müsste man zeigen, dass jeder Beweis der Aussage diese Voraussetzungen benötigt. Alternativ könnten wir auch für jede der Situationen ein Gegenbeispiel konstruieren.

(d) Zeigen Sie die Folgerungen (e), (f), (i), (l), (m), (n), d.h.,

(i) Es gilt $-(-x) = x$.

(ii) Es gilt $-(a+b) = (-a) + (-b)$

(iii) $\forall a, b \in \mathbb{K}\colon\ (a \neq 0 \Longrightarrow (\exists! x\ :\ ax = b))$.

(iv) $\forall x \in \mathbb{K}\colon \big(x \neq 0 \Longrightarrow (x^{-1})^{-1} = x\big)$.

(v) $\forall x, y \in \mathbb{K}\colon \big((x \neq 0 \wedge y \neq 0) \Longrightarrow x^{-1}y^{-1} = (xy)^{-1}\big)$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.2:

(a) (i) Gilt auch für $a' \in \mathbb{K}$ die Aussage $\forall x \in \mathbb{K}\colon x + a' = x$, so gilt insbesondere $a + a' = a$. Da nach **(K3)** ebenso $a' + a = a'$ und nach **(K2)** auch $a' + a = a + a'$ gilt, folgt mit der Transitivität und Symmetrie des Gleichheitszeichen auch $a' = a$, denn es gilt nun insgesamt $a' = a' + a = a + a' = a$.

(ii) Die Aussage für b folgt analog, indem in obiger Argumentation $+$ durch $\cdot$ ersetzt wird.

(b) (i) Ist y' ein weiteres Element von $\mathbb{K}$ mit $x + y' = 0$, so gilt
$y = y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' = (x + y) + y' = 0 + y' = y' + 0 = y'$.

(ii) Die Aussage für z folgt analog.

(c) (i) Dies ist wahr, denn sind x, x' zwei Lösungen, dann gilt

$$\begin{aligned} x &\overset{a+(-a)=0}{=} x + (a + (-a)) \overset{\text{assoziativ}}{=} (x + a) + (-a) \overset{b=x+a}{=} b + (-a) \overset{b=x'+a}{=} (x' + a) + (-a) \\ &\overset{\text{assoziativ}}{=} x' + (a + (-a)) \overset{a+(-a)=0}{=} x'. \end{aligned}$$

(ii) Es gilt $0 + 0 = 0$ (da 0 neutrales Element der Addition). Daher gilt auch

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x \overset{\text{distributiv}}{=} 0 \cdot x + 0 \cdot x.$$

Andererseits gilt auch $0 \cdot x = 0 + 0 \cdot x$. Da wir nach (a) wissen, dass für gegebene a, b eine Lösung x der Gleichung $b = x + a$ eindeutig ist, können wir $0 \cdot x = 0$ folgern.

(iii) Sei $xy = 0$ und angenommen $x \neq 0$. Dann besitzt x ein Inverses x^{-1}, und mit diesem gilt

$$y \overset{1\ \text{neutral}}{=} 1 \cdot y \overset{x^{-1}x=1}{=} (x^{-1}x)y \overset{\text{assoziativ}}{=} x^{-1}(xy) = x^{-1} \cdot 0 \overset{\text{kommutativ}}{=} 0 \cdot x^{-1} \overset{\text{(b)}}{=} 0.$$

Also folgt aus $xy = 0$ und $x \neq 0$ automatisch $y = 0$, wodurch die Aussage bewiesen ist.

(d) (i) Da $-x$ das Negative von x bezeichnet, gilt $x + (-x) = 0$. Andererseits bezeichnet $-(-x)$ das Negative von $-x$, daher gilt $(-x) + (-(-x)) = 0$. Somit sind sowohl x als auch $-(-x)$ Negative von $-x$, aufgrund der zuvor bewiesenen Eindeutigkeit Negativer gilt also $x = -(-x)$.

(ii) Mit $-(a + b)$ wird das eindeutige inverse Element zu $a + b$ bezeichnet. da auch

$$\begin{aligned} ((-a) + (-b)) + (a + b) &= ((-a) + (-b)) + (b + a) \\ &= (-a) + (((-b) + b) + a)) = (-a) + (0 + a) = (-a) + a = 0 \end{aligned}$$

gilt, folgt zwingend $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

(iii) Da $a \neq 0$, existiert ein $a^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$, also löst $x = a^{-1}b$ wegen $a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = 1 \cdot b = b$ die Gleichung $ax = b$. Um die Eindeutigkeit zu überprüfen sei nun $y \in \mathbb{R}$ eine weitere Lösung von $ax = b$. Dann gilt $y = 1 \cdot y = (a^{-1}a)y = a^{-1}(ay) = a^{-1}b$, womit die Eindeutigkeit gezeigt ist.

(iv) Eben wurde bewiesen, dass $\forall a, b \in \mathbb{K}\colon\ (a \neq 0 \Longrightarrow (\exists! x\ :\ ax = b))$.

Nun schauen wir uns die Gleichung $ax = 1$ für ein beliebiges $a \neq 0$ an. Aus der Eindeutigkeit der Lösung x schließen wir jetzt auch auf die Eindeutigkeit des Inversen a^{-1}.

Sei nun $x \in \mathbb{K}$ beliebig mit $x \neq 0$, dann folgt, dass auch $x^{-1} \neq 0$ gilt. Insbesondere besitzen nun beide Inverse x^{-1} und $(x^{-1})^{-1}$, also gilt insbesondere $x^{-1}x = 1$ und $x^{-1}(x^{-1})^{-1} = 1$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung y für die Gleichung $x^{-1}y = 1$ erhalten wir nun $x = (x^{-1})^{-1}$ wie behauptet.

(v) Seien $x, y \in \mathbb{K}$ beliebig mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Dann folgt (oder wie in der Vorlesung behandelt), dass auch $x^{-1} \neq 0$ und $y^{-1} \neq 0$. Aus den Nullteilerfreiheit eines Körpers wissen wir auch noch, dass $xy \neq 0$ ist. Nun betrachten wir die Gleichung $(xy)a = 1$. Diese besitzt die eindeutige Lösung $a = (xy)^{-1} \cdot 1 = (xy)^{-1}$. Andererseits gilt nach den Körperaxiomen auch

$$(xy)(x^{-1}y^{-1}) \;=\; (xy)(y^{-1}x^{-1}) \;=\; (x((yy^{-1})x^{-1}) \;=\; (x(1 \cdot x^{-1})) \;=\; xx^{-1} \;=\; 1\,.$$

Somit löst auch $x^{-1}y^{-1}$ die Gleichung $(xy)a = 1$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung a muss nun $x^{-1}y^{-1} = (xy)^{-1}$ gelten.

Zusatzaufgabe 2.3: (Äquivalente Definition eines Körpers)

Zeigen Sie, dass die Definition (K) eines Körpers äquivalent zur folgenden Charakterisierung ist:

Ein **Körper** ist ein Tripel $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge $\mathbb{K}$, auf der zwei assoziative Verknüpfungen $+\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $(k_1, k_2) \mapsto k_1 + k_2$ und $\cdot\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $(k_1, k_2) \mapsto k_1 \cdot k_2$ so definiert sind, dass

(1′) $(\mathbb{K}, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element e_+ ist,

(2′) $(\mathbb{K} \setminus e_+, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist

erfüllt wird und zusätzlich gilt:

(3′) $\forall a, b, c \in \mathbb{K}\colon \Big(a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \;\wedge\; (b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)\Big)$ (Distrib.).[6]

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.3:

(a) Wie zeigen: $\Big(\mathbf{(K1)} \wedge \mathbf{(K2)} \wedge \mathbf{(K3)} \wedge \mathbf{(K4)} \wedge \mathbf{(K5)}\Big) \Longrightarrow \cdot$ assoziativ $\wedge \Big((1') \wedge (2') \wedge (3')\Big)$.

- Da **(K1)** die Assoziativität von $\cdot\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ beinhaltet, folgt diese automatisch.
- Die Aussagen **(K5)** und **(K2)** implizieren (3′).
- Da die Aussagen **(K1)** bis **(K4)** für die Operation + die Aussagen (i) bis (iv) der Definition einer Gruppe beinhalten, folgt analog schon die Gültigkeit von (1′).
- Da $0 \neq 1$ nach **(K3)** gilt, folgt $1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Wegen $x \cdot 0 = 0$ für alle x (wie eben gezeigt) ist die zweite Aussage aus **(K4)** äquivalent zu $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\colon \Big(\exists z \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\colon x \cdot z = 1\Big)$. Folglich implizieren die Aussagen **(K1)** bis **(K4)** auch (2′).

(b) Wie zeigen: $\cdot$ assoziativ $\wedge\Big((1') \wedge (2') \wedge (3')\Big) \Longrightarrow \Big(\mathbf{(K1)} \wedge \mathbf{(K2)} \wedge \mathbf{(K3)} \wedge \mathbf{(K4)} \wedge \mathbf{(K5)}\Big)$.

- Da (3′) die Aussage **(K5)** enthält, folgt **(K5)** trivialerweise.
- Da $\cdot$ assoziativ und (1′) nach Definition einer Gruppe (Eigenschaft (i)) auch die Assoziativität von + enthält, folgt **(K1)**.
- Da wir mit Hilfe der zweiten Aussage aus (3′) auch $0 \cdot x = 0$ für alle x zeigen können, folgt zusammen mit (1′) und (2′) entsprechend der Definition einer abelschen Gruppe (Eigenschaft (iv)) auch **(K2)**.
- Mit derselben Begründung folgt zusammen mit (1′) und (2′) entsprechend der Definition einer Gruppe (Eigenschaft (ii)) auch **(K3)**.
- Mit (1′) und (2′) entsprechend der Definition einer Gruppe (Eigenschaft (iii)) folgt schließlich auch **(K4)**.

[6] Dies ist für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ genau das Axiom III im Forster. Da aus diesem $x \cdot 0 = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt (siehe unten), sind (1′),(2′) und (3′) für die reellen Zahlen äquivalent zu den Axiomen I,II und III im Forster.

Zusatzaufgabe 2.4: (a) Wie sehen die kleinste Gruppe und der kleinste Körper aus ?

(b) Zeigen Sie, dass es keinen Körper mit genau vier Elementen gibt, in dem die Elemente $0, 1, 1+1$ und $1+1+1$ verschieden sind.

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.4:

(a) (i) Die kleinste existierende Gruppe enthält nur ein Element, denn definieren wir auf $M = \{g\}$ die Verknüpfung $*\colon M \times M \to M$ durch $g * g = g$, dann ist g das neutrale Element, zu sich selbst invers und offenbar ist die Assoziativität auch erfüllt. Darüber hinaus ist dann $(M, *)$ auch noch abelsch.

(ii) Da der kleinste Körper mindestens die neutralen Elemente der Addition und der Multiplikation enthalten muss, besteht er aus mindestens 2 Elementen. Dies genügt in der Tat. Nehmen wir etwa die Menge der Äquivalenzklassen $M = \{[0]_\sim, [1]_\sim\}$ auf $\mathbb{Z}$ bezüglich der Äquivalenzrelation $a \sim b :\Longleftrightarrow 2|(b-a)$ und versehen sie durch $0+1 = 1 = 1+0$, $0+0 = 0 = 1+1$ sowie $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 = 0$ und $1 \cdot 1 = 1$ mit Verknüpfungen $+\colon M \times M \to M$, $\cdot\colon M \times M \to M$, so ist $(M, +, \cdot)$ ein Körper.

(b) Angenommen, es gäbe einen Körper mit genau vier Elementen, in dem die Elemente $0, 1, 1+1$ und $1+1+1$ verschieden sind. Da $1+0 = 1 \neq 0$ sowie nach Voraussetzung $1+1 \neq 0$ und $(1+1)+1 \neq 0$ muss in diesem Körper das Inverse zu 1 folglich das verbleibende Element $1+1+1$ sein, also $(1+1+1)+1 = 0$ gelten Nach der Distributivität und der Assoziativität folgt nun aber

$$(1+1)(1+1) \;=\; 1 \cdot (1+1) + 1 \cdot (1+1) \;=\; (1+1) + (1+1) \;=\; (1+1+1)+1 \;=\; 0\,,$$

wonach nun aber $1+1$ als Nichtnullelement ein Nullteiler wäre, im Widerspruch zur Folgerung (d) aus den Körperaxiomen. Demnach können die Elemente $0, 1, 1+1$ und $1+1+1$ nicht alle verschieden sein.

Zusatzaufgabe 2.5: **(Beispiel eines endlichen Körpers)**

Gegeben sei die dreielementige Menge $\mathbb{K} = \{0, 1, b\}$. Es existiert genau eine Möglichkeit, die Addition $\oplus\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ und die Multiplikation $\otimes\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ derart zu definieren, dass $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ zu einem Körper wird. Finden Sie diese, d.h., füllen Sie die untenstehende Additions- und die untenstehende Multiplikationstabelle derart aus, dass die Körperaxiome erfüllt werden:

$\oplus$	0	1	b
0	0	1	b
1	1	b	0
b	b	0	1

$\otimes$	0	1	b
0	0	0	0
1	0	1	b
b	0	b	1

Zusatzaufgabe 2.6: Beweisen Sie die Folgerungen (a) bis (k) aus den Anordnungsaxiomen.

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.6:

(a) Die Aussage ist äquivalent dazu, dass einer der drei Alternativen $y - x \in \mathbb{K}^+$ oder $y - x = 0$ oder $x - y \in \mathbb{K}^+$ gilt, was für das Element $y - x \in \mathbb{K}$ in einem angeordneten Körper gilt.

(b) Es ist $x < y \wedge y < z$ äquivalent zu $y - x \in \mathbb{K}^+ \wedge z - y \in \mathbb{K}^+$. Nach **(A2)** der Definition angeordneter Körper muss dann $(z-y)+(y-x) = z - x \in \mathbb{K}^+$ gelten, was gleichbedeutend mit $x < z$ ist.

(c) Es ist $x < y \Longleftrightarrow (y+z) - (x+z) = y - x \in \mathbb{K}^+ \Longleftrightarrow x + z < y + z$.

(d) Es ist $x < y \iff (-x) - (-y) = y - x \in \mathbb{K}^+ \iff -y < -x$.
Alternativ können wir Translationsinvarianz (Folgerung (c)) mit $z = -x - y$ verwenden.

(e) Direkt nach Definition erhalten wir $x < y \wedge u < v \iff y - x \in \mathbb{K}^+ \wedge v - u \in \mathbb{K}^+ \overset{(2)}{\Longrightarrow} (y+v) - (x+u) = (y-x) + (v-u) \in \mathbb{K}^+ \Longrightarrow x + u < y + v$.
Alternativ folgen mit Translationsinvarianz (Folgerung (c)) $x + u < y + u$ und $y + u < y + v$ und mit Transitivität (Folgerung (b)) dann auch $x + u < y + v$.

(f) Es ist $x < y \wedge 0 < z \iff y - x \in \mathbb{K}^+ \wedge z \in \mathbb{K}^+ \overset{\textbf{(A2)}}{\Longrightarrow} yz - xz = (y-x)z \in \mathbb{K}^+ \iff xz < yz$.

(g) Im Fall $x = 0$ oder $u = 0$ folgt $xu = 0 < yv$, da $yv \in \mathbb{K}^+$ nach Eigenschaft **(A2)** der Definition angeordneter Körper aus $y, v \in \mathbb{K}^+$ (da $0 < v \wedge 0 < y$ nach Voraussetzung) folgt.
Anderenfalls sind $0 < x, u$, also liefert einerseits Folgerung (f) zunächst $xu < yu$ und $yu < yv$ und andererseits die Transitivität (Folgerung (b)) dann ebenfalls $xu < yv$, wie behauptet.

(h) Es gilt $x < y \wedge z < 0 \overset{(d)}{\Longrightarrow} x < y \wedge 0 < -z \overset{(f)}{\Longrightarrow} -zx < -zy \overset{(d)}{\Longrightarrow} zy < zx \iff yz < xz$.

(i) Wegen $1^2 = 1 \neq 0$ folgt $1 > 0$, falls die Aussage wahr ist. Aufgrund Eigenschaft **(A1)** aus der Definition angeordneter Körper sind für $x \neq 0$ nur die Fälle $x \in \mathbb{K}^+$ oder $-x \in \mathbb{K}^+$ möglich:

- Es gilt $x \in \mathbb{K}^+ \overset{\textbf{(A2)}}{\Longrightarrow} x^2 = x \cdot x \in \mathbb{K}^+ \iff 0 < x^2$.
- Es gilt $-x \in \mathbb{K}^+ \overset{\textbf{(A2)}}{\Longrightarrow} x^2 = 1 \cdot x^2 = (-1)^2 x^2 = (-x)^2 = (-x) \cdot (-x) \in \mathbb{K}^+ \iff 0 < x^2$.

(j) Wegen $0 \cdot x = 0$ gilt $x > 0 \Longrightarrow x^{-1} \neq 0 \overset{(i)}{\Longrightarrow} (x^{-1})^2 > 0 \overset{\textbf{(A2)}}{\Longrightarrow} x^{-1} = 1 \cdot x^{-1} = (xx^{-1}) \cdot x^{-1} > 0$.

(k) $0 < x < y \overset{(j)}{\Longrightarrow} 0 < x^{-1} \wedge 0 < y^{-1} \overset{\textbf{(A2)}}{\Longrightarrow} 0 < x^{-1}y^{-1} \overset{(f)}{\Longrightarrow} y^{-1} = x\big(x^{-1}y^{-1}\big) < y\big(x^{-1}y^{-1}\big) = x^{-1}$.

Zusatzaufgabe 2.7: (Anwendung der Anordnungsaxiome & ihrer Folgerungen)

(a) Zeigen Sie: Existieren in einem Körper zwei Elemente a und b mit $a^2 + b^2 = -1$, so kann dieser Körper nicht angeordnet werden.

(b) Beweisen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ mit $b, d > 0$ die Aussage: $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d} \iff ad < bc$.

(c) Beweisen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, d > 0$ die Aussage: $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d} \Longrightarrow \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.7:

(a) Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper und bezeichne 0 das neutrale Element der Addition und 1 das neutrale Element der Multiplikation. Angenommen, es existieren in einem Körper zwei Elemente a und b mit $a^2 + b^2 = -1$. Und nehmen wir weiter an, dass es eine Anordnung $\prec$ gibt, die sich mit den Körperaxiomen verträgt (für die also insbesondere die Anordnungsaxiome gelten). Dann müssten alle Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen ebenfalls gelten. Insbesondere müsste dann das Quadrat jedes Körperelementes $a \neq 0$ die Relation $0 \prec a^2$ erfüllen (inklusive $0 \prec 1^2 = 1 \cdot 1 = 1$). Wegen $0 \prec b \Longrightarrow -b \prec 0$ und $c \prec 0 \wedge d \prec 0 \Longrightarrow c + d \prec 0$ erhielten wir dann den Widerspruch

$$a^2 + b^2 = -1 \quad \overset{+(-b^2)}{\Longrightarrow} \quad 0 \prec a^2 \;=\; \underbrace{-1}_{\prec 0} + \underbrace{(-b^2)}_{\prec 0} \;\prec\; 0\,.$$

Somit kann es keine mit den Körperaxiomen verträgliche Anordnung auf dem Körper $\mathbb{K}$ geben.

(b)
- Seien $b, d > 0$ und $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$. Laut Definition eines angeordneten Körpers muss einerseits auch $b \cdot d > 0$ sein und andererseits nach Folgerung (f) somit $ad = bd \cdot \dfrac{a}{b} < bd \cdot \dfrac{c}{d} = bc$ gelten.

- Seien $b, d > 0$ und $ad < bc$. Nach Folgerung (j) muss dann auch $b^{-1}, d^{-1} > 0$ sowie Definition der Anordnung auch $b^{-1} \cdot d^{-1} > 0$ gelten. Wiederum nach Folgerung (f) erhalten wir nun $\frac{a}{b} = b^{-1} \cdot d^{-1} \cdot ad < b^{-1} \cdot d^{-1} \cdot bc = \frac{c}{d}$.

(c) (i) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \overset{(b)}{\Longrightarrow} ad < bc \Longrightarrow ab + ad < ab + bc \Longrightarrow a(b+d) < b(a+c) \overset{(b)}{\Longrightarrow} \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$

(ii) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \overset{(b)}{\Longrightarrow} ad < bc \Longrightarrow ad + cd < bc + cd \Longrightarrow (a+c)d < c(b+d) \overset{(b)}{\Longrightarrow} \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Zusatzaufgabe 2.8: (a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon n \geq 0$.

(b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n^2 + n$? (c) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $n! \geq 3^n$?

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.8:

(a) Wegen $0 = 0$ ist der Induktionsanfang $0 \leq 0$ wahr. Gilt nun $n \geq 0$, dann auch $n + 1 \geq 1 \geq 0$.

(b) Wegen $2 \leq 1 + 1$, $4 \leq 4 + 2$, $8 \leq 9 + 3$, $16 \leq 16 + 4$ ist die Aussage für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ schon mal falsch. Wir zeigen nun, dass die Aussage für alle $n \geq 5$ gilt:

- Induktionsanfang: Es ist $2^5 = 32 > 30 = 25 + 5 = 5^2 + 5$ eine wahre Aussage. (A(5))
- Induktionsschritt:
  Induktionsvoraussetzung: Es gelte $2^n > n^2 + n$ für $n \geq 5$. (A(n))
  Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $2^{n+1} > (n+1)^2 + (n+1)$. (A(n+1))
  Beweis: Gilt $2^n > n^2 + n$ und $n \geq 5 > 2$, dann folgt auch

$$(n+1)^2 + n + 1 = n^2 + 2n + n + \underbrace{2}_{<n} < n^2 + 2n + \underbrace{2}_{<n} \cdot n < 2(n^2 + n) < 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} .$$

(c) Wegen $1! = 1 < 3 = 3^1$, $2! = 2 < 9 = 3^2$, $3! = 6 < 27 = 3^3$, $4! = 24 < 81 = 3^4$ sowie $5! = 120 < 243 = 3^5$ und $6! = 720 < 729 = 3^6$ können wir den Induktionsanfang frühestens bei $7! = 5040 > 2187 = 3^7$ (A(7)) wählen, und, da andererseits aus der Gültigkeit von $n! \geq 3^n$ für ein $n \geq 7$ (Induktionsvoraussetzung) dann auch die Gültigkeit von

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \overset{\text{I.V.}}{\geq} 3^n(n+1) \overset{n \geq 2}{\geq} 3^n \cdot 3 = 3^{n+3}$$

(Induktionsbehauptung) folgt, gilt $n! \geq 3^n$ in der Tat für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 7$.

Zusatzaufgabe 2.9: (Beweis per vollständiger Induktion – Teilbarkeit/Nullteilerfreiheit)

(a) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

(i) $n^3 + 2n$ durch 3 teilbar (ii) $3^n - 3$ durch 6 teilbar (iii) $7^{2n} - 2^n$ durch 47 teilbar.

(b) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $a, b \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ gilt

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = 0 \iff \exists\, j \in \{1, \ldots, n\} \colon a_j = 0$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.9:

(a) (i) Induktionsanfang: Es ist $1^3 + 2 \cdot 1 = 3$ durch 3 teilbar.
Induktionsschritt:

- Induktionsvoraussetzung: Es sei $n^3 + 2n$ durch 3 teilbar, d.h., $\exists m \in \mathbb{N} \colon 3 \cdot m = n^3 + 2n$.
- Induktionsbehauptung: Dann ist auch $(n+1)^3 + 2(n+1)$ durch 3 teilbar, d.h., es gilt

$$\exists \tilde{m} \in \mathbb{N} \colon 3 \cdot \tilde{m} = (n+1)^3 + 2(n+1) .$$

- Beweis: Da für $\tilde{m} := m + n^2 + n + 1$ offenbar $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ gilt, folgt die Behauptung wegen

$$(n+1)^3+2(n+1) = n^3+3n^2+3n+1+2n+2 = n^3+2n+3(n^2+n+1) = 3(m+n^2+n+1) = 3\cdot\tilde{m}\ .$$

(ii) Induktionsanfang: Es ist $3^1 - 3 = 0$ durch 6 teilbar.
Induktionsschritt:

- Induktionsvoraussetzung: Es sei $3^n - 3$ durch 6 teilbar, d.h., $\exists m \in \mathbb{N}\colon 6 \cdot m = 3^n - 3$.
- Induktionsbehauptung: Dann ist auch $3^{n+1} - 3$ durch 6 teilbar, d.h., es gilt

$$\exists \tilde{m} \in \mathbb{N}\colon 6 \cdot \tilde{m} = 3^{n+1} - 3\ .$$

- Beweis: Da für $\tilde{m} := 3m + 1$ offenbar $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ gilt, folgt die Behauptung wegen

$$3^{n+1} - 3 = 3(3^n - 3) + 6 = 3 \cdot 6m + 6 = 6(3m + 1) = 6 \cdot \tilde{m}\ .$$

(iii) Induktionsanfang: Es ist $7^{2\cdot 1} - 2^1 = 49 - 2 = 47$ durch 47 teilbar.
Induktionsschritt:

- Induktionsvor.: Es sei $7^{2n} - 2^n$ durch 47 teilbar, d.h., $\exists m \in \mathbb{N}\colon 47 \cdot m = 7^{2n} - 2^n$.
- Induktionsbehauptung: Dann ist auch $7^{2n+2} - 2^{n+1}$ durch 47 teilbar, d.h., es gilt

$$\exists \tilde{m} \in \mathbb{N}\colon 47 \cdot \tilde{m} = 7^{2n+2} - 2^{n+1}\ .$$

- Beweis: Da für $\tilde{m} := 49m + 2^n$ offenbar $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ gilt, folgt die Behauptung wegen

$$7^{2n+2} - 2^{n+1} = 7^2(7^{2n} - 2^n) + (7^2 - 2)2^n = 49 \cdot 47m + 47 \cdot 2^n = 47(49m + 2^n) = 47 \cdot \tilde{m}\ .$$

(b) Induktionsanfang:

- Für $n = 1$ gilt trivial: $a_1 = 0 \iff \exists\, j \in \{1\} :\ a_j = 0$.
- Für $n = 2$ folgt aus $a_1 a_2 = 0$ mit Zusatzaufgabe 2.2 (c.iii) sofort $a_1 = 0$ oder $a_2 = 0$, d.h., $\exists\, j \in \{1, 2\} :\ a_j = 0$. Gilt hingegen $\exists\, j \in \{1, 2\} :\ a_j = 0$, so folgt nach Zusatzaufgabe 2.2 (c) im Fall $a_1 = 0$ dann $a_1 \cdot a_2 = 0 \cdot a_2 = 0$ und im Fall $a_2 = 0$ dann $a_1 \cdot a_2 = a_2 \cdot a_1 = 0 \cdot a_1 = 0$.

Induktionsschritt für $n \geq 2$:

Induktionsvoraussetzung: $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = 0 \iff \exists\, j \in \{1, \ldots, n\} : a_j = 0$

Induktionsbehauptung: $a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n+1} = 0 \iff \exists\, j \in \{1, \ldots, n+1\} : a_j = 0$

Beweis der Induktionsbehauptung:

„$\Longleftarrow$“: Es gibt ein $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ mit $a_j = 0$.

1. Fall: $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = 0$ und nach Zusatzaufgabe 2.2 (c.ii) folgt $a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n+1} = (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)a_{n+1} = 0 \cdot a_{n+1} = 0$.
2. Fall: $j = n + 1$. Nach der Zusatzaufgabe 2.2 (c) (oder Folgerung (j)) folgt

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n+1} = (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)a_{n+1} = (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) \cdot 0 = 0\ .$$

„$\Longrightarrow$“: Es sei $a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n+1} = 0$. Mit $a = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ und $b = a_{n+1}$ folgt $ab = 0$. Es ist nach Zusatzaufgabe 2.2 (c.iii) darum $a = 0$ oder $b = 0$.

1. Fall: $a = 0$. Dann $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = 0$ und nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $j \in \{1, \ldots, n\}$, für das $a_j = 0$.
2. Fall: $b = 0$. Dann ist $a_{n+1} = 0$ und $\exists\, j \in \{1, \ldots, n+1\} : a_j = 0$, nämlich $j = n + 1$.

In jedem Fall $\exists\, j \in \{1, \ldots, n+1\} : a_j = 0$.

Zusatzaufgabe 2.10: **(Beweis von Summenformeln per vollständiger Induktion)**

(a) Finden Sie eine Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen und beweisen Sie sie anschließend mittels vollständiger Induktion.

(b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1} \quad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1 \quad \text{(iii)} \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(c) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 1$ gilt $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \frac{n!-1}{n!}$

(d) Beweisen Sie den **Binomischen Lehrsatz**:

Für beliebige Körperelemente x, y und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\displaystyle (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$

Tipp: Für $1 \leq k \leq n$ gilt $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ mit $\displaystyle\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!} & \text{für } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.10:

(a) Aufgrund der Kommutativität von Additionen erhalten wir

$$2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n+1-k) = \sum_{k=1}^{n} (n+1) = n(n+1)$$

und daher $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Dies beweisen wir nun nochmals per Induktion:

Induktionsanfang: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ $(A(1))$

Induktionsschritt: Im Falle, dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (also die Induktionsvoraussetzung $A(n)$) gilt, folgt auch

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad ,$$

d.h., die Aussage $A(n+1)$, welche zu zeigen war.

(b) (i) Induktionsanfang: Es ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{(2-1)(2+1)} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}.$

Induktionsschritt:

- Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}.$
- Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n+1}{2n+3}.$

- Beweis: Wegen $(n+1)(2n+1) = 2n^2+3n+1$ folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}\,.\end{aligned}$$

(ii) Induktionsanfang: Es ist $\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1 = 2-1 = (1+1)! - 1$.

Induktionsschritt:

- Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.
- Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = (n+2)! - 1$.
- Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1) \cdot (n+1)! \overset{\text{I.V.}}{=} (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= ((n+1)+1) \cdot (n+1)! - 1 = (n+2)! - 1\,.\end{aligned}$$

(iii) Induktionsanfang: Es ist $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{4}{4} = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$.

Induktionsschritt:

- Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
- Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4}$.
- Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n^2+4(n+1))(n+1)^2}{4} = \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4}\,.\end{aligned}$$

(c) Der Induktionsanfang liegt hier bei $n = 2$. Offenbar gilt $\sum_{k=2}^{2} \frac{k-1}{k!} = \frac{2-1}{2!} = \frac{1}{2} = \frac{2!-1}{2!}$.

Induktionschritt:

- Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \frac{n!-1}{n!}$.
- Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{k-1}{k!} = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$.
- Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n+1} \frac{k-1}{k!} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} + \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{n!-1}{n!} + \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1)(n!-1)+(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}\,.\end{aligned}$$

(d) Diese Beziehung der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ kann mit Hilfe des PASCALschen Dreiecks

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & & & & & & & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots
\end{array}$$

veranschaulicht werden. Jedes Element entsteht als Summe der beiden darüberstehenden. Dies sehen wir rechnerisch wie folgt:

- Für $k = n$ ist $\binom{n}{n} = 1 = 1 + 0 = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n}$. Für $1 \leq k \leq n-1$ folgt

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\
&= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

Nun kommen wir zum Beweis der Summenformel:

- Induktionsanfang: Es gilt $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{0-k} y^k = \binom{0}{0} x^{0-0} y^0 = 1 = (x+y)^0.$ (A(0))
- Induktionsvoraussetzung: Es gelte $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$ (A(n))
- Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k.$ (A(n+1))
- Beweis: Mittels Tipp (Pascalsches Dreieck) ergibt sich

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = x(x+y)^n + y(x+y)^n \overset{\text{IV}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell-1} x^{n-(\ell-1)} y^{\ell} + y^{n+1} \qquad (\ell = k+1) \\
&= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \qquad (\ell = k) \\
&\overset{\text{(P)}}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k
\end{aligned}$$

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 3

Archimedische Körper, $\mathbb{K}$-Folgen Intervallschachtelungsprinzip und reelle Zahlen

- **Definition:** Sei $(\mathbb{K},+,\cdot,\mathbb{K}^+)$ ein angeordneter Körper.
  - Die Menge $\mathbb{N}_{\mathbb{K}} := \Big\{x \in \mathbb{K} \mid \forall S \subset \mathbb{K}\colon \big(S \text{ induktiv } \implies x \in S\big)\Big\}$ nennen wir die **Menge der natürlichen Zahlen (bzgl.** $(\mathbb{K},+,\cdot,\mathbb{K}^+)$**)**.

    Bem.: Die Menge $\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ ist induktiv und darüber hinaus die kleinste (bzgl. Mengeninklusion) induktive Menge (bzgl. $(\mathbb{K},+,\cdot,\mathbb{K}^+)$).
  - Ein angeordneter Körper $(\mathbb{K},+,\cdot,\mathbb{K}^+)$ heißt **archimedisch** $:\iff \forall x \in \mathbb{K}\ \exists n \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}\colon x < n$.
  - Eine $\mathbb{K}$**-Folge** ist eine beliebige Abbildung $a\colon \mathbb{N}_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}$. Für $n \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ schreiben wir üblicherweise a_n anstelle von $a(n)$ bzw. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\mathbb{K}}}$ für a.
  - Als eine **Intervallschachtelung (bzgl.** $(\mathbb{K},+,\cdot,\mathbb{K}^+)$**)** bezeichnen wir ein geordnetes Paar $((a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\mathbb{K}}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}_{\mathbb{K}}})$ von $\mathbb{K}$-Folgen mit folgenden Eigenschaften:

  (IS1) $\forall n \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}\colon \Big(a_n \le b_n \ \wedge\ a_n \le a_{n+1} \ \wedge\ b_{n+1} \le b_n\Big)$

  (IS2) $\forall \varepsilon \in \mathbb{K}^+\ \exists n = n_\varepsilon \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}\colon b_n - a_n < \varepsilon$.
  - Wir sagen, $(\mathbb{K},+,\cdot,\mathbb{K}^+)$ **genügt dem Intervallschachtelungsprinzip**, wenn zu jeder Intervallschachtelung $((a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\mathbb{K}}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}_{\mathbb{K}}})$ ein $s \in \mathbb{K}$ existiert mit $\forall n \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}\colon a_n \le s \le b_n$.
- **Axiom der reellen Zahlen:** Es gibt einen angeordneten Körper $(\mathbb{K},+,\cdot,\mathbb{K}^+)$, der archimedisch ist und dem Intervallschachtelungsprinzip genügt. **Bemerkungen:**
  - Dieser Körper ist bis auf Isomorphie eindeutig.
  - Aufgrund der Eindeutigkeit können wir diesen Körper mit $(\mathbb{R},+,\cdot,\mathbb{R}^+)$ und dessen Elemente als **reelle Zahlen** bezeichnen.
  - Es bezeichne $\mathbb{N}_0$ die Menge der natürlichen Zahlen bzgl. $(\mathbb{R},+,\cdot,\mathbb{R}^+)$ und $\mathbb{N} := \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$.
  - Als Menge der **ganzen Zahlen** bezeichnen wir weiter $\mathbb{Z} := \{n \in \mathbb{K} \mid n \in \mathbb{N}_0 \vee -n \in \mathbb{N}_0\}$.

Die in archimedischen Körpern gültige Bernoulli-Ungleichung

- Es gilt: $(\mathbb{K},+,\cdot,\mathbb{K}^+)$ archimedisch $\iff \forall x,y \in \mathbb{K}\colon \Big((x>0 \wedge y>0) \implies \exists n \in \mathbb{N}\colon nx > y\Big)$
- **Folgerung(en) & Definition**:

  (a) $\forall x \in \mathbb{K}\ \exists n_1,n_2 \in \mathbb{N}\colon \big(x < n_1 \wedge -n_2 < x\big)$

  (b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists! n \in \mathbb{Z}\colon n \le x < n+1$. Wir setzen $\boxed{\operatorname{floor}(x) := \lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z}\colon n \le x\}.}$

  (c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists! m \in \mathbb{Z}\colon m-1 < x \le m$. Wir setzen $\boxed{\operatorname{ceil}(x) := \lceil x \rceil := \min\{m \in \mathbb{Z}\colon x \le m\}.}$

  (d) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{n} < \varepsilon$
- **Satz 3.2** [Forster 1, Bernoulli-Ungleichung]: Sei $(\mathbb{K},+,\cdot,\mathbb{K}^+)$ archimedisch. Dann gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall x \in \mathbb{K}\colon \big(x \ge -1 \implies (1+x)^n \ge 1+nx\big)\ . \tag{3.1}$$

- **Satz 3.3** [Forster 1, Wachstum von Potenzen]: Sei $(\mathbb{K},+,\cdot,\mathbb{K}^+)$ archimedisch, $a \in \mathbb{K}$. Dann:

  (a) $a > 1 \implies \forall K \in \mathbb{K}\ \exists n \in \mathbb{N}\colon a^n > K$ (b) $0 < a < 1 \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\colon a^n < \varepsilon$

Eigenschaften des Absolut-Betrages, Körper der rationalen Zahlen

- Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K}^+)$ ein beliebiger angeordneter Körper.
  - Der (**Absolut-**)**Betrag** $|\cdot|\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ist definiert durch $$|x| := \begin{cases} x & \text{im Fall} x \geq 0 \,, \\ -x & \text{im Fall} x < 0 \,. \end{cases}$$
  - Für $c \geq 0$ gilt: $|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c$.
  - **Satz 3.1** [Forster 1, Eigenschaften des Betrages]: Für den Betrag $|\cdot|\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ gelten:

  (B1) $\forall x \in \mathbb{K}\colon |x| \geq 0 \wedge (|x| = 0 \iff x = 0)$. (Definitheit)

  (B2) $\forall x, y \in \mathbb{K}\colon |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$. (Multiplikativität)

  (B3) $\forall x, y \in \mathbb{K}\colon |x + y| \leq |x| + |y|$. (Dreiecksungleichung)
  - **Folgerungen**:
    (a) Es gelten $|1| = 1$, $|-1| = 1$ und $\forall x \in \mathbb{K}\colon |x| = |-x|$.
    (b) Es gelten $\forall x, y \in \mathbb{K}\colon \big(y \neq 0 \Longrightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\big)$
    (c) Es gelten $\forall x, y \in \mathbb{K}\colon \big(|x - y| \geq |x| - |y| \wedge |x + y| \geq |x| - |y|\big)$

- **Satz/Definition [Eigenschaften des Körpers der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$]:** Für die Menge
$$\mathbb{Q} \;=\; \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists p, q \in \mathbb{Z}\colon \left(q \neq 0 \wedge x = \frac{p}{q} := p \cdot q^{-1} \right) \right\}, \tag{3.2}$$
welche wir als **Menge der rationalen Zahlen** bezeichnen, gelten die Aussagen:

(Q1): $\forall x, y \in \mathbb{Q}\colon \Big(-x \in \mathbb{Q} \wedge x + y \in \mathbb{Q} \wedge x \cdot y \in \mathbb{Q} \wedge \big(x \neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} := x^{-1} \in \mathbb{Q}\big)\Big)$,
d.h., $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist als Teilkörper von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper.

(Q2): Mit $\mathbb{Q}^+ := \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}$ wird $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \mathbb{Q}^+)$ zu einem angeordneten Teilkörper von $(\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R}^+)$.

(Q3): $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \mathbb{Q}^+)$ ist archimdisch, wobei $\mathbb{N}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{N}_{\mathbb{R}} = \mathbb{N}_0$ gilt.

(Q4): Der archimedische Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \mathbb{Q}^+)$ genügt nicht dem Intervallschachtelungsprinzip.

Folgen und Konvergenz

- **Definition:** Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper. Eine Abbildung $A\colon \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, $A\colon n \mapsto a_n$, nennen wir eine **Folge** oder Zahlenfolge. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sprechen wir von reellen Zahlenfolgen (a_n).

- **Definition:** Eine reelle Zahlenfolge (a_n) heißt **konvergent** gegen ein $a \in \mathbb{R}$ (in Zeichen $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$) genau dann, wenn $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}\colon \; (n \geq N \implies |a_n - a| < \varepsilon)}$.

  Die in diesem Fall dann eindeutige Zahl a nennen wir den **Grenzwert** der Folge (a_n). Ist der Grenzwert einer Folge $a = 0$, so nennen wir die Folge (a_n) eine **Nullfolge**.

Intervallschachtelungsprinzip und Cauchy-Eigenschaft von Folgen

- **Definition:** Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K}^+)$ archimedisch angeordnet. Eine Zahlenfolge (a_n) aus $\mathbb{K}$ heißt **Cauchy-Folge**, falls
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n, m \in \mathbb{N}\colon (n, m \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon) \,. \tag{3.3}$$

- **Satz 5.1**: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K}^+)$ archimedisch angeordnet und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge. Dann gilt:
$$(a_n) \text{ konvergent} \quad \Longrightarrow \quad (a_n) \text{ Cauchy-Folge.}$$

- **Satz 5.3**: In einem archimedisch angeordneten Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K}^+)$, der dem Intervallschachtelungsprinzip genügt, gilt auch die Umkehrung von Satz 5.1, d.h., es gilt
$$(a_n) \text{ Cauchy-Folge} \quad \Longrightarrow \quad \exists a \in \mathbb{K}\colon a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

  Bemerkung: Aufgrund von Satz 5.3 hätten wir als Axiom von $\mathbb{R}$ anstelle der Gültigkeit des Intervallschachtelungsprinzips auch äquivalenterweise das sogenannte

  Vollständigkeitsaxiom: „In $\mathbb{R}$ konvergiert jede Cauchy-Folge.“

  fordern können.

Eigenschaften von und Rechenregeln für konvergente Folgen (vgl. Forster, §4)

- **Definition:** Eine reelle Zahlenfolge (a_n) heißt **nach oben** (bzw. **nach unten**) **beschränkt** genau dann, wenn
$$\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \ :\ a_n < K \qquad \big(\text{bzw. } \exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \ :\ a_n > K\ \big).$$
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

  Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen und $a, b \in \mathbb{R}$.

- **Satz 4.1** [**Beschränktheit konvergenter Folgen**]: (a_n) konvergent $\Longrightarrow$ (a_n) beschränkt.

- **Satz 4.2** [**Eindeutigkeit des Grenzwertes**]: $\Big(a_n \overset{n\to\infty}{\to} a\Big) \ \wedge\ \Big(a_n \overset{n\to\infty}{\to} b\Big) \ \Longrightarrow\ a = b.$

- **Satz 4.3** [**Summen/Produkte konvergenter Folgen**]:
$$\Big(a_n \overset{n\to\infty}{\to} a\Big) \ \wedge\ \Big(b_n \overset{n\to\infty}{\to} b\Big) \ \Longrightarrow\ \begin{cases} a_n + b_n & \overset{n\to\infty}{\to} a + b\ , \\ a_n b_n & \overset{n\to\infty}{\to} ab\ . \end{cases}$$
Corollar [Linearkombinationen konvergenter Folgen]:
$$\Big(a_n \overset{n\to\infty}{\to} a\Big) \ \wedge\ \Big(b_n \overset{n\to\infty}{\to} b\Big) \ \Longrightarrow\ \Big(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ :\ \lambda a_n + \mu b_n \overset{n\to\infty}{\to} \lambda a + \mu b\Big)$$

- **Satz 4.4** [**Quotient konvergenter Folgen**]:
$$\Big(a_n \overset{n\to\infty}{\to} a\Big) \ \wedge\ \Big(b_n \overset{n\to\infty}{\to} b \neq 0\Big) \ \Longrightarrow\ \Big(\exists N \in \mathbb{N}\ :\ (n \geq N \Longrightarrow b_n \neq 0)\Big) \ \wedge\ \frac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{a}{b}$$

- **Satz 4.5**: $\Big(a_n \overset{n\to\infty}{\to} a\Big) \ \wedge\ \Big(b_n \overset{n\to\infty}{\to} b\Big) \ \wedge\ \Big(\exists N \in \mathbb{N}\ :\ (n \geq N \ \Longrightarrow\ a_n \leq b_n)\Big) \ \Longrightarrow\ a \leq b$

  Corollar:
$$\Big(a_n \overset{n\to\infty}{\to} a\Big) \ \wedge\ \Big(\exists A, B \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \ \Longrightarrow\ A \leq a_n \leq B)\Big) \ \Longrightarrow\ A \leq a \leq B$$

Bestimmt divergente Folgen (vgl. Forster, §4)

- **Definition**: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **bestimmt divergent** gegen $+\infty$, falls
$$\forall\ K \in \mathbb{R}\ \exists\ N = N(K) \in \mathbb{N}\ \forall\ n \in \mathbb{N} : \Big(n \geq N(K) \Longrightarrow a_n > K\Big).$$
Analog nennen wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **bestimmt divergent** gegen $-\infty$, falls
$$\forall\ K \in \mathbb{R}\ \exists\ N = N(K) \in \mathbb{N}\ \forall\ n \in \mathbb{N} : \Big(n \geq N(K) \Longrightarrow a_n < K\Big).$$

- **Satz 4.8** [**Reziproke einer bestimmt divergenten Folge**]:
$$\Bigg(\Big(a_n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty\Big) \vee \Big(a_n \overset{n\to\infty}{\to} -\infty\Big)\Bigg) \ \Longrightarrow\ \Big(\exists N \in \mathbb{N}\ :\ (n \geq N \ \Longrightarrow\ a_n \neq 0)\Big) \ \wedge\ \frac{1}{a_n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

- **Satz 4.9** [**Reziproke von positiven/negativen Nullfolgen**]: Es gelten
$$\Big(a_n \overset{n\to\infty}{\to} 0\Big) \ \wedge\ \Big(\exists N \in \mathbb{N}\ :\ (n \geq N \ \Longrightarrow\ a_n > 0)\Big) \ \Longrightarrow\ \frac{1}{a_n} \overset{n\to\infty}{\to} +\infty$$
und
$$\Big(a_n \overset{n\to\infty}{\to} 0\Big) \ \wedge\ \Big(\exists N \in \mathbb{N}\ :\ (n \geq N \ \Longrightarrow\ a_n < 0)\Big) \ \Longrightarrow\ \frac{1}{a_n} \overset{n\to\infty}{\to} -\infty$$

Zusatzaufgabe 3.1: (a) Zeigen Sie Satz 3.1 und seine Folgerungen.

(b) Bestimmen Sie die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für welche die Ungleichung $|2|x| - 1| \leq 3$ gilt.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge in Form von Intervallen für die folgenden Ungleichungen

(i) $\dfrac{|2x+1|}{x-3} \leq 1$ (ii) $|3x-5| > |2x+3|$ (iii) $\dfrac{x+10}{x+1} \leq \dfrac{2x-15}{3-x}$

(d) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

(i) $|x+3| + |x-3| > 8$ (ii) $x(2-x) > 1 + |x|$ (iii) $\left|\dfrac{x}{x+1}\right| > \dfrac{x}{x+1}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.1:

(a) (i)
- Falls $x \geq 0$ folgt $|x| = x \geq 0$, anderenfalls ist $x < 0$ somit $0 < -x = |x|$.
- Insbesondere folgt $x \leq |x|$, da $x = |x|$ im Fall $x \geq 0$ und $x < 0 \leq |x|$ im Fall $x < 0$.
- Ebenso folgt auch $-x \leq |x|$, wegen $|x| = -x$ im Fall $x < 0$ und $-x \leq 0 \leq |x|$ im Fall $x \geq 0$.
- Wegen $0 \geq 0$ ergibt sich direkt nach Definition $|0| = 0$.
- Es gelte nun $|x| = 0$, dann folgen mit Punkt 2 und 3 die Ungleichungen $x \leq 0$ und $-x \leq 0$. Da dies zu $x \leq 0 \leq x$ äquivalent ist, liefert **(A1)** nun $x = 0$.

Damit ist die Eigenschaft **(B1)** komplett nachgewiesen.

(ii)
- Im Fall $x = 0$ oder $y = 0$ folgt die Gleichheit direkt wegen Eigenschaft **(B1)** sowie $0 \cdot x = 0$.
- Im Fall $x > 0$ und $y > 0$ ist nach **(A2)** auch $xy > 0$, so dass $|xy| = xy = |x| \cdot |y|$ gilt.
- Der Fall $x > 0$ und $y < 0$ liefert nun nach Definition $|y| = -y$ und wegen $xy < 0$ also insgesamt $|xy| = -xy = x(-y) = |x| \cdot |y|$.
- Der Fall $x < 0$ und $y > 0$ folgt analog, wenn wir im vorangegangenen Fall die Rollen von x und y vertauschen.
- Im Fall $x < 0$ und $y < 0$ folgen wegen $-x > 0$ und $-y > 0$ zunächst $xy = (-x)(-y) > 0$ und damit insgesamt $|xy| = |(-x)(-y)| = (-x)(-y) = |x| \cdot |y|$.

Damit ist die Eigenschaft **(B2)** komplett nachgewiesen.

(iii)
- In (i) hatten wir als Nebenergebnis erhalten, dass $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ gilt, so dass (mit Folgerung (e), also Addition von Ungleichungen) auch $x + y \leq |x| + |y|$ folgt.
- Mit (ii) ergibt sich nun analog auch $-(x+y) = (-x)+(-y) \leq |-x|+|-y| = |x|+|y|$.
- Entsprechend der Definition des Betrages ergibt sich damit (unabhängig, welcher Fall eintritt) nun insgesamt $|x + y| \leq |x| + |y|$, also Eigenschaft **(B3)**.

(iv)
- Aus $1 > 0$ folgt $1 = |1|$ nach Definition.
- Aus $1 = (-1)(-1)$ folgt nun mit Eigenschaft **(B2)** zunächst $1 = |1| = |(-1)(-1)| = |-1|^2$, also $|-1| = 1$ oder $|-1| = -1$. Da letzterer Fall nach Eigenschaft **(B1)** nicht auftreten kann, folgt somit wie behauptet $|-1| = 1$.
- Insbesondere ergibt sich nun $\forall x \in \mathbb{R}$: $|x| = 1 \cdot |x| = |-1| \cdot |x| \overset{\textbf{(B2)}}{=} |(-1) \cdot x| = |-x|$.

(v)
- Sei $y \neq 0$. Mit Eigenschaft **(B2)** erhalten wir $1 = |1| = |y \cdot y^{-1}| = |y| \cdot |y^{-1}|$, also $|y^{-1}| = |y|^{-1}$.
- Somit erhalten wir nach Eigenschaft **(B2)** insgesamt $|xy^{-1}| \overset{\textbf{(B2)}}{=} |x| \cdot |y^{-1}| = |x| \cdot |y|^{-1}$.

(vi)
- Mit Eigenschaft **(B3)** folgt $|x| = |(x-y)+y| \overset{\textbf{(B3)}}{\leq} |x-y|+|y|$, also auch $|x|-|y| \leq |x-y|$.
- Analog erhalten wir $|x| = |(x+y)+(-y)| \overset{\textbf{(B2),(B3)}}{\leq} |x+y|+|y|$, also auch $|x|-|y| \leq |x+y|$.

(b) Es gilt $|2y-1| \leq 3$ genau dann, wenn $-2 \leq 2y \leq 4$ gilt, also gilt $|2|x|-1| \leq 3$ genau dann, wenn $-1 \leq |x| \leq 2$ gilt, d.h. wenn $x \in [-2,2]$ gilt.

(c) (i) Zunächst einmal ist die linke Seite für $x = 3$ nicht definiert, also $3 \notin L$.

- Für $x > 3$ ist die Ungleichung äquivalent zu $2x+1 \leq x-3$, also zu $x \leq -4$. Da die Aussagen $x > 3$ und $x \leq -4$ nicht gleichzeitig wahr sein können, liefert dieser Fall keine Lösung, also $L_1 = \emptyset$.
- Für $x < 3$ ist die Ungleichung (vergleiche Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen) äquivalent zu $|2x+1| \geq x-3$. Da der Betrag nach Definition nichtnegativ ist, für $x < 3$ jedoch $x-3 < 0$ gilt, ist die Ungleichung in diesem Fall immer erfüllt. Wir erhalten als Lösungsmenge $L_2 =]-\infty, 3[$.

Insgesamt erhalten wir somit die Lösungsmenge $L = L_1 \cup L_2 \ = \ ]-\infty, 3[$.

(ii) Wir betrachten die einzelnen Fälle, bei der sich der Betrag verschieden auflösen lässt:

- Für $x \leq -\frac{3}{2}$ ist die Ungleichung äquivalent zu $5-3x > -3-2x$, also zu $8 > x$, woraus wir die Lösungsmenge $L_1 = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ erhalten.
- Für $-\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{3}$ ist die Ungleichung äquivalent zu $5-3x > 3+2x$, also zu $2 > 5x$, also zu $\frac{2}{5} > x$, womit wir die Lösungsmenge $L_2 = \left]-\frac{3}{2}, \frac{2}{5}\right[$ erhalten.
- Im Fall $x > \frac{5}{3}$ ist die Ungleichung äquivalent zu $3x-5 > 3+2x$, also zu $x > 8$, womit wir die Lösungsmenge $L_3 =]8, \infty[$ erhalten.

Insgesamt ist die Lösungsmenge daher $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \ = \ \left]-\infty, \frac{2}{5}\right[\cup]8, \infty[$.

(iii) Wie bei (i) schließen wir $-1, 3 \notin L$ und betrachten die einzelnen Fälle in Abhängigkeit der Vorzeichen der jeweiligen Nenner.

- Im Fall $x < -1$ ist

$$
\begin{aligned}
\frac{x+10}{x+1} \leq \frac{2x-15}{3-x} \quad &\overset{\cdot(3-x)>0}{\iff} \quad \frac{x+10}{x+1} \cdot (3-x) \ \leq \ 2x-15 \\
&\overset{\cdot(-(x+1))>0}{\iff} \quad -(x+10) \cdot (3-x) \ \leq \ -(x+1) \cdot (2x-15) \\
&\iff \quad 3(x^2-2x-15) \ = \ 3(x-5)(x+3) \ \leq \ 0
\end{aligned}
$$

Offenbar gehört -3 zur Lösungsmenge und da das Produkt zweier Zahlen genau dann negativ ist, wenn ein Faktor positiv und einer negativ ist, wegen $x < -1$ jedoch in diesem Fall $x-5 < 0$ gilt, erhalten wir als Lösungsmenge $L_1 = [-3, -1[$.

- Im Fall $-1 < x < 3$ ist

$$
\begin{aligned}
\frac{x+10}{x+1} \leq \frac{2x-15}{3-x} \quad &\overset{\cdot(3-x)>0}{\iff} \quad \frac{x+10}{x+1} \cdot (3-x) \ \leq \ 2x-15 \\
&\overset{\cdot(x+1)>0}{\iff} \quad (x+10) \cdot (3-x) \ \leq \ (x+1) \cdot (2x-15) \\
&\iff \quad 0 \ \leq \ 3(x^2-2x-15) \ = \ 3(x-5)(x+3)
\end{aligned}
$$

Da das Produkt zweier Zahlen genau dann positiv ist, wenn beide Faktoren das gleiche Vorzeichen besitzen, wegen $-1 < x < 3$ jedoch $x-5 < 0$ und $x+3 > 0$ gelten, erhalten wir in diesem Fall die Lösungsmenge $L_2 = \emptyset$.

- Im Fall $3 < x$ ist die Ungleichung äquivalent zu $3(x-5)(x+3) \ \leq \ 0$ analog dem ersten Fall, so dass wir hier die Lösungsmenge $L_3 =]3, 5]$ erhalten.

Insgesamt ist die Lösungsmenge daher $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \ = \ [-3, -1[\cup]3, 5]$.

(d) (i)

- Im Fall $x < -3$ ist die Ungleichung $|x+3|+|x-3| > 8$ äquivalent zu $-(x+3)-(x-3) = -2x > 8$, also $-4 > x$, daher ist $L_1 =]-\infty, -3[\cap]-\infty, -4[\ = \ ]-\infty, -4[$.
- Im Fall $x \geq 3$ ist die Ungleichung $|x+3|+|x-3| > 8$ äquivalent zu $(x+3)+(x-3) = 2x > 8$, also $x > 4$, daher ist $L_2 = [3, \infty[\cap]4, \infty[\ = \ ]4, \infty[$.

- Im verbleibenden Fall $-3 \leq x < 3$ ist die Ungleichung $|x+3| + |x-3| > 8$ äquivalent zu $(x+3)-(x-3) = 6 > 8$, was jedoch eine falsche Aussage ist. Daher ist hier $L_3 = \emptyset$.

Insgesamt erhalten wir nun als Lösungsmenge $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \ ]-\infty, -4[\cup]4, \infty[$.

(ii) Es ist $L = \emptyset$, da $\forall x \in \mathbb{R}\colon x(2-x) \leq 1(2-1) = 1 \leq 1 + |x|$.

(iii) Wegen $|y| > y \iff y < 0$ haben wir die Ungleichung $\frac{x}{x+1} < 0$ zu untersuchen, wobei $-1, 0 \notin L$.

- Im Fall $x < -1$ ist $x+1 < 0$ und $x < 0$, also $\frac{x}{x+1} > 0$. Also erhalten wir $L_1 = \emptyset$.
- Im Fall $x > 0$ ist $x+1 > 1 > 0$ und somit ebenfalls $\frac{x}{x+1} > 0$, also erhalten wir $L_2 = \emptyset$.
- Im verbleibenden Fall $-1 < x < 0$ ist $0 < x+1$, also auch $0 < \frac{1}{x+1}$ und nach Folgerung (h) schließlich $\frac{x}{x+1} < 0$. Also ist $L = L_3 =]-1, 0[$ die gesuchte Lösungsmenge.

Zusatzaufgabe 3.2: (a) Zeigen Sie, dass der Grenzwert einer Folge eindeutig ist.

(b) Zeigen Sie folgende Spezialfälle von Rechenregeln zu konvergenten Folgen:

(i) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Zahlenfolgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$ für $n \to \infty$.
Dann konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = 3a_n - 5b_n$ gegen den Grenzwert $3a - 5b$.

(ii) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Zahlenfolgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$ für $n \to \infty$.
Dann konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = 5a_n - 6b_n$ gegen den Grenzwert $5a - 6b$.

(c) Zeigen Sie **direkt mittels der ε-Definition des Grenzwertes:**

(i) Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann konvergiert die durch $c_n := |b_n|$ definierte Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $b > 0$.
Zeigen Sie, dass es ein $K \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $b_n > 0$ für alle $n \geq K$.

(iii) Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $c \neq 0$.
Zeigen Sie, dass es ein $K \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $c_n \neq 0$ für alle $n \geq K$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.2:

(a) (Beweis durch Widerspruch): Angenommen, es gäbe $a \neq b$ mit $a_n \to a$ und $a_n \to b$, dann würde zu $\varepsilon := \dfrac{|b-a|}{3}$ jeweils $N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)$ existieren, so dass einerseits $\forall n \geq N_1(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$ und andererseits $\forall n \geq N_2(\varepsilon)\colon |a_n - b| < \varepsilon$. Dann folgte jedoch für $n \geq \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$ der Widerspruch

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| = \underbrace{|a_n - a|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a_n - b|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon = \frac{2|b-a|}{3} .$$

(b) (i) Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \Big(n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |c_n - (3a - 5b)| < \varepsilon\Big)$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, fest. Nach Voraussetzung

- gibt es zu $\eta := \dfrac{\varepsilon}{6}$ ein M, so dass $\forall n \geq M$ die Bedingung $|a_n - a| < \eta = \dfrac{\varepsilon}{6}$ gilt.
- gibt es zu $\nu := \dfrac{\varepsilon}{10}$ ein K, so dass $\forall n \geq K$ die Bedingung $|b_n - b| < \nu = \dfrac{\varepsilon}{10}$ gilt.

Wir setzen nun $N(\varepsilon) := \max(M, K)$. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(\varepsilon)$.

- Da $n \geq M$ folgt $|a_n - a| < \eta = \frac{\varepsilon}{6}$.
- Da $n \geq K$ folgt $|b_n - b| < \eta = \frac{\varepsilon}{10}$.

Insgesamt folgt nun:

$$|(3a_n - 5b_n) - (3a - 5b)| = |3(a_n - a) - 5(b_n - b)| \;\leq\; 3|a_n - a| + 5|b_n - b| \;<\; 3\cdot\frac{\varepsilon}{6} + 5\cdot\frac{\varepsilon}{10} \;=\; \varepsilon\,.$$

(ii) Es ist zu zeigen: $\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\;\forall\,n \in \mathbb{N} : (n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |c_n - (5a - 6b)| < \varepsilon)$.
Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, $\eta := \frac{\varepsilon}{15}$ und $\nu := \frac{\varepsilon}{9}$.

- Nach Voraussetzung existiert ein M, so dass $\forall n \geq M$ die Bedingung $|a_n - a| < \eta = \frac{\varepsilon}{15}$ gilt.
- Nach Vor. existiert auch ein K, so dass $\forall n \geq K$ die Bedingung $|b_n - b| < \nu = \frac{\varepsilon}{9}$ gilt.

Setzen wir nun $N(\varepsilon) := \max(M, K)$, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(\varepsilon)$ ebenso $n \geq M$ und $n \geq K$, also auch $|a_n - a| < \eta = \frac{\varepsilon}{15}$ und $|b_n - b| < \eta = \frac{\varepsilon}{9}$. Insgesamt folgt $\forall n \geq N(\varepsilon)$:

$$|(5a_n - 6b_n) - (5a - 6b)| = |5(a_n - a) - 6(b_n - b)| \leq 5|a_n - a| + 6|b_n - b| \;<\; 5\frac{\varepsilon}{15} + 6\frac{\varepsilon}{9} = \varepsilon.$$

(c) (i) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt nach Folgerung (c) die Ungleichung $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$. Daher folgt mit $x = b_n$ und $y = -b$ sofort $\big||b_n| - |b|\big| \leq |b_n - b|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Konvergenz der Folge (b_n) ergibt sich

$$\forall\varepsilon > 0\;\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\;\forall n \in \mathbb{N}\colon \big(n \geq N_\varepsilon \;\Longrightarrow\; \big||b_n| - |b|\big| \leq |b_n - b| < \varepsilon\big)$$

und somit die Konvergenz der Folge $(|b_n|)$ gegen $|b|$.

(ii) und (iii):
Mit $b \neq 0$, also $|b| > 0$ ist insbesondere auch $\frac{|b|}{2} > 0$, so dass aufgrund der vorausgesetzten Konvergenz zu $\varepsilon := \frac{|b|}{2} > 0$ ein $N\left(\frac{|b|}{2}\right)$ existiert, so dass für alle $n \geq N\left(\frac{|b|}{2}\right)$ dann

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2}\,, \quad \text{also} \quad -\frac{|b|}{2} < b_n - b < \frac{|b|}{2}\,, \quad \text{also} \quad b - \frac{|b|}{2} < b_n < b + \frac{|b|}{2}$$

gilt, weswegen entweder $0 < \frac{b}{2} < b_n$, also $0 < b_n$, im Fall $b > 0$ folgt (dies ist die in (ii) formulierte Behauptung) oder $b_n < \frac{b}{2} < 0$, also $b_n < 0$, im Fall $b < 0$ folgt, d.h., in jedem Fall also $b_n \neq 0$, wie behauptet. Daher können wir $K = N\left(\frac{|b|}{2}\right)$ wählen.

Zusatzaufgabe 3.3:

(a) Bestimmen Sie für die durch $a_n := \dfrac{5n^2}{3n^3 - 25}$ definierte und gegen Null konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$, mit dem $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt.
Geben Sie insbesondere ein $N\left(\frac{5}{82}\right)$ an.[7]

(b) Weisen Sie mit Hilfe der Definition des Grenzwertes nach, dass Folgendes gilt:

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty} 2^5 = 32, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2} \;=\; 0, \qquad \text{(iii)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n - 14}{n + 1} \;=\; 2, \qquad \text{(iv)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 1}{5n^2 - 2} \;=\; \frac{1}{5}.$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.3:

(a) Zunächst ist
$$|a_n - 0| = |a_n| = \left|\frac{5n^2}{3n^3 - 25}\right| = \begin{cases} \frac{5n^2}{3n^3 - 25} & \text{falls } n \geq 3, \\ \frac{5n^2}{25 - 3n^3} & \text{falls } n \in \{1, 2\} \end{cases}.$$

Desweiteren ist $\forall n \geq 3 : 3n^3 - 25 > 2n^3$ (denn für $n \geq 3$ gilt $n^3 \geq 3^3 = 27 > 25$, also $n^3 - 25 > 0$)
Somit können wir $N(\varepsilon) := \max\left\{\lceil\frac{5}{2\varepsilon}\rceil + 1, 3\right\}$ wählen, denn dann gilt

$$|a_n - 0| \;=\; \frac{5n^2}{3n^3 - 25} \;<\; \frac{5n^2}{2n^3} \;=\; \frac{5}{2n} \;<\; \varepsilon$$

für alle $n \geq N(\varepsilon)$. (Dabei sei $\lceil x\rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x\}$.)
Somit finden wir beispielsweise $N\left(\frac{5}{82}\right) \;=\; \max\left\{\left\lceil\frac{5}{2\cdot\frac{5}{82}}\right\rceil + 1, 3\right\} \;=\; \max\left\{\lceil 41\rceil + 1, 3\right\} \;=\; 42.$

[7]**Tipp:** Verwenden Sie ggf. auch die auf Seite 20 eingeführten Funktionen $\mathrm{ceil}(x) := \lceil x\rceil$ und $\mathrm{floor}(x) := \lfloor x\rfloor$.

(b) (i) Da unabhängig von n für jedes $\varepsilon > 0$ bereits $|2^5 - 32| = 0 < \varepsilon$ gilt, können wir hier $N_\varepsilon := 1$ wählen.

(ii) Wegen $4n > 1 \Longrightarrow 4n^2 > n$ und damit $\frac{1}{4n^2} < \frac{1}{n}$, finden wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, etwa $N_\varepsilon := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \geq \frac{1}{\varepsilon}$, so dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ schon $\left| \frac{1}{4n^2} - 0 \right| = \frac{1}{4n^2} < \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ gilt.

(iii) Für jedes $\varepsilon > 0$ finden wir ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, etwa $N_\varepsilon := \left\lceil \frac{16}{\varepsilon} \right\rceil \geq \frac{16}{\varepsilon}$, so dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ schon $\left| \frac{2n-14}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{16}{n+1} - 2 \right| = \frac{16}{n+1} < \frac{16}{n} \leq \varepsilon$ gilt.

(iv) Wegen $n \geq 1 \Longrightarrow 5n^2 - 2 \geq 3n^2 \geq 3n > n$ finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, etwa $N_\varepsilon := \left\lceil \frac{3}{5\varepsilon} \right\rceil \geq \frac{3}{5\varepsilon}$, so dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ schon
$\left| \frac{n^2-1}{5n^2-2} - \frac{1}{5} \right| = \left| \frac{n^2 - \frac{2}{5}}{5n^2-2} - \frac{\frac{3}{5}}{5n^2-2} - \frac{1}{5} \right| = \frac{\frac{3}{5}}{5n^2-2} < \frac{3}{5n} \leq \varepsilon.$

Zusatzaufgabe 3.4:

(a) Was besagt das Archimedische Axiom in Bezug auf das Konvergenzverhalten der Folge $a_n := n$?

(b) Zeigen Sie **direkt mit Hilfe der Definition bestimmter Divergenz**:
Falls (a_n) den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ besitzt und (b_n) bestimmt divergent gegen ∞ ist, dann ist auch die Folge $(a_n b_n)$ bestimmt divergent gegen ∞.

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.4:

(a) Die Folge $a_n := n$ ist bestimmt divergent gegen $+\infty$, denn für jede Schranke $K \in \mathbb{R}$ existiert nach dem Archimedischen Axiom ein $N_K \in \mathbb{N}$ mit $K < N_K$, so dass aus $n \geq N_K$ stets auch $n > K$ folgt.

(b) Nach Voraussetzung ist einerseits a der Grenzwert der Folge (a_n), also

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : (n \geq M(\varepsilon) \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon)\ ,$$

und andererseits (b_n) bestimmt divergent gegen ∞, also

$$\forall\, L \in \mathbb{R}\ \exists\, K = K(L) \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : (n \geq K(L) \Longrightarrow a_n > L)$$

Es ist nun zu zeigen, dass dann auch $(a_n b_n)$ bestimmt divergent gegen ∞ ist, also

$$\forall\, L \in \mathbb{R}\ \exists\, N = N(L) \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : (n \geq N(L) \Longrightarrow a_n b_n > L)$$

Sei $L \in \mathbb{R}$ beliebig.
Wir setzen

$$N(L) = \max \left\{ M\left(\frac{a}{2}\right), K\left(\frac{2(|L|+1)}{a}\right) \right\} \in \mathbb{N}\ .$$

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(L)$. Wegen $n \geq M\left(\frac{a}{2}\right)$ folgt

$$|a_n - a| < \frac{a}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{a}{2} < a_n - a < \frac{a}{2}$$

und somit $0 < \frac{a}{2} < a_n$. Wegen $n \geq K\left(\frac{2(|L|+1)}{a}\right)$ ist $b_n > \frac{2(|L|+1)}{a} > 0$. Es folgt nun insgesamt

$$a_n b_n > \frac{a}{2} \frac{2(|L|+1)}{a} = |L| + 1 > L\ ,$$

was zu zeigen war.

Zusatzaufgabe 3.5: Bestimmen Sie mittels Rechenregeln für konvergente Folgen die Grenzwerte von

$$a_n := \frac{3n^2-n-1}{4n^3-5n^2}\ , \quad b_n := \frac{n}{2}-\frac{n^2}{2n+3} \qquad \text{und} \qquad c_n := \frac{n^2+1}{n+2}-n\ .$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.5:

(a) Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ für jede Konstante $c\in\mathbb{R}$ ergibt sich mit den Rechenregeln für konvergente Folgen

$$\lim_{n\to\infty} a_n \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{4-\frac{5}{n}} \;=\; \frac{3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2-\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^3}{4-5\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} \;=\; \frac{3\cdot 0-0^2-0^3}{4-5\cdot 0} \;=\; 0\,.$$

(b) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}-\frac{n^2}{2n+3}\right) \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-2n^2}{2(2n+3)} \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{3}{4+\frac{6}{n}} \;=\; \frac{3}{4+0} \;=\; \frac{3}{4}\,.$$

(c) Analog zu (a) ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} c_n \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n+2}-\frac{n^2+2n}{n+2}\right) \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{-2n+1}{n+2} \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \;=\; -2\,.$$

Zusatzaufgabe 3.6: Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten der Folgen

(a) $a_n := \dfrac{n^2}{2n^2-3n+3}$, (b) $b_n := \dfrac{n-1}{n^2+1}$, (c) $c_n := \dfrac{(-1)^n}{2n^2+5}$ (d) $d_n := \dfrac{n^2+3n-2}{4n^2-n+5}$

(e) $e_n := \dfrac{n^2+2}{n^2+2n+2}$ (f) $f_n := \dfrac{n^2+n+1}{n^3+n^2+n+1}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.6:

(a) Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ erhalten wir nach Grenzwertgesetzen für konvergente Folgen hier

$$\lim_{n\to\infty} a_n \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2\left(2-3\frac{1}{n}+3\frac{1}{n^2}\right)} \;=\; \frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-3\frac{1}{n}+3\frac{1}{n^2}\right)} \;=\; \frac{1}{2-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+3\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2} \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

(b) Analog zu (a) ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} b_n \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \;=\; \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \;=\; \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2}{1+\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2} \;=\; 0\ .$$

(c) Es gilt $c_n\to 0$, wegen $|c_n|\to 0 \iff c_n\to 0$ und

$$\left|\frac{(-1)^n}{2n^2+5}\right| \;=\; \frac{1}{2n^2+5} \;=\; \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2+5\left(\frac{1}{n}\right)^2} \;\longrightarrow\; \frac{0^2}{2+5\cdot 0^2} \;=\; 0\ .$$

(d)

$$\frac{n^2+3n-2}{4n^2-n+5} \;=\; \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(4-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}\right)} \;=\; \frac{1+3\cdot\frac{1}{n}-2\left(\frac{1}{n}\right)^2}{4-\frac{1}{n}+5\left(\frac{1}{n}\right)^2} \;\longrightarrow\; \frac{1+3\cdot 0-2\cdot 0^2}{4-0+5\cdot 0^2} \;=\; \frac{1}{4}\,.$$

(e) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}} = \dfrac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}} = \dfrac{1+0}{1+0+0} = 1.$

(f) Es ist

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^3+n^2+n+1} \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} \;=\; \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}} \;=\; \frac{0}{1} = 0\,.$$

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 4

Partialsummenfolgen und die geometrische Reihe (vgl. Forster, §4)

- Die Folge $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der **Partialsummen** $S_k := \sum_{n=1}^{k} a_n$ zu einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nennen wir **Reihe**.

  Bemerkung: Da Reihen nichts anderes sind als Folgen von Partialsummen, konvergiert eine Reihe also genau dann, wenn die entsprechende Folge der Partialsummen konvergiert, d.h., wenn es ein $S \in \mathbb{R}$ gibt, so dass
  $$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0 \; \forall k \in \mathbb{N}_0 \colon \Big(k \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |S - S_k| < \varepsilon \Big) \, .$$

  VORSICHT: Das Zeichen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ steht einerseits oftmals für die Folge $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und andererseits – falls die Partialsummenfolge $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert – auch für den Grenzwert $S := \lim_{k\to\infty} S_k$.

- **Satz 4.6** [**geometrische Reihe**]: $\forall q \in \mathbb{R} \colon \left(|q| < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \right)$.

- **Satz 4.7** [**Linearkombination konv. Reihen**]: Konvergieren $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beliebig und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Monotonie/Teilfolgen/Bolzano-Weierstraß (vgl. Forster, §5 und z.T. §6)

- **Definition** [**Monotonie**]:
  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **monoton wachsend** $:\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **streng monoton wachsend** $:\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **monoton fallend** $:\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **streng monoton fallend** $:\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$

- **Definition** [**Teilfolge**]:

  $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **Teilfolge von** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $:\Longleftrightarrow \exists \nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ monoton, injektiv $: \big(\forall n \in \mathbb{N} \colon b_n = a_{\nu(n)}\big)$

- **Corollar**: $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \implies \forall$ Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \colon a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$

- **Definition** [**Häufungspunkt**]:

  $p \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $:\Longleftrightarrow \exists$ konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} : a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} p$

- **Satz 5.6** [**Bolzano-Weierstraß**]: (a_n) beschränkt $\Longrightarrow$ (a_n) besitzt konvergente Teilfolgen

- **Satz 5.7** [**Folgerung aus Satz 5.6 sowie Erweiterung auf bestimmt divergente Folgen**]: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Dann gelten:

  (i) (a_n) beschränkt und monoton $\Longrightarrow$ (a_n) konvergent

  (ii) (a_n) unbeschränkt und monoton $\Longrightarrow$ (a_n) bestimmt divergent

  Bem.: Mit Satz 5.7 können wir zu festem $a > 0$ und festem $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ die Existenz der (da sogar eindeutig bestimmten) positiven Lösung von $x^k = a$ absichern (s.u.), welche die **k-te Wurzel von** a heißt und fortan mit $\sqrt[k]{a}$ oder (für $k = 2$) mit `sqrt`(a) bezeichnet wird.

Konvergenzkriterien für Reihen – Teil I (vgl. Forster, §7)

- **Satz 7.1 [Cauchy'sches Konvergenzkriterium (hinreichend und notwendig)]:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent } \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N}\ :\ \left(n \geq m \geq N \implies \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right)$$

- **Satz 7.2 [Notwendiges Konvergenzkriterium]:** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\implies a_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

- **Satz 7.3 [Folgerung des Satzes von Bolzano-Weierstraß für Reihen]:**

$$\forall k \in \mathbb{N}\ :\ a_k \geq 0 \implies \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent } \iff (S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt} \right)$$

- **Satz 7.4 [Leibniz-Kriterium (hinreichendes Konvergenzkriterium für Reihen)]:**

$$\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ monoton } \wedge\ a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right) \implies \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k \text{ konvergent.}$$

Zusatzaufgabe 4.1: Zeigen Sie: (a) Jede konvergente Folge ist auch eine Cauchy-Folge.

(b) Jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge reeller Zahlen ist eine Cauchy-Folge.

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.1:

(a) Ist nun a_n eine gegen a konvergente Folge und $\varepsilon > 0$ beliebig, dann ist auch $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ und wir finden ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für beliebige $n, m \geq N$ dann mittels Dreiecksungleichung

$$|a_m - a_n| \ =\ |(a_m - a) + (a - a_n)| \ \leq\ |a_m - a| + |a - a_n| \ <\ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ =\ \varepsilon\ .$$

(b) Sei die Folge a_n monoton fallend und nach unten beschränkt. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es dann eine untere Schranke $S = S(\varepsilon)$ der Folge a_n, für die ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N < S + \varepsilon$ existiert [8]. Mit einem solchen zu $\varepsilon > 0$ gefundenen $N = N(\varepsilon)$ gilt aufgrund der Monotonie von a_n die Ungleichung $S \leq a_n \leq a_m \leq a_N < S + \varepsilon$ für alle $n \geq m \geq N$. Somit folgt $|a_m - a_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$, und dies beweist, dass a_n eine Cauchy-Folge ist.

Zusatzaufgabe 4.2:

(a) Sei $a > 0$ eine reelle und $k \geq 2$ eine natürliche Zahl. Beweisen Sie, dass für jeden Startwert $x_0 > 0$ die rekursiv durch

$$x_{n+1} := \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right)$$

definierte Folge gegen die (d.h. eindeutige) positive Lösung der Gleichung $x^k = a$ konvergiert. Diese bezeichnen wir mit $\sqrt[k]{a}$ und nennen sie die (positive) k-te Wurzel von a.

(b) Zeigen Sie, dass die k-te Wurzel streng monoton wachsend ist.

(c) Sei $k \geq 2$ eine beliebige natürliche Zahl und a_n eine konvergente Folge nicht-negativer reeller Zahlen mit Grenzwert $a \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann die durch $b_n := \sqrt[k]{a_n}$ gegebene Folge gegen den Grenzwert $b := \sqrt[k]{a}$ konvergiert.

[8] Denn $S + \varepsilon < a_n$ kann nicht für alle unteren Schranken S der Folge und alle $n \in \mathbb{N}$ gelten, dann wäre nämlich mit S auch immer schon $S + \varepsilon$ eine Schranke, also könnte man jede Schranke immer noch um ε vergrößern und so z.B. den Anfangswert der Folge überschreiten, im Widerspruch zur Definition einer unteren Schranke.

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.2:

(a) Wir wollen Satz 5.7 (Folgerung aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß) anwenden und gehen dazu in mehreren Schritten vor:

- Es gilt $\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_n > 0$, denn aus $x_0 > 0$ folgt der Induktionsanfang ($A(0)$) und falls $x_n > 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte ($A(n)$), dann ergibt sich sofort auch

$$x_{n+1} \;=\; \frac{1}{k}\Big(\underbrace{(k-1)}_{\geq 1}\underbrace{x_n}_{>0} + \underbrace{\frac{a}{x_n^{k-1}}}_{>0}\Big) \;>\; 0\,. \qquad (A(n+1))$$

- Es gilt $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; x_n^k \geq a$, denn für beliebiges $n+1 \geq 1$ folgt aus Punkt 1 sofort

$$x_{n+1}^k = \left(\frac{k-1}{k}x_n + \frac{a}{kx_n^{k-1}}\right)^k = \left(x_n + \frac{a-x_n^k}{kx_n^{k-1}}\right)^k = x_n^k\left(1+\frac{a-x_n^k}{kx_n^k}\right)^k \overset{\text{B.U.}}{\geq} x_n^k\left(1+\frac{a-x_n^k}{x_n^k}\right) = a$$

wobei wir die Bernoulli-Ungleichung $(1+y)^k \geq 1+ky$ benutzt haben (was wegen $\frac{a-x_n^k}{kx_n^k} = \frac{1}{k}\left(\frac{a}{x_n^k}-1\right) \geq -1$ auch erlaubt ist).

- Die Folge x_n ist monoton fallend, denn

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right) - x_n = \left(1-\frac{1}{k}\right)x_n - x_n + \frac{a}{kx_n^{k-1}} = \frac{1}{k}x_n\left(\frac{a}{x_n^k}-1\right) \leq 0$$

wegen $x_n^k \geq a$ (wie in Punkt 2 gezeigt) und $x_n > 0$ (wie in Punkt 1 gezeigt).

Also ist die Folge x_n nach unten beschränkt (durch 0) und monoton fallend, also konvergent nach Satz 5.7 (Folgerung aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß). Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen ergibt sich, dass der Grenzwert x dann

$$x \;=\; \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right) \;=\; \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}}\right)$$

erfüllt und daher auch $kx = (k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}}$, d.h. $x^k = a$. Außerdem ist die positive Lösung dieser Gleichung eindeutig, denn aus

$$0 \;=\; x^k - y^k \;=\; (x-y)\sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j}y^j \;=\; (x-y)\left(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + xy^{k-2} + y^{k-1}\right)$$

(vgl. Aufgabe 2.4 (e)) folgt wegen der Positivität der Klammer sofort $x = y$.

(b) Wegen $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend $:\Longleftrightarrow \Big(\forall x, y \in A : \big(y > x \Longrightarrow f(y) > f(x)\big)\Big)$, ergibt sich aus $y > x \geq 0$ wiederum mit Aufgabe 2.4 (e) für die k-te Wurzel

$$\sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{x} \;=\; \frac{y-x}{\sum\limits_{j=0}^{k-1}(\sqrt[k]{x})^j(\sqrt[k]{y})^{k-1-j}} \;>\; 0$$

da der Nenner aus nichtnegativen Summanden besteht und mit $(\sqrt[k]{x})^0(\sqrt[k]{y})^{k-1-0} = (\sqrt[k]{y})^{k-1}$ mindestens ein Term echt positiv ist. Aus $y > x$ folgt demnach $\sqrt[k]{y} > \sqrt[k]{x}$, was die strenge Monotonie der Wurzel bedeutet.

(c) Es folgt $a_n - a \;=\; b_n^k - b^k \;=\; (b_n - b)\left(b_n^{k-1}b^0 + b_n^{k-2}b^1 + \cdots + b_n^1 b^{k-2} + b_n^0 b^{k-1}\right)$ wieder mit Aufgabe 3.4 (e). Die zweite Klammer ist in jedem Fall nicht negativ.

- Ist $a = 0$ (also auch $b = 0$), erhalten wir $|a_n| = |b_n|^k$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, dann gibt es zu ε^k ein N mit $|a_n| \leq \varepsilon^k$ für $n \geq N$, also auch $|b_n| \leq \varepsilon$ für $n \geq N$ (Monotonie der Wurzel).

- Ist $a > 0$, also auch $b > 0$, dann gibt es aufgrund der Konvergenz der Folge a_n gegen a ein
$$M := M\left(\frac{a(2^k-1)}{2^k}\right),$$
so dass $a_n > \frac{a}{2^k} > 0$ und somit $b_n > \frac{b}{2} > 0$ für alle $n \geq M$. Also kann man ohne Bedenken durch die zweite Klammer dividieren und anschließend auf beiden Seiten den Betrag nehmen. Damit ergibt sich
$$|b_n - b| = \frac{|a_n - a|}{(b_n^{k-1}b^0 + b_n^{k-2}b + \cdots + b_n b^{k-2} + b^{k-1})} \leq \frac{|a_n - a|}{b^{k-1}}$$
Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, dann gibt es zu diesem $\varepsilon > 0$ ein N mit $|a_n - a| \leq b^{k-1}\varepsilon$ für $n \geq N$, und mit diesem N gilt dann auch $|b_n - b| \leq \varepsilon$ für $n \geq \max\{M, N\}$.

Dies beweist in beiden Fällen die Konvergenz von b_n gegen b.

Zusatzaufgabe 4.3: (a) Untersuchen Sie die Existenz von $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 2\right)$.

(b) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz. Bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert

(i) $a_n := 2\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ (ii) $b_n := \sqrt{(c+n)(d+n)} - n$ für $c, d > 0$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.3:

(a) Nach Grenzwertgesetzen und mittels dritter Binomischer Formel gilt
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 2\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) + \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)^2 - 1^2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} + \lim_{n\to\infty} n\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)^2 - 1^2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} + \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} + \frac{0}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$
wobei sich $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \sqrt{1+0} = 1$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{1+0} = 1$ aufgrund der Stetigkeit von $\sqrt{\cdot}$ ergeben (d.h., wir verwenden die in 4.2 (c) bewiesene Eigenschaft von $\sqrt{\cdot}$).

(b) (i) Mittels ZA 4.2 (c) und Rechenregeln für konvergente Folgen erhalten wir
$$a_n = 2\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{2\sqrt{n}\,((n+1)-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\sqrt{1+0}+1} = 1.$$

(ii) Mit den Rechenregeln für konvergente Folgen und ZA 4.2 (c) ergibt sich
$$b_n = \frac{(c+n)(d+n) - n^2}{\sqrt{(c+n)(d+n)}+n} = \frac{(c+d) + \frac{cd}{n}}{\sqrt{(\frac{c}{n}+1)(\frac{d}{n}+1)}+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{(c+d)+0}{\sqrt{(0+1)(0+1)}+1} = \frac{c+d}{2}.$$

Zusatzaufgabe 4.4: (a) Zeigen Sie, dass eine konvergente Folge genau einen Häufungspunkt besitzt.

(b) Zeigen Sie: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\iff$ $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Können wir eine der Teilfolgen weglassen?

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.4:

(a) Zunächst halten wir fest, dass eine konvergente Folge sich selbst als konvergente Teilfolge besitzt (da die Identität monoton und injektiv ist) und somit mindestens einen Häufungspunkt besitzt. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, dann konvergiert auch jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a, denn:

> Aufgrund der Konvergenz von (a_n) existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ erfüllt ist. Insbesondere gilt dies auch für alle $n_k \geq N_\varepsilon$. Da außerdem für die Indizes n_k einer beliebigen Teilfolge a_{n_k} die Ungleichung $n_k \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, folgt dann mit $K_\varepsilon := N_\varepsilon$, dass für alle $k \geq K_\varepsilon$ die Ungleichung $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ erfüllt ist. Damit ist gezeigt, dass $\forall \varepsilon > 0\ \exists K_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\colon \big(k \geq K_\varepsilon \implies |a_{n_k} - a| < \varepsilon\big)$ und somit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ gilt.

Also konvergieren alle Teilfolgen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert a, womit es (aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwertes) keinen anderen Häufungspunkt als a geben kann.

(b) „$\Longrightarrow$": Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen a. Dann konvergiert (aus der Definition ersichtlich) auch jede Teilfolge gegen a, also auch $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$.

„$\Longleftarrow$": Seien $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent. Dann existieren $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$a_{2k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a\ , \quad a_{2k+1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} b\ , \quad a_{3k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} c\ .$$

Da $(a_{6k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist, muss nach Aufgabe 6.1 (b) somit auch $a_{6k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$ gelten. Ebenso ist $(a_{6k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass analog $a_{6k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} c$ gelten muss. Aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwertes einer konvergenten Folge muss demnach $a = c$ sein. Da $(a_{6k+3})_{k\in\mathbb{N}}$ eine gemeinsame Teilfolge von $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist, folgt hier auch analog $b = c$. Somit ist insgesamt $a = b = c$ und wir haben

$$\begin{aligned}
&\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_1(\varepsilon)\ \forall\, k \in \mathbb{N}\colon (k \geq N_1(\varepsilon) \implies |a_{2k} - a| < \varepsilon)\\
&\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_2(\varepsilon)\ \forall\, k \in \mathbb{N}\colon (k \geq N_2(\varepsilon) \implies |a_{2k+1} - a| = |a_{2k+1} - b| < \varepsilon)
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann folgt mit $N(\varepsilon) := \max\{2N_1(\varepsilon), 2N_2(\varepsilon) + 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(\varepsilon)$ und

- n gerade, d.h. $n = 2k$, dass $|a_n - a| = |a_{2k} - a| < \varepsilon$ (wegen $n \geq 2N_1(\varepsilon) \implies k \geq N_1(\varepsilon)$),
- $n = 2k + 1$, dass $|a_n - a| = |a_{2k+1} - a| < \varepsilon$ (wegen $n \geq 2N_2(\varepsilon) + 1 \implies k \geq N_2(\varepsilon)$).

Demnach ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Keine der Teilfolgen auf der rechten Seite kann weggelassen werden, denn:

(i) Ein Gegenbeispiel, falls (a_{2k}) weggelassen wird, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \begin{cases} 1, & n = 2 \bmod 6 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

(ii) Ein Gegenbeispiel, falls (a_{3k}) fehlt, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$.

(iii) Ein Gegenbeispiel, falls (a_{2k+1}) fehlt, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \bmod 6 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Zusatzaufgabe 4.5: (a) Zeigen Sie **Satz 7.4 (Leibnizkriterium)**. (b) Konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n+1}$?

(c) Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen bestimmt divergieren:

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d$ für ein $d \neq 0$ **(arithmetische Reihe)** (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ **(harmonische Reihe)**

Hinweise:

Nach Satz 7.2 ist $a_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ eine **notwendige** Bedingung für die Konvergenz einer Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Diese Bedingung ist aber – wie obige harmonische Reihe zeigt – nicht hinreichend, da – obwohl $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ erfüllt ist – die harmonische Reihe dennoch nicht konvergiert.

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.5:

(a) Sei a_n zunächst eine monoton fallende Folge. Dann gilt für die Partialsummen $S_k := \sum\limits_{n=1}^{k} (-1)^n a_n$ jeweils $S_{2k+2} - S_{2k} = a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0$. Wegen $S_2 \geq S_4 \geq S_6 \geq \ldots \geq S_{2k} \geq S_{2k+2} \geq \ldots$ ist dann die Teilfolge $(S_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge.
Wegen $S_{2k+1} - S_{2k-1} = a_{2k} - a_{2k+1} \geq 0$ folgt analog $S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \ldots \leq S_{2k-1} \leq S_{2k+1} \leq \ldots$, also das monotone Wachsen der Teilfolge $(S_{2k-1})_{n\in\mathbb{N}}$. Weiterhin ist $S_{2k} - S_{2k-1} = a_{2k} \geq 0$ (wiederum aus der Monotonie der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$) und somit

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon S_{2k} \;\geq\; S_{2k-1} \;.$$

Damit ist die Teilfolge $(S_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt (beispielsweise durch S_1), so dass nach Satz 5.7 (Folgerung aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß) ein Grenzwert $S \in \mathbb{R}$ von $(S_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert. Ebenso ist die Teilfolge $(S_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt (beispielsweise durch S_2), so dass ebenso nach Satz 5.7 ein Grenzwert $\tilde{S} \in \mathbb{R}$ von $(S_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert. Die Übereinstimmung der beiden Grenzwerte folgt nun aus dem Argument

$$S - \tilde{S} \;=\; \lim_{k\to\infty} S_{2k} - \lim_{k\to\infty} S_{2k-1} \;=\; \lim_{k\to\infty} (S_{2k} - S_{2k-1}) \;=\; \lim_{k\to\infty} a_{2k} \;=\; 0 \;.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es aufgrund der Konvergenz der Teilfolgen $(S_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(S_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ natürliche Zahlen $N_1(\varepsilon),\ N_2(\varepsilon)$, so dass

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \left(k \geq N_1(\varepsilon) \implies |S_{2k} - S| < \varepsilon\right) \quad \text{und} \quad \forall k \in \mathbb{N}\ \left(k \geq N_2(\varepsilon) \implies |S_{2k-1} - S| < \varepsilon\right) \;.$$

Setzen wir nun $N(\varepsilon) := \max(2N_1(\varepsilon), 2N_2(\varepsilon) - 1)$, dann gilt $\forall k \in \mathbb{N}\ (k \geq N(\varepsilon) \implies |S_k - S| < \varepsilon)$.
Im Fall einer monoton wachsenden Nullfolge a_n ist offenbar $b_n = -a_n$ monoton fallend, so dass die Behauptung nun zusammen mit Satz 4.7 folgt.

(b) Es ist $a_n := \frac{1}{n+1}$ wegen $n + 1 < n + 2 \implies \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$ monoton fallend und eine Nullfolge, da nach dem Archimedischen Axiom $\forall \varepsilon > 0\colon \exists N \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{\varepsilon} < N < N + 1$ und mit diesem also $n \geq N \implies \left|\frac{1}{n+1} - 0\right| \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$ folgt. Nach dem Leibnizkriterium konvergiert somit die Folge der Partialsummen $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$S_k \;:=\; \sum_{n=1}^{k} (-1)^n a_n \;=\; \sum_{n=1}^{k} (-1)^n \frac{1}{n+1} \;.$$

(c) (i) Offenbar gilt $S_k := \sum\limits_{n=0}^{k} d \;=\; (k+1)d \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{im Fall } d > 0, \\ -\infty & \text{im Fall } d > 0. \end{cases}$

(ii) Die Teilfolge (S_{2^k}) lässt sich wegen $\forall k \in \mathbb{N}_0\colon S_{2^k} \geq (k+1)\frac{1}{2}$ und $(k+1)\frac{1}{2} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ gliedweise durch eine bestimmt gegen $+\infty$ divergente Folge nach unten abschätzen, so dass sie aufgrund der Transitivität von $<$ selbst bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. Da die gesamte Folge (S_k) wegen $S_{k+1} - S_k = \frac{1}{k+1} > 0$ streng monoton wachsend ist, impliziert die bestimmte Divergenz der Teilfolge $(S_{2^k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ analog die bestimmte Divergenz von $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 5

Konvergenzkriterien für Reihen – Teil II (vgl. Forster, §7)

- **Definition** [**absolute Konvergenz**]: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **absolut konvergent** $:\Longleftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent.
- **Satz 7.5**: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent
- **Satz 7.6** [**Majorantenkriterium (hinreichendes Konvergenzkriterium für Reihen)**]:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ konvergent } \wedge \forall n \in \mathbb{N}\colon |a_n| \le c_n\right) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ absolut konvergent} \tag{5.1}$$

- **Corollar** [**Minorantenkriterium (hinreichendes Divergenzkriterium (!) für Reihen)**]:

$$\left(\sum_{n=1}^{k} c_n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \ \wedge\ \forall n \in \mathbb{N}\colon 0 \le c_n \le a_n\right) \Longrightarrow S_k := \sum_{n=1}^{k} a_n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \tag{5.2}$$

- **Satz 7.7** [**Quotientenkriterium (hinreichend, Folgerung aus Satz 7.6 und Satz 4.6)**]:

$$\exists \theta \in]0,1[\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : \left(n \ge n_0 \Longrightarrow a_n \ne 0 \wedge \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \theta\right) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ absolut konvergent}$$

- **Corollar** [**Wurzelkriterium (hinreichend, Folgerung aus Satz 7.6 und Satz 4.6)**]:

$$\exists \theta \in]0,1[\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon \left(n \ge n_0 \Longrightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \le \theta\right) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ absolut konvergent} \tag{5.3}$$

- **Satz 7.8** [**Umordnung von absolut konvergenten Reihen**]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ absolut konvergent} \Longrightarrow \forall \tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijektiv} : \sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Bemerkungen:

- Nach Satz 7.2 ist $a_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ für die Konvergenz einer Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **notwendig, aber nicht hinreichend** (vgl. harmonische Reihe – Zusatzaufgabe 4.5 (c.ii)).
- Nach Satz 7.5 ist die absolute Konvergenz für die Konvergenz einer Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **hinreichend, aber nicht notwendig** (vgl. die alternierende Reihe aus Zusatzaufgabe 4.5 (b)).
- **Ohne** die Voraussetzung der absoluten Konvergenz ist Satz 7.8 im Allgemeinen **falsch** ! Das **„unendliche Kommutativgesetz“** gilt jedoch für absolut konvergente Reihen.
- Für konvergente Reihen gilt das **„unendliche Assoziativgesetz“**. Genauer: Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $k \mapsto n_k$ eine streng monotone Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n_1 = 1$, dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j\right) . \tag{5.4}$$

Exponentialreihe (vgl. Otto Forster, §8)

- **Satz 8.1 [Konvergenz der Exponentialreihe]:** $\forall x \in \mathbb{R}\colon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ist absolut konvergent.[9]
- **Definition:**
  - Da der Grenzwert der Exponentialreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert, können wir durch

    $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ eine Funktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (die **Exponentialfunktion**) definieren.
  - Insbesondere heißt $\mathrm{e} := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ die **Eulersche Zahl**.
- **Satz 8.2 [Restgliedabschätzung der Exponentialreihe]:**[10]

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ :\ \left(|x| \leq \frac{N+2}{2} \implies \left| \exp(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} \right| \leq 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \right)$$

Zusatzaufgabe 5.1: Zeigen Sie unter Verwendung des Sandwich-Lemma und Aufgabe 4.1 (b)+Bonus:

(a) $\sqrt[n]{5^n + 11^n + 42^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 42$ (b) $\sqrt[n]{n^3 - n^2 + 1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ (c) $27\sqrt[n]{n^4 - n^2 + 2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 27$

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.1:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $42 = \sqrt[n]{42^n} \leq \sqrt[n]{5^n + 11^n + 42^n} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 42^n} = \sqrt[n]{3} \cdot 42$. Da nun $\lim\limits_{n\to\infty} 42 = 42$ und nach Aufgabe 4.1 Bonus ebenso $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} \cdot 42 = 1 \cdot 42 = 42$ gilt, folgt nach dem Sandwich-Lemma auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n + 11^n + 42^n} = 42$.

(b) Die Folge konvergiert nach dem Sandwich-Lemma gegen 1 wegen

$$1 \leq \sqrt[n]{n^3 - n^2 + 1} = \sqrt[n]{n^2(n-1) + 1} \leq \sqrt[n]{n^3 + n^3} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^3 \sqrt[n]{2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \cdot 1 = 1\ .$$

(c) Da für alle $n \geq 2$ die Abschätzungen $n^4 - n^2 + 2 = n^2(n^2 - 1) + 2 \begin{cases} \leq 2n^4 \\ \geq n^2 \end{cases}$ und folglich $27\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \leq 27\sqrt[n]{n^4 - n^2 + 2} \leq 27\left(\sqrt[n]{n}\right)^4 \left(\sqrt[n]{2}\right)$ gelten, liefern die nach Aufgabe 4.1 (b) und Bonus gültigen Beziehungen $\sqrt[n]{n} \to 1$ und $\sqrt[n]{2} \to 1$ zusammen mit den Rechenregeln für konvergente Folgen und dem Sandwichlemma die Konvergenz der Folge $27\sqrt[n]{n^4 - n^2 + 2}$, insbesondere gilt für den Grenzwert wie behauptet

$$27 \cdot 1 = 27\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^2 \leq 27 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4 - n^2 + 2} \leq 27\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^4 \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\right) = 27 \cdot 1^4 \cdot 1\ .$$

Zusatzaufgabe 5.2:

(a) Zeigen Sie, dass die rekursiv durch die Vorschrift $a_1 := 0$ und $a_{n+1} := 1 - \dfrac{1}{2 + a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge (a_n) konvergiert.

(b) Zeigen Sie die Konvergenz der Folgen, welche für alle $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definiert sind durch

(i) $a_{n+1} = a_n - a_n^2$ zu beliebigem Startwert $0 \leq a_1 \leq 1$,

(ii) $b_{n+1} = \dfrac{b_n^2 + 1}{2b_n}$ zu beliebigem Startwert $1 < b_1$.

[9] Für $x = 0$ folgt dies aus der Tatsache, dass $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ 0^n = 0$ gilt. Für $x \neq 0$ ist das Quotientenkriterium anwendbar.

[10] Dies folgt aus dem Majorantenkriterium mit der geometrischen Reihe für $q = \frac{|x|}{N+2} \leq \frac{1}{2}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.2:

(a) Nach Satz 5.7 (Konsequenz aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß) genügt es zu zeigen, dass (a_n) monoton und beschränkt ist, denn daraus folgt die Konvergenz von (a_n):

- Per Induktion ergibt sich $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ a_{n+1} > a_n \geq 0$:
Induktionsanfang: Es ist $a_2 = 1 - \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2} > 0 = a_1 \geq 0$ eine wahre Aussage.
Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $a_{n+1} > a_n \geq 0$.
Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $a_{n+2} > a_{n+1} \geq 0$.
Beweis: Es gelten die folgenden Implikationen
$$\begin{aligned} a_{n+1} > a_n \geq 0 \quad &\Longrightarrow \quad 2 + a_{n+1} > 2 + a_n > 0 \quad &&\Longrightarrow \quad \frac{1}{2+a_n} > \frac{1}{2+a_{n+1}} \\ &\Longrightarrow \quad -\frac{1}{2+a_{n+1}} > -\frac{1}{2+a_n} \quad &&\Longrightarrow \quad 1 - \frac{1}{2+a_{n+1}} > 1 - \frac{1}{2+a_n} \ , \end{aligned}$$
also $a_{n+2} > a_{n+1}$. Wiederum mit $a_{n+1} > a_n \geq 0$ folgt nun insgesamt $a_{n+2} > a_{n+1} \geq 0$.
- Da $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (wie eben bewiesen), ergibt sich sogleich $1 - \frac{1}{2+a_n} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Folge (sowohl nach unten durch 0 als auch) nach oben durch 1 beschränkt.

Somit haben wir gezeigt, dass (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, also nach Satz 7, §5 Forster I, konvergiert.

(b) Nach Satz 5.7 folgt die Konvergenz jeweils aus der Beschränktheit und Monotonie der Folge:

(i)
- Es gilt $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq 1$, da dies nach Voraussetzung für a_1 erfüllt ist (Induktionsanfang), und gilt bereits $0 \leq a_n \leq 1$ für ein n, erhalten wir daraus sowohl $a_n^2 \leq a_n$ und damit $0 \leq a_{n+1} = a_n - a_n^2$ als auch $a_{n+1} = a_n - a_n^2 \leq a_n \leq 1$ (da Quadrate in angeordneten Körpern nichtnegativ sind), also insgesamt $0 \leq a_{n+1} \leq 1$ (Induktionsschluss).
- Desweiteren gilt $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ a_n - a_{n+1} = a_n - (a_n - a_n^2) = a_n^2 \geq 0$ (da Quadrate in angeordneten Körpern nichtnegativ sind), also ist a_n monoton fallend.

(ii)
- Es gilt $\forall n \in \mathbb{N} : b_n > 1$, da dies nach Voraussetzung für b_1 erfüllt ist (Induktionsanfang), und wissen wir bereits $b_n > 1$ für ein n, so erhalten wir
$$b_{n+1} - 1 \ = \ \frac{b_n^2 + 1}{2b_n} - \frac{2b_n}{2b_n} \ = \ \frac{(b_n - 1)^2}{2b_n} \ > \ 0 \ ,$$
also $b_{n+1} > 1$ (Induktionsschluss).
- Die Folge ist (sogar streng) monoton fallend, denn aus $b_n > 1$ und damit $b_n^2 > 1$, also $2b_n^2 > b_n^2 + 1$ erhalten wir
$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \frac{b_{n+1}}{b_n} \ = \ \frac{\frac{b_n^2+1}{2b_n}}{b_n} \ = \ \frac{b_n^2 + 1}{2b_n^2} \ < \ \frac{b_n^2 + 1}{b_n^2 + 1} \ = \ 1 \ .$$

Bem.: Monoton fallende Folgen sind offenbar durch ihr erstes Glied nach oben beschränkt.

Zusatzaufgabe 5.3:

(a) Beweisen Sie mittels Cauchyschem Konvergenzkriterium für Reihen, dass aus der absoluten Konvergenz einer Reihe die Konvergenz einer Reihe folgt.

(b) Beweisen Sie das Majorantenkriterium (5.1).

(c) Beweisen Sie das Wurzelkriterium (5.3). (d) Beweisen Sie **Satz 7.7 (Quotientenkriterium)**.

(e) Zeigen Sie das unendliche Assoziativgesetz (5.4) für konvergente Reihen.

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.3:

(a) Da eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nach Definition genau dann absolut konvergiert, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, letzteres jedoch nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium äquivalent zur Aussage

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k, \ell \in \mathbb{N}\colon \left(k \geq \ell \geq N \implies \left| \sum_{n=\ell}^{k} |a_n| \right| < \varepsilon \right)$$

ist, liefert die absolute Konvergenz also zu jedem $\varepsilon > 0$ die Existenz eines N_ε, so dass zusammen mit der wiederholten Anwendung der Dreiecksungleichung für alle $k \geq \ell \geq N_\varepsilon$ dann

$$\left| \sum_{n=\ell}^{k} a_n \right| \leq \sum_{n=\ell}^{k} |a_n| = \left| \sum_{n=\ell}^{k} |a_n| \right| < \varepsilon$$

gilt, also insgesamt auch die Gültigkeit der Aussage

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k, \ell \in \mathbb{N}\colon \left(k \geq \ell \geq N \implies \left| \sum_{n=\ell}^{k} a_n \right| < \varepsilon \right) ,$$

welches nach dem Cauchy-Kriterium gleichbedeutend mit der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist.

(b) Die Folge der Partialsummen $S_k := \sum\limits_{n=0}^{k} |a_n|$ ist einerseits wegen $S_{k+1} - S_k = |a_{k+1}| \geq 0$ monoton wachsend und andererseits beschränkt durch den Grenzwert T der nach Voraussetzung konvergenten und wegen $T_{k+1} - T_k = c_{k+1} \geq |a_{k+1}| \geq 0$ ebenfalls monoton wachsenden Partialsummenfolge $T_k := \sum\limits_{n=0}^{k} c_n$, denn es gilt $\forall n \in \mathbb{N}_0\colon |a_n| \leq c_n \implies \forall k \in \mathbb{N}_0\colon S_k \leq T_k \leq T$ (vgl. Anordnungsaxiome).
Nach Satz 5.7 (Folgerung aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß) folgt nun auch die Konvergenz der S_k, was nach Definition gleichbedeutend mit der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist.

(c) Angenommen, es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $0 < \theta < 1$, so dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta$ für alle $n \geq n_0$ erfüllt ist. Dann gilt auch $|a_n| \leq \theta^n$ und wegen

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \theta^n = \theta^{n_0} \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n = \frac{\theta^{n_0}}{1-\theta}$$

konvergiert dann die Reihe ab n_0 nach dem Majorantenkriterium absolut, d.h., die Reihe über $|a_n|$ ab n_0 konvergiert gegen eine nichtnegative reelle Zahl S. Da Linearkombinationen konvergenter Folgen gegen die Linearkombination ihrer Grenzwerte konvergieren, folgt die Existenz einer nichtnegativen reellen Zahl T mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n| + \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n| + S = T$$

Also konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

(d) Die absolute Konvergenz folgt mittels Majorantenkriterium über

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| &= \sum_{n=1}^{N_0-1} |a_n| + |a_{N_0}| \sum_{n=N_0}^{\infty} \left|\frac{a_n}{a_{N_0}}\right| \\
&= \sum_{n=1}^{N_0-1} |a_n| + |a_{N_0}| \Big(1 + \underbrace{\left|\frac{a_{N_0+1}}{a_{N_0}}\right|}_{\leq\theta} + \sum_{n=N_0+2}^{\infty} \underbrace{\left|\frac{a_{N_0+1}}{a_{N_0}}\right|}_{\leq\theta} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|}_{\leq\theta}\Big) \\
&\leq \sum_{n=1}^{N_0-1} |a_n| + |a_{N_0}| \Big(1 + \underbrace{\left|\frac{a_{N_0+1}}{a_{N_0}}\right|}_{\leq\theta} + \sum_{n=N_0+2}^{\infty} \theta^{n-N_0}\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{N_0-1} |a_n| + |a_{N_0}| \Big(1 + \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \theta^n\Big) = \sum_{n=1}^{N_0-1} |a_n| + |a_{N_0}| \frac{1}{1-\theta}\,.
\end{aligned}$$

(e) Bezeichnet $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen $S_N := \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$, so entspricht die rechte Seite von (5.4) genau dem Grenzwert der Teilfolge S_{N_K} mit $N_K := n_{K+1} - 1$. Konvergiert die linke Seite von (5.4) gegen ein $S \in \mathbb{R}$, so bedeutet dies die Konvergenz der Folge S_N gegen S. Da aus der Konvergenz einer Folge $a_n \to a$ auf die Konvergenz jeder ihrer Teilfolgen $a_{n_k} \to a$ geschlossen werden kann, muss dann auch jede Teilfolge von S_N gegen S konvergieren, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N = S = \lim_{K\to\infty} S_{N_K} = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j\right).$$

Zusatzaufgabe 5.4: (Teleskop-Summen und -Reihen)

(a) Drücken Sie $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$ mit Hilfe des Summenzeichens aus.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

(c) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$?

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.4:

(a) Es handelt sich genau um die in (b) angegebene Reihe.

(b) Geeignete Partialbruchzerlegung liefert mittels Koeffizientenabgleich im Zähler über den Ansatz $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{(A+B)n + A}{n(n+1)}$ das Gleichungssystem $A + B = 0$ und $A = 1$, welches von $A = 1$ und $B = -1$ eindeutig gelöst wird. Somit erhalten wir für die k-te Partialsumme ($k \geq 3$)

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{1} + \overbrace{\sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n} - \underbrace{\sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n+1}}_{\overset{\ell=n+1}{=} \sum_{\ell=2}^{k} \frac{1}{\ell}}}^{=0} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}\,,$$

so dass für die entsprechende Partialsummenfolge $S_k \to 1$ folgt. Somit gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

(c) Die Reihe konvergiert nach dem Majorantenkriterium, denn für alle $n \geq 2$ erhalten wir $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ wegen $n^2 \geq n^2 - n > 0$ und als Majorante die konvergente Teleskopreihe

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Ausflug: Partialbruchzerlegung im Fall paarweise verschiedener Nullstellen des Nenners
Haben wir eine rationale Funktion der Gestalt $\frac{P(x)}{Q(x)}$ mit Polynomen $P(x), Q(x)$, sind diese teilerfremd, ist der Grad des Zählerpolynoms $P(x)$ kleiner als der Grad des Nennerpolynoms $Q(x)$ und besitzt $Q(x)$ die Gestalt $(x-p_1)(x-p_2)\cdots(x-p_n)$ mit paarweise verschiedenen $p_k \in \mathbb{R}$, dann existieren Konstanten $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{P(x)}{(x-p_1)(x-p_2)\cdots(x-p_n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(x-p_k)} .$$

Fasst man die rechte Seite wieder zu einem Bruch zusammen, so gewinnt man die Konstanten $A_1, \dots, A_n$ durch einen Koeffizientenvergleich (d.h., Vergleich der Koeffizienten vor den Potenzen von x) des dann entstehenden Zählerpolynoms mit dem ursprünglich gegebenen Zählerpolynom $P(x)$.

Zusatzaufgabe 5.5: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz/absolute Konvergenz:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{(-1)^k}{k}\right)$ (c) $\sum_{\ell=1}^{\infty} \left(1 - \sqrt[\ell]{\ell}\right)^{\ell}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{2k^2-k}$ (e) $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ell}}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.5:

(a) Wegen $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{\frac{(k+1)^3}{2^{k+1}}}{\frac{k^3}{2^k}}\right) = \frac{1}{2} \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{k^3+3k^2+3k+1}{k^3}\right) = \frac{1}{2} < 1$ oder wegen $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k^3}{2^k}} = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot 1^3 = \frac{1}{2} < 1$ konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}$ nach Quotienten- oder Wurzelkriterium absolut, also nach Satz 7.5 auch im üblichen Sinn.

(b) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{(-1)^k}{k}\right)$ konvergiert nach Satz 4.7, da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ nach ZA 5.4 (c) konvergiert und nach dem Leibnizkriterium $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konvergiert, da $a_k = \frac{1}{k}$ wegen $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} \le 1$ monoton fallend und beispielsweise nach dem Archimedischen Axiom eine Nullfolge ist.
Wegen $k \ge 2 \Longrightarrow \left|\frac{1}{k^2} + \frac{(-1)^k}{k}\right| \ge \frac{k-1}{k^2} = \frac{k+(k-2)}{2k^2} \ge \frac{1}{2k}$ folgt aufgrund des Minorantenkriteriums mit der Minorante $\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$, dass keine absolute Konvergenz vorliegt.

(c) Die Reihe konvergiert nach dem Wurzelkriterium (absolut) wegen $\sqrt[\ell]{|a_\ell|} = |1 - \sqrt[\ell]{\ell}| \overset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$.

(d) Die Reihe konvergiert nicht (also nach Satz 7.5 auch nicht absolut), denn (vgl. Satz 7.2) es ist wegen $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k^2+1}{2k^2-k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{k^2}}{2-\frac{1}{k}} = \frac{1}{2} \ne 0$ das notwendige Konvergenzkriterium verletzt.

(e) Wegen $\forall \ell \in \mathbb{N}\colon \sqrt{\ell} \le \ell \Longrightarrow \forall \ell \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{\ell} \le \frac{1}{\sqrt{\ell}}$ divergiert die Reihe nach dem Minorantenkriterium bestimmt gegen ∞, da die harmonische Reihe nach ZA 4.5 (c.ii) bestimmt gegen $+\infty$ divergiert.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 6

Exponentialreihe II, Cauchy-Produkt von Reihen (vgl. Otto Forster, §8)

- **Satz 8.3 [Cauchy-Produkt von (absolut konvergenten) Reihen]**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ absolut konvergent} \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 \colon c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\Big).$$

  Insbesondere konvergiert dann die Reihe über c_n absolut.

- **Satz 8.4 [Funktionalgleichung von** $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**]:** $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

  Corollar: (a,b) $\forall x \in \mathbb{R}\colon \left(\exp(x) > 0 \ \wedge \ \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}\right)$. (c) $\forall n \in \mathbb{Z} \ : \ \exp(n) = \mathrm{e}^n$.

Abzählbarkeit, Supremum, Infimum, Limes superior, Limes inferior

- Eine nichtleere Menge $\mathbb{D}$ ist **abzählbar**, wenn es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{D}$ gibt, d.h. wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathbb{D} = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ existiert. Die leere Menge nennen wir **abzählbar**.
- Eine nichtleere Menge $\mathbb{D}$ heißt **überabzählbar**, wenn sie nicht abzählbar ist.
- Wir nennen eine nichtleere Menge $\mathbb{D}$ **abzählbar unendlich**, falls es eine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{D}$ gibt (in diesem Fall ist $\mathbb{D}$ also gleichmächtig zu $\mathbb{N}$).
- **Satz 9.1 [Vereinigungen abzählbar vieler abzählbarer Mengen sind abzählbar]**:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon M_n \text{ abzählbar} \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \text{ abzählbar} .$$

  Corollar: $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.

- **Satz 9.2**: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. **Corollar:** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist überabzählbar.
- Sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt $K \in \mathbb{R}$ **Supremum** von A (in Zeichen: $\sup A = K$), falls
  - (i) $\forall a \in A \ : \ a \leq K$ (K ist obere Schranke von A),
  - (ii) $\forall K' \in \mathbb{R} \ : \ \big((K' < K) \implies (\exists a \in A \ : \ a > K')\big)$ (K ist kleinstmöglich).
- Sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt $K \in \mathbb{R}$ **Infimum** von A (in Zeichen: $\inf A = K$), falls
  - (i) $\forall a \in A \ : \ a \geq K$ (K ist untere Schranke von A),
  - (ii) $\forall K' \in \mathbb{R} \ : \ \big((K' > K) \implies (\exists a \in A \ : \ a < K')\big)$ (K ist größtmöglich).
- **Satz 9.3**: (i) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.
  (ii) Jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum.
- Existiert für $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ keine obere Schranke, so definieren wir $\sup A := +\infty$.
  Ebenso definieren wir $\inf A := -\infty$, falls für $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ keine untere Schranke existiert.
- Weiter vereinbaren wir $\inf \emptyset := +\infty$ sowie $\sup \emptyset := -\infty$.
- Ist $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ die der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zugrunde liegende Menge, definieren wir weiter
  - (i) den **Limes superior** durch

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \big(\sup\{a_k : k \geq n\}\big), & \text{falls } A \text{ nach oben beschränkt,} \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii) den **Limes inferior** durch
$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \big(\inf\{a_k : k \geq n\}\big), & \text{falls } A \text{ nach unten beschränkt,} \\ -\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

- **Satz 9.4 [Charakterisierung des Limes Superior]**: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $a \in \mathbb{R}$.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \; = \; a \iff \begin{cases} \text{(i)} & \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \; : \; \Big(n \geq N_\varepsilon \implies a_n < a + \varepsilon\Big) \; , \\ \text{(ii)} & \exists (a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}} \; \forall k \in \mathbb{N} \; : \; a_{m_k} > a - \varepsilon \; . \end{cases}$$

Zusatzaufgabe 6.1: (a) Ist das Quotientenkriterium auf die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$ anwendbar ?
(b) Ist das Wurzelkriterium auf $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$ anwendbar ? (c) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$?

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.1:

(a) Das Quotientenkriterium ist hier nicht anwendbar, denn für $n = 2k+1$ ergibt sich stets

$$\left| \frac{2^{(-1)^{n+1}-(n+1)}}{2^{(-1)^n - n}} \right| \; = \; \left| \frac{2^{(-1)^{2(k+1)}-2(k+1)}}{2^{(-1)^{2k+1}-(2k+1)}} \right| \; = \; \left| \frac{2^{1-2(k+1)}}{2^{-1-(2k+1)}} \right| \; = \; \left| 2^{1-2(k+1)+1+(2k+1)} \right| \; = \; 2 > 1 \; ,$$

also finden wir kein q und N_0, so dass $\left| \frac{2^{(-1)^{n+1}-(n+1)}}{2^{(-1)^n - n}} \right| \leq q < 1$ für alle $n \geq N_0$ gilt.

(b) Das Wurzelkriterium ist anwendbar, denn wegen $\max(2^{1-n}, 2^{-1-n}) = 2^{1-n}$ und folglich

$$\sqrt[n]{2^{(-1)^n - n}} \; \leq \; \sqrt[n]{2^{1-n}} \; = \; \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} \; = \; \sqrt[n]{2} \cdot \frac{1}{2} \; \overset{\text{A 4.1(b)}}{\longrightarrow} \; 1 \cdot \frac{1}{2}$$

existiert beispielsweise ein $N(\frac{1}{5})$, so dass für alle $n \geq N(\frac{1}{5})$ dann $|\sqrt[n]{2} - 1| < \frac{1}{5}$ gilt, also $\sqrt[n]{2^{(-1)^n - n}} \; \leq \; \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{5} =: q < 1$.

(c) Da das Wurzelkriterium ein hinreichendes Konvergenzkriterium ist, liefert es nach (b) die (sogar absolute) Konvergenz der betrachteten Reihe.

Zusatzaufgabe 6.2: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz: (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n-1}{n}}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)(n+2)}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2^n}{2^{n+1}}\right)^n$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-6}{3^n(3n+4)}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.2:

(a) Da $\frac{n-1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ und zusammen mit ZA 4.2 (c) dann auch $\sqrt[3]{\frac{n-1}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$ gilt, ist das notwendige Konvergenzkriterium für Reihen verletzt, so dass die Reihe nach Satz 7.2 nicht konvergieren kann.

(b) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium:
Aufgrund $a_n \neq 0$ für beliebiges n und der Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \; = \; \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} \right| \; = \; \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(n!)^2 (2(n+1))!} \; = \; \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}$$
$$= \; \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} \; = \; \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{6}{n} + \frac{2}{n^2}} \; = \; \frac{1+0+0}{4+0+0} \; = \; \frac{1}{4}$$

finden wir ein genügend kleines $\varepsilon > 0$, so dass für fast alle n (d.h., für alle bis auf endlich viele Ausnahmen) die Bedingung $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{1}{4} + \varepsilon =: q < 1$ erfüllt ist. Beispielsweise existiert zu $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ ein $N\left(\frac{1}{2}\right)$, so dass für alle $n \geq N\left(\frac{1}{2}\right)$ dann $\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{2}$ und somit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{3}{4} =: q < 1$ gilt.

(c) Die Reihe konvergiert nach dem LEIBNIZ-Kriterium, denn $a_n := \frac{n}{(n+1)(n+2)}$ ist eine monotone Nullfolge wegen

$$a_n \geq a_{n+1} \iff \frac{n}{(n+1)(n+2)} \geq \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} \iff n^2 + 3n \geq n^2 + 2n + 1 \iff n \geq 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} = 0 .$$

(d) Die Reihe konvergiert (sogar absolut) nach dem WURZELKRITERIUM, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{1+2^n}{2^{n+1}}\right|^n} = \frac{1+2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} =: q < 1 .$$

(e) Die Reihe konvergiert (sogar absolut) nach dem Quotientenkriterium, denn für alle $n > 4$ ist $a_n = \frac{2n-2}{3^n(3n+4)} \neq 0$ und aufgrund der Konvergenz

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(n+1)-6}{3^{n+1}(3(n+1)+4)}}{\frac{2n-6}{3^n(3n+4)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(3n+4)(2n-4)}{3^{n+1}(3n+7)(2n-6)} \\ &= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2-4n-16}{6n^2-4n-42} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{6-\frac{4}{n}-\frac{16}{n^2}}{6-\frac{4}{n}-\frac{42}{n^2}} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

finden wir analog zu (b) ein genügend kleines $\varepsilon > 0$ mit $\frac{1}{3} + \varepsilon =: q < 1$, etwa $\varepsilon = \frac{1}{6}$, und mit der Konvergenz folgt die Existenz eines $N\left(\frac{1}{6}\right)$, so dass

$$\forall n \geq N\left(\tfrac{1}{6}\right) \ : \ \left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{6}, \qquad \text{also} \qquad \forall n \geq N\left(\frac{1}{6}\right) : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{1}{2} =: q < 1 .$$

Alternative: Die Reihe konvergiert (sogar absolut) ebenfalls nach dem WURZELKRITERIUM, denn für alle $n \geq 4$ gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{3}\sqrt[n]{\tfrac{2n-6}{3n+4}} \leq \frac{1}{3}\sqrt[n]{\tfrac{2n}{3n+4}} \leq \frac{1}{3}\sqrt[n]{\tfrac{2n}{3n}} \leq \frac{1}{3}\sqrt[n]{1} = \frac{1}{3} =: q < 1 ,$$

wobei wir hier wiederholt die in ZA 4.2 (b) bewiesene strenge Monotonie verwendet haben.

Zusatzaufgabe 6.3: Zeigen Sie **oder** widerlegen Sie mit einem Gegenbeispiel:

(a) Gilt $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ und konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut, dann konvergiert auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut.

(b) Ist (a_n) eine konvergente Folge und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

(c) Gilt $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \neq -1$ und ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, dann ist dies auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$.

(d) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut, dann ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent.

(e) Ist (a_n) eine Nullfolge nichtnegativer Zahlen, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

(f) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und gilt $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \geq 0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

(g) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent mit $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \geq 0$, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.3:

(a) Diese Aussage ist wahr, denn: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$.

- Nach Satz 4.1 ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ demnach beschränkt, d.h., $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < K$, also gilt auch $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n b_n| \leq K|b_n|$ mit diesem $K > 0$. Nach Voraussetzung ist die Reihe über b_n absolut konvergent, d.h., die Reihe über $|b_n|$ konvergiert und wegen Satz 4.7 ebenso
$$K\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} K|b_n| \;.$$
Das Majorantenkriterium mit $c_n := K|b_n|$ liefert nun die absolute Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

(b) Diese Aussage ist im Allgemeinen **falsch**, denn:

- **Gegenbeispiel**: Wählen wir $a_n = b_n = (-1)^n c_n$ mit der nach ZA 4.2 (b) und ZA 4.2 (c) monotonen Nullfolge $c_n := \sqrt{\frac{1}{n}}$, so konvergiert einerseits (a_n) und nach dem Leibnizkriterium auch die Reihe über b_n, jedoch divergiert die (harmonische) Reihe über $a_n b_n = \frac{1}{n}$ bekanntlich.

(c) Aus der absoluten Konvergenz der Reihe über a_n folgt nach Satz 7.5 die Konvergenz derselben, und nach Satz 7.2 insbesondere, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Somit existiert beispielsweise zu $\varepsilon := \frac{1}{2}$ ein $N\left(\frac{1}{2}\right)$, so dass für alle $n \geq N\left(\frac{1}{2}\right)$ die Ungleichung $|a_n| < \frac{1}{2}$ erfüllt ist und somit auch $\frac{1}{2} < 1 + a_n$ sowie $\frac{1}{1+a_n} < 2$ und demnach auch $\frac{|a_n|}{1+a_n} < 2|a_n|$ gelten. Da Vielfache von konvergenten Reihen nach Satz 4.7 wieder konvergent sind, liefert nun das Majorantenkriterium [Forster I, Satz 7.6] die absolute Konvergenz des Reihenrestes, also die Konvergenz von
$$\sum_{n=N\left(\frac{1}{2}\right)}^{\infty} \left|\tfrac{a_n}{1+a_n}\right| \;.$$
Ebenso ist die Summe $\sum\limits_{n=1}^{N\left(\frac{1}{2}\right)-1} \left|\frac{a_n}{1+a_n}\right|$ wegen $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \neq -1$ wohldefiniert und endlich, womit sich insgesamt die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ ergibt.

(d) Die Aussage ist richtig, denn konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Insbesondere muss als notwendiges Kriterium die Folge $|a_n|$ eine Nullfolge sein, also existiert zu $\varepsilon := 1$ ein Index $N(1)$, so dass für alle $n \geq N(1)$ die Folgenglieder $|a_n| < 1$ erfüllen. Insbesondere folgt dann $\forall n \geq N(1) : a_n^2 \;=\; |a_n|^2 < 1 \cdot |a_n|$ mit den Anordnungsaxiomen und aus der Nichtnegativität von Quadraten somit
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \;=\; \underbrace{\sum_{n=1}^{N(1)-1} a_n^2}_{\substack{=:C<+\infty \text{ da} \\ \text{endlich viele Summanden}}} + \sum_{n=N(1)}^{\infty} a_n^2 \;\leq\; C + \sum_{n=N(1)}^{\infty} |a_n| \;\leq\; C + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \;<\; +\infty$$
und schließlich mit dem Majorantenkriterium die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

(e) Diese Aussage ist im Allgemeinen falsch, denn beispielsweise ist die durch $a_{2n-1} := 0$ und $a_{2n} := \frac{1}{n}$ definierte Folge (a_n) offenbar eine Nullfolge nichtnegativer Zahlen. Jedoch divergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n} a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

(f) Wegen $\pm ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ und folglich $\forall n \in \mathbb{N}\colon \frac{\sqrt{a_n}}{n} \leq \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^2}\right)$ ist $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + \frac{1}{n^2}\right)$ eine konvergente Majorante zu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ (vgl. auch Satz 4.7).

(g) Wegen $0 \leq a_n, a_{n+1} \leq \max(a_n, a_{n+1}) \leq a_n + a_{n+1}$ und somit auch $a_n \cdot a_{n+1} \leq (a_n + a_{n+1})^2$ sowie aufgrund der Monotonie der Wurzel ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n+1})$ eine konvergente Majorante (Einzelreihen sind sogar absolut konvergent), so dass auch die Konvergenz von $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$ folgt.

Zusatzaufgabe 6.4: (Absolute Konvergenz und Cauchy-Produkt von Reihen)

(a) Zeigen Sie: Eine Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann absolut konvergent, wenn nichtnegative konvergente Reihen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ existieren, so dass $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n = b_n - c_n$.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ konvergiert (jedoch nicht absolut), wohingegen das Cauchy-Produkt der Reihe mit sich selbst divergiert.

(c) Gegeben seien die Reihen $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ und $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}$. Berechnen Sie ihr Cauchy-Produkt.

(d) Berechnen Sie das Cauchy-Produkt der beiden Reihen $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a}{n!}$ und $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b}{n!}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.4:

(a) „$\Longrightarrow$“: Sei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Dann folgt nach Majorantenkriterium auch die absolute Konvergenz der beiden durch $b_n := \max\{a_n, 0\}$ und $c_n := \max\{-a_n, 0\}$ gegebenen nichtnegativen Reihen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Andererseits gilt auch $b_n - c_n = \max\{a_n, 0\} + \min\{a_n, -0\} = a_n$.

„$\Longleftarrow$“: Seien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nichtnegative konvergente Reihen mit $a_n = b_n - c_n$. Dann konvergiert einerseits die Reihe über $d_n = b_n + c_n$, welche andererseits wegen der aus der Dreiecksungleichung resultierende Beziehung $|a_n| \leq b_n + c_n$ eine konvergente Majorante für die Reihe über a_n liefert. Also folgt nach dem Majorantenkriterium auch die absolute Konvergenz von $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Nach dem Leibnizkriterium konvergiert die Reihe, da $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Jedoch ist die Konvergenz nicht absolut, denn wegen $\sqrt{n+1} \leq n+1$ und somit $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \dfrac{1}{n+1}$ ist die harmonische Reihe eine divergente Minorante für $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Das Cauchy-Produkt ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n = (-1)^n \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$. Da

$$\frac{1}{4}(n+2)^2 \;=\; \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 \;=\; \left(\frac{n}{2}+1\right)\left(n-\frac{n}{2}+1\right) \;\geq\; (k+1)(n-k+1) \;=\; k(n-k)+n+1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (denn wegen $f(x) = x(n-x)+n+1,\; f'(x) = n-2x,\; f''(x) = -2$ besitzt f bei $x = \frac{n}{2}$ sein globales Maximum), ist jeder Summand größer als $\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(n-\frac{n}{2}+1\right)}} = \frac{2}{n+2}$. Für alle n gilt demnach $|c_n| = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{2(n+1)}{n+2} \to 2$. Somit ist c_n keine Nullfolge, also das notwendige Konvergenzkriterium verletzt. Daher konvergiert das Cauchy-Produkt nicht.

(c) $$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}\right) \overset{\text{Satz 8.3}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{a^j}{j!}\frac{b^{n-j}}{(n-j)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j b^{n-j}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}.$$

Bem.: Wir haben somit die Funktionalgleichung $\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b)$ verifiziert.

(d) Nach (c) folgt $$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b}{n!}\right) = ab\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^n}{n!}\right) \overset{\text{(c)}}{=} ab\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+1)^n}{n!} = ab\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}.$$

Zusatzaufgabe 6.5: Bestimmen Sie mittels geometrischer bzw. Exponentialreihe die Grenzwerte

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 3^{-2k}$ (b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{7+5^k}{k!}$ (c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{3k}}{(k+1)!}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n-1)!}$ (e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.5:

(a) Es gilt $$\sum_{k=1}^{\infty}3^{-2k} = \sum_{k=1}^{\infty}9^{-k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k\right) - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1 = \frac{1}{8}.$$

(b) Es gilt $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{7+5^k}{k!} \;=\; 7\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{5^k}{k!} \;=\; 7\exp(1)+\exp(5) = 7\mathrm{e}+\mathrm{e}^5$$

(c) Mittels der Exponentialreihe erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{3k}}{(k+1)!} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-8)^k}{(k+1)!} \;=\; -\frac{1}{8}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-8)^k}{k!}\right)+\frac{1}{8} \;=\; -\frac{1}{8}\exp(-8)+\frac{1}{8} \;=\; \frac{1}{8}\left(1-\mathrm{e}^{-8}\right)\;.$$

(d) Es gilt $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n-1)!} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!} = 2\cdot\exp(2) = 2\cdot\exp(1+1) = 2\mathrm{e}^2\;.$$

(e) Es ist $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+\frac{3}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{10}{3}\;.$$

Zusatzaufgabe 6.6:

(a) Zeigen Sie: Die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

(b) Ist die Menge der Funktionen $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ abzählbar ?

(c) Sei $k \geq 2$ eine natürliche Zahl. Ist die Menge $k\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n\}$ abzählbar unendlich?

(d) Ist das kartesische Produkt $A \times B$ abzählbarer Mengen A, B selbst wieder abzählbar?

(e) Ist die Menge $E \;:=\; \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k$ mit $E_k = \left\{(c_1, c_2, \ldots, c_k) \mid \forall j = 1,\ldots,k\colon c_j \in \mathbb{N}\right\}$ abzählbar ?

(f) Ist die Menge aller endlichen Teilmengen einer abzählbar unendlichen Menge abzählbar ?

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.6:

(a) Nach Definition ist eine Menge abzählbar, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist. Da $\mathbb{N}$ abzählbar unendlich ist, es also abzählbar unendlich viele einelementige Teilmengen von $\mathbb{N}$ gibt, die alle selbst Elemente von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sind, kann $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht endlich sein. Weiterhin kann $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ auch nicht abzählbar unendlich sein, denn gäbe es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, dann bilde man zu f die Teilmenge $A := \{n \in \mathbb{N} | n \notin f(n)\}$ von $\mathbb{N}$. Wäre nun $f(m) = A$ für ein $m \in \mathbb{N}$, dann würde $m \in f(m)$ äquivalent zu $m \in A$ und damit äquivalent zu $m \notin f(m)$ sein, Widerspruch. Somit kann $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht abzählbar sein und ist demzufolge überabzählbar.

(b) Da nun die Menge der „quasi"- charakteristischen Funktionen

$$f_{\mathbb{M}}(n) := \begin{cases} 1 & n \in \mathbb{M} \\ 9 & n \notin \mathbb{M} \end{cases}$$

für beliebige Teilmengen $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ als zur Potenzmenge von $\mathbb{N}$ gleichmächtige Teilmenge von $F := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ nach (a) schon überabzählbar sein muss, gilt dies auch für F.

(c) Ja, denn die Abbildung $\mathbb{N} \to k\mathbb{N}$, $n \mapsto kn$, ist sowohl surjektiv (denn ist $a \in k\mathbb{N}$, dann ist a durch k teilbar, so dass ein $b \in \mathbb{N}$ mit $a = bk$ existiert) als auch injektiv (denn: für $a, b \in k\mathbb{N}$ mit $a = b$ existieren $c, d \in \mathbb{N}$ mit $a = kc, b = kd$, woraus $0 = a - b = k(c - d)$, also $c = d$ folgt).

(d) Ja, seien $a, b : \mathbb{N} \to A, B$ Abzählungen von A, B, dann ist eine Abzählung von $A \times B$ die Diagonalfolge $(a_1, b_1)|(a_1, b_2), (a_2, b_1)|(a_3, b_1), (a_2, b_2), (a_1, b_3)|(a_1, b_4), \ldots$.

(e) Da die Menge E_k genau das k-fache kartesische Produkt von $\mathbb{N}$ mit sich selbst ist, welches sich nach Induktion über k analog zu (d) als abzählbar herausstellt, ist die Menge E nach Satz 9.1 als Vereinigung abzählbar (unendlich) vieler abzählbarer Mengen selbst wieder abzählbar.

(f) Offenbar ist $M_n = \{A \subset \mathbb{N} \mid \forall x \in A \colon x \leq n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich, also insbesondere abzählbar. Nach Satz 9.1 folgt nun auch die Abzählbarkeit von $M = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} M_n$.

Zusatzaufgabe 6.7:

(a) Bestimmen Sie Infimum und Supremum von $]-\infty, a]$, $]-\infty, b[$, $]a, b[$, $]b, +\infty[$ für $a < b$.

(b) Geben Sie für die folgenden Mengen $\mathbb{M}_k$ jeweils das Supremum $\sup \mathbb{M}_k$ und das Infimum $\inf \mathbb{M}_k$, das Maximum $\max \mathbb{M}_k$ und das Minimum $\min \mathbb{M}_k$ an, falls diese existieren:

$$\begin{array}{lll} \mathbb{M}_1 := \mathbb{N}, & \mathbb{M}_2 := \{(-1)^n \; : \; n \in \mathbb{N}\}, & \mathbb{M}_3 := \left\{1 + \frac{1}{n} \; : \; n \in \mathbb{N}\right\}, \\ \mathbb{M}_4 := \mathbb{Z}, & \mathbb{M}_5 := \{(-2)^n \; : \; n \in \mathbb{N}\}, & \mathbb{M}_6 := \left\{n + \frac{1}{n} \; : \; n \in \mathbb{N}\right\}, \\ \mathbb{M}_7 := \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, & \mathbb{M}_8 := \left\{1 + \frac{1}{x} \; : \; x \in [1, 2[\right\}, & \mathbb{M}_9 := \{x \in \mathbb{Q} \; : \; |x| < |x - 2|\}. \end{array}$$

(c) Bestimmen Sie Infimum und Supremum von $A := \left\{\dfrac{(-1)^m}{m} + \dfrac{(-1)^n}{n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

(d) Bestimmen Sie im Falle der Existenz Supremum, Infimum, Maximum und Minimum von

(i) $M_1 := \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x(x - 1)(x + 2) > 0\right\}$ (ii) $M_2 := \left\{\dfrac{n - m}{n + 3m} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N}\right\}$

(e) Bestimmen Sie den Limes superior und wenn möglich den Grenzwert von $\left(\dfrac{3n^2 + 2}{2n(n + 1)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.7:

(a) Es gelten $\inf]-\infty, a] = \inf]-\infty, b[= -\infty$ und $\inf]a, b[= \sup]-\infty, a] = a$ sowie $\inf]b, +\infty[= \sup]-\infty, b[= \sup]a, b[= b$ und $\sup]b, +\infty[= +\infty$.

(b) Wir erhalten

$\mathbb{M}_k$	$\mathbb{M}_1$	$\mathbb{M}_2$	$\mathbb{M}_3$	$\mathbb{M}_4$	$\mathbb{M}_5$	$\mathbb{M}_6$	$\mathbb{M}_7$	$\mathbb{M}_8$	$\mathbb{M}_9$
$\sup \mathbb{M}_k$	$+\infty$	1	2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	2	1
$\inf \mathbb{M}_k$	1	-1	1	$-\infty$	$-\infty$	2	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$-\infty$
$\max \mathbb{M}_k$	–	1	2	–	–	–	0	2	–
$\min \mathbb{M}_k$	1	-1	–	–	–	2	–	–	–

(c) Es ist $\inf A = \min A = -2 = \frac{-1}{1} + \frac{-1}{1}$ und $\sup A = \max A = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

(d) (i) Wegen $M_1 =]-2,0[\;\cup\;]1,\infty[$ existieren weder Maximum noch Minimum. Weiter gilt $\inf M_1 = -2$ und $\sup M_1 = +\infty$.

(ii) Wegen $\forall n,m\colon \frac{n-m}{n+3m} \leq \frac{n-1}{n+3m} \leq \frac{n-1}{n+3} \to 1$ gilt $\sup M_2 = 1$, jedoch existiert kein Maximum wegen $\frac{n-1}{n+3} < \frac{n+3}{n+3} = 1$.

Analog folgt wegen $\forall n,m\colon -\frac{n-m}{n+3m} = \frac{m-n}{n+3m} \leq \frac{m-1}{n+3m} \leq \frac{m-1}{1+3m} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$ auch $\inf M_2 = -\frac{1}{3}$ und die Nicht-Existenz eines Minimums.

(e) Da der Grenzwert $\frac{3}{2}$ ist, stimmt er mit dem Limes Superior überein. Dies folgt sofort nach Satz 9.4, denn die rechte Seite ist erfüllt, da einerseits (i) direkt aus der Definition des Grenzwertes folgt und andererseits (ii) für die Teilfolge $(a_n)_{n\geq N_\varepsilon}$ ebenfalls aufgrund der Definition des Grenzwertes erfüllt ist.

Zusatzaufgabe 6.8:

Konstruieren Sie eine Umordnung von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, die divergiert.

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.8:

Die sich aus der Umordnung $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$\tau(n) \;=\; \begin{cases} 4^k + k & \text{für } n = 1 \mod 2 \text{ und } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ \frac{n}{2} & \text{für } n = 2,4,6,8, \\ \frac{n}{2} + k & \text{für } n = 0 \mod 2 \text{ und } \frac{n}{2} \in [4^k+1,\ldots,4^{k+1}],\ k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

ergebende Teilpartialsummenfolge $\left(T_{4^k+k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ erfüllt wegen

$$\begin{aligned}
T_{4^1+1} &= T_5 &&= \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{2n} - \frac{1}{1} &&\geq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 1 &&\geq 0, \\
T_{4^2+2} - T_{4^1+1} &= T_{18} - T_5 &&= \sum_{n=5}^{16} \frac{1}{2n} - \frac{1}{3} &&\geq \frac{4}{16} + \frac{8}{32} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} &&\geq \frac{1}{8}, \\
T_{4^3+3} - T_{4^2+2} &= T_{67} - T_{18} &&= \sum_{n=17}^{64} \frac{1}{2n} - \frac{1}{5} &&\geq \frac{16}{64} + \frac{32}{128} - \frac{1}{5} &&\geq \frac{1}{4} \geq \frac{1}{8}, \\
T_{4^4+4} - T_{4^3+3} &= T_{260} - T_{67} &&= \sum_{n=65}^{256} \frac{1}{2n} - \frac{1}{7} &&\geq \frac{64}{256} + \frac{128}{512} - \frac{1}{7} &&\geq \frac{1}{4} \geq \frac{1}{8}, \\
T_{4^5+5} - T_{4^4+4} &= T_{1029} - T_{260} &&= \sum_{n=257}^{1024} \frac{1}{2n} - \frac{1}{9} &&\geq \frac{256}{1024} + \frac{512}{2048} - \frac{1}{9} &&\geq \frac{1}{4} \geq \frac{1}{8}, \ldots
\end{aligned}$$

offenbar $T_{4^k+k} \geq (k-1)\frac{1}{8}$ und ist somit bestimmt divergent gegen $+\infty$, folglich kann auch die gesamte Reihe nicht konvergieren.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 7

Grenzwerte und Stetigkeit reellwertiger Funktionen

- Sei $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $D \subset \mathbb{R}$ und $a, c \in \bar{\mathbb{R}}$. Weiter sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
  (a) Wir definieren $f(x) \overset{x\to a}{\to} c \;:\Longleftrightarrow$
  $\Big(\exists (\xi_n)_n \text{ aus } D : \xi_n \overset{n\to\infty}{\to} a\Big) \wedge \Big(\forall \text{ Folge } (x_n)_n \text{ aus } D : \Big(\big(x_n \overset{n\to\infty}{\to} a\big) \Longrightarrow \big(f(x_n) \overset{n\to\infty}{\to} c\big)\Big)\Big)$
  und bezeichnen c in diesem Fall[11] als den **Grenzwert einer Funktion an der Stelle** a.
  (b) Bezeichne nun $P(x)$ eine Eigenschaft von x und $E = \{x \in D \mid P(x)\}$ sowie $f_{|E}\colon E \to \mathbb{R}$ die Einschränkung der Funktion f auf die Menge E. Dann definieren wir
  $$\lim_{\substack{x\to a\\ P(x)}} f(x) \;=\; c \qquad :\Longleftrightarrow \qquad f_{|E}(x) \overset{x\to a}{\to} c\ .$$
  Somit lassen sich insbesondere die **einseitigen Grenzwerte** definieren durch
  $$\lim_{x\searrow a} f(x) \;:=\; \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\nearrow a} f(x) \;:=\; \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$$
  Bem.: Der klassische Grenzwertbegriff nach Weierstraß ist "$c = \lim_{x\to a} f(x)$" $:\Longleftrightarrow$ $c = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$.
- **Definition** [**Stetigkeit**]:
  (a) Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig im Punkt** $a \in D$ $\;:\Longleftrightarrow$
  $$\forall (x_n)_n \in D\colon \Big(\big(x_n \overset{n\to\infty}{\to} a\big) \Longrightarrow \big(f(x_n) \overset{n\to\infty}{\to} f(a)\big)\Big)\ . \tag{7.1}$$
  Diesen Sachverhalt kürzen wir mit der Symbolkette $f(x) \overset{x\to a}{\to} f(a)$ ab.
  (b) Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig in** D $\;:\Longleftrightarrow\;$ $\forall a \in D\colon f(x)$ stetig in a.
- **Satz 10.1** [**Summen, Produkte, Quotienten stetiger Funktionen**]: Sei $a \in D \subset \mathbb{R}$.
  (a) $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ stetig in a $\;\Longrightarrow\;$ $f + g : D \to \mathbb{R}$ stetig in a.
  (b) $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig in a und $\lambda \in \mathbb{R}$ $\;\Longrightarrow\;$ $\lambda f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig in a.
  (c) $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ stetig in a $\;\Longrightarrow\;$ $fg\colon D \to \mathbb{R}$ stetig in a.
  (d) $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ stetig in a und $g(a) \neq 0$ $\;\Longrightarrow\;$ $\dfrac{f}{g}\colon \{x \in D \mid g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ stetig in a.

  Corollar: Alle rationalen Funktion sind stetig auf ihrem Definitionsbereich (**!**).
- **Satz 10.2** [**Komposition stetiger Funktionen**]: Sei $a \in D$ sowie $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon E \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset E$. Dann gilt: $\;f$ stetig in a und g stetig in $b := f(a)$ $\;\Longrightarrow\;$ $g \circ f$ stetig in a.

Sätze über stetige Funktionen I

- **Satz 11.1** [**Nullstellensatz**]: $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig $\wedge$ $f(a) \cdot f(b) < 0 \Longrightarrow \exists \xi \in]a, b[\colon f(\xi) = 0$.

  Corollar 1 [**Zwischenwertsatz**]:
  $$f\colon [a, b] \to \mathbb{R} \text{ stetig } \wedge \Big(c \in]f(a), f(b)[\;\vee\; c \in]f(b), f(a)[\Big) \;\Longrightarrow\; \exists \xi \in]a, b[\colon f(\xi) = c\ . \tag{7.2}$$
  Corollar 2: $I \subset \mathbb{R}$ ein (eig. o. uneig.) Intervall $\wedge$ $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig $\Longrightarrow f(I) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

[11] Dies ist der Grenzwertbegriff für eine Funktion nach Dieudonné bzw. Bourbaki. Insbesondere im Fall isolierter Punkte des Definitionsbereiches D wird hier die Existenz eines Grenzwertes der Funktion sichergestellt.

Zusatzaufgabe 7.1: Für ein $\omega \in \mathbb{R}$ sei ω_n eine beliebige Folge mit $\omega_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \omega$. Zeigen Sie:

(a) $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ \left(n \geq k \implies \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}\right)$ (b) $\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{k!}$.

(c) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $K \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \left(n \geq K \implies \sum_{k=K}^{n} \binom{n}{k} \frac{|\omega_n|^k}{n^k} \leq \sum_{k=K}^{\infty} \frac{(|\omega|+1)^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{4}\right).$$

(d) Zu ε und K aus (c) existiert ein $M \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ \left(n \geq M \implies \forall k = 0, \ldots, K-1\ :\ \left|\binom{n}{k}\frac{\omega_n^k}{n^k} - \frac{\omega^k}{k!}\right| < \frac{\varepsilon}{2K}\right).$$

(e) Zeigen Sie unter Verwendung von (a) bis (d) die Konvergenz

$$\left(1 + \frac{\omega_n}{n}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^k}{k!} \tag{7.3}$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.1:

(a) Mit $n \geq k$ folgt die Behauptung sofort aus

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j}\right) \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{n} = \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k} \underbrace{\left(1 - \frac{j-1}{n}\right)}_{\leq 1} \leq \frac{1}{k!}.$$

(b) Nach Grenzwertgesetzen ergibt sich (aufgrund der Endlichkeit von k) weiterhin

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{j-1}{n}\right)\right) = \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \lim_{n\to\infty} \frac{j-1}{n}\right) = \frac{1}{k!} \cdot 1^k = \frac{1}{k!}.$$

(c) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da die Exponentialreihe nach Satz 8.1 [Forster I] für alle $x \in \mathbb{R}$ (d.h., auch für $x = |w| + 1$) absolut konvergiert, existiert ein $N_1 := N_1\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N_1$ die Abschätzung

$$\sum_{k=N_1}^{\infty} \frac{(|w|+1)^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{4}$$

erfüllt ist. Desweiteren gilt nach Voraussetzung $\omega_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \omega$, also auch $|\omega_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} |\omega|$. Demzufolge existiert ein $N_2 := N_2(1)$, so dass für alle $n \geq N_2$ die Ungleichung $|\omega_n| < |\omega| + 1$ gilt. Wählen wir nun $K := \max\{N_1, N_2\}$, so folgt für alle $n \geq K$ wie behauptet

$$\sum_{k=K}^{n} \binom{n}{k} \frac{|\omega_n|^k}{n^k} \overset{n \geq N_2}{\leq} \sum_{k=K}^{n} \binom{n}{k} \frac{(|\omega|+1)^k}{n^k} \overset{\text{(a)}}{\leq} \sum_{k=K}^{n} \frac{(|\omega|+1)^k}{k!} \leq \sum_{k=K}^{\infty} \frac{(|\omega|+1)^k}{k!} \overset{K \geq N_1}{<} \frac{\varepsilon}{4}.$$

(d) Sei $\varepsilon > 0$ und K wie in (c). Wegen $\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{k!}$ nach (b) folgt mit Grenzwertgesetzen

$$\lim_{n\to\infty} \left(\binom{n}{k}\frac{\omega_n^k}{n^k} - \frac{\omega^k}{k!}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \omega_n\right)^k - \frac{\omega^k}{k!} = \frac{\omega^k}{k!} - \frac{\omega^k}{k!} = 0$$

für jedes $k = 0, \ldots, K-1$, und daher existieren zu jedem $k = 0, \ldots, K-1$ natürliche Zahlen $M_k := M_k\left(\frac{\varepsilon}{2K}\right)$, so dass jeweils

$$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ \left(n \geq M_k \implies \left|\binom{n}{k}\frac{\omega_n^k}{n^k} - \frac{\omega^k}{k!}\right| < \frac{\varepsilon}{2K}\right)$$

erfüllt ist. Wählen wir nun $M := \max_{k=0,\ldots,K-1} M_k$, dann gilt für alle $n \geq M$ die Behauptung.

(e) Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert nach (c) ein $K \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq K$ die Ungleichungen

$$\sum_{k=K}^{n} \binom{n}{k} \frac{|\omega_n|^k}{n^k} < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=K}^{\infty} \frac{|\omega|^k}{k!} \leq \sum_{k=K}^{\infty} \frac{(|\omega|+1)^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{4}$$

erfüllt sind. Desweiteren wissen wir nach (d), dass ein $M \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq M$ und für alle $k = 0, 1, \ldots, K-1$ dann

$$\left| \binom{n}{k} \frac{\omega_n^k}{n^k} - \frac{\omega^k}{k!} \right| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

gilt. Also finden wir ein $N := N(\varepsilon) := \max\{K, M\}$, so dass für alle $n \geq N$ dann

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \frac{\omega_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^k}{k!} \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\omega_n^k}{n^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^k}{k!} \right| \\ &\overset{\substack{\Delta-\text{Ungl.}\\ \text{mehrfach}}}{\leq} \sum_{k=0}^{K-1} \left| \binom{n}{k} \frac{\omega_n^k}{n^k} - \frac{\omega^k}{k!} \right| + \sum_{k=K}^{n} \binom{n}{k} \frac{|\omega_n|^k}{n^k} + \sum_{k=K}^{\infty} \frac{|\omega|^k}{k!} \\ &< \sum_{k=0}^{K-1} \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

erfüllt ist. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, liefert dies nun die Konvergenz $\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\omega_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^k}{k!}}$.

Zusatzaufgabe 7.2:

(a) Untersuchen Sie die Folgen (i) $a_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ und (ii) $b_n = \left(\frac{n+2}{n-1}\right)^n$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(b) Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen (i) $\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n}$ sowie (ii) $\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.2:

(a) (i) In ZA 7.1 haben wir gezeigt, dass $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} =: \mathrm{e}$ gilt. Wegen

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1} = \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1}$$

erhalten wir $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}(1+\frac{1}{n-1})} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{e}\cdot 1} = \mathrm{e}^{-1}$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n-1} + \frac{3}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n-1} + \frac{3}{n-1}\right) \overset{m=n-1}{=} \lim\limits_{m\to\infty} \left(1 + \frac{3}{m}\right)^m \cdot 1 = \mathrm{e}^3$.

(b) (i) Analog (a) ist $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-3}{n}\right)^n\right)^2 = \exp(-3)^2 = \exp(-6)$.

(ii) Wegen $\left(\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}\right)^{-1} = \left(\frac{n^2-2}{n^2+1}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{-3}{n^2+1}\right)^{n^2+1} \cdot \left(1 - \frac{3}{n^2+1}\right)^{-1}$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2} = \frac{1}{\left(\lim\limits_{m\to\infty} (1 + \frac{-3}{m})^m\right) \cdot (1-0)^{-1}} = \frac{1}{\exp(-3)} = \exp(3) .$$

Zusatzaufgabe 7.3:

(a) Ist die Menge $\{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ eine abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$?

(b) Ist die Menge der irrationalen Zahlen gleichmächtig zu der Menge aller rationalen Vielfachen von Wurzeln aus rationalen Zahlen?

(c) Sind die Intervalle $[a, b]$ mit $a < b$ und $[0, 1]$ gleichmächtig ?

(d) Sind die Mengen $[0, 1]$ und $]0, 1]$ gleichmächtig ?

(e) Kann es eine streng monotone Abzählung der Menge $\mathbb{Q} \cap]0, 1[$ geben ?

(f) Zeigen Sie: Ist a_n eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, dann ist jede reelle Zahl $x \in [0, 1]$ ein Häufungspunkt der Folge a_n.

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.3:

(a) Ja, sei $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ abgezählt durch $a = (a_1, a_2) \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, dann ist $b_n := a_{n,1} + a_{n,2}\sqrt{2}$ eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf die gegebene Menge.

(b) Da die Mengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ abzählbar sind, ist auch die zu einer Teilmenge von $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ gleichmächtige Menge $\mathcal{W} := \{a \in \mathbb{R} \mid \exists p, q \in \mathbb{Q}\ \exists n \in \mathbb{N}\ :\ a = p\sqrt[n]{q}\}$ abzählbar. Die Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist jedoch überabzählbar und somit nicht gleichmächtig zu $\mathcal{W}$.

(c) Ja, denn beispielsweise ist $\varphi \colon [a, b] \to [0, 1]$, definiert durch $x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$, eine Bijektion mit Umkehrabbildung $\varphi^{-1} \colon [0, 1] \to [a, b]$, gegeben durch $y \mapsto a + y(b - a)$.

(d) Ja, denn eine Bijektion $\psi \colon [0, 1] \to]0, 1]$ ist beispielsweise $\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{n+1} & \text{für } x = \frac{1}{n}, \quad (n \in \mathbb{N}), \\ x & \text{sonst }. \end{cases}$

(e) Angenommen, es gibt eine streng monotone Abzählung $\tau \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap]0, 1[$. Dann muss τ injektiv sein, d.h., das Urbild einelementiger Mengen aus $\mathbb{Q} \cap]0, 1[$ unter τ ist wieder einelementig.

- Angenommen, τ wäre monoton wachsend. Dann gäbe es aufgrund der Surjektivität ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\tau(N) = \frac{1}{2}$. Da die Menge $A := \{\frac{1}{k} \mid k \geq 3\}$ jedoch abzählbar unendlich ist, kann nicht jedes Element aus A in der Menge $\tau(\{1, \ldots, N - 1\})$ vorkommen. Also existiert aufgrund der Surjektivität von τ mindestens ein $k_0 \geq 3$ und ein $n_0 > N$ mit $\{n_0\} = \tau^{-1}(\{\frac{1}{k_0}\})$. Dann ergibt sich jedoch $N < n_0 \implies \frac{1}{2} = \tau(N) > \tau(n_0) = \frac{1}{k_0}$ im Widerspruch dazu, dass wir τ als monoton wachsend angenommen hatten.
- Angenommen, τ wäre monoton fallend. Dann gäbe es aufgrund der Surjektivität ein $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ mit $\tau(\tilde{N}) = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$. Da die Menge $B := \{1 - \frac{1}{k} \mid k \geq 3\}$ jedoch abzählbar unendlich ist, kann nicht jedes Element aus B in der Menge $\tau(\{1, \ldots, \tilde{N} - 1\})$ vorkommen. Also existiert aufgrund der Surjektivität von τ mindestens ein $k_1 \geq 3$ und ein $n_1 > \tilde{N}$ mit $\{n_1\} = \tau^{-1}(\{1 - \frac{1}{k_1}\})$. Dann ergibt sich jedoch $\tilde{N} < n_1 \implies \frac{1}{2} = \tau(\tilde{N}) < \tau(n_1) = 1 - \frac{1}{k_1}$ im Widerspruch dazu, dass wir τ als monoton fallend angenommen hatten.

Somit kann es keine streng monotone Abzählung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap]0, 1[$ geben.

(f) Ist $a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ eine Abzählung, dann ist a insbesondere surjektiv, also liegen zu festem $x \in [0, 1]$ und beliebigem $\varepsilon > 0$ unendlich viele rationale Zahlen, also auch unendlich viele Folgenglieder von a_n in $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap [0, 1]$, so dass wir zur ε-Folge $\varepsilon_k = 2^{-k}$ jeweils sukzessive ein Folgenglied der zu konstruierenden Teilfolge a_{n_k} auswählen können (analog zum Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß).

Zusatzaufgabe 7.4:

(a) Zeigen Sie: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert $\lim_{x\to a} f(x)$, sofern die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ übereinstimmt mit

(i) einer der konstanten Funktionen $f_c\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ x \mapsto c$ ($c \in \mathbb{R}$) oder

(ii) einer der linearen Funktionen $g_b\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ x \mapsto bx$ ($b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) oder

(iii) einem Polynom $p_N(x) = \sum_{k=0}^{N} b_k x^k$ ($\forall k = 0, \dots, N\colon b_k \in \mathbb{R},\ b_N \neq 0$).

(b) Sei $\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$. Zeigen Sie $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$.

(c) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Geben Sie ein Folgenkriterium dafür an, dass f in einem Punkt $a \in I$ unstetig ist.

(d) Seien $f(x) = 2x + 3$ und $g(x) = x^2 - 2x - 24$ Funktionen auf $\mathbb{R}$. Ermitteln Sie die Funktionen $(f \circ g)(x)$ sowie $(g \circ f)(x)$ und bestimmen Sie den Wertebereich von $f, g, f \circ g$ und $g \circ f$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.4:

(a) (i) Da für jede beliebige Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann jeweils die Folge $(f_c(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit der konstanten und somit konvergenten Folge $(c)_{n\in\mathbb{N}}$ übereinstimmt, existiert dann auch der Grenzwert $\lim_{x\to a} f_c(x) = c = f_c(a)$.

(ii) Nach den Rechenregeln für konvergente Folgen impliziert die Konvergenz $x_n \to a$ dann auch stets $g_b(x_n) = bx_n \to ba$. Also gilt hier $\lim_{x\to a} g_b(x) = ba = g_b(a)$.

(iii) Der Grenzwert existiert und es gilt $\lim_{x\to a} p_N(x) = p_N(a)$, denn wiederum nach den Rechenregeln für konvergente Folgen impliziert die Konvergenz $x_n \to a$ an dieser Stelle auch

$$\lim_{n\to\infty} p_N(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} b_k x_n^k = \sum_{k=0}^{N} b_k \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^k = \sum_{k=0}^{N} b_k a^k = p_N(a).$$

Insbesondere haben wir neben der Existenz der Grenzwerte herausgefunden, dass bei den oben betrachteten Funktionen diese zusätzlich noch mit dem jeweiligen Funktionswert an der Stelle a übereinstimmt.

(b) Wegen der Einschließung $\frac{1}{x} - 1 < \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x}$ gilt für $x > 0$ die Einschließung $1 - |x| = 1 - x < x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq 1$ und für $x < 0$ die Einschließung $1 + |x| = 1 - x > x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor \geq 1$.
Somit folgt aus $|x| < \varepsilon$ schon $|x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor - 1| < \varepsilon$. Also gilt für jede Folge $x_n \neq 0$ mit $x_n \to 0$, dass $x_n\lfloor \frac{1}{x_n} \rfloor$ gegen 1 konvergiert.

(c) Aus der Definition der Stetigkeit ergibt sich sofort: Existiert im Intervall I mindestens eine Folge (x_n) mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ und $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\not\to} f(a)$, dann ist f unstetig in a.

(d) Wegen $\lim_{x\to\infty} (2x + 3) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} (2x + 3)$ sowie mittels der Stetigkeit und dem Zwischenwertsatz ergibt sich $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Analog ergibt sich wegen $g(x) = x^2 - 2x - 24 = (x - 1)^2 - 25 \geq -25$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $g(1) = -25$ sowie $\lim_{x\to\pm\infty} ((x - 1)^2 - 25) = +\infty$ wiederum aufgrund der Stetigkeit von Polynomen und dem Zwischenwertsatz $g(\mathbb{R}) = [-25, \infty[$. Desweiteren ist $(f \circ g)(x) = 2g(x) + 3 = 2x^2 - 4x - 45 = 2(x - 1)^2 - 47$ und daher folgt analog zuvor $(f \circ g)(\mathbb{R}) = [-47, \infty[$ für den Wertebereich. Schließlich ergibt sich $(g \circ f)(\mathbb{R}) = [-25, \infty[$ wegen

$$(g \circ f)(x) = (f(x))^2 - 2f(x) - 24 = (2x + 3)^2 - 4x - 30 = 4x^2 + 8x - 21 = 4(x + 1)^2 - 25 \geq -25.$$

Zusatzaufgabe 7.5: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{6x^2-4x-2}{2x^2+x-3}$ (b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-x^2-x+1}$ (c) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-x-2}}$ (d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.5:

(a) Es ist $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{6x^2-4x-2}{2x^2+x-3} = \dfrac{8}{5}$, denn nach Grenzwertgesetzen für Folgen gilt

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \ \wedge\ \forall n\colon x_n \neq 1\right) \implies \frac{6x_n^2-4x_n-2}{2x_n^2+x_n-3} = \frac{(x_n-1)(6x_n+2)}{(x_n-1)(2x_n+3)} = \frac{6x_n+2}{2x_n+3} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{8}{5}\,.$$

(b) Es ist $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-x^2-x+1} = 0$, denn nach Grenzwertgesetzen für Folgen gilt

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = -1 \wedge \forall n\colon x_n \neq -1\right) \implies \frac{x_n^3+x_n^2-x_n-1}{x_n^3-x_n^2-x_n+1} = \frac{(x_n+1)^2(x_n-1)}{(x_n+1)(x_n-1)^2} = \frac{x_n+1}{x_n-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

(c) Es ist $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-x-2}} = \sqrt{2}$, denn nach Grenzwertgesetzen für Folgen sowie mit ZA 4.2 (c) gilt

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = 2 \wedge \forall n\colon x_n \neq 2\right) \implies \sqrt{\frac{x_n^2+2x_n-8}{x_n^2-x_n-2}} = \sqrt{\frac{(x_n-2)(x_n+4)}{(x_n-2)(x_n+1)}} = \sqrt{\frac{x_n+4}{x_n+1}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}\,.$$

(d) Zusammen mit der Stetigkeit der Wurzelfunktionen (also mit ZA 4.2 (c)) ergibt sich analog

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4} \frac{(1+2x)-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x\to 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}\,.$$

Zusatzaufgabe 7.6: Zeigen Sie:

(a) Es existieren $a \in \mathbb{R}$ mit stetigem $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_a(x) := \begin{cases} a^2x - 2a, & x \geq 2, \\ 12, & x < 2. \end{cases}$

(b) Es existieren $c \in \mathbb{R}$ mit stetigem $f_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f_c(x) := \begin{cases} (x-c)^2, & \text{falls } x \leq 1, \\ x, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$

(c) Zeigen Sie:

Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit stetigem $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f_a(x) := \begin{cases} x^2-1, & x < 3, \\ 2ax, & x \geq 3. \end{cases}$

(d) Bestimmen Sie das Paar $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, so dass $f_{(a,b)}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig wird, welches definiert ist durch

$$f_{(a,b)}(x) := \begin{cases} -2, & x \leq -1, \\ ax-b, & -1 < x < 1, \\ 3, & x \geq 1. \end{cases} \tag{7.4}$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.6:

(a) Da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, gilt zunächst, dass f_a für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ zumindest in allen Punkten $x \neq 2$ in einer Umgebung mit einem Polynom übereinstimmt und somit nach ZA 7.4 (a.iii) stetig ist. In $x = 2$ erhalten wir Stetigkeit genau dann, wenn

$$12 = \lim_{x\nearrow 2} 12 = \lim_{x\nearrow 2} f_a(x) = \lim_{x\searrow 2} f_a(x) = \lim_{x\searrow 2}(a^2x-2a) = 2a(a-1)\,,$$

also wenn $0 = a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2)$ gilt. Somit sind nur f_{-2} und f_3 stetig.

(b) Da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, gilt zunächst, dass f_c für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ zumindest in allen Punkten $x \neq 1$ stetig ist, da dort lokal mit einem Polynom identisch und somit nach ZA 7.4 (a.iii) stetig ist. Damit f_c auch stetig im Punkt $x = 1$ ist, muss c die Gleichung $(1-c)^2 = 1$ erfüllen, also $c = 0$ oder $c = 2$ gelten.

(c) Da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist und die stückweise definierte Funktion f_a in der Umgebung jedes Punktes $x \neq 3$ mit einem Polynom übereinstimmt, ist sie dort auch stetig. Es bleibt nun noch zu zeigen, dass f_a genau für ein $a \in \mathbb{R}$ auch stetig in $x = 3$ ist.

- Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen 3 konvergente Folge mit der Eigenschaft $\forall n \in \mathbb{N}\colon x_n < 3$, dann folgt mit Grenzwertgesetzen $\lim\limits_{n\to\infty} f_a(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n^2 - 1) = 3^2 - 1 = 8$.
- Sei nun $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen 3 konvergente Folge mit der Eigenschaft $\forall n \in \mathbb{N}\colon x_n \geq 3$, dann folgt mit Grenzwertgesetzen $\lim\limits_{n\to\infty} f_a(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 2ax_n = 6a$.

Da eine beliebige gegen 3 konvergente Folge mindestens eine Teilfolge besitzt, die einem der beiden oben beschriebenen Fälle zuzuordnen ist, ist f_a folglich genau dann stetig, wenn $6a = 8$, also $a = \dfrac{4}{3}$ gilt.

(d) Da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist und die stückweise definierte Funktion $f_{(a,b)}$ in der Umgebung jedes Punktes $x \notin \{-1, 1\}$ mit einem Polynom übereinstimmt, ist sie dort auch stetig. Es bleibt nun noch zu zeigen, dass $f_{(a,b)}$ für eine geeignete Wahl der Parameter a und b auch stetig in $x = \pm 1$ ist.

- Analog (a) erhalten wir im Fall der Stetigkeit im Punkt $x = 1$ die Bedingung
$$3 = \lim_{x\searrow 1} 3 = \lim_{x\searrow 1} f_{(a,b)}(x) = \lim_{x\nearrow 1} f_{(a,b)}(x) = \lim_{x\nearrow 1} ax - b = a - b\,.$$
- Im Fall der Stetigkeit im Punkt $x = -1$ erhalten wir als weitere Bedingung
$$-2 = \lim_{x\nearrow -1} -2 = \lim_{x\nearrow -1} f_{(a,b)}(x) = \lim_{x\searrow -1} f_{(a,b)}(x) = \lim_{x\searrow -1} ax - b = -a - b\,.$$

Somit erhalten wir das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit der aufgrund der Regularität der Koeffizientenmatrix eindeutigen Lösung $(a,b) = \left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$. Somit ist für die Funktionenschar $f_{(a,b)}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus (7.4) genau die Funktion $f_{\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$ stetig.

Zusatzaufgabe 7.7:

(a) Zeigen Sie: Die Polynomfunktion $f(x) = x^6 - x^3 + x - 2$ hat mindestens zwei Nullstellen in $\mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie: Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f([a,b]) \subset [a,b]$, dann existiert ein $p \in [a,b]$ mit $f(p) = p$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.7:

(a) Als Polynom ist f auch auf jedem Intervall stetig. Es gilt $f(0) = -2$ und $f(2) = 56$ und $f(-2) = 68$. Nach dem Zwischenwertsatz liegt wegen $f(-2)f(0) = -136 < 0$ in $]-2, 0[$ eine Nullstelle und wegen $f(0)f(2) = -112 < 0$ in $]0, 2[$ eine weitere Nullstelle.

(b) Die Funktion $g(x) = f(x) - x$ ist als Differenz stetiger Funktionen stetig. Desweiteren folgt aus $f([a,b]) \subset [a,b]$, dass für beliebiges $x \in [a,b]$ demnach $a \leq f(x) \leq b$ gilt. Insbesondere liefert dies die Gültigkeit von $g(a) = f(a) - a \geq 0$ und $g(b) = f(b) - b \leq 0$, also $g(a)g(b) \leq 0$.

- Im Fall $g(a)g(b) = 0$ folgt mit der Nullteilerfreiheit in $\mathbb{R}$ sofort $g(a) = f(a) - a = 0$ oder $g(b) = f(b) - b = 0$, also gilt die Behauptung für a oder b.
- Im Fall $g(a)g(b) < 0$ liefert der Nullstellensatz (Satz 11.1) aufgrund der Stetigkeit von $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ die Existenz eines $p \in\,]a,b[$ mit $0 = g(p) = f(p) - p$, also $f(p) = p$.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 8

Sätze über stetige Funktionen II

- **Satz 11.2: [Satz vom Minimum/Maximum]**

  Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist das Bild $f([a,b])$ beschränkt und f nimmt sein Minimum und sein Maximum an, d.h., es gibt $\xi, \eta \in [a,b]$ mit $f(\xi) \leq f(x) \leq f(\eta)$ für alle $x \in [a,b]$.

  Bem.: Wir werden später sehen, dass der Satz bereits gilt, wenn der Definitionsbereich von f beschränkt und abgeschlossen ist (also beispielsweise auch aus einer Vereinigung endlich vieler ggf. entarteter (d.h., nur einen Punkt enthaltender) abgeschlossener Intervalle bestehen darf).

- **Satz 11.3: [„ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit"]** Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in D$. Dann gilt:

  $$f\colon D \to \mathbb{R} \text{ stetig in } a \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta_{\varepsilon,a} > 0\, \forall x \in D \;:\; \Big(|x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \varepsilon \Big)\,.$$

  Corollar: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$ mit $f(a) \neq 0$. Dann existiert für ein $\delta > 0$ eine δ-Umgebung $U_\delta := D \cap \;]a-\delta, a+\delta[$ von a, so dass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in U_\delta$ gilt.

- **Definition: [gleichmäßige Stetigkeit]** $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, heißt **gleichmäßig stetig auf** D

  $$:\iff \qquad \forall \varepsilon > 0\; \exists \delta = \delta_\varepsilon\; \forall x, y \in D \;:\; \Big(|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Big)\,. \tag{8.1}$$

- **Definition: [Lipschitz-Stetigkeit]** $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, heißt **Lipschitz-stetig auf** D

  $$:\iff \qquad \exists\, L < \infty\; \forall x, y \in D \;:\; |f(x) - f(y)| \;\leq\; L \cdot |x-y|\,. \tag{8.2}$$

  Bem.: Aus den Definitionen folgt: f Lipschitz-stetig $\implies$ f gleichmäßig stetig $\implies$ f stetig.

- **Satz 11.4:** Mit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ folgt: $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\implies$ $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

  Bem.: Abgeschlossenheit und Beschränktheit des Intervalls sind wesentliche Voraussetzungen!

- **Beispiele:**

  (a) $f\colon]0,1] \to \mathbb{R},\; x \mapsto \frac{1}{x}$, ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.
  (b) $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R},\; x \mapsto x^2$, ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.
  (c) $f\colon [0,b] \to \mathbb{R},\; x \mapsto x^k$, für $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, und $b > 0$ ist gleichmäßig stetig nach Satz 11.4.
  (d) $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R},\; x \mapsto \sqrt[k]{x}$, für $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.
  (e) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto |x|$, ist Lipschitz- und damit auch gleichmäßig stetig, also auch stetig.
  (f) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto cx$, für ein $c \in \mathbb{R}$ ist Lipschitz- und damit auch gleichmäßig stetig.

Monotonie, Umkehrfunktion monotoner Funktionen

- **Definition**: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$. Dann heißt f

  monoton wachsend, falls $\forall x, y \in D\colon \big(x < y \implies f(x) \leq f(y)\big)$;
  streng monoton wachsend, falls $\forall x, y \in D\colon \big(x < y \implies f(x) < f(y)\big)$;
  monoton fallend, falls $\forall x, y \in D\colon \big(x < y \implies f(x) \geq f(y)\big)$;
  streng monoton fallend, falls $\forall x, y \in D\colon \big(x < y \implies f(x) > f(y)\big)$.

  Wir nennen f **monoton**, falls f eine der vier obigen Eigenschaften besitzt und **streng monoton**, falls sie streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

- **Satz 12.1: [Existenz einer stetigen Umkehrfunktion]**

  Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Dann existiert genau eine Funktion $g\colon f(D) \to \mathbb{R}$ mit $g \circ f = \mathrm{Id}_D$ und $f \circ g = \mathrm{Id}_{f(D)}$. Insbesondere ist g stetig und besitzt dasselbe Monotonieverhalten wie f.

  Bemerkungen:

  (a) Gelegentlich nennt man $g : f(D) \to \mathbb{R}$ auch die Umkehrfunktion von f und schreibt f^{-1}. Die Bijektion besteht jedoch nur zwischen D und $f(D)$.

  (b) Als Anwendung (**Satz 12.2**) erhalten wir für die stetigen und streng monotonen Monomfunktionen $f_k\colon [0,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^k$ wegen $f([0,\infty[) = [0,\infty[$ die Stetigkeit (und strenge Monotonie) der **k-ten Wurzeln** $g_k\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[k]{x}$, wie schon in ZA 4.2 (b,c) gezeigt.

  (c) Für ungerades k, also $k = 2n-1$ für ein $n \in \mathbb{N}$, ist auch die Fortsetzung der f_{2n-1} auf $\mathbb{R} =]-\infty,\infty[$ stetig und streng monoton wachsend mit $f_{2n-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, d.h., es existiert sogar eine Umkehrabbildung $g_{2n-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g \circ f = f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Diese erweiterte Umkehrfunktion bezeichnen wir jedoch **nicht** als $(2n-1)$-te Wurzel.

Zusatzaufgabe 8.1:

(a) Die Funktion $f\colon\ ]0,1] \to \mathbb{R}$ sei stückweise linear definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} 2n(1-(2n-1)x) & , x \in \left]\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right],\ n \in \mathbb{N}, \\ 2n((2n+1)x-1) & , x \in \left]\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right],\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zeigen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}$ existieren $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2n}} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2n-1}} f(x)$, jedoch existiert $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nicht.

(b) Untersuchen Sie, ob die Funktion $g \circ f$ in $a = 0$ den Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$ besitzt, falls $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben sind durch

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & x \in \mathbb{Q}\ , \\ x^2\ , & x \notin \mathbb{Q}\ , \end{cases} \qquad , \qquad g(x) = \begin{cases} 1\ , & x = 0\ , \\ x\ , & x \neq 0\ . \end{cases}$$

(c) Zeigen **oder** widerlegen Sie:
Sind $f, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\forall q \in \mathbb{Q}\colon f(q) = h(q)$, dann gilt schon $\forall x \in \mathbb{R}\colon f(x) = h(x)$.

(d) Welche stetigen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllen die Funktionalgleichung $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon f(x+y) = f(x) + f(y)$?

(e) Zeigen Sie:
Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ besitzt $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-a} + \dfrac{x^6+1}{x-b}$ eine Nullstelle in $]a,b[$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.1:

(a) Nach ZA 7.4 (a) existieren die ersten beiden Grenzwerte zumindest jeweils einseitig (da Geraden lineare Funktionen sind), Einsetzen liefert, dass die einseitigen auch jeweils übereinstimmen, d.h., es gilt $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2n}} f(x) = 1 = f\left(\dfrac{1}{2n}\right)$ und $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2n-1}} f(x) = 0 = f\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)$. Da $\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ und $\left(\dfrac{1}{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolgen sind, kann $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ wegen $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(\dfrac{1}{2n}\right) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{n \to \infty} f\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)$ nicht existieren.

(b) Da es mindestens eine reelle Nullfolge gibt, existiert der Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$ genau dann, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für jede Nullfolge (x_n) auch $(g \circ f)(x_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} c$ gilt. Der Grenzwert kann jedoch nicht existieren, denn für die beiden durch $a_n := \frac{1}{n}$ und $b_n := \frac{\sqrt{2}}{n}$ definierten Nullfolgen gilt

$$(g \circ f)(a_n) = g(0) = 1 \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0 \overset{n \to \infty}{\longleftarrow} \tfrac{2}{n^2} = g\left(\tfrac{2}{n^2}\right) = (g \circ f)(b_n)\ .$$

(c) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ beliebig, jedoch fest, dann existiert eine Folge rationaler Zahlen $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $q_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ (wir können beispielsweise die nach Satz 5.5 existierende Folge der entsprechenden Partialsummen der b-adischen Entwicklung wählen). Insbesondere sind dann die Folgen $(f(q_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h(q_n))_{n\in\mathbb{N}}$ wegen $\forall q \in \mathbb{Q} : f(q) = h(q)$ vollkommen identisch. Aufgrund der Stetigkeit von f und h gilt dann auch

$$f(x) \;=\; f\left(\lim_{n\to\infty} q_n\right) \;\overset{f \text{ stetig}}{=}\; \lim_{n\to\infty} f(q_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} h(q_n) \;\overset{h \text{ stetig}}{=}\; h\left(\lim_{n\to\infty} q_n\right) \;=\; h(x)\ .$$

(d)
- Wegen $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ muss $f(0) = 0$ gelten, also wegen $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$ auch $f(-x) = -f(x)$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$.
- Sei $\alpha := f(1)$. Dann liefert die Funktionalgleichung $f(n) = n \cdot f(1) = \alpha n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ per Induktion und wegen $f(-x) = -f(x)$ auch $f(z) = \alpha \cdot z$ für beliebiges $z \in \mathbb{Z}$.
- Analog ergeben sich dann auch $f(zx) = zf(x)$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{Z}$.
- Ebenso folgt für alle $n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}$ dann $\alpha z = zf(1) = f(z) = f\left(n \cdot \frac{z}{n}\right) = nf\left(\frac{z}{n}\right)$, also insgesamt $\alpha \cdot q = f(q)$ für beliebiges $q \in \mathbb{Q}$. Da f nach Voraussetzung und die lineare Funktion $g(x) = \alpha x$ in allen $x \in \mathbb{R}$ stetig ist und f und g nach dem bisher gezeigten in allen $q \in \mathbb{Q}$ übereinstimmen, folgt mit Aufgabenteil (c) auch $f(x) = \alpha x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Fazit: Die obige Funktionalgleichung wird genau nur von den linearen Funktionen erfüllt !

(e) Mit Sätzen aus der Vorlesung folgt, dass f als überall auf $]a, b[$ definierte rationale Funktion stetig ist. Einerseits existiert nun wegen $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = +\infty$ (denn der erste Term ist aufgrund der Positivität des Zählers in der rechtsseitigen Nähe von a nach oben unbeschränkt, während der zweite Term aufgrund seiner Stetigkeit bei a beschränkt bleibt) ein $\varepsilon_1 > 0$ mit o.B.d.A. $\varepsilon_1 < \frac{b-a}{2}$, so dass $f(a+\varepsilon_1) > 0$ gilt. Andererseits existiert wegen $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x) = -\infty$ (denn der erste Term bleibt aufgrund seiner Stetigkeit bei b beschränkt, während der zweite Term aufgrund der Positivität des Zählers in der linksseitigen Nähe von b nach unten unbeschränkt ist) ein $\varepsilon_2 > 0$ mit wiederum o.B.d.A. $\varepsilon_2 < \frac{b-a}{2}$, so dass $f(b - \varepsilon_2) < 0$ gilt. Nach dem Zwischenwertsatz besitzt f wegen $a + \varepsilon_1 < \frac{a+b}{2} < b - \varepsilon_2$ und $f(a+\varepsilon_1)f(b-\varepsilon_2) < 0$ somit auf dem Intervall $]a + \varepsilon_1, b - \varepsilon_2[$ und damit auch auf dem Intervall $]a, b[$ eine Nullstelle.

Zusatzaufgabe 8.2: Zeigen Sie das **Corollar zu Satz 11.3**.

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.2:

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$ mit $f(a) \neq 0$. Dann ist auch $\varepsilon := \frac{|f(a)|}{2} > 0$. Aufgrund der Stetigkeit von f in $a \in D$ gibt es ein $\delta := \delta(\varepsilon, a)$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ auch $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ gilt. Wegen

$$|x-a| < \delta \quad\Longleftrightarrow\quad -\delta < x - a < \delta \quad\Longleftrightarrow\quad a - \delta < x < a + \delta \quad\Longleftrightarrow\quad x \in \;]a-\delta, a+\delta[$$

und

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad\Longleftrightarrow\quad -\varepsilon < f(x) - f(a) < \varepsilon \quad\Longleftrightarrow\quad f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$$

ist dies mit der Abkürzung $U_\delta := D \cap \;]a - \delta, a + \delta[$ äquivalent zu

$$\forall x \in U_\delta\colon f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon\ . \tag{8.3}$$

Wegen $f(a) \neq 0$ nach Voraussetzung haben wir die beiden Fälle $f(a) > 0$ und $f(a) < 0$ zu untersuchen:

- Falls $f(a) > 0$, liefert (8.3) dann $\forall x \in U_\delta\colon 0 < \frac{f(a)}{2} = f(a) - \frac{|f(a)|}{2} = f(a) - \varepsilon < f(x)$.
- Falls $f(a) < 0$, liefert (8.3) dann $\forall x \in U_\delta\colon f(x) < f(a) + \varepsilon = f(a) + \frac{|f(a)|}{2} = -\frac{|f(a)|}{2} < 0$.

Also folgt aus (8.3) in jedem Fall $\forall x \in U_\delta : f(x) \neq 0$ wie behauptet.

Zusatzaufgabe 8.3: (a) Zeigen Sie: Lipschitz-stetige Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ sind gleichmäßig stetig.

(b) Existiert ein $f\colon [0,1[\to \mathbb{R}$ beschränkt, stetig, aber nicht gleichmäßig stetig?

(c) Existiert auch ein $f\colon\ ]0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt, stetig, aber nicht gleichmäßig stetig?

(d) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, beschränkt? Besitzt f ein Maximum?

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.3:

(a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es existiert ein $L < \infty$, so dass $\forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$, da $f : D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist. Aufgrund der Nichtnegativität des Betrages muss $L \geq 0$ gelten.

- Im Fall $L = 0$ folgt $\forall x, y \in D\ :\ |f(x) - f(y)| = 0$ (d.h., f konstant), so dass für beliebiges $\delta > 0$ stets aus $|x - y| < \delta$ auch $|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon$ folgt.
- Im Fall $L > 0$, können wir $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ wählen und erhalten mit der Lipschitz-Stetigkeit wie gewünscht aus $|x - y| < \delta$ stets $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| < L \cdot \delta = L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$.

(b) Ja, etwa die stetig zusammengesetzte stückweise lineare Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 2^{2k+1}(x-1)+2, & x \in [1-2^{-2k}, 1-2^{-2k-1}[\text{ für } k \in \mathbb{N}_0, \\ 2^{2k+2}(1-x)-1, & x \in [1-2^{-2k-1}, 1-2^{-2k-2}[\text{ für } k \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

besitzt auf jedem Intervall $[1 - 2^{-2k}, 1 - 2^{-2k-1}]$ den Anstieg 2^{2k+1} und auf jedem Intervall $[1-2^{-2k-1}, 1-2^{-2k-2}]$ den Anstieg -2^{2k+2}. Desweiteren gilt $f(1-2^{-2k}) = 0$ und $f(1-2^{-2k-1}) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so dass sie wegen $f([0,1[) = [0,1]$ auch beschränkt ist. Da jedoch auch $f(]1-\delta, 1[) = [0,1]$ für jedes $\delta \in]0,1[$ gilt, kann diese Funktion nicht gleichmäßig stetig sein.

(c) Ja, beispielsweise erfüllt f aus ZA 8.1 (a) für jedes $\delta \in]0,1[$ stets $f(]0,\delta) = [0,1]$ analog (b).

(d) Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$ und $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \dfrac{2}{x^2+1} < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist f zwar durch 1 beschränkt, nimmt jedoch sein Supremum 1 auf $\mathbb{R}$ nicht an. (Das globale Minimum wird bei $x = 0$ angenommen, es gilt $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ -1 = f(0) \leq f(x)$.)

Zusatzaufgabe 8.4: **(Stetigkeit der Exponentialfunktion)**

(a) Zeigen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \exp(x) = 1$ (b) Zeigen Sie die Stetigkeit von $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.4:

(a) Die Restgliedabschätzung aus Satz 8.2 liefert für $N = 0$ die Aussage

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon \left(|x| \leq \frac{0+2}{2} = 1 \implies \left| \exp(x) - \sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!} \right| = |\exp(x) - 1| \leq 2\frac{|x|^{0+1}}{(0+1)!} = 2|x| \right),$$

so dass insbesondere jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab dem zugehörigen N_ε mit $\varepsilon = 1$ offenbar die Abschätzung $|\exp(x_n) - 1| \leq 2|x_n|$ erfüllt. Aufgrund der Stetigkeit des Betrages (siehe Beispiel (e)) folgt daraus sofort die Behauptung.

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge, die gegen a konvergiert, dann ist $(x_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und mit Aufgabenteil (a) sowie der Funktionalgleichung aus Satz 8.4 folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(a) \cdot \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a) = \exp(a) \cdot 1 = \exp(a)\ .$$

Zusatzaufgabe 8.5: **(Beispiele unstetiger Funktionen)**

(a) Zeigen Sie die Unstetigkeit von nichtkonstanten Treppenfunktionen.

(b) Geben Sie eine monotone Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit abzählbar unendlich vielen Spungstellen an.

(c) Finden Sie eine monotone Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit abzählbar unendlich vielen Spungstellen.

(d) Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\,, \\ 1, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$
Zeigen Sie, dass f in keinem Punkt des Definitionsbereiches stetig ist.

(e) Zeigen Sie: Jede monotone Funktion besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

(f) Zeigen Sie, dass für jede streng monotone (aber nicht unbedingt stetige) Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon f([a,b]) \to [a,b] \subset \mathbb{R}$ stetig ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.5:

(a) Eine Treppenfunktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ besitzt nur endlich viele Funktionswerte, so dass es Intervalle gibt, auf denen sie konstant ist.
Angenommen, die Treppenfunktion sei nicht konstant. Dann gibt es $a < c < d < e < b$ und $\alpha \neq \beta$ mit $\varphi(x) = \alpha$ für alle $c < x < d$ sowie mit $\varphi(x) = \beta$ für alle $d < x < e$. Aufgrund der Konstanz auf den offenen Teilintervallen $]c,d[$ und $]d,e[$ gilt dann jedoch

$$\lim_{x \searrow d} \varphi(x) \;=\; \beta \;\neq\; \alpha \;=\; \lim_{x \nearrow d} \varphi(x)\;,$$

so dass φ in d nicht stetig sein kann.

(b) Die Funktion $f(x) := \lfloor x \rfloor$ ist monoton wachsend und besitzt bei jedem $z \in \mathbb{Z}$ eine Sprungstelle mit Sprunghöhe 1.

(c) Etwa $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \mathrm{I}_{]a+\frac{b-a}{n+1}, a+\frac{b-a}{n}]}(x)$ mit der Indikatorfunktion $\mathrm{I}_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in A \end{cases}$

(d) Wir haben zu zeigen, dass f für kein $x \in [0,1]$ stetig ist. Dies folgt aus (i) und (ii):

(i) Sei $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ beliebig, aber fest gewählt. Offenbar ist $\frac{1}{4} < \frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{2}$ wegen $2 < 2\sqrt{2} < 4$. Wir definieren nun die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$x_n := \begin{cases} x \;+\; \frac{1}{2n\sqrt{2}}, & \text{falls } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ x \;-\; \frac{1}{2n\sqrt{2}}, & \text{falls } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

die offenbar gegen x konvergiert, denn für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt $|x_n - x| = \frac{1}{2n\sqrt{2}} < \varepsilon$ für alle $n > \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{2}}$. Da nun offenbar auch $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, entspricht die Folge $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ der konstanten Folge $\{1\}_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen $|f(x_n) - 1| = |1-1| = 0 < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim\limits_{x_n \to x} f(x_n) = 1$. Da jedoch $x \in \mathbb{Q}$ ist, gilt $f(x) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x_n \to x} f(x_n)$. Somit ist f in x nicht stetig.

(ii) Sei $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ beliebig, aber fest gewählt. Dann existiert (beispielsweise nach Satz 5, §5 Forster) eine Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten aus $\{0,1\}$ und mit

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \xi_n 2^{-n} \;=\; x\;.$$

Da nun die Folge der $S_N := \sum\limits_{n=1}^{N} \xi_n 2^{-n}$ wegen $2^N \cdot S_N \in \mathbb{Z}$ eine Folge rationaler Zahlen ist, entspricht die Folge $(f(S_N))_{n\in\mathbb{N}}$ der konstanten Nullfolge. Wegen $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ folgt

$\lim\limits_{N\to\infty} f(S_N) = 0 \neq 1 = f(x)$, also ist f in x nicht stetig.
Bemerkung: Wegen $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ gibt es kein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\xi_n = 0$ für alle $n \geq n_0$. Denn gäbe es ein solches, so wäre $x \cdot 2^K$ für $K = \max(1, n_0 - 1)$ eine ganze Zahl und somit $x \in \mathbb{Q}$ — Widerspruch zu $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Daher gilt insbesondere $S_N \neq x$ für alle $N \in \mathbb{N}$.)

(e) Da monotone Funktionen f nur Sprungstellen als Unstetigkeitsstellen besitzen können, kann man jeder Unstetigkeitsstelle x eindeutig das von f bei x übersprungene offene Intervall I_x zuordnen (wobei $I_x := \left]\sup\limits_{y<x} f(y), \inf\limits_{y>x} f(y)\right[$ für monoton wachsendes und $I_x := \left]\inf\limits_{y<x} f(y), \sup\limits_{y>x} f(y)\right[$ für monoton fallendes f ist). Aufgrund der Monotonie sind die offenen Intervalle I_x paarweise disjunkt. Da in jedem nicht entarteten Intervall mindestens eine rationale Zahl liegt, finden wir je ein $q_x \in I_x \cap \mathbb{Q}$. Aufgrund der Disjunktheit ist die bijektive Abbildung, die jedem q_x das Intervall I_x mit $q_x \in I_x$ zuordnet, wohldefiniert. Da ihr Definitionsbereich als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, ist auch die Menge der I_x abzählbar, und somit ebenso die Menge der Unstetigkeitsstellen x von f.

(f) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei f streng monoton wachsend und $a \neq b$. Wir wollen die Stetigkeit von $g := f^{-1}$ in $y_0 \in f([a,b])$ zeigen. Sei dazu $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dann wollen wir ein $\delta > 0$ finden, für das aus $|y - y_0| \leq \delta$ schon $|g(y) - g(y_0)| \leq \varepsilon$ folgt.

Da $y_0 \in f([a,b])$ gilt und f streng monoton (also insbesondere injektiv) ist, gibt es ein eindeutiges $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = y_0$. Seien weiter $x_{\min} := \min\limits_{x\in[a,b]} \{x_0 - \varepsilon \leq x\}$ und $x_{\max} := \max\limits_{x\in[a,b]} \{x_0 + \varepsilon \geq x\}$

- Falls $x_0 = b$, so ist auch $x_{\max} = b$ und wegen der strengen Monotonie von f sowie $a \neq b$ können wir dann $\delta := f(b) - f(x_{\min}) > 0$ wählen.
- Falls $x_0 = a$, so ist auch $x_{\min} = a$ und wegen der strengen Monotonie von f sowie $a \neq b$ können wir dann $\delta := f(x_{\max}) - f(a) > 0$ wählen.
- Falls $a < x_0 < b$, wählen wir $\delta := \min(y_0 - f(x_{\min}), f(x_{\max}) - y_0)$.
  Wegen $y_0 = f(x_0)$, $x_{\min} < x_0 < x_{\max}$ sowie der strengen Monotonie von f ist dann ebenfalls $\delta > 0$.

Für jedes $y \in f([a,b])$ mit $|y - y_0| \leq \delta$ gilt dann $f(x_{\min}) \leq y \leq f(x_{\max})$ aufgrund der Monotonie von f und aufgrund der Monotonie der Umkehrfunktion $g := f^{-1}$ auch

$$x_0-\varepsilon \leq x_{\min} = \boxed{f^{-1}(f(x_{\min})) = g(f(x_{\min})) \leq g(y) \leq g(f(x_{\max})) = f^{-1}(f(x_{\max}))} = x_{\max} \leq x_0+\varepsilon\,.$$

Also folgt $-\varepsilon \leq f^{-1}(y) - x_0 \leq \varepsilon$, d.h. $|f^{-1}(y) - x_0| \leq \varepsilon$, was wegen $x_0 = f^{-1}(y_0)$ genau zu beweisen war.

Zusatzaufgabe 8.6: Beweisen Sie:

(a) Die Funktion $f(x) := \dfrac{1}{x}$ ist auf jedem Intervall $[a, \infty[$, $a > 0$, gleichmäßig stetig.

(b) Die Funktion $f(x) := \dfrac{1}{x}$ ist auf $]0, \infty[$ nur stetig (und nicht gleichmäßig stetig).

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.6:

(a) Sei $a > 0$ beliebig. Da aus $x > a$ und $y > a$ auch $xy > a^2$ folgt, gilt

$$\forall x, y \in [a, \infty[: \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y-x}{xy}\right| = \frac{1}{xy}|x-y| \leq \frac{1}{a^2}|x-y|\ .$$

Ist also $\varepsilon > 0$, so gilt mit $\delta := \varepsilon a^2$ die Ungleichung $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < \varepsilon$ für alle $x, y \in [a, \infty[$ mit $|x - y| < \delta$, d.h., $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $[a, \infty[$ gleichmäßig stetig.

(b) Da für jede Folge $x_n > 0$ die Konvergenz $x_n \to a > 0$ nach den Rechenregeln für konvergente Folgen die Konvergenz $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$ nach sich zieht, ist f stetig auf $]0,\infty[$.

Angenommem, $f(x) = \frac{1}{x}$ sei nun auf $]0,\infty[$ sogar gleichmäßig stetig. Dann findet man zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für $x, y > 0$ mit $|x - y| < \delta$.
Sei nun $\eta := \frac{1}{2}\min\{\delta, \frac{1}{\varepsilon}\} > 0$. Dann gilt für $x := \frac{\eta}{2}$ und $y := \eta$ einerseits $|x - y| = \frac{\eta}{2} \leq \frac{\delta}{4} < \delta$, jedoch wegen $\eta \leq \frac{1}{2\varepsilon}$ andererseits auch

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \;=\; \frac{1}{\eta} \geq 2\varepsilon \;>\; \varepsilon$$

im Widerspruch zur Annahme der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf $]0,\infty[$.

Zusatzaufgabe 8.7:

(a) Zeigen Sie: Eine streng monotone Funktion ist injektiv.

(b) Es existiert eine injektive Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, die nicht monoton ist.

(c) Geben Sie ein Beispiel einer bijektiven Funktion $f\colon [a,b] \to [a,b]$ an, die nicht monoton ist.

(d) Beweisen Sie: Eine stetige und injektive Funktion auf einem Intervall ist streng monoton.

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.7:

(a) Angenommen, es gäbe $x \neq y$ mit $f(x) = f(y)$. Dann gilt entweder $x < y$ oder $x > y$. Der erste Fall kann nicht eintreten, denn aus der strengen Monotonie von f folgt $f(x) < f(y)$ falls f monoton wachsend bzw. $f(x) > f(y)$ falls f monoton fallend ist, also insbesondere $f(x) \neq f(y)$. Der zweite Fall kann jedoch ebenfalls nicht eintreten, denn wiederum aus der strengen Monotonie von f folgt $f(x) > f(y)$ falls f monoton wachsend bzw. $f(x) < f(y)$ falls f monoton fallend ist, also insbesondere wieder $f(x) \neq f(y)$. Damit muss die Annahme falsch und f injektiv sein.

(b) Eine injektive (auf $[0,1]$ sogar bijektive), aber nicht monotone Funktion ist beispielsweise

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[, \\ \frac{3}{2} - x & \text{für } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

(c) Eine bijektive, aber nicht monotone Funktion $f : [a,b] \to [a,b]$ ist beispielsweise

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right[, \\ \frac{3b+a}{2} - x & \text{für } x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]. \end{cases}$$

(d) Seien $x_0 < y_0$ beliebige Punkte aus dem Intervall I, auf dem die betrachtete stetige und injektive Funktion f definiert ist. Es gilt aufgrund der Injektivität $f(x_0) \neq f(y_0)$ wegen $x_0 \neq y_0$. Somit folgt entweder $f(x_0) < f(y_0)$ oder $f(x_0) > f(y_0)$.

- Im Fall $f(x_0) < f(y_0)$ gilt aber auch schon $f(x) < f(y_0)$ für alle $x < y_0$. Denn angenommen es existiert ein $x < y_0$ mit $f(x) > f(y_0)$, dann gibt es wegen $f(x_0) < f(y_0) < f(x)$ aufgrund der Stetigkeit von f einen Punkt ξ zwischen x_0 und x mit $f(\xi) = f(y_0)$ im Widerspruch zur Injektivität von f. Also gilt für jedes $y_0 \in I$ die Ungleichung $f(x) < f(y_0)$ für alle $x \in I$ mit $x < y_0$, und daher ist f streng monoton wachsend.
- Im Fall $f(x_0) > f(y_0)$ gilt analog $f(x) > f(y_0)$ für alle $x < y_0$, und daraus kann man schließen, dass f streng monoton fallend auf I ist.

Zusatzaufgabe 8.8:

(a) Die Funktionen $\cosh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (cosinus hyperbolicus) und $\sinh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (sinus hyperbolicus) sind definiert durch

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) \qquad \text{und} \qquad \sinh(x) := \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) . \tag{8.4}$$

Weiterhin definieren wir die Funktion $\tanh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (tangens hyperbolicus) durch

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} . \tag{8.5}$$

Zeigen Sie:

(i) Die Funktionen aus (8.4) und (8.5) sind stetig.

(ii) Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$.

(b) Beweisen Sie, dass die durch (8.4) definierte Funktion $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Umkehrabbildung $\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.8:

(a) (i) Sämtliche Funktionen sind Kompositionen bzw. rationale Verknüpfungen der stetigen Funktionen e^x, $-x$ bzw. von Linearkombinationen davon, und als solche selbst wieder stetig. Beispielsweise gilt

$$\sinh(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot \exp - \frac{1}{2} \cdot (\exp \circ ((-1) \cdot \mathrm{Id}))\right)(x)$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x} - (\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}\right) \;=\; \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} \;=\; 1 \end{aligned}$$

(b) Es ist sinh auf jedem Intervall $[a, b]$ stetig und streng monoton wachsend, denn einerseits ist sinh nach (a) als Komposition stetiger Funktionen selbst stetig, und andererseits folgt aus $x < y$ auch $\sinh(x) < \sinh(y)$ wegen $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y$ und $-\mathrm{e}^{-x} < -\mathrm{e}^{-y}$. Somit ist sinh nach dem Satz über Umkehrfunktionen aus der Vorlesung eine Bijektion von $[a, b]$ auf $[\sinh(a), \sinh(b)]$ mit stetiger (und streng monotoner) Umkehrfunktion arsinh.
Aufgrund von $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ sowie mit der Konvergenz der Exponentialreihe(n) und demnach

$$\forall x > 0\colon\ \sinh(x) \;=\; \frac{1}{2}\left(\exp(x) - \exp(-x)\right) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^k)x^k}{k!} \;=\; x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} \;>\; x$$

erhalten wir die beiden Grenzwerte $\lim\limits_{x \to -\infty} \sinh(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \sinh(x) = +\infty$. Dann ist aber sinh auch auf ganz $\mathbb{R}$ bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 9

Der natürliche Logarithmus und die allgemeine Potenz

- **Satz 12.3: [Existenz/Definition des natürlichen Logarithmus]**

  Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $]0,\infty[$ ab. Die Umkehrfunktion $\ln\colon\ ]0,\infty[\to \mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton wachsend, erfüllt die Funktionalgleichung $\boxed{\forall x,y \in\ ]0,\infty[\ :\ \ln(xy) \ = \ \ln(x)+\ln(y),}$ und wird **natürlicher Logarithmus** genannt.

- **Definition**: Für $a > 0$ sei die Funktion $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\boxed{\exp_a(x) := \exp(x \cdot \ln(a)).}$

- **Satz 12.4**: Die Funktion $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und es gilt:

  (i) $\forall x,y \in \mathbb{R}\colon\ \exp_a(x+y) \ = \ \exp_a(x)\exp_a(y)$

  (ii) $\forall n \in \mathbb{Z}\colon\ \exp_a(n) \ = \ a^n$ (iii) $\forall p \in \mathbb{Z}\ \forall q \in \mathbb{N},\ q \geq 2\colon\ \exp_a\left(\frac{p}{q}\right) \ = \ \sqrt[q]{a^p}$

- **Satz 12.5 [Rechenregeln für Potenzen]**: Für alle $a,b,x,y \in \mathbb{R}$ mit $a>0, b>0$ gilt

  (i) $a^x a^y \ = \ a^{x+y}$ (ii) $(a^x)^y \ = \ a^{xy}$ (iii) $a^x b^x \ = \ (ab)^x$ (iv) $\left(\frac{1}{a}\right)^x \ = \ a^{-x}$

- **Satz 12.6 [Funktionalgleichung]**: Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit
  $$\forall x,y\colon F(x+y) \ = \ F(x)F(y)\ .$$
  Dann ist entweder $F \equiv 0$ oder $a := F(1) > 0$ und $\forall x \in \mathbb{R}\ :\ F(x) = a^x \ := \ \exp(x \cdot \ln(a))$.

Spezielle Grenzwerte

- $\forall k \in \mathbb{N}_0\colon \left(\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^k} \ = \ \infty \ \wedge \ \lim\limits_{x\to\infty} x^k \mathrm{e}^{-x} \ = \ 0 \ \wedge \ \lim\limits_{x\searrow 0} x^k \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \ = \ 0\right)$

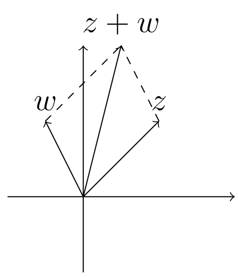
- $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) \ = \ \infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\searrow 0} \ln(x) \ = \ -\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{\exp(x)-1}{x} \ = \ 1$

- $\forall a > 0\colon \left(\lim\limits_{x\searrow 0} x^a = 0 \ \wedge \ \lim\limits_{x\searrow 0} x^{-a} = \infty \ \wedge \ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^a} = 0 \ \wedge \ \lim\limits_{x\searrow 0} x^a \ln(x) = 0\right)$

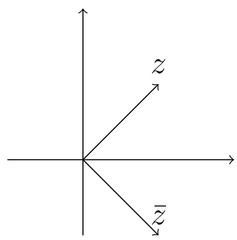
Körper der komplexen Zahlen, Betrag sowie Konvergenz und Cauchy-Folgen in $\mathbb{C}$

- Mit $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) := (x_1+x_2, y_1+y_2)$ und $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ bildet die Menge $\mathbb{R}\times\mathbb{R} =: \mathbb{R}^2$ einen Körper, den man mit $\mathbb{C}$ bezeichnet und den **Körper der komplexen Zahlen** nennt. Identifizieren wir $x \in \mathbb{R}$ mit $(x,0) \in \mathbb{C}$, so wird $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

- Mit der **imaginären Einheit** $\mathrm{i} := (0,1)$ lässt sich jede komplexe Zahl wegen $(x,y) = x\cdot(1,0) + (0,1)\cdot y$ als $x + \mathrm{i}\cdot y$ mit $x,y \in \mathbb{R}$ darstellen. Mit $(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$ gilt weiter $\mathrm{i}^2 = -1$, also ist $\mathbb{C}$ nicht angeordnet!



Addition



Konjugation

- Für $z = x + \mathrm{i}y$ bezeichnet $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ die **konjugiert komplexe Zahl** von z. Mit deren Hilfe erhalten wir für z den **Realteil** als $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} = x$, den **Imaginärteil** als $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}} = y$. Desweiteren heißt $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$ der **Betrag** von z.

- **Satz 13.1 [Eigenschaften des Betrages]:** Analog zu Satz 3.1.
- **Definition [Konvergenz in $\mathbb{C}$]:** Analog zu $\mathbb{R}$ nennt man eine Folge z_n in $\mathbb{C}$ **konvergent** gegen $z \in \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ gibt mit $|z_n - z| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
- **Satz 13.2:** Für $z_n, z \in \mathbb{C}$ gilt: $z_n \overset{n\to\infty}{\to} z \iff \operatorname{Re}(z_n) \overset{n\to\infty}{\to} \operatorname{Re}(z) \wedge \operatorname{Im}(z_n) \overset{n\to\infty}{\to} \operatorname{Im}(z)$.

  Corollar: $z_n \overset{n\to\infty}{\to} z \iff \overline{z_n} \overset{n\to\infty}{\to} \overline{z}$. **Bem.:** Es ist $\operatorname{Re}(\overline{z}) = \operatorname{Re}(z)$ und $\operatorname{Im}(\overline{z}) = -\operatorname{Im}(z)$.
- **Definition**: $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **Cauchy-Folge** in $\mathbb{C} :\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall m \geq n \geq N\colon |z_n - z_m| < \varepsilon$.
- **Satz 13.3:** z_n ist Cauchy-Folge $\iff$ $\operatorname{Re}(z_n)$ und $\operatorname{Im}(z_n)$ sind Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$.
- **Satz 13.4:** Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ ist konvergent, d.h. $\mathbb{C}$ ist mit $|.|$ vollständig.
- **Satz 13.5:** Summen, Produkte und Quotienten (falls die Divisor-Folge keine Nullfolge ist) in $\mathbb{C}$ konvergenter Folgen sind wiederum konvergent, es gelten die aus $\mathbb{R}$ bekannten Rechenregeln.

Zusatzaufgabe 9.1: Zeigen Sie: (a) **Satz 12.4** (b) **Satz 12.5** (c) **Satz 12.6**

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.1:

(a) Zunächst ist $\exp_a(x) = \exp(x\cdot\ln(a))$ als Komposition stetiger Funktionen selbst wiederum stetig. Jeweils mit Satz 8.4 folgen nun

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon \exp_a(x+y) = \exp((x+y)\ln(a)) = \exp(x\ln(a))\exp(y\ln(a)) = \exp_a(x)\exp_a(y)$

(ii) Die Aussage folgt zunächst für alle $n \in \mathbb{N}$ per Induktion wegen

- $\exp_a(1) = (\exp\cdot\ln)(a) = a = a^1$ (Induktionsanfang) und nach (i)
- $\exp_a(n) = a^n \implies \exp_a(n+1) = \exp_a(n)\exp_a(1) = a^n \cdot a = a^{n+1}$ (Induktionsschritt).

Weiter gilt

- $\exp_a(0) = \exp(0\cdot\ln(a)) = \exp(0) = 1 = a^0$ sowie nach (i)
- $\forall n \in \mathbb{N}\colon 1 = \exp_a(0) = \exp_a(n-n) = \exp_a(n)\exp_a(-n) \implies \exp_a(-n) = \dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$

Also gilt $\forall n \in \mathbb{Z}\colon \exp_a(n) = a^n$.

(iii) Per Induktion folgt analog zuvor die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}\forall x \in \mathbb{R}\colon \exp_a(nx) = (\exp_a(x))^n$. Mit Hilfe von (ii) ergibt sich nun $\forall p \in \mathbb{Z}\ \forall q \in \mathbb{N}$:

$$\exp_a(p) = \exp_a\left(\frac{p}{q}\cdot q\right) = \left(\exp_a\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q \implies \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{\exp_a(p)} = \exp_a\left(\frac{p}{q}\right).$$

(b) (i) Dies ist nur eine andere Schreibweise für Satz 12.4 (i).

(ii) $(a^x)^y = \exp(y\cdot\ln(\exp(x\cdot\ln(a)))) = \exp(xy\cdot\ln(a)) = a^{xy}$.

(iii) Mit Satz 8.4 und Satz 12.3 folgt
$(a^x)(b^x) = \exp(x\cdot\ln(a))\cdot\exp(x\cdot\ln(b)) = \exp(x\cdot(\ln(a)+\ln(b))) = \exp(x\cdot\ln(ab)) = (ab)^x$.

(iv) Aufgrund von $0 = \ln(1) = \ln\left(a\cdot\frac{1}{a}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) \implies \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ erhalten wir $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \exp\left(x\cdot\ln\left(\frac{1}{a}\right)\right) = \exp(-x\cdot\ln(a)) = a^{-x}$.

(c) Sei $F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig und erfülle $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon F(x+y) = F(x)F(y)$. Dann folgt aufgrund der Nichtnegativität von Quadraten insbesondere

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon F(x) = F\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \left(F\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0\ . \tag{9.1}$$

Wir unterscheiden somit die beiden aufgrund von (9.1) noch möglichen Fälle:
(1) Ist $F(0) = 0$, so gilt $F(x) = F(0+x) = F(0)F(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $F \equiv 0$.
(2) Ist $F(0) > 0$, so ist $F(1) > 0$ und $F(x) = (F(1))^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, denn:

- Zunächst gilt aufgrund von (9.1) dann auch schon $\forall x \in \mathbb{R}$: $F(x) > 0$, denn wäre $F(x) = 0$ für ein $x \in \mathbb{R}$, so folgte $F(0) = F(-x)F(x) = F(-x) \cdot 0 = 0$. Wir hatten jedoch vorausgesetzt, dass $F(0) > 0$ gelte. Insbesondere gilt somit $F(1) > 0$.
- Per Induktion folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ dann $F(nx) = F\underbrace{(x + ... + x)}_{n-\text{mal}} = (F(x))^n$.

  Insbesondere haben wir damit $F(n) = (F(1))^n$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$.
- Weiter gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ auch $F(\frac{m}{n})^n = F(m) = (F(1))^m$ und wegen (9.1) bzw. Punkt 1 somit $F(\frac{m}{n}) = (F(1))^{\frac{m}{n}}$ für alle positiven rationalen Zahlen.
- Wegen $0 \neq F(0) = F(0+0) = (F(0))^2$ folgt $F(0) = 1$.
- Wegen $1 = F(0) = F(x-x) = F(x)F(-x)$ folgt auch $F(-x) = (F(x))^{-1}$.
  Mit den vorangegangenen Punkten gilt daher $F(q) = (F(1))^q$ für alle rationalen $q \in \mathbb{Q}$.
- Die Stetigkeit von F und die Stetigkeit der allgemeinen Potenz liefern (nach ZA 8.1 (c)) schließlich die Gültigkeit von $F(x) = (F(1))^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Zusatzaufgabe 9.2:

(a) Warum ist die Funktion $F(x) := x^x$ auf $]0, \infty[$ stetig? (b) Ist sie auch stetig in 0 fortsetzbar?

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.2:

(a) Da $x^x = \exp(x \ln(x))$ gilt, ist $F(x)$ als Komposition $F = \exp \circ P \circ (I, \ln) \circ I_2$ der stetigen Funktionen zweifache Identität $I_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, definiert durch $I_2 : t \mapsto (t, t)$, einfache Identität $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Logarithmus $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, Produkt $P\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $P\colon (s,t) \mapsto st$, und Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selbst wieder stetig auf $]0, \infty[$.

(b) Ja, sie ist auch stetig in 0 fortsetzbar, denn für $x > 0$ gilt nach Definition der allgemeinen Potenz $x^x = \exp(x \ln(x))$. Wir wissen, dass die Exponentialfunktion überall stetig. Daher genügt es den Grenzwert

$$\lim_{x \searrow 0} x \ln(x)$$

zu betrachten.[12] Sei x_n eine beliebige Nullfolge mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\frac{1}{x_n}$ eine bestimmt gegen $+\infty$ divergente Folge. Aufgrund der Stetigkeit des Logarithmus ist dann auch $y_n := \ln\left(\frac{1}{x_n}\right)$ bestimmt divergent gegen $+\infty$. Mit $\lim_{a \to \infty} \frac{a}{\exp(a)} = 0$ (in der Vorlesung gezeigt) ergibt sich demnach

$$\lim_{n \to \infty} x_n \ln(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{-\ln\left(\frac{1}{x_n}\right)}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{-y_n}{\exp(y_n)} = -\lim_{n \to \infty} \frac{y_n}{\exp(y_n)} = -0$$

und aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion auch

$$\lim_{n \to \infty} x_n^{x_n} = \lim_{n \to \infty} \exp(x_n \ln(x_n)) = \exp(\lim_{n \to \infty} x_n \ln(x_n)) = \exp(-0) = \exp(0) = 1 .$$

Da x_n eine beliebige Nullfolge positiver reeller Zahlen war, bedeutet dies genau, dass $\lim_{x \searrow 0} x^x = 1$.

Zusatzaufgabe 9.3: Die Menge $\mathbb{R}^2$ sei mit den Verknüpfungen $\oplus, \otimes\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche durch

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ac-bd \\ ad+bc \end{pmatrix}$$

definiert seien, versehen. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ ein Körper ist.[13] Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

---

[12] In der Vorlesung hatten wir auch schon $\lim_{x \searrow 0} x^a \ln(x) = 0$ für $a > 0$ gezeigt.

[13] Die Verknüpfung $\otimes$ kann als eine spezielle Matrix-Vektor-Multiplikation aufgefasst werden, denn es ist $\begin{pmatrix} ac-bd \\ ad+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, wobei wegen $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$ die auftretenden Matrizen bis (falls $(a,b) \neq (0,0)$) auf den positiven Faktor $\sqrt{a^2+b^2} > 0$ orthogonal sind und daher die Multiplikation mit einer komplexen Zahl als eine Drehstreckung bzw. Drehstauchung interpretiert werden kann.

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.3: Das Tripel $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ ist ein Körper:

(a) $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $e_\oplus := \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, denn da $(\mathbb{R}, +)$ abelsch ist, vererben sich Assoziativität und Kommutativität und es existiert zu jedem $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, so dass $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ (nämlich $x = -u$ und $y = -v$).

(b) $\left(\mathbb{R}^2 \setminus \binom{0}{0}, \otimes\right)$ ist eine abelsche Gruppe, denn für alle $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}w\\x\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ folgen:

- $\begin{pmatrix}w\\x\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}wy - xz\\wz + xy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}yw - zx\\zw + yx\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}w\\x\end{pmatrix}$. (komm.)
- $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u \cdot 1 - v \cdot 0\\u \cdot 0 + v \cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$, also Existenz eines Neutralen $e_\otimes := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
- Es existieren Inverse $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{u}{u^2+v^2}\\\frac{-v}{u^2+v^2}\end{pmatrix}$ wegen $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\frac{u}{u^2+v^2}\\\frac{-v}{u^2+v^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\frac{u}{u^2+v^2} - v\frac{-v}{u^2+v^2}\\u\frac{-v}{u^2+v^2} + v\frac{u}{u^2+v^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.
- $\otimes$ ist assoziativ, da die rechten Seiten der beiden nächsten Zeilen übereinstimmen:

$$\left[\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}w\\x\end{pmatrix}\right] \otimes \begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}uw - vx\\ux + vw\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(uw - vx)y - (ux + vw)z\\(uw - vx)z + (ux + vw)y\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \otimes \left[\begin{pmatrix}w\\x\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}wy - xz\\wz + xy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u(wy - xz) - v(wz + xy)\\u(wz + xy) + v(wy - xz)\end{pmatrix}$$

(c) Analog gilt das Distributivgesetz.

(d) Desweiteren gilt $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \cdot 0 - 1 \cdot 1\\0 \cdot 1 + 1 \cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, d.h., mit $\mathrm{i} := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ gilt $\mathrm{i}^2 = -1$.

Zusatzaufgabe 9.4:

(a) Berechnen Sie das Produkt $\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\mathrm{i}\right)(12 + 18\mathrm{i})$.

(b) Zeigen Sie: (i) $\forall z \in \mathbb{C}\colon \overline{\overline{z}} = z$, (ii) $\forall z, w \in \mathbb{C}\colon \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, (iii) $\forall z, w \in \mathbb{C}\colon \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.4:

(a) Es ist $\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\mathrm{i}\right)(12 + 18\mathrm{i}) = (4 + 5\mathrm{i})(2 + 3\mathrm{i}) = (8 - 15) + \mathrm{i}(12 + 10) = -7 + 22\mathrm{i}$.

(b) Für $z = x + \mathrm{i}y$ und $w = u + \mathrm{i}v$ gilt offenbar

(i) $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x + \mathrm{i}y}} = \overline{x - \mathrm{i}y} = \overline{x + \mathrm{i}(-y)} = x - \mathrm{i}(-y) = x + \mathrm{i}y$

(ii) $\overline{z + w} = \overline{(x + \mathrm{i}y) + (u + \mathrm{i}v)} = \overline{(x + u) + \mathrm{i}(y + v)} = (x + u) - \mathrm{i}(y + v) = (x - \mathrm{i}y) + (u - \mathrm{i}v) = \overline{z} + \overline{w}$

(iii) $\overline{zw} = \overline{(x + \mathrm{i}y)(u + \mathrm{i}v)} = \overline{(xu - yv) + \mathrm{i}(uy + xv)} = (xu - yv) - \mathrm{i}(uy + xv) = (x - \mathrm{i}y)(u - \mathrm{i}v) = \overline{z} \cdot \overline{w}$

Zusatzaufgabe 9.5:

(a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

(i) $\dfrac{(1+\mathrm{i})^5}{(1-\mathrm{i})^3}$ (ii) $\dfrac{(1+\mathrm{i})^8}{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^6}$ (iii) $\dfrac{(1-\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i})^4}$ (iv) $\dfrac{\mathrm{i}^3}{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^2}$

(b) Bestimmen und skizzieren Sie die Lösungsmenge der Gleichung $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

(c) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ und begründen Sie Ihre Skizze:

$$M_1 := \big\{z \in \mathbb{C} \;\big|\; |z-2+3\mathrm{i}| = 5\big\} \qquad \text{und} \qquad M_2 := \big\{z \in \mathbb{C} \;\big|\; |z| = \mathrm{Re}(z)+1\big\}$$

(d) Welche Menge wird durch $M_3 := \big\{z \in \mathbb{C} \;\big|\; z - \overline{z} = 3\big\}$ beschrieben?

(e) Skizzieren Sie die Menge

$$M_4 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) > 0,\ \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \le 1\}.$$

Bestimmen Sie zur Menge $M_5 := \{|z| \colon z \in M_4\}$ im Falle der Existenz Supremum, Infimum, Minimum und Maximum.

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.5:

(a) (i) Es ist $\dfrac{(1+\mathrm{i})^5}{(1-\mathrm{i})^3} = \dfrac{(1+\mathrm{i})^8}{((1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}))^3} = \dfrac{(2\mathrm{i})^4}{8} = 2.$

(ii) Schließlich ergibt sich

$$\frac{(1+\mathrm{i})^8}{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^6} = \frac{16(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^6}{4^6} = \frac{(-2+\mathrm{i}2\sqrt{3})^3}{4^4} = \frac{(-8-\mathrm{i}8\sqrt{3})(-2+\mathrm{i}2\sqrt{3})}{4^4} = \frac{1}{4}\,.$$

(iii) Es gilt $\dfrac{(1-\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i})^4} = \dfrac{(1-\mathrm{i})^3(1-\mathrm{i})^4}{(1+\mathrm{i})^4(1-\mathrm{i})^4} = \dfrac{((1-\mathrm{i})^2)^3(1-\mathrm{i})}{2^4} = \dfrac{(-2\mathrm{i})^3(1-\mathrm{i})}{16} = \dfrac{8\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{16} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

(iv) Es gilt $\dfrac{\mathrm{i}^3}{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^2} = -\mathrm{i}\dfrac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^2}{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^2(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^2} = -\mathrm{i}\dfrac{-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}}{4^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{8} + \dfrac{1}{8}\mathrm{i}$.

(b) Die Teilmenge $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\frac{1}{z})\}$ ist wegen

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|^2}$$

die Menge der Punkte $z \neq 0$ mit $\mathrm{Re}(z) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|^2}$, d.h. $\mathrm{Re}(z) = 0$ oder $|z|^2 = 1$, und somit die Vereinigung aus der imaginären Achse (ohne Null) und dem (Rand des) Einheitskreis.

(c)
- M_1 ist der Rand des Kreises um den Mittelpunkt $2-3\mathrm{i}$ mit Radius 5, denn $|z-z'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$ ist genau der Euklidische Abstand der Punkte $z = x+\mathrm{i}y$, $z' = x'+\mathrm{i}y'$ im $\mathbb{R}^2$. Somit ist für $z = x+\mathrm{i}y$ hier genau
$$5 = |(x-2)+\mathrm{i}(y+3)| = \sqrt{(x-2)^2+(y-(-3))^2}\,.$$
- Die Punkte von M_2 erfüllen $\quad z\overline{z} = \left(\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})+1\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left(z^2+2z\overline{z}+\overline{z}^2+4(z+\overline{z})+4\right)$, also $(z-\overline{z})^2+4(z+\overline{z})+4 = 0$ und daher mit $z = x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$, die Beziehung $-4y^2+8x+4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(y^2-1)$. Die Teilmenge M_2 ist somit eine Parabel über der imaginären Achse (auf ihr liegen beispielsweise die Punkte $z_1 = -\frac{1}{2}+0\cdot\mathrm{i}$ und $z_{2,3} = 0\pm\mathrm{i}$).

(d) Wegen $z-\overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ und $3 \in \mathbb{R}$ sowie $\mathrm{i}\mathbb{R} \cap \{3\} = \emptyset$ wird durch M_3 lediglich die leere Menge beschrieben.

(e)
- M_4 ist das ausgefüllte Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$, ohne die Achsen.
- Es ist $\sup M_5 = 1$ und $\inf M_5 = 0$, jedoch wird das Infimim etwa wegen $\mathrm{Re}(z) > 0$ nicht angenommen, weswegen kein Minimum für M_5 existiert. Da die beiden Punkte $(1,0)$ und $(0,1)$ auf den Achsen liegen und somit nicht zu M_4 gehören, existiert auch kein Maximum von M_5.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 10

Reihen und die Exponentialreihe in $\mathbb{C}$ – Definition analog zu $\mathbb{R}$

- Eine **Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ zu einer Folge z_n aus $\mathbb{C}$ ist als Folge der Partialsummen $S_n := \sum_{k=1}^{n} z_k$ definiert, so dass die Konvergenz der Reihe gleichbedeutend mit der Konvergenz der Folge (S_n) ist.
  Die Reihe heißt **absolut konvergent**, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.
- **Majorantenkriterium in $\mathbb{C}$:** Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}$ gilt (5.1).
- **Quotientenkriterium und Wurzelkriterium in $\mathbb{C}$:** Analog zu Satz 7.7 und Corollar.
- **Satz 13.6: [Absolute Konvergenz der Exponentialreihe/Restgliedabschätzung]**
  Für jedes beliebige $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Exponentialreihe $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ absolut.
  Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \le 1 + \frac{N}{2}$ gilt $\left|\exp(z) - \sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!}\right| \le \frac{2|z|^{N+1}}{(N+1)!}$.
- **Satz 13.7 und Corollar [Funktionalgleichung der Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$]:**
  $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erfüllt die Funktionalgleichung $\boxed{\forall z, w \in \mathbb{C} \ : \ \exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)}$.
  Insbesondere folgt mit der Nullteilerfreiheit eines Körpers $\forall z \in \mathbb{C} \ : \ \exp(z) \neq 0$.
- **Satz 13.8:** $\forall z \in \mathbb{C}\colon \exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$.
- Wie in $\mathbb{R}$ sind Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in $a \in D$ definiert.
- **Satz 13.9: [Stetigkeit der Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$]** Es ist $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig.

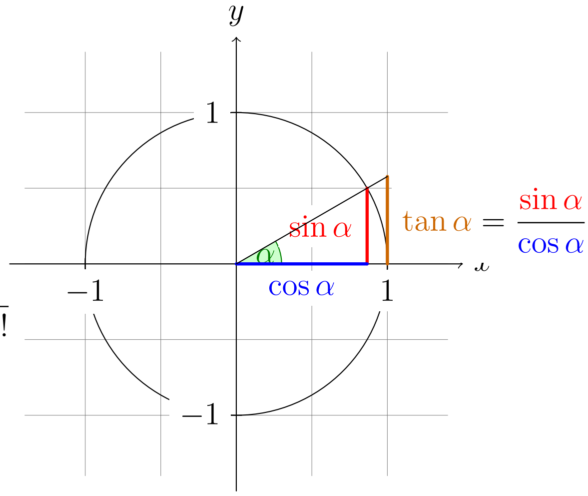
Trigonometrische Funktionen

- **Definition: [Sinus, Cosinus]** Für jede reelle Zahl ist $\cos(x) := \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$ und $\sin(x) := \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$.
  Demnach erhalten wir die $\boxed{\textbf{Eulersche Formel: } \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)}$.
- **Satz 14.1:** $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt (a) $\cos(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$, $\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$
  (b) $\cos(x) = \cos(-x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$ (c) $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$
  Mit Hilfe der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt
- **Satz 14.2:** Die Funktionen $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig.
  Aus $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ ergeben sich mittels Funktionalgleichung und Eulerscher Formel
- **Satz 14.3 und Corollar: [Additionstheoreme]** Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)\ , \qquad \sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\ , \qquad \cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

- **Satz 14.4 [Potenzreihen des Sinus/Cosinus]:**

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\colon \cos(x) &= \operatorname{Re}(\exp(\mathrm{i}x)) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \mp \ldots\\ \forall x \in \mathbb{R}\colon \sin(x) &= \operatorname{Im}(\exp(\mathrm{i}x)) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \mp \ldots\end{aligned}$$



Die Konvergenz der Reihen ist dabei sogar absolut.

- **Satz 14.6/7: [Konstruktion von π mittels Nullstelle von** $\cos(x)$ **auf** $[0,2]$**]** Auf dem Intervall $[0,2]$ ist $\cos(x)$ streng monoton fallend und besitzt dort eine Nullstelle, welche wir mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnen. Somit erhalten wir die speziellen Werte $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -\mathrm{i},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 1$.

- **Definition [Tangens, Cotangens]:** Auf $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ wird durch $\boxed{\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$ der **Tangens** von x, auf $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}$ durch $\boxed{\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}}$ der **Cotangens** von x definiert.

Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen und Polarkoordinaten

- **Satz 14.8: [Umkehrfunktionen** $\arccos(x)$, $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$**]**

  (a) Der Cosinus bildet das Intervall $[0,\pi]$ bijektiv und stetig auf $[-1,1]$ ab und besitzt dort eine Umkehrfunktion $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$, die wir den **Arcus Cosinus** nennen.

  (b) Der Sinus bildet das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ bijektiv und stetig auf $[-1,1]$ ab und besitzt dort eine Umkehrfunktion $\arcsin\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, die wir den **Arcus Sinus** nennen.

  (c) Ebenso bildet der Tangens das offene Intervall $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ bijektiv und stetig auf $\mathbb{R}$ ab und besitzt die Umkehrfunktion $\arctan\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, die wir den **Arcus Tangens** nennen.

  Bemerkung: Die hier definierten Umkehrfunktionen nennt man auch die **Hauptzweige**. Ebenso kann man sich die entsprechenden Funktionen für die **Nebenzweige** überlegen.

- **Satz 14.9: [Polarkoordinaten]** $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}\ \exists! r \geq 0\ \exists \varphi \in \mathbb{R}\colon z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.}$

  Für $z \neq 0$ ist das **Argument** φ bis auf Addition von $k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ eindeutig bestimmt.

  Corollar: Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ und $z_\star \neq 0$ besitzt die Gleichung $z^n = z_\star$ genau n (verschiedene) komplexe Lösungen. Im Fall $z_\star = 1$ sind dies genau die n-ten komplexen **Einheitswurzeln**

$$\zeta_k := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} \qquad k = 0,1,\ldots,n-1\ . \tag{10.1}$$

Zusatzaufgabe 10.1:

(a) Zeigen Sie: (i) $\forall z \in \mathbb{C}\colon \exp(z) \neq 0$, (ii) Satz 13.8, (iii) $\forall x \in \mathbb{R}\colon |\exp(\mathrm{i}x)| = 1$.

(b) Konvergieren die Folgen $a_n := \mathrm{i}^n$ bzw. $b_n := \dfrac{(2+\mathrm{i})^n}{(3-2\mathrm{i})^n}$ in $\mathbb{C}$?

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.1:

(a) (i) Angenommen, es gäbe ein $z \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = 0$.
Dann wäre $1 = \exp(0) = \exp(z)\exp(-z) = 0 \cdot \exp(z) = 0$ und somit $1 = 0$ ein Widerspruch.

(ii) Mittels Corollar zu Satz 2, §13 (welches besagt, dass $z_n \to z \iff \overline{z_n} \to \overline{z}$ gilt) und wiederholter Anwendung von Zusatzaufgabe 9.4 (b) ergibt sich

$$\forall z \in \mathbb{C}\colon \exp(\overline{z}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\overline{z}^k}{k!} \overset{\text{(b.iii)}}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\overline{z^k}}{k!} \overset{\text{(b.ii)}}{=} \lim_{n\to\infty}\overline{\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}} \overset{\substack{\text{Corollar}\\ \text{Satz 2}}}{=} \overline{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}} = \overline{\exp(z)}$$

(iii) Nach Definition des Betrages einer komplexen Zahl, mit (ii) und der Funktionalgleichung folgt

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\colon |\exp(\mathrm{i}x)| &= \sqrt{\exp(\mathrm{i}x)\cdot\overline{\exp(\mathrm{i}x)}} \overset{\text{(ii)}}{=} \sqrt{\exp(\mathrm{i}x)\cdot\exp(\overline{\mathrm{i}x})} \\ &= \sqrt{\exp(\mathrm{i}x)\cdot\exp(-\mathrm{i}x)} = \sqrt{\exp(\mathrm{i}x-\mathrm{i}x)} = \sqrt{\exp(0)} = \sqrt{1} = 1\end{aligned}$$

(b) Die Folge a_n konvergiert nicht, denn wegen $|a_{n+1}-a_n| = |\mathrm{i}^{n+1}-\mathrm{i}^n| = |\mathrm{i}-1| = \sqrt{2}$ ist sie nicht einmal eine Cauchy-Folge. Insbesondere besitzt a_n die vier Häufungspunkte i, -1, $-$i und 1.

Die Folge b_n konvergiert gegen Null, denn es gilt $|b_n| = \left|\frac{2+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}\right|^n = \left(\sqrt{\frac{5}{13}}\right)^n \to 0$ für $n \to \infty$.

Zusatzaufgabe 10.2:

(a) Schreiben Sie die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jeweils zu einer Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ einer komplexen Variablen um:

(i) $f_1(x,y) = x$, (ii) $f_2(x,y) = x^2+y^2$, (iii) $f_3(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, (iv) $f_4(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

(b) Geben Sie für $z = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2016}$ den Real- und Imaginärteil an.

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.2:

(a) (i) $f_1(z) = \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ (ii) $f_2(z) = |z|^2 = z\bar{z}$

(iii) $f_3(z) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{z+\bar{z}}{2z\bar{z}}$ (iv) $f_4(z) = -\,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}z\bar{z}}$

(b) Wegen $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ folgt wegen $756 \cdot 8 = 6048$ aus der Formel von Moivre

$$z^{2011} = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)^{2016} = \cos\left(\frac{6048\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{6048\pi}{4}\right) = \cos(0) + \mathrm{i}\sin(0)$$

und somit $\mathrm{Re}\left(z^{2016}\right) = 1$ sowie $\mathrm{Im}\left(z^{2016}\right) = 0$.

Zusatzaufgabe 10.3:

(a) Stellen Sie $\sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi)$ mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion dar.

(b) Weisen Sie mit Hilfe von (a) die folgenden Additionstheoreme nach:

$$\begin{aligned}(\sin(\varphi))^2 + (\cos(\varphi))^2 &= 1\,, & \cos(\varphi \pm \psi) &= \cos(\varphi)\cos(\psi) \mp \sin(\varphi)\sin(\psi)\,,\\ \frac{1}{2}(\cos(2\varphi)+1) &= (\cos(\varphi))^2\,, & \sin(\varphi \pm \psi) &= \sin(\varphi)\cos(\psi) \pm \cos(\varphi)\sin(\psi)\,.\end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$ für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$.

(d) Gegeben sei ein $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\forall k \in \mathbb{Z}\colon (2k+1)\pi \neq x$. Zeigen Sie: Mit $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ergeben sich

$$\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2} \qquad \text{sowie} \qquad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}\,. \tag{10.2}$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.3:

(a) Aus $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$ und $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = \cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi) = \cos(\varphi) - i\sin(\varphi)$ ergeben sich sofort nach Addition bzw. Multiplikation

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right)\,, \qquad \sin(\varphi) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right)\,.$$

(b) Die Additionstheoreme ergeben sich wegen

$$\begin{aligned}(\sin(\varphi))^2+(\cos(\varphi))^2 &= \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right)\right)^2+\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right)\right)^2\\ &= \frac{1}{4}\left(-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\varphi}-2+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\varphi})+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\varphi}+2+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\varphi})\right)\end{aligned}$$

und

$$\frac{1}{2}(\cos(2\varphi)+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\varphi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\varphi}\right)+1\right) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\varphi}+2+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\varphi}\right) = (\cos(\varphi))^2$$

sowie aufgrund von

$$\begin{aligned}\cos(\varphi)\cos(\psi)\mp\sin(\varphi)\sin(\psi) &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi-\psi)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi+\psi)}\right)\\ &\quad\pm\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi-\psi)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi+\psi)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi\pm\psi)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi\pm\psi)}\right) = \cos(\varphi\pm\psi)\\ \sin(\varphi)\cos(\psi)\pm\cos(\varphi)\sin(\psi) &= \frac{1}{4\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi-\psi)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi+\psi)}\right)\\ &\quad\pm\frac{1}{4\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi-\psi)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi+\psi)}\right)\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi\pm\psi)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi\pm\psi)}\right) = \sin(\varphi\pm\psi)\end{aligned}$$

(c) Wegen

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(x+y)}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(x-y)}{2}}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(x+y)}{2}}\right)\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(x-y)}{2}}\right)+\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(x+y)}{2}}\right)\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(x-y)}{2}}\right)\\ &= \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)+\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}\sin(y) &= \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(x+y)}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}(x-y)}{2}}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(x+y)}{2}}\right)\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}(x-y)}{2}}\right)+\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(x+y)}{2}}\right)\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}(x-y)}{2}}\right)\\ &= -\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)+\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

liefert Substraktion der beiden Gleichungen die Behauptung.

(d) Mit $\frac{1}{2}(\cos(2\alpha)+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\alpha}\right)+1\right) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha}+2+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\alpha}\right) = (\cos(\alpha))^2$ bzw. $\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ (in A 10.4 (b) zu zeigen) und wegen $\tan(\alpha)=\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ sowie

$$(\cos(\alpha))^2=\frac{(\cos(\alpha))^2}{(\cos(\alpha))^2+(\sin(\alpha))^2}=\frac{1}{1+\frac{(\sin(\alpha))^2}{(\cos(\alpha))^2}}=\frac{1}{1+(\tan(\alpha))^2}$$

folgen nun

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 2\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2-1 = 2\cdot\frac{1}{1+\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}-1 = \frac{2}{1+u^2}-1 = \frac{1-u^2}{1+u^2},\\ \sin(x) &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} = \frac{2u}{1+u^2}\,.\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 10.4: Verwenden Sie die in den Hausaufgaben zu zeigende Formel von **Moivre**

$$\forall n \in \mathbb{N}_0\colon (\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi), \tag{10.3}$$

um je ein Polynom $P(x,y) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{jk}x^j y^k$ mit reellen Koeffizienten $a_{j,k}$ zu finden mit

(a) $P(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \cos(3\varphi) - \sin(5\varphi)$; (b) $P(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \sin(2\varphi) + \cos(4\varphi)$;

(c) $P(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \cos(4\varphi) - \sin(6\varphi)$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.4:

(a) Mit dem Polynom $P(x,y) = -5x^4y + x^3 + 10x^2y^3 - 3xy^2 - y^5$ gilt für beliebiges $\varphi \in \mathbb{R}$ die Gleichung $P(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \cos(3\varphi) - \sin(5\varphi)$, denn nach der Formel von Moivre folgen sowohl

$$\begin{aligned}
\cos(3\varphi) &= \operatorname{Re}\Big(\cos(3\varphi) + \mathrm{i}\sin(3\varphi)\Big) = \operatorname{Re}\Big((\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))^3\Big) \\
&= \operatorname{Re}\Big((\cos(\varphi))^3 - 3\cos(\varphi)(\sin(\varphi))^2 + \mathrm{i}\left(3\sin(\varphi)(\cos(\varphi))^2 - (\sin(\varphi))^3\right)\Big) \\
&= (\cos(\varphi))^3 - 3\cos(\varphi)(\sin(\varphi))^2
\end{aligned}$$

als auch

$$\begin{aligned}
-\sin(5\varphi) &= -\operatorname{Im}\Big(\cos(5\varphi) + \mathrm{i}\sin(5\varphi)\Big) = -\operatorname{Im}\Big((\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))^5\Big) \\
&= -\operatorname{Im}\Big((\cos(\varphi))^5 - 10(\cos(\varphi))^3(\sin(\varphi))^2 + 5\cos(\varphi)(\sin(\varphi))^4 \\
&\qquad + \mathrm{i}\left(5(\cos(\varphi))^4\sin(\varphi) - 10(\cos(\varphi))^2(\sin(\varphi))^3 + (\sin(\varphi))^5\right)\Big) \\
&= -5(\cos(\varphi))^4\sin(\varphi) + 10(\cos(\varphi))^2(\sin(\varphi))^3 - (\sin(\varphi))^5 .
\end{aligned}$$

(b) Mit dem Polynom $P(x,y) = 2xy + x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ gilt $P(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \sin(2\varphi) + \cos(4\varphi)$ wegen

$$\begin{aligned}
\sin(2\varphi) + \cos(4\varphi) &= \operatorname{Im}(\cos(2\varphi) + \mathrm{i}\sin(2\varphi)) + \operatorname{Re}(\cos(4\varphi) + \mathrm{i}\sin(4\varphi)) \\
&= \operatorname{Im}\left((\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))^2\right) + \operatorname{Re}\left((\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))^4\right) \\
&= 2\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \cos(\varphi)^4 - 6\cos(\varphi)^2\sin(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^4
\end{aligned}$$

(c) Das gesuchte Polynom ist $P(x,y) = -6x^5y + x^4 + 20x^3y^3 - 6x^2y^2 - 6xy^5 + y^4$, denn es gelten

$$\begin{aligned}
\cos(4\varphi) &= \operatorname{Re}\Big((\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))^4\Big) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(\cos(\varphi))^{4-k}\mathrm{i}^k(\sin(\varphi))^k\right) \\
&= (\cos(\varphi))^4 - 6(\cos(\varphi))^2(\sin(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^4 , \\
-\sin(6\varphi) &= -\operatorname{Im}\Big((\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))^6\Big) = -\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(\cos(\varphi))^{6-k}\mathrm{i}^k(\sin(\varphi))^k\right) \\
&= -\Big(6(\cos(\varphi))^5\sin(\varphi) - 20(\cos(\varphi))^3(\sin(\varphi))^3 + 6\cos(\varphi)(\sin(\varphi))^5\Big) .
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 10.5:

(a) Welche $z \in \mathbb{C}$ lösen die Gleichung $z^2 = \mathrm{i}$?

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 = -\mathrm{i}$.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 = 8(\mathrm{i}\sqrt{3} - 1)$.

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 = z$.

(e) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 = \mathrm{i}z$ in $\mathbb{C}$.

(f) Welche Lösungen besitzt die Gleichung $z^4 - \mathrm{i}z^2 = (\mathrm{i} - 1)z^3$ in $\mathbb{C}$?

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.5:

(a) Wegen $\mathrm{i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und $z^2 = \cos(2\varphi) + \mathrm{i}\sin(2\varphi)$ bei $z = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$ muss man die Winkel φ (modulo 2π) finden, für die $2\varphi = \frac{\pi}{2} \mod 2\pi$ gilt. Dies sind aber genau $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ und $\varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$, d.h. die beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = \mathrm{i}$ sind $z_1 = \cos(\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4})$ und $z_2 = \cos(\frac{5\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{5\pi}{4})$.

(b) Wegen $-\mathrm{i} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ und $z^2 = \cos(2\varphi) + \mathrm{i}\sin(2\varphi)$ bei $z = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$ muss man die Winkel φ (modulo 2π) finden, für die $2\varphi = \frac{3\pi}{2} \mod 2\pi$ gilt. Dies sind aber genau $\varphi_1 = \frac{3\pi}{4}$ und $\varphi_2 = \frac{7\pi}{4}$, d.h. die beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = \mathrm{i}$ sind $z_1 = \cos(\frac{3\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{3\pi}{4})$ und $z_2 = \cos(\frac{7\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{7\pi}{4})$.

(c) Wegen $8(\mathrm{i}\sqrt{3} - 1) = 16\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ erhalten wir analog zu (a) als Lösungen $z_0 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$, $z_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$, $z_3 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$.

(d) Wegen $z^4 = z \iff z(z^3 - 1) = 0$ ist $z = 0$ eine Lösung, und die drei weiteren Lösungen sind die dritten Einheitswurzeln:
Schreibt man $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, so folgt aus $1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 0} = 1 = z^3 = r^3(\cos(3\varphi) + \mathrm{i}\sin(3\varphi))$, dass $r = 1$ und $3\varphi = 0 \mod 2\pi$ gelten muss, also $\varphi = 0$ oder $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ oder $\varphi = \frac{4}{3}\pi$. Somit sind die vier Lösungen der Gleichung $z^4 = z$ genau $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \cos(\frac{2}{3}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{2}{3}\pi)$ und $z_4 = \cos(\frac{4}{3}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{4}{3}\pi)$.

(e) Eine Lösung ist $z_1 = 0$, und die übrigen Lösungen ergeben sich aus $z^3 = \mathrm{i}$. Man erhält mit dem Ansatz $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ wegen $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$ dann $r = 1$ und $3\varphi = \frac{\pi}{2} \mod 2\pi$, also $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_3 = \frac{5\pi}{6}$ und $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$. Die übrigen Lösungen sind also $z_2 = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}$, $z_3 = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}5\pi}{6}}$ und $z_4 = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}3\pi}{2}} = -\mathrm{i}$.

(f) Wegen $z^4 - \mathrm{i}z^2 = (\mathrm{i} - 1)z^3 \iff z^2(z^2 + (1 - \mathrm{i})z - \mathrm{i}) = 0$ sehen wir bereits, dass 0 eine zweifache Lösung der Gleichung ist. Darüber hinaus liefert die Methode der quadratischen Ergänzung

$$\left(z + \frac{1-\mathrm{i}}{2}\right)^2 = z^2 + 2 \cdot \frac{1-\mathrm{i}}{2}z + \left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right)^2 + \mathrm{i} = \frac{\mathrm{i}}{2}$$

und da $r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\varphi} = w^2 = \frac{\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ von $w = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \pm\frac{1+\mathrm{i}}{2}$ gelöst wird,[14] erhalten wir $z_3 = \mathrm{i}$ und $z_4 = -1$ als weitere Lösungen.

Zusatzaufgabe 10.6:

Berechnen Sie die exakten Werte von $\cos(x), \sin(x), \tan(x)$ an den Stellen $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}$.
Verwenden Sie dabei ausschließlich Additionstheoreme.

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.6:

(a) Offensichtlich erfüllt $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ die Gleichung $z^3 = -1$. Da dies zu $0 = z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1)$ äquivalent ist (vgl. Aufgabe 2.4 (e)), folgt wegen $z \neq -1$ dann $z^2 - z + 1 = 0$, also

$$1 = z + \frac{1}{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

und schließlich $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Aus $1 = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}|^2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2$ ergibt sich nun, da der Sinus auf $]0, \pi[$ positiv ist, weiter $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sowie $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

[14]Beachte, dass $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt.

(b) Mit dem noch in Aufgabe 10.4 (b) zu zeigenden Additionstheorem $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$ ergibt sich zunächst $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Demnach ist

$$1=|e^{i\frac{\pi}{4}}|^2=\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2=2\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2$$

und folglich $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ sowie $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$.

(c) Wiederum mit dem noch in Aufgabe 10.4 (b) zu zeigenden Additionstheorem $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$ ergibt sich zusammen mit (i) zunächst $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ und wegen $1=|e^{i\frac{\pi}{6}}|$ analog zuvor $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ sowie $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(d) Aus dem Additionstheorem $(\sin(x))^2+(\cos(x))^2=1$ (vgl. Satz 1, §14) sowie

$$\sin(x)-\sin(y) \;=\; 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

(vgl. Corollar zu Satz 3, §14) erhalten wir $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ und suchen wegen der Positivität von Sinus und Cosinus auf $]0,\frac{\pi}{2}[$ positive Lösungen von $\frac{1}{2}=2\sqrt{1-u^2}u$ und erhalten wegen $0<\sin(x)<\cos(x)$ auf $]0,\frac{\pi}{4}[$ (strenge Monotonie der Funktionen sowie (ii))

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\,,\quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\,,\quad \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{7-4\sqrt{3}}\,.$$

Dies folgt (im Fall $0\le u\le 1$) aus der Äquivalenz von $\frac{1}{2}=2\sqrt{1-u^2}u$ zu $\frac{1}{16}=(1-u^2)u^2$ und $u^4-u^2+\frac{1}{16}$, wobei letztere Gleichung von $u^2=\frac{2\pm\sqrt{3}}{4}$ gelöst wird.

Zusatzaufgabe 10.7:

(a) Bestimmen Sie alle $z\in\mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right)\ge 2$.

(b) Bestimmen Sie alle $z\in\mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right)\ge 1$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.7:

(a) Zunächst ist $0+i$ nicht in der Lösungsmenge, da sonst die linke Seite nicht definiert ist. Wegen

$$\frac{z-1}{z-i}=\frac{(z-1)(\overline{z}+i)}{|z-i|^2}=\frac{|z|^2-\overline{z}+iz-i}{|z-i|^2} \tag{10.4}$$

schreibt sich obige Ungleichung mit $a:=\operatorname{Re}(z)$ und $b:=\operatorname{Im}(z)$ als

$$\frac{a^2+b^2-a-b}{a^2+(b-1)^2}\ge 2 \qquad \text{bzw.} \qquad -a-b\ge a^2+b^2-4b+2 \qquad \text{bzw.} \qquad b-a\ge(b-a)^2+2$$

Für reellwertiges $x:=b-a$ ist also die Ungleichung $0\ge x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$ zu lösen. Aufgrund der Nichnegativität von Quadraten ist die Lösungsmenge jedoch leer.

(b) Zunächst ist $0+i$ nicht in der Lösungsmenge, da sonst die linke Seite nicht definiert ist. Wegen (10.4) schreibt sich obige Ungleichung mit $a:=\operatorname{Re}(z)$ und $b:=\operatorname{Im}(z)$ als

$$\frac{a^2+b^2-a-b}{a^2+(b-1)^2}\ge 1 \qquad \text{bzw.} \qquad -a-b\ge -2b+1 \qquad \text{bzw.} \qquad b-a\ge 1$$

Somit Ist die Lösungsmenge die berandete schiefe Halbebene $\{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}(z)\ge\operatorname{Re}(z)+1\}$ ohne $\{0+i\}$.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 11

Differentiation

- Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) heißt im Punkt $a \in D$ **differenzierbar**, falls der Limes des Differenzenquotienten existiert, d.h. der Grenzwert
$$f'(a) := \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D\setminus\{a\}}} \frac{f(a)-f(x)}{a-x} \qquad \text{bzw.} \qquad f'(a) \ = \ \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \ . \tag{11.1}$$
Der Grenzwert $f'(a)$ heißt die **Ableitung** von f im Punkt a. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) heißt in D **differenzierbar**, falls f in jedem $x \in D$ differenzierbar ist. Ist darüber hinaus die Ableitung $f'\colon x \mapsto f'(x)$ eine stetige Funktion, so nennt man f **stetig differenzierbar**. Ist $g := f'$ wiederum in allen Punkten $a \in D$ differenzierbar, so heißt f **zweimal differenzierbar**. Induktiv definieren auf diese Weise im Falle der Existenz analog **k-mal differenzierbare** und **k-mal stetig differenzierbare** Funktionen und bezeichnen mit $f^{(k)} := \left(f^{(k-1)}\right)'$ die **k-te Ableitung** von f, wobei $f^{(0)} := f$ vereinbart wird.

- **Satz 15.1: [Lineare Approximierbarkeit]**

  Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) ist genau dann in $a \in D$ differenzierbar, wenn eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ existiert[15] mit
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D\setminus\{a\}}} \frac{f(x)-f(a)-c(x-a)}{x-a} \ = \ 0 \ . \tag{11.2}$$
Corollar: Ist die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ differenzierbar, so ist sie auch stetig in a.

- Ob die auf $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion f Werte in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ hat, macht beim Ableiten keinen Unterschied, denn aus Satz 13.2 folgt: Ist $f\colon D \to \mathbb{C}$ und $f(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$ eine Zerlegung in Realteil $u : D \to \mathbb{R}$ und Imaginärteil $v : D \to \mathbb{R}$, dann ist $f'(x) = u'(x) + \mathrm{i}v'(x)$.

- **Satz 15.2: [Algebraische Differentiationsregeln]**

  Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f+g, \lambda f, fg\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für alle $x \in D$ gelten
$$(\lambda f + \mu g)'(x) \ = \ \lambda f'(x) + \mu g'(x) \qquad (\textbf{Linearität}) \tag{11.3}$$
$$(fg)'(x) \ = \ f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad (\textbf{Produktregel}) \tag{11.4}$$
Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch $\frac{f}{g}\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für alle $x \in D$ gilt
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) \ = \ \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{\left(g(x)\right)^2} \qquad (\textbf{Quotientenregel}) \tag{11.5}$$

- **Satz 15.3 [Ableitung der Umkehrfunktion]**: Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x mit $f'(x) \neq 0$ und besitzt f in der Umgebung von x die Umkehrfunktion f^{-1}, dann gilt
$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) \ = \ \frac{1}{f'(x)} \ = \ \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right)} \ , \quad \text{also} \quad \left(f^{-1}\right)'(y) \ = \ \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(y\right)\right)} \ . \tag{11.6}$$

- **Satz 15.4 [Kettenregel]**: Sind $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$ und ist f differenzierbar in $x \in D$ und g differenzierbar in $y := f(x) \in E$, dann ist die Komposition $g \circ f\colon D \to \mathbb{R}$ (sprich: „g nach f“) ebenfalls differenzierbar in x mit
$$(g \circ f)'(x) \ = \ (g' \circ f)(x) \cdot f'(x) \ . \tag{11.7}$$

[15] insbesondere strebt der Restterm $\zeta(x)$ in $f(x) = f(a) + c(x-a) + \zeta(x)$ für $x \to a$ auch dann noch gegen 0, wenn er durch $x - a$ geteilt wird. Wir können c als eine lineare Abbildung $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c \cdot x$ auffassen und werden in der Analysis 2 sehen, dass Satz 15.1 genau ein Spezialfall der Definition der Ableitung im Mehrdimensionalen ist.

Lokale Extrema, Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Monotonie

- **Definition [lokales Extremum]:** Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, besitzt in $x \in D$ ein
  - **lokales Maximum** $:\Longleftrightarrow \quad \exists\, U := \,]c,d[\, \cap D\colon \Big(x \in U \subset D \;\wedge\; \forall y \in U\colon f(y) \leq f(x)\Big)$
  - **lokales Minimum** $:\Longleftrightarrow \quad \exists\, U := \,]c,d[\, \cap D\colon \Big(x \in U \subset D \;\wedge\; \forall y \in U\colon f(y) \geq f(x)\Big)$

  und entsprechend ein strenges lokales Extremum, falls für $y \neq x$ die Ungleichung stets echt gilt.

- **Satz 16.1 [Notwendiges Kriterium für lokale Extrema]:** Besitzt die Funktion $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ in $x \in]a,b[$ ein lokales Extremum und ist f in x differenzierbar, so gilt $f'(x) = 0$.

- **Satz 16.2 [Satz von Rolle]**: Für $a < b$ sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine in $]a,b[$ differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b)$, welche stetig in den Randpunkten ist. Dann existiert ein $\xi \in]a,b[$ mit $f'(\xi) = 0$.

- **Corollar [Mittelwertsatz der Differentialrechnung]**: Für $a < b$ sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $]a,b[$ und stetig in den Randpunkten. Dann existiert ein $\xi \in]a,b[$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- **Satz 16.4 [Monotonie]:** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $]a,b[\neq \emptyset$ und stetig am Rand.
  - Dann gilt: f ist in $[a,b]$ monoton fallend $\quad\Longleftrightarrow\quad \forall x \in]a,b[\;:\; f'(x) \leq 0$
  - Dann gilt: f ist in $[a,b]$ monoton wachsend $\quad\Longleftrightarrow\quad \forall x \in]a,b[\;:\; f'(x) \geq 0$
  - Weiter gilt $\forall x \in]a,b[\;:\; f'(x) > 0 \quad\Longrightarrow\quad f$ streng monoton wachsend.
  - Ebenso gilt $\forall x \in]a,b[\;:\; f'(x) < 0 \quad\Longrightarrow\quad f$ streng monoton fallend.

- **Satz 16.5 [Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema]:** Sei $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x \in]a,b[$ derart, dass $f'(x) = 0$ und f in x zweimal differenzierbar mit $f''(x) > 0$ (bzw. $f''(x) < 0$). Dann besitzt f in x ein strenges lokales Minimum (bzw. Maximum).

- **Satz 16.5(a) [Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema]:** Sei $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es gebe ein $x \in]a,b[$ mit $f'(x) = 0$. Gilt

  $$\Big(\exists \varepsilon > 0 \;\forall \xi, \eta \in]a,b[\;:\; \big(x - \varepsilon < \xi < x < \eta < x + \varepsilon \implies f'(\xi) \leq 0 \leq f'(\eta)\big)\Big)$$

  bzw. $$\Big(\exists \varepsilon > 0 \;\forall \xi, \eta \in]a,b[\colon \big(x - \varepsilon < \xi < x < \eta < x + \varepsilon \implies f'(\xi) \geq 0 \geq f'(\eta)\big)\Big)$$

  so besitzt f in x ein lokales Minimum bzw. Maximum.

Zusatzaufgabe 11.1: Bestimmen Sie die Grenzwerte (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(x)}{x^2+1}$ und (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan(x)}{x}$.

(c) Ist die Funktion $\quad f(x) := \begin{cases} x \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ?

(d) Warum lässt sich die durch $g(x) := \sqrt{|x|}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ definierte Funktion stetig in $x = 0$ fortsetzen ? Hat die stetige Fortsetzung von g auf dem Intervall $\left]-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right[$ globale Extrema?

(e) Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit $x_1 \geq 0$ und $x_{n+1} = x_n \cdot (\cos(x_n))^2$ für $n \geq 1$.

  (i) Zeigen Sie die Konvergenz von $(x_n)_{n\geq 1}$ mittels Satz von Bolzano-Weierstraß.

  (ii) Zeigen Sie, dass der Grenzwert der Folge $\left(\frac{x_n}{\pi}\right)$ eine ganze Zahl sein muss.

  (iii) Berechnen Sie für die Startwerte $x_1 = 6.2$ bzw. $x_1 = 6.25$ bzw. $x_1 = 6.29$ die Anfangsfolgenglieder
  $$\frac{x_1}{\pi}, \frac{x_2}{\pi}, \ldots, \frac{x_{10}}{\pi} \;.$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.1:

(a) Wir suchen das eindeutige $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, so dass $1 = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, also $\cos(x) = \sin(x)$ gilt. Mit dem Additionstheorem $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ folgt daraus $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ und daher $x = \frac{\pi}{2} - x$, also $x = \frac{\pi}{4}$. Demnach ist $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, also

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(x)}{x^2+1} = \frac{\arctan(1)}{1^2+1} = \frac{\pi}{8} .$$

(b) Da $|\arctan(x)| < \frac{\pi}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt und somit beschränkt ist, gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\arctan(x)}{x} = 0$.

(c) Die Stetigkeit in jedem Punkt der Intervalle $]-\infty, 0[$ und $]0, \infty[$ ist aufgrund der Stetigkeit von x und $\frac{\pi}{2}$ sowie $\cos(x)$ auf $\mathbb{R}$ und $\frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben, denn Produkte und Kompositionen (solange definiert) stetiger Funktionen sind wiederum stetig. Somit bleibt nur die Stetigkeit in 0 zu zeigen. Diese folgt jedoch sofort, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \varepsilon$ gilt

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x| < \varepsilon .$$

Somit finden wir zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta := \varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 0| = |x| < \delta$ auch $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ gilt. Demnach ergibt sich die Stetigkeit in 0 hier mit Hilfe der ε-δ-Charakterisierung.

(d) Wegen $|\sin(\frac{1}{x})| \leq 1$ gilt $|g(x)| \leq \sqrt{|x|}$, also insbesondere $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g(x) = 0$. Daher ist die durch $g(0) := 0$ auf $\mathbb{R}$ fortgesetzte Funktion stetig.

Die stetige Fortsetzung von g besitzt wegen $\sup\limits_{x\in]-\frac{2}{\pi},\frac{2}{\pi}[} g(x) \leq \sup\limits_{x\in]-\frac{2}{\pi},\frac{2}{\pi}[} \sqrt{|x|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = g\left(\frac{2}{\pi}\right)$ auf $]-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}[$ das Supremum $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ und analog das Infimum $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, beide werden aber – da die Wurzelfunktion und der Betrag auf $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$ streng monoton wachsend sind – auf dem offenen Intervall $]-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}[$ nicht angenommen, sondern erst in den Randpunkten. Also besitzt die stetige Fortsetzung von g auf $\left]-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right[$ weder Maximum noch Minimum.

(e) (i) Es gilt $0 \leq (\cos(x))^2 \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und daher für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $x_n \geq 0$ und $x_{n+1} \leq x_n$. Somit ist die Folge einerseits durch 0 nach unten beschränkt und andererseits monoton fallend, woraus sich mit dem Satz aus der Vorlesung die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ ergibt.

(ii) Da für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $x_n \geq 0$ gilt, ist auch der entsprechende Grenzwert nichtnegativ. Nach der Vorbemerkung gilt weiterhin $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(x_n) = \cos(a)$. Mit den Grenzwertsätzen folgt nun auch $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n(\cos(x_n))^2) = a(\cos(a))^2$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1}) = a$. Wegen $(x_{n+1}) = (x_n(\cos(x_n))^2)$ bedeutet dies auch $a = a(\cos(a))^2$. Somit ist entweder $a = 0$ oder aber es folgt $1 = (\cos a)^2$ und somit $\cos a = 1$ oder $\cos a = -1$ im Fall $a \neq 0$. Im letzteren Fall muss daher $a = k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ sein. Da auch $a = 0$ diese Gestalt besitzt, haben damit alle Lösungen von $a = a(\cos(a))^2$ diese Eigenschaft. Der Grenzwert von $\left(\frac{x_n}{\pi}\right)$ muss darum ein $k = \frac{k\pi}{\pi}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ sein.

(iii) Es ergeben sich die folgenden Anfangsglieder:

$\frac{x_1}{\pi}$	$\frac{x_2}{\pi}$	$\frac{x_3}{\pi}$	$\frac{x_4}{\pi}$	$\frac{x_5}{\pi}$	$\frac{x_6}{\pi}$	$\frac{x_7}{\pi}$	$\frac{x_8}{\pi}$	$\frac{x_9}{\pi}$	$\frac{x_{10}}{\pi}$
6.2	1.9735	1.9599	1.92895	1.8344	1.3813	0.18335	0.12895	0.10892	0.096658
6.25	1.9894	1.9872	1.9841	1.9791	1.9706	1.9537	1.9128	1.7727	1.0122
6.29	2.0022	2.0021	2.0020	2.0019	2.0018	2.0018	2.0017	2.0017	2.0016

Zusatzaufgabe 11.2: (a) Was ist der maximale Definitions- und Wertebereich von $x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)$?

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $c_n \;=\; \dfrac{\sin(n) + (\cos(n))^3}{\sqrt{n}}$.

(c) Konvergieren die Reihen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin(n)}{4^n}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k^k}$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan(n))^n}{2^n}$?

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.2:

(a) Da der Arcussinus nur auf $[-1,1]$ definiert ist, muss

$$-1 \leq \frac{x+1}{2x} \leq 1 \quad\Longrightarrow\quad -2 \leq 1 + \frac{1}{x} \leq 2 \quad\Longrightarrow\quad -3 \leq \frac{1}{x} \leq 1$$

erfüllt sein. Nun ist eine Fallunterscheidung notwendig:

- Im Fall $x > 0$ folgt nach Multiplikation einerseits $1 \leq x$ und andererseits

$$-3x \leq 1 \quad\Longleftrightarrow\quad x \geq -\frac{1}{3} ,$$

was uns insgesamt einen ersten Definitionsbereich $D_1 = [1, \infty[$ liefert. Aufgrund der Stetigkeit von f auf D_1 ist der zugehörige Wertebereich demnach

$$W_1 \;=\; f(D_1) \;=\; \left]\lim_{x\to\infty} f(x), f(1)\right] \;=\; \left]\arcsin\left(\frac{1}{2}\right), \frac{\pi}{2}\right] .$$

- Im Fall $x < 0$ folgt nach Multiplikation einerseits $1 \geq x$ und andererseits

$$-3x \geq 1 \quad\Longleftrightarrow\quad x \leq -\frac{1}{3} ,$$

was uns insgesamt einen zweiten Definitionsbereich $D_2 = \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ liefert. Aufgrund der Stetigkeit von f auf D_2 ist der zugehörige Wertebereich demnach

$$W_2 \;=\; f(D_2) \;=\; \left[f\left(-\frac{1}{3}\right), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right[\;=\; \left[-\frac{\pi}{2}, \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right[.$$

Da außerdem die Funktion $\frac{x+1}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x}$ für keine reelle Zahl den Wert $\frac{1}{2}$ annehmen kann, ergibt sich als Definitions- und Wertebereich wegen $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ demnach

$$D \;=\; D_1 \cup D_2 \;=\; \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \;\cup\; [1, \infty[, \qquad W \;=\; W_1 \cup W_2 \;=\; \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{6}\right\} .$$

(b) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, da für $n \in \mathbb{N}$ aunächst

$$c'_n \;:=\; 0 \;\leq\; |c_n - 0| \;=\; \frac{|\sin n + \cos^3 n|}{\sqrt{n}} \;\leq\; \frac{|\sin n| + |\cos^3 n|}{\sqrt{n}} \;\leq\; \frac{2}{\sqrt{n}} \;\leq\; \frac{2}{n} \;=:\; c''_n .$$

gilt und wegen $\lim(c'_n) = 0$ und $\lim(c''_n) = 0$ nach dem Sandwich-Lemma $\lim(c_n) = 0$ folgt.

(c) (i) Wegen $|\sin(n)| \leq 1$ kann man die Reihe abschätzen durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin(n)}{4^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} .$$

Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$ konvergiert beispielsweise wegen $\displaystyle\sqrt[n]{\frac{n^2}{4^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}^2}{4} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4} < 1$ nach dem Wurzelkriterium, also konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin(n)}{4^n}$.

(ii) Nach dem Majorantenkriterium konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k^k}$ wegen $|\sin(k)| \leq 1$, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$ konvergiert, und diese Reihe konvergiert wegen $\sqrt[k]{\frac{1}{k^k}} = \frac{1}{k} \longrightarrow 0 < 1$ nach dem Wurzelkriterium. Also ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k^k}$ konvergent.

(iii) Da $\frac{\pi}{2}$ nach Konstruktion die eindeutige Nullstelle des Cosinus auf dem Intervall $]0,2[$ ist, gilt $\frac{\pi}{2} < 2$. Daher existiert ein $q := \frac{\pi}{4} < 1$, so dass wegen $|\arctan(x)| < \frac{\pi}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{(\arctan(n))^n}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^n = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$$

gilt, die konvergente geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n = \frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{\pi}{4}}$ somit eine Majorante für die betrachtete Reihe ist, welche nun nach dem Majorantenkriterium ebenso konvergieren muss.

Zusatzaufgabe 11.3:

(a) Beweisen Sie, dass jede in $a \in \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch stetig in a ist.

(b) Überprüfen Sie mittels Definition die Differenzierbarkeit der Funktion $s(x) = |x|$.

(c) Zeigen Sie, dass bei beschränktem $b\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto x^2 b(x)$ im Nullpunkt differenzierbar ist und dort die Ableitung 0 besitzt.

(d) Sei $f(x) := x^2$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$?

(e) Untersuchen Sie jeweils für $k = 1,2,3,4,5$, und die Funktionen

$$f_1(x) := x^3, \qquad f_2(x) := x^n \ (n \in \mathbb{N}), \qquad f_3(x) := \frac{1}{x}, \qquad f_4(x) := \frac{1}{x^2}, \qquad f_5(x) := \exp(x),$$

in welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ der Grenzwert $\lim_{h \to 0} \frac{f_k(x+h) - f_k(x)}{h}$ existiert.

(f) In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen $f_1(x) := \sqrt{x}$, $f_2(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$ differenzierbar?

Bestimmen Sie in diesen Punkten die Ableitung mittels Definition des Differentialquotienten!

(g) Beweisen Sie die Differenzierbarkeit von $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x > 1, \\ x^3 - 3x + 2 & \text{falls } x \in [-1,1], \\ 4 & \text{falls } x < -1. \end{cases}$

(h) Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Punkt $a = 1$:

(i) $f_1(x) = \begin{cases} 1 - x^2\ , & \text{falls } x \geq 1, \\ x^2 - 1\ , & \text{falls } x < 1\ ; \end{cases}$

(ii) $f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\ , & \text{falls } 0 < x < 1, \\ \frac{3 - x^2}{2}\ , & \text{falls } x \geq 1\ ; \end{cases}$ (iii) $f_3(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x+1}\ , & \text{falls } 0 < x < 1, \\ \frac{3 - x}{4}\ , & \text{falls } x \geq 1\ . \end{cases}$

Achtung: Eine der obigen Funktionen ist ein Beispiel für eine in allen $x \neq x_0$ differenzierbare, jedoch in $x_0 \in \mathbb{R}$ unstetige (und nach ZA 11.3 (a) dort somit **nicht** differenzierbare) Funktion, welche dennoch $\lim_{x \searrow x_0} f'(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f'(x)$ erfüllt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.3:

(a) Ist f differenzierbar in a, dann existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ und ist insbesondere endlich. Da der Nenner $x-a$ bei $x\to a$ gegen Null läuft, folgt nun nach Grenzwertgesetzen auch

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) \;=\; \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right) \;&=\; \left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\left(\lim_{x\to a}(x-a)\right)\\ &=\; \left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot 0 \;=\; 0\,.\end{aligned}$$

(b) Da $s(x)$ in der Nähe jedes Punktes $x\neq 0$ mit dem Polynom x bzw. $-x$ übereinstimmt, ist s in jedem Punkt $x\neq 0$ differenzierbar mit Ableitung 1 bzw. -1. Jedoch ist $s(x)$ nicht im Punkt 0 differenzierbar, da der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|-0}{h}$ nicht existiert (wegen $\frac{|h|}{h}=\pm 1$ – je nachdem ob h positiv oder negativ ist – stimmen links- und rechtsseitiger Grenzwert nicht überein).

(c) Es gilt

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^2g(h)-0}{h} = \lim_{h\to 0}(h\cdot g(h)) = 0$$

wegen $h\to 0$ und $|g(h)|\leq C$ für eine Konstante C.

(d) Für f existiert in jedem Punkt $x\in\mathbb{R}$ der Differentialquotient

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} \;=\; 2x+\lim_{h\to 0}h \;=\; 2x\,.$$

Also ist f überall differenzierbar mit Ableitung $f'(x)=2x$.

(e) Es gelten für alle $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h} \;&=\; \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2-x^3}{h}\\ &=\; \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh) \;=\; 3x^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h} \;&=\; \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{x^n+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^kx^{n-k}-x^n}{h}\\ &=\; \lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}x^{n-k} \;=\; \binom{n}{1}x^{n-1} \;=\; nx^{n-1}.\end{aligned}$$

Es gelten für alle $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_3(x+h)-f_3(x)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)x} \;=\; -\frac{1}{x^2},$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f_4(x+h)-f_4(x)}{h} \;&=\; \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2}}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-2hx-h^2}{(x+h)^2x^2}}{h}\\ &=\; \lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{(x+h)^2x^2} \;=\; \frac{-2x}{x^4} \;=\; -\frac{2}{x^3}.\end{aligned}$$

Mit $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\exp(h)-1}{h}=1$ (in der Vorlesung gezeigt, siehe Seite 64: Spezielle Grenzwerte) folgt

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_5(x+h)-f_5(x)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} \;=\; \exp(x)\lim_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h} \;=\; \exp(x)$$

(f) (i) Für $x = 0$ ist der Differentialquotient wegen

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_1(0+h) - f_1(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$$

unbeschränkt, so dass in diesem Punkt die Ableitung von $f_1(x) := \sqrt{x}$ nicht existieren kann. Für alle $x > 0$ gilt wegen der Stetigkeit der Funktion $\sqrt{\cdot}$ nun $\lim\limits_{h\to 0} \sqrt{x+h} = \sqrt{x+0} = \sqrt{x}$ und damit

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

(ii) Für alle $x > 0$ gilt nach (i) mit Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{(\sqrt{x+h} \cdot \sqrt{x})h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{\sqrt{x+h} \cdot \sqrt{x}} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.\end{aligned}$$

(g) Da Differenzierbarkeit nur eine lokale Eigenschaft ist, konstante Funktionen und Polynome überall differenzierbar sind und g in allen Punkten $x > 1$, $x < -1$ und $x \in]-1, 1[$ lokal (d.h. jeweils in einer offenen Umgebung dieser Punkte) mit einer differenzierbaren Funktion übereinstimmt, ist g in diesen Punkten ebenfalls differenzierbar. Es bleiben also noch die Punkte $x = \pm 1$ zu betrachten:

- Da die beiden Grenzwerte $\lim\limits_{h\searrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim\limits_{h\searrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$ und

$$\begin{aligned}\lim_{h\nearrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} &= \lim_{h\nearrow 0} \frac{(1+h)^3 - 3(1+h) + 2 - 0}{h} \\ &= \lim_{h\nearrow 0} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 3 - 3h + 2}{h} = \lim_{h\nearrow 0}(3h + h^2) = 0\end{aligned}$$

  nicht nur existieren, sondern auch übereinstimmen, existiert im Punkt 1 auch die Ableitung selbst und es gilt

$$g'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = 0\ .$$

- Da ebenso die Grenzwerte $\lim\limits_{h\nearrow 0} \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} = \lim\limits_{h\nearrow 0} \frac{4-4}{h} = 0$ und

$$\begin{aligned}\lim_{h\searrow 0} \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} &= \lim_{h\searrow 0} \frac{(-1+h)^3 - 3(-1+h) + 2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h\searrow 0} \frac{h^3 - 3h^2 + 3h - 1 + 3 - 3h + 2 - 4}{h} = \lim_{h\searrow 0}(h^2 - 3h) = 0\end{aligned}$$

  existieren und übereinstimmen, ergibt sich analog die Differenzierbarkeit von g in -1 mit Ableitung 0.

Also ist g überall differenzierbar mit der Ableitung

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \geq 1 \\ 3x^2 - 3 & \text{falls } x \in]-1, 1[\\ 0 & \text{falls } x \leq -1 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad g'(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x > 1 \\ 3x^2 - 3 & \text{falls } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{falls } x < -1 \end{cases}.$$

(h) Da eine im Punkt a differenzierbare Funktion dort auch stetig sein muss, haben wir jeweils zu überprüfen, ob der links- und rechtsseitige Grenzwert sowie der links- und rechtsseitige Differentialquotient in $a=1$ übereinstimmen.

(i) Wegen $\lim\limits_{x\searrow 1} f_1(x) = \lim\limits_{x\searrow 1} 1-x^2 = 0 = \lim\limits_{x\nearrow 1} x^2-1 = \lim\limits_{x\nearrow 1} f_1(x)$ ist f_1 in $a=1$ stetig. Jedoch ist f_1 in $a=1$ **nicht** differenzierbar wegen

$$\lim_{x\searrow 1}\frac{f_1(x)-f_1(1)}{x-1} = \lim_{x\searrow 1} -(1+x) = -2 \neq 2 = \lim_{x\nearrow 1} x+1 = \lim_{x\nearrow 1}\frac{f_1(x)-f_1(1)}{x-1}$$

(ii) Wegen $\lim\limits_{x\searrow 1} f_2(x) = \lim\limits_{x\searrow 1}\dfrac{3-x^2}{2} = 1 = \lim\limits_{x\nearrow 1}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\nearrow 1} f_2(x)$ ist f_2 in $a=1$ stetig. Aufgrund von

$$\lim_{x\searrow 1}\frac{f_2(x)-f_2(1)}{x-1} = \lim_{x\searrow 1} -\frac{x+1}{2} = -1 = \lim_{x\nearrow 1} -\frac{1}{x} = \lim_{x\nearrow 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\nearrow 1}\frac{f_2(x)-f_2(1)}{x-1}$$

ist f_2 auch differenzierbar in $a=1$.

(iii) Wegen $\lim\limits_{x\searrow 1} f_3(x) = \lim\limits_{x\searrow 1}\dfrac{3-x}{4} = \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{3}{2} = \lim\limits_{x\nearrow 1}\dfrac{x+2}{x+1} = \lim\limits_{x\nearrow 1} f_3(x)$ ist f_3 in $a=1$ **nicht** stetig, wonach f_3 auch **nicht** differenzierbar sein kann (vgl. ZA 11.3 (a) bzw. Corollar zu Satz 15.1). Dies folgt auch aufgrund von

$$\lim_{x\searrow 1}\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = \lim_{x\searrow 1}\frac{\frac{3-x}{4}-\frac{1}{2}}{x-1} = -\frac{1}{4} \neq -\infty = \lim_{x\nearrow 1}\frac{x+3}{x^2-1} = \lim_{x\nearrow 1}\frac{\frac{x+2}{x+1}-\frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x\nearrow 1}\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1}\,.$$

Zusatzaufgabe 11.4: (a) Beweisen Sie die Linearität (11.3) des Ableitens.

(b) Beweisen Sie für die Ableitung (i) die Produktregel (11.4) und (ii) die Kettenregel (11.7)

(c) Leiten Sie die Regel zur Differentiation der Umkehrfunktion (11.6) aus (11.7) her.

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.4:

(a) Angenommen, die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ seien in $a\in\mathbb{R}$, differenzierbar, dann folgt für $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ aus den Grenzwertgesetzen sofort

$$\begin{aligned}(\lambda f+\mu g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(\lambda f+\mu g)(a+h)-(\lambda f+\mu g)(a)}{h}\\ &= \lambda\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \mu\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lambda f'(x)+\mu g'(x)\,.\end{aligned}$$

(b) (i) Angenommen, die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ seien in $a\in\mathbb{R}$, differenzierbar, dann folgt zusammen mit der nach ZA 11.3 (a) gültigen Stetigkeit in a auch

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\lim_{h\to 0} g(a+h) + f(a)\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\ &= f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\end{aligned}$$

(ii) Sind $f\colon D\to\mathbb{R}$ und $g\colon E\to\mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D)\subset E$ und ist f differenzierbar in $x\in D$ und g differenzierbar in $\xi := f(x)\in E$, dann folgt mit der Hilfsfunktion

$$f^*(\zeta) := \begin{cases}\frac{f(\zeta)-f(\xi)}{\zeta-\xi}, & \text{falls } \zeta\neq\xi,\\ f'(\xi), & \text{falls } \zeta=\xi\,,\end{cases}$$

wegen $\lim\limits_{\zeta\to\xi} f^*(\zeta) = f^*(\xi) = f'(\xi)$ für die Komposition

$$(f\circ g)'(x) = \lim_{y\to x} \frac{(f\circ g)(y) - (f\circ g)(x)}{y-x} = \lim_{y\to x} f^*(g(y))\cdot \lim_{y\to x} \frac{g(y)-g(x)}{y-x} = (f'\circ g)(x)\cdot g'(x)\,.$$

(c) Leiten wir in $x = (f\circ g)(x)$ mit $g = f^{-1}$ beide Seiten ab, so erhalten wir

$$1 \;=\; (f'\circ g)(x)\cdot g'(x) \qquad \Longrightarrow \qquad (f^{-1})'(x) \;=\; \frac{1}{(f'\circ f^{-1})(x)}\,.$$

Zusatzaufgabe 11.5: Berechnen Sie jeweils die Ableitung von (a) $\sin(x)$ (b) $\cos(x)$

(c) $f(x) = \cos\left(\sin(x)\cdot \mathrm{e}^{(x^2)}\right)$ (d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$ (e) $f(x) = x^{(x^x)}$

(f) $f(x) = \left(\cos\left(\left(\sin\left(\mathrm{e}^{4x}\right)\right)^3\right)\right)^2$ (g) $f(x) = \arctan(x^2)$ (h) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}$

(i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}\cdot \mathrm{e}^{\sin(x)}}{\sqrt[3]{1+x}\cdot (x^2+3)^2}$ (j) $f(u) = \mathrm{e}^u \ln(\sin(u))$ (k) $f(z) = z^{\sin(z)}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.5:

(a) Es ist $(\sin(x))' = \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\right)' = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - (-\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = \cos(x)$.

(b) Es ist $(\cos(x))' = \left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\right)' = \frac{1}{2}\left(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + (-\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = -\sin(x)$.

(c) Nach Kettenregel $(h(g(x)))' \;=\; h'(g(x))\cdot g'(x)$ und Produktregel $(vw)' = v'w + vw'$ ergibt sich

$$f'(x) \;=\; -\sin\left(\sin(x)\cdot \mathrm{e}^{x^2}\right)\cdot\left(\cos(x)\cdot \mathrm{e}^{x^2} + \sin(x)\cdot \mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x\right)$$

(d) Nach Quotientenregel $\left(\frac{u}{v}\right)' \;=\; \frac{u'v-uv'}{v^2}$ und mit $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$ ergibt sich

$$f'(x) \;=\; \frac{\cos(x)(1+\cos x) - \sin(x)(-\sin(x))}{(1+\cos x)^2} \;=\; \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} \;=\; \frac{1}{1+\cos(x)}\,.$$

(e) Die Funktion ist auf $]0,\infty[$ definiert und differenzierbar mit

$$\begin{aligned}
\left(x^{(x^x)}\right)' &= (\exp(x^x\ln(x)))' = (x^x\ln(x))'x^{(x^x)} \;=\; \left((x^x)'\ln(x) + x^x\frac{1}{x}\right)x^{(x^x)}\\
&= \left((x\ln(x))'x^x\ln(x) + x^{x-1}\right)x^{(x^x)} \;=\; \left((\ln(x)+1)x^x\ln(x) + x^{x-1}\right)x^{(x^x)}\\
&= x^{(x^x)}x^{x-1}(1 + x\ln(x) + x\ln(x)^2)
\end{aligned}$$

(f) Nach fünffacher Anwendung der Kettenregel

$$\begin{aligned}
&(f(g(h(k(l(m(x)))))))'\\
&= f'(g(h(k(l(m(x)))))) \cdot g'(h(k(l(m(x))))) \cdot h'(k(l(m(x)))) \cdot k'(l(m(x))) \cdot l'(m(x)) \cdot m'(x)
\end{aligned}$$

ergibt sich $\quad y' \;=\; 2\cos\left(\sin^3\left(\mathrm{e}^{4x}\right)\right)\cdot\left(-\sin\left(\sin^3\left(\mathrm{e}^{4x}\right)\right)\right)\cdot 3\sin^2\left(\mathrm{e}^{4x}\right)\cdot\cos\left(\mathrm{e}^{4x}\right)\cdot \mathrm{e}^{4x}\cdot 4\,.$

(g) Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar mit $(\arctan(x^2))' = \frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}$, denn nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion folgt $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ wegen

$$\arctan'(\tan(y)) \;=\; \frac{1}{\tan'(y)} \;=\; \frac{1}{\left(\frac{\sin(y)}{\cos(y)}\right)'} \;=\; \frac{1}{\frac{(\cos(y))^2+(\sin(y))^2}{(\cos(y))^2}} \;=\; \frac{1}{1+\left(\frac{\sin(y)}{\cos(y)}\right)^2} \;=\; \frac{1}{1+(\tan(y))^2}$$

(h) Mit $y(x) = \sqrt{x\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{x^3}} = \left((x^3)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}}$ und $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$ folgt $y'(x) = \dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

(i) Hier bietet sich das logarithmische Ableiten $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ an, denn es gilt

$$\ln(f(x)) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \sin(x) - \frac{1}{3}\ln(1+x) - 2\ln(x^2+3)$$

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln(f(x)))' = \frac{\sqrt{x^2+1} \cdot \mathrm{e}^{\sin x}}{\sqrt[3]{1+x} \cdot (x^2+3)^2} \left(\frac{x}{x^2+1} + \cos(x) - \frac{1}{3(1+x)} - \frac{4x}{x^2+3}\right) .$$

(j) Nach Produktregel $(vw)' = v'w + vw'$ und Kettenregel $(h(g(x)))' = h'(g(x)) \cdot g'(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(u) &= \mathrm{e}^u \cdot \ln(\sin(u)) + \mathrm{e}^u \cdot (\ln(\sin(u)))' = \mathrm{e}^u \cdot \ln(\sin(u)) + \mathrm{e}^u \cdot \left(\frac{1}{\sin(u)} \cdot \cos(u)\right) \\ &= \mathrm{e}^u \cdot (\ln(\sin(u)) + \cot(u)) . \end{aligned}$$

(k) Wegen $u(z)^{v(z)} = \exp\big(v(z) \cdot \ln(u(z))\big)$ ergibt sich mittels Ketten- und Produktregel

$$\left(z^{\sin(z)}\right)' = (\exp(\sin(z) \cdot \ln(z)))' = z^{\sin(z)} \cdot \left(\cos(z)\ln(z) + \frac{\sin(z)}{z}\right) .$$

Zusatzaufgabe 11.6: (Umkehrfunktionen und ihre Ableitungen)

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von $\ell(x) = \ln(x)$ und $w(x) = \sqrt{x}$ mit Hilfe der Umkehrfunktion.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ existiert die Ableitung von $\arcsin(x)$ und wie lautet sie ?

(c) Warum muss $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := x + \mathrm{e}^x$, eine stetige Umkehrfunktion besitzen? Sei nun $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f. Berechnen Sie die Ableitung von $(f^{-1})'(1)$.

(d) Es sei a eine beliebige reelle Zahl.
Wieviele reelle Lösungen besitzt die Gleichung $2x + \sin(x) = a$? Begründen Sie Ihre Antwort.
Berechnen Sie, dort wo sie existiert, die Ableitung der Umkehrfunktion von $f(x) = 2x + \sin(x)$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.6:

(a) Mit $f^{-1}(x) := \ell(x) = \ln(x) = y$ und $f(y) := \mathrm{e}^y = x$ erhalten wir wegen $f'(y) = \mathrm{e}^y = x$ mittels Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion dann

$$\ell'(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{x} .$$

Mit $f^{-1}(x) := w(x) = \sqrt{x} = y$ und $f(y) := y^2 = x$ erhalten wir wegen $f'(y) = 2y$ mittels Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion dann

$$w'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

(b) Die Funktion $\arcsin\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ist die Umkehrfunktion vom eingeschränkten Sinus $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$. Mit $f^{-1}(x) = \arcsin(x) = y$ und $x = f(y) = \sin(y)$ liefert der Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion wegen $f'(y) = \cos(y)$ in allen $x \in]-1,1[$ somit

$$(\arcsin(x))' = \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(c) Zunächst halten wir fest, dass f nicht nur stetig, sondern sogar beliebig oft differenzierbar ist, und wegen $f'(x) = 1 + \mathrm{e}^x \geq 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (vgl. Satz 16.4). Nach dem Satz über die Existenz einer stetigen Umkehrfunktion (vgl. Satz 12.1) ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv, und es existiert eine (eindeutige!) stetige und ebenfalls streng monoton wachsende Umkehrfunktion $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Wegen $1 = 0 + \mathrm{e}^0$ ist $f^{-1}(1) = 0$. Nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion (vgl. Satz 15.3) gilt $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. Also folgt speziell $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{f^{-1}(1)}} = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^0} = \dfrac{1}{2}$.

(d) (i) Es ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + \sin(x)$ als Linearkombination differenzierbarer Funktionen selbst wieder eine differenzierbare Funktion mit Ableitung $f'(x) = 2 + \cos(x) \geq 1 > 0$, also einerseits streng monoton (wachsend) und damit injektiv, andererseits aufgrund der Differenzierbarkeit auch stetig. Die Surjektivität folgt nun aus dem Zwischenwertsatz und den Grenzwerten

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; +\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) \;=\; -\infty\,.$$

Aufgrund der Bijektivität von f existiert somit zu jedem festen a genau eine Lösung der Gleichung $f(x) = a$.

(ii) Nach (i) existiert auf ganz $\mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte Umkehrfunktion g von f. Diese ist überall differenzierbar mit Ableitung $g'(y) = \dfrac{1}{2 + \cos(g(y))}$.

Zusatzaufgabe 11.7: **(Logarithmisches Ableiten)**

(a) Bestimmen Sie für eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$ die Ableitung von $\ln \circ f$.

(b) Beweisen Sie, dass das logarithmische Ableiten $L\colon f \mapsto \dfrac{f'}{f}$ von Funktionen $f > 0$ die Rechenregeln $L(fg) = L(f) + L(g)$ und $L(f^a) = aL(f)$ erfüllt.

(c) Zeigen Sie, dass eine differenzierbare positive Funktion $f\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$ genau dann ein lokales Maximum/Minimum in x besitzt, wenn $\ln \circ f$ ein lokales Maximum/Minimum in x besitzt.

(d) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f(x) := \dfrac{\mathrm{e}^{x^2-2x-1}}{x^{12}}$ einmal direkt durch Anwenden notwendiger und hinreichender Kriterien und dann noch einmal erneut mit logarithmischem Ableiten.

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.7:

(a) Nach Kettenregel ist $\big((\ln \circ f)(x)\big)' = (\ln' \circ f)(x) \cdot f'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

(b) Wegen $L(f) = \frac{f'}{f} = (\ln \circ f)'$, $\ln(f(x)g(x)) = \ln(f(x)) + \ln(g(x))$ und $\ln(f(x)^a) = a\ln(f(x))$ folgen die behaupteten Rechenregeln

$$L(fg) = (\ln \circ fg)' = (\ln \circ f)' + (\ln \circ g)' = L(f) + L(g) \text{ sowie } L(f^a) = (\ln \circ f^a)' = a(\ln \circ f)' = aL(f)\,.$$

(c) Wegen $f(x) > 0$ gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $(\ln \circ f)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = 0$ gilt. Außerdem besitzt die Funktion $\ln \circ f$ wegen des strengen monotonen Wachsens von $\ln$ dasselbe Monotonieverhalten wie f, so dass lokale Maxima/Minima von f auch lokale Maxima/Minima von $\ln \circ f$ sind. Auch das hinreichende Kriterium gilt genau dann für f, wenn es für $\ln \circ f$ gilt: Ist $\frac{f'(x)}{f(x)} = 0$, so besitzt $\left(\frac{f'}{f}\right)' = \frac{ff''-f'f'}{f^2}$ in x den Wert $\frac{f''(x)}{f(x)}$, der wegen $f > 0$ dasselbe Vorzeichen wie $f''(x)$ besitzt.

(d) Zunächst ist der Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Direkt ergibt sich $f'(x) = \mathrm{e}^{x^2-2x-1}\dfrac{x^{12}(2x-2)-12x^{11}}{x^{24}} = \mathrm{e}^{x^2-2x-1}\dfrac{x(2x-2)-12}{x^{13}}$, so dass f' aufgrund von $\exp > 0$ genau in den Punkten mit $2x^2-2x-12=0$, d.h. in $x=-2$ und $x=3$ verschwindet. Nach Satz 16.4 entnehmen wir der Ableitung, dass f auf dem Intervall $]-3,-2[$ streng monoton fallend und auf dem Intervall $]-2,0[$ streng monoton wachsend ist. Analog sehen wir, dass f auf $]0,3[$ streng monoton fallend und auf $]3,\infty[$ streng monoton wachsend ist, so dass nach Satz 16.5 (a) an beiden Punkten lokale Minima vorliegen – dies ist plausibel, da die Funktion sowohl in der Nähe ihrer Polstelle als auch „an den Rändern“ $\pm\infty$ nach oben unbeschränkt ist.
- Da die Funktion offensichtlich in allen Punkten $x \neq 0$ definiert und positiv ist als auch mindestens zweimal differenzierbar, ist ZA 11.7 (c) anwendbar. Mit $g(x) := (\ln \circ f)(x) = -12\ln(x)+x^2-2x-1$ gilt $g'(x) = -\frac{12}{x}+2x-2 = 0$, d.h. $x^2-x-6 = (x-3)(x+2) = 0$, genau in den Punkten $x=-2$ und $x=3$, welches also nach Satz 16.1 die in Frage kommmenden Kandidaten für lokale Extrema sind. Da in allen $x \neq 0$ stets $g''(x) = \frac{12}{x^2}+2 > 0$ gilt, liefert Satz 16.5 (hinreichende Kriterien für lokale Extrema), dass beides lokale Minima von g und nach ZA 11.7 (c) somit auch lokale Minima von f sind.

Zusatzaufgabe 11.8:

(a) Sei $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ mit $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^2$ für alle $x,y \in\ ]a,b[$.
Ist f differenzierbar? Ist f konstant?

(b) Gegeben seien stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktionen $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) \geq g(a)$ und $f'(x) \geq g'(x)$ auf $]a,b[$. Zeigen Sie, dass $f(x) \geq g(x)$ auf $[a,b]$ gilt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.8:

(a) (i) Die Differenzierbarkeit folgt aus

$$0 \;\leq\; \left|\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \;\leq\; \lim_{y\to x}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \;\leq\; \lim_{y\to x}|y-x| \;=\; 0\,.$$

(ii) Seien $x,y \in \mathbb{R}$ beliebig mit $x<y$, dann existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in\ ]x,y[$ mit $f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Da nach Voraussetzung $|f(\xi+h)-f(\xi)| \leq |(\xi+h)-\xi|^2$ für beliebiges $\xi \in\ ]x,y[$ gilt und die Definition der Ableitung somit

$$|f'(\xi)| \;=\; \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{|f(\xi+h)-f(\xi)|}{|\xi+h-\xi|} \;\leq\; \lim_{h\to 0}|\xi+h-\xi| \;=\; \lim_{h\to 0}|h| = 0$$

liefert, muss $f'(\xi)=0$ für beliebiges $\xi \in\ ]x,y[$ und somit $f(x)=f(y)$ gelten. Aufgrund der Beliebigkeit von x und y muss f demnach konstant sein.

(b) Aus $f' \geq g'$ folgt für $h := f-g$ demnach $h' = (f-g)' = f'-g' \geq 0$, also wächst $h = f-g$ monoton. Mit $h(a) = f(a)-g(a) \geq 0$ folgt $h(x) = f(x)-g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, d.h. $f \geq g$.

Zusatzaufgabe 11.9:

(a) Geben Sie eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ an, die ein (lokales oder globales) Maximum in einem Punkt annimmt, in dem f nicht differenzierbar ist.

(b) Was sind Minimum und Maximum der Funktion $f(x) := x^3-3x+1$ auf dem Intervall $[0,2]$?

(c) Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ vorgegebene Konstanten.
Für welchen Punkt x ist die Summe der Quadrate der Abstände $|x-a_i|$ am geringsten ?

(d) Bestimmen Sie die lokalen Extrema der durch $f(x) := \dfrac{x}{1+x^2}$ definierten Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.9:

(a) In ZA 11.3 (b) haben wir gesehen, dass $s(x) = |x|$ in $a = 0$ nicht differenzierbar ist. Insgesamt ist $s(x)$ jedoch immerhin noch stetig. Daher ist $f(x) = -s(x)$ ein geeignetes Beispiel mit den geforderten Eigenschaften.

(b) Die Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 3$ verschwindet in den Punkten $x = \pm 1$, aber nur 1 liegt im Intervall $]0, 2[$, und dort gilt $f(1) = -1$. Darüber hinaus ist f wegen $x \in [0, 1] \Longrightarrow f'(x) \leq 0$ auf dem Intervall $[0, 1]$ monoton fallend sowie wegen $x \in [1, 2] \Longrightarrow f'(x) \geq 0$ auf $[1, 2]$ monoton wachsend. An den Randpunkten 0 und 2 gilt $f(0) = 1$ und $f(2) = 3$. Heranziehen des Monotonieverhaltens sowie ein Vergleich der entsprechenden Funktionswerte liefert, dass f in $x = 1$ mit -1 sein Minimum auf $[0, 2]$ annimmt, während f bei $x = 2$ mit Funktionswert 3 sein Maximum besitzt.

(c) Die Funktion $f(x) := \sum_{k=1}^{n}(x - a_k)^2$ hat die Ableitung $f'(x) = 2\sum_{k=1}^{n}(x - a_k)$, und diese verschwindet bei $nx = \sum_{k=1}^{n} a_k$, d.h. falls $x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ das arithmetische Mittel der a_k ist.

Tatsächlich ist dieses x ein Minimum, denn die zweite Ableitung $f''(x) = 2n$ ist positiv.

(d) Es gilt $f'(x) = \frac{(1 + x^2) - (2x)x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$, also verschwindet $f'(x)$ genau in den Punkten $x = \pm 1$. Die zweite Ableitung

$$f''(x) = \frac{(1 + x^2)^2(-2x) - 2(1 + x^2)(2x)(1 - x^2)}{(1 + x^2)^4} = \frac{-2x(1 + x^2) - 4x(1 - x^2)}{(1 + x^2)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}$$

nimmt in diesen Punkten die Werte $f''(-1) = \frac{1}{2}$ und $f''(1) = -\frac{1}{2}$ an, also liegt in $x = -1$ ein lokales Minimum und in $x = 1$ ein lokales Maximum von f.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 12

Konvexität

- **Definition [konvex,konkav]:** Ist D ein Intervall, so heißt $f\colon D \to \mathbb{R}$ **konvex**, falls für alle $x, y \in D$ und $\lambda \in [0,1]$ die Ungleichung $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ gilt (und **konkav**, wenn $g = -f$ konvex ist). Desweiteren sagen wir, dass f in $a \in D$ einen **Wendepunkt** besitzt, wenn f links von a lokal konkav und rechts von a lokal konvex ist (oder umgekehrt).

- **Satz 16.6 [Hinreichendes und notwendiges Kriterium für Konvexität]:** Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$f \text{ konvex} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x \in D\colon f''(x) \ge 0 \ .$$

  [Notwendiges Kriterium für Wendepunkte]: Besitzt die Funktion $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ in $x \in]a,b[$ einen Wendepunkt und ist f in x zweimal differenzierbar, so gilt $f''(x) = 0$.

Bernoulli-L'Hospital'sche Regeln – Anwendungen des Mittelwertsatzes

- **Lemma [Spezialfall L'Hospital]:** Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Für eine differenzierbare

  (a) Funktion $f\colon\ ]0,a[\to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\searrow 0} f'(x) =: c \in \mathbb{R}$ gilt $\qquad \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{f(x)}{x} = c.$

  (b) Funktion $f\colon\ ]a,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) =: c \in \mathbb{R}$ gilt $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = c.$

- **Satz 16.9 [Bernoulli-L'Hospital'sche Regeln]:** Seien $-\infty \le a < b \le \infty$ und $f, g\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Weiter gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und es existiere der Grenzwert

$$\lim_{x\nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ =: \ c \in \mathbb{R}.$$

  Dann gelten die folgenden Implikationen:

  (a) $\lim\limits_{x\nearrow b} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow b} g(x) = 0 \implies \Big(\forall x \in I\colon g(x) \neq 0 \ \wedge \ \lim\limits_{x\nearrow b} \dfrac{f(x)}{g(x)} \ = \ c\Big)$

  (b) $\lim\limits_{x\nearrow b} g(x) = \pm\infty \implies \Big(\exists \xi \in\ ]a,b[\ \forall x \in I\colon \ (x \ge \xi \implies g(x) \neq 0) \ \wedge \ \lim\limits_{x\nearrow b} \dfrac{f(x)}{g(x)} \ = \ c\Big)$

Zusatzaufgabe 12.1:

(a) Beweisen Sie für die n-te Ableitung eines Produktes von n-mal differenzierbaren Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die **Leibnizsche Produktregel**

$$(fg)^{(n)} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \ . \tag{12.1}$$

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Leibnizschen Produktregel $(x\ln(x))^{(2017)}$.

(c) Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden positiven Funktionen, indem Sie zunächst jeweils $(\ln\circ f)'$ bestimmen und anschließend die Beziehung zur Ableitung von f verwenden.

  (i) $f\colon]1,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x-1}{(x+2)^2(x+7)}$

  (ii) $f\colon]1,\infty[\setminus\{5\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-5)^2(x+1)(x+2)}$

  (iii) $f\colon]2,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$

  (iv) $f\colon]0,\pi[\to \mathbb{R},\ x \mapsto (\sin(x))^{(x-4)}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.1:

(a) Wir verwenden vollständige Induktion. Der Induktionsanfang ist (für $n = 0$ die Gleichung $fg = fg$ oder) für $n = 1$ die übliche Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$ (vgl. Satz 15.2 (b), Forster I). Gelte nun (12.1) für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV), dann gilt (vgl. Pascalsches Dreieck) auch

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left((fg)^{(n)}\right)' \overset{\text{IV}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(n-k)} g^{(k)})' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f^{(n-k)} g^{(k+1)}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n-k+1)} g^{(k)} \\
&= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \overset{\text{Pascal}}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} .
\end{aligned}$$

(b) Mit der Leibnizschen Produktregel $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$ und $x' = 1$, $x^{(k)} = 0$ für alle $k \geq 2$ sowie $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ und $(\ln(x))^{(k)} = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k}$ für $k \geq 2$ ergibt sich[16]

$$\begin{aligned}
(x \ln(x))^{(2017)} &= \binom{2017}{2016} x' (\ln(x))^{(2016)} + x (\ln(x))^{(2017)} \\
&= 2017 \cdot (-1)^{2015} \frac{(2015)!}{x^{2016}} + x \cdot (-1)^{2016} \frac{(2016)!}{x^{2017}} = -\frac{(2015)!}{x^{2016}} .
\end{aligned}$$

(c) (i) Mit $(\ln \circ f)(x) = \ln(x-1) - 2\ln(x+2) - \ln(x+7)$ und $(\ln \circ f)' = \frac{f'}{f}$ folgt

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln \circ f)'(x) = \frac{x-1}{(x+2)^2 (x+7)} \cdot \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+7}\right) .$$

(ii) Mit $(\ln \circ f)(x) = \ln(x-1) + \ln(x+3) - 2\ln(x-5) - \ln(x+1) - \ln(x+2)$ und $(\ln \circ f)' = \frac{f'}{f}$ folgt analog (i) aufgrund der Linearität des Ableitens

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-5)^2 (x+1)(x+2)} \cdot \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x-5} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) .$$

(iii) Mit $(\ln \circ f)(x) = \frac{1}{2}\Big(\ln(x) + \ln(x-1) - \ln(x-2)\Big)$ und $(\ln \circ f)' = \frac{f'}{f}$ folgt analog (i) aufgrund der Linearität des Ableitens

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln \circ f)'(x) = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}\right) .$$

(iv) Mit $(\ln \circ f)(x) = (x-4) \ln(\sin(x))$ und $(\ln \circ f)' = \frac{f'}{f}$ folgt mittels Produkt- und Kettenregel

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln \circ f)'(x) = (\sin(x))^{(x-4)} \cdot \left(\ln(\sin(x)) + \frac{(x-4)\cos(x)}{\sin(x)}\right) .$$

---

[16] $(\ln(x))^{(k)} = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k}$ impliziert $(\ln(x))^{(k+1)} = \left((-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k}\right)' = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}}$ und offenbar stimmt auch $(\ln(x))'' = -\frac{1}{x^2} = (-1)^{2-1} \frac{(2-1)!}{x^2}$, wonach die Induktion vollzogen ist.

Zusatzaufgabe 12.2: Gegeben seien differenzierbare Funktionen f und g.

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Lösung $\varphi(x)$ der Gleichung $f(\varphi(x)) = g(x)$.

(b) Bestimmen Sie nun die Ableitung von (i) $x^{\frac{1}{k}}$ und (ii) von der Lösung φ von $(\varphi(x))^3 = \sinh(x)$.

(c) Berechnen Sie die Ableitung der Lösung $\varphi(x)$ der Gleichung $f(x)\cdot\varphi(x) = g(x)$ unter Verwendung der Produktregel. Dabei gelte $f(x) \neq 0$ für alle x.

(d) Berechnen Sie die Ableitung der Lösung $\varphi(x)$ der Gleichung $\varphi(x) \cdot x^k = 1$ für $k \in \mathbb{N}$ und $x \neq 0$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.2:

(a) Ableiten der Gleichung $f(\varphi(x)) = g(x)$ auf beiden Seiten liefert $f'(\varphi(x))\varphi'(x) = g'(x)$ und daher nach Umstellen $\varphi'(x) = \frac{g'(x)}{f'(\varphi(x))}$.

Hinweis: Bei $g(x) = x$ ergibt sich wegen $g'(x) = 1$ die Ableitung der Umkehrfunktion φ von f.

(b) (i) Es ist $\varphi(x) = x^{\frac{1}{k}}$ die nichtnegative Lösung der Gleichung $(\varphi(x))^k = x$. Demzufolge ergibt sich mit $f(\varphi) = \varphi^k$ (also $f'(\varphi) = \frac{df}{d\varphi} = k\varphi^{k-1}$) und $g(x) = x$ (also $g'(x) = 1$) aus (a)

$$\varphi'(x) = \frac{g'(x)}{f'(\varphi(x))} = \frac{1}{k(\varphi(x))^{k-1}} = \frac{\varphi(x)}{k(\varphi(x))^k} = \frac{x^{\frac{1}{k}}}{kx} = \frac{1}{kx^{\frac{k-1}{k}}} .$$

Achtung: Die Funktion $\varphi(x)$ ist nur differenzierbar auf $]0, +\infty[$, nicht aber in 0.

(ii) Zur Bestimmung der Ableitung der reellen Lösung $\varphi(x)$ von $(\varphi(x))^3 = \sinh(x)$ leiten wir wiederum beide Seiten ab und aus $3\,(\varphi(x))^2\,\varphi'(x) = \cosh(x)$ erhält man schließlich

$$\varphi'(x) = \frac{\cosh(x)}{3\,(\varphi(x))^2} = \frac{\cosh(x)\varphi(x)}{3\,(\varphi(x))^3} = \frac{\cosh(x)\varphi(x)}{3\sinh(x)} = \frac{\coth(x)}{3}\,\varphi(x) \qquad (x \neq 0) .$$

(c) Differenzieren der Gleichung $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x)$ liefert $f'(x) \cdot \varphi(x) + f(x) \cdot \varphi'(x) = g'(x)$. Umstellen liefert nun

$$\varphi'(x) = \frac{g'(x) - f'(x) \cdot \varphi(x)}{f(x)} .$$

Bemerkung: Wegen $\varphi(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ haben wir somit genau die Quotientenregel hergeleitet.

(d) Differenzieren wir die Gleichung $\varphi(x) \cdot x^k = 1$, so erhalten wir $\varphi'(x) \cdot x^k + \varphi(x) \cdot kx^{k-1} = 0$. Umstellen und anschließendes Einsetzen von $\varphi(x) = \frac{1}{x^k}$ liefert nun

$$\varphi'(x) = -\frac{\varphi(x) \cdot k}{x}, \qquad \text{also} \qquad \left(\frac{1}{x^k}\right)' = -\frac{k}{x^{k+1}} .$$

Zusatzaufgabe 12.3:

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $|f'(x)| \leq K < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist f gleichmäßig stetig?

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\arctan\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion $\ln\colon [1, \infty[\to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst Lipschitz-Stetigkeit.

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.3:

(a) Da die Funktion nach Voraussetzung differenzierbar ist, existiert zu beliebigen $x < y$ nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in \,]x, y[$ mit $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi)$. Wegen $|f'(\xi)| \leq K < \infty$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ liefert dies insbesondere $\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leq K$ für beliebige $x < y$ und somit $|f(y) - f(x)| \leq K|y - x|$. Da letzteres auch im Fall $x = y$ gilt, folgt die Lipschitz-Stetigkeit von f mit Lipschitz-Konstanten K. Nach ZA 8.3 (a) ergibt sich daraus nun auch die gleichmäßige Stetigkeit.

(b) Da $\arctan\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $|(\arctan(x))'| = \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ folgt die Behauptung aus Aufgabenteil (a).

(c) Die Funktion ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstanten $L = 1$, denn aufgrund des Mittelwertsatzes existiert zu beliebigen $x, y \in [1, \infty[$ mit $x \neq y$ eine Zwischenstelle $\xi > 1$ mit

$$\left|\frac{\ln(x) - \ln(y)}{x - y}\right| = |(\ln(\xi))'| = \frac{1}{\xi} < 1 \,.$$

Daher finden wir zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta := \varepsilon > 0$, so dass

$$|x - y| < \delta \implies |\ln(x) - \ln(y)| \leq |x - y| < \varepsilon$$

gilt, was genau der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit entspricht (da das δ allein von ε abhängig gewählt werden kann).

Zusatzaufgabe 12.4:

Gegeben seien (a) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ (b) $g(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ und (c) $h(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$.

(i) Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich und die Intervalle, in denen die Funktion positiv/negativ, monoton wachsend/fallend, konvex/konkav ist.

(ii) Berechnen Sie die Grenzwerte in den Randpunkten (gegebenenfalls auch $\pm\infty$) des jeweiligen Definitionsbereiches, die nicht mehr zu demselben gehören.

(iii) Bestimmen Sie die lokalen/globalen Extrema sowie Wendepunkte, falls diese existieren.

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.4:

(a) Die Funktion $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ besitzt die Ableitungen $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ und $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$.

(i) Die Funktion f

- besitzt den Definitionsbereich $]0, \infty[$, da $\ln(x)$ nur für $x > 0$ definiert;
- ist in $]0, 1[$ negativ und in $]1, \infty[$ positiv;
- ist monoton wachsend in $]0, \mathrm{e}]$ (da dort $f' \geq 0$) und fallend in $[\mathrm{e}, \infty[$;
- ist konvex in $[\sqrt{\mathrm{e}^3}, \infty[$ (da dort $f'' \geq 0$) und konkav in $]0, \sqrt{\mathrm{e}^3}]$.

(ii) Mit $x = \exp(y)$ ist $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{1}{\frac{\exp(y)}{y}} = 0$ aufgrund der für positive y gültigen Abschätzung

$$\frac{\exp(y)}{y} = \frac{1}{y} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{(k+1)!} \geq \frac{y}{2} \xrightarrow{y\to\infty} +\infty \,. \tag{12.2}$$

Mit $y = \frac{1}{x}$ folgt in ähnlicher Weise $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{y\to\infty} -y\ln(y) = -\infty$.

(iii) Die einzige Nullstelle von f' ist $x = \mathrm{e}$. Aus $f''(\mathrm{e}) = \frac{-1}{\mathrm{e}^3} < 0$ folgt dann, dass f bei $x = \mathrm{e}$ ein lokales Maximum mit Wert $f(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$ besitzt. Dieses Maximum ist auch global, denn es gilt $f(\mathrm{e}) \geq f(x)$ für alle $x \in \,]0, \infty[$ aufgrund des Monotonieverhaltens. Es gibt keine lokalen Minima, da $x = \mathrm{e}$ einzige Nullstelle der Ableitung, und kein globales Minimum, da die Funktion beliebig klein werden kann (siehe (ii)). Die einzige Nullstelle der zweiten Ableitung ist $x = \sqrt{\mathrm{e}^3}$, so dass f dort einen Wendepunkt mit Wert $f(\sqrt{\mathrm{e}^3}) = \frac{3}{2\sqrt{\mathrm{e}^3}}$ besitzt.

(b) Die Funktion $g(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ besitzt die Ableitungen $g'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ und $g''(x) = \dfrac{1}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

(i) Die Funktion g

- besitzt den Definitionsbereich $]-\infty, 0[\, \cup\,]0, \infty[$ (da dort $\frac{1}{x}$ definiert ist).
- ist negativ auf $]0, -\infty[$ und positiv auf $]0, \infty[$ (wegen $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} > 0$ für alle $x \neq 0$).
- ist f auf $]-1, 0[$ streng monoton fallend (da $1 + \frac{1}{x} < 0$ zu $-1 < x < 0$ äquivalent ist) und auf $]-\infty, -1[$ und $]0, \infty[$ streng monoton wachsend.
- ist wegen $g''(x) < 0$ für $x < 0$ und $g''(x) > 0$ für $x > 0$ auf $]-\infty, 0[$ konkav und auf $]0, \infty[$ konvex.

(ii) Mit der strengen Monotonie und der Stetigkeit der Exponentialfunktion, der Tatsache, dass $\exp(0) = 1$ ist sowie mit Hilfe von (12.2) erhalten wir die Grenzwerte

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} &= -\lim_{y\searrow 0} \frac{\mathrm{e}^{y}}{y} = -\lim_{y\searrow 0} \frac{1}{y} = -\infty\,, & \lim_{x\nearrow 0} x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} &= -\lim_{y\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{y}}{y} = -\infty\,,\\
\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} &= \lim_{y\searrow 0} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y} = \lim_{y\searrow 0} \frac{1}{y} = \infty\,, & \lim_{x\searrow 0} x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} &= \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y\mathrm{e}^{y}} = 0\,.
\end{aligned}$$

(iii) Da für x aus dem Definitionsbereich $x \neq 0$ gilt und $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} > 0$ ist, besitzt f keine Nullstelle. Da $x = -1$ wegen $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} > 0$ die einzige Nullstelle von g' ist, ergibt sich aufgrund des Monotonieverhaltens von g (oder auch wegen $g''(-1) = -\mathrm{e}^{-1} < 0$), dass in $x = -1$ ein lokales Maximum vorliegt, welches das einzige lokale Extremum ist. Aus (ii) erkennen wir, dass die Funktion g an der Definitionslücke $x = 0$ von $-\infty$ auf 0 springt, womit g keine globalen Maxima oder Minima besitzt. Da g'' im Definitionsbereich keine Nullstelle besitzt, gibt es auch keinen Wendepunkt.

(c) Wegen $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \dfrac{x + 1}{x + 2}$ für alle $x \neq -2$ ist $h(x)$ auf $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ stetig fortsetzbar zu $\tilde{h}(x) = \frac{x+1}{x+2}$. Somit ergeben sich $h'(x) = \dfrac{1}{(x + 2)^2}$ und $h''(x) = \dfrac{-2}{(x + 2)^3}$.

(i) Die Funktion h

- besitzt den (erweiterten) Definitionsbereich $]-\infty, -2[\; \cup\;]-2, \infty[$;
- ist positiv in $]-\infty, -2[$, $]-1, \infty[$ und negativ in $]-2, -1[$;
- ist monoton wachsend im ganzen Definitionsbereich;
- ist konvex in $]-\infty, -2[$ und konkav in $]-2, \infty[$.

(ii) Es gelten $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 1$, $\lim\limits_{x\nearrow -2} h(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\searrow -2} h(x) = -\infty$.

(iii) Da die erste Ableitung keine Nullstelle besitzt, existieren keine lokalen Maxima bzw. Minima. Wegen (ii) existieren auch keine globalen Maxima/Minima. Da die zweite Ableitung überall existiert und ebenfalls keine Nullstelle besitzt, existieren keine Wendepunkte.

Zusatzaufgabe 12.5:

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^4$, konvex ist.

Beweisen Sie $\dfrac{1}{9}(x + 2y)^4 \leq 3(x^4 + 2y^4)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Sei $p \geq 1$ und sei $f(x) = \dfrac{(1 + x)^p}{1 + x^p}$.

(i) Bestimmen Sie das Minimum und das Maximum von $f(x)$ in $[0, 1]$.

(ii) Beweisen Sie mit Hilfe von (i) die Aussage

$$\forall a, b \geq 0\colon a^p + b^p \leq (a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)\,. \tag{12.3}$$

(c) Beweisen Sie mittels des verallgemeinerten Mittelwertsatzes/Satz von Cauchy die Regel von **L'Hospital** für den Fall $\lim_{x\searrow a} f(x) = 0 = \lim_{x\searrow a} g(x)$.

(d) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung von $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und in x selbst zweimal differenzierbar. Zeigen Sie mittels der Regel von L'Hospital die Gültigkeit von

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \;=\; f''(x)\,. \tag{12.4}$$

(e) Zeigen Sie, dass für die durch $f(x) := |x|x$ definierte Funktion der Limes auf der linken Seite in (12.4) bei $x = 0$ existiert, obwohl die Funktion nicht zweimal differenzierbar im Nullpunkt ist.

(f) Berechnen Sie nach geeigneter Umformung mit der Regel von L'Hospital (Bernoulli-L'Hospital)

$$\lim_{x\searrow 0} x\ln(x), \quad \lim_{x\searrow 0} x^x, \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\tan(x), \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x \text{ für } a \in \mathbb{R}.$$

(g) Zeigen Sie die Stetigkeit der Funktion $\quad f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{bei } x = 0, \\ x^x & \text{bei } x \in \,]0,1]. \end{cases}$

Begründen Sie, ohne zu rechnen, dass f ein globales Maximum und ein globales Minimum hat.

(h) Berechnen Sie alle globalen Maximumstellen und alle globalen Minimumstellen sowie das globale Maximum und das globale Minimum von f aus (g).

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.5:

(a) Da die Funktion als Polynom sogar beliebig oft differenzierbar ist, folgt aus $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ die Konvexität von $f(x) = x^4$.

Für $\lambda = \frac{1}{3}$ folgt nun nach Definition der Konvexität

$$\frac{1}{3^4}(x+2y)^4 \;=\; \left(\frac{1}{3}x + \left(1-\frac{1}{3}\right)y\right)^4 \;\leq\; \frac{1}{3}x^4 + \left(1-\frac{1}{3}\right)y^4 \;=\; \frac{1}{3}\left(x^4+2y^4\right)$$

Multiplikation mit 3^2 liefert die gewünschte Ungleichung.

(b) Zunächst halten wir fest, dass im Fall $p = 1$ eine konstante Funktion $f \equiv 1$ vorliegt, so dass dann alle Punkte aus dem Intervall $[0,1]$ sowohl globale Maxima als auch globale Minima sind. Weiterhin stimmen alle Ausdrücke in obiger Ungleichungkette überein, so dass diese trivialerweise gilt. Betrachten wir daher nun den Fall $p > 1$ gesondert:

(i) Nach Quotientenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(x) \;&=\; \frac{p(1+x)^{p-1}(1+x^p) - p(1+x)^p x^{p-1}}{(1+x^p)^2} \;=\; \frac{p(1+x)^{p-1}\left[1+x^p-(1+x)x^{p-1}\right]}{(1+x^p)^2} \\ &=\; \frac{p(1+x)^{p-1}\left[1-x^{p-1}\right]}{(1+x^p)^2}\,, \end{aligned}$$

so dass wegen

$$0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq x^{p-1} \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq 1 - x^{p-1}$$

somit $\forall x \in [0,1]\colon f'(x) \geq 0$ gilt, also f auf $[0,1]$ monoton wachsend (vgl. Satz 16.4) ist. Demzufolge gilt $\forall x \in [0,1]\colon f(0) \leq f(x) \leq f(1)$, d.h.,

$$\forall x \in [0,1]\colon 1 \;\leq\; \frac{(1+x)^p}{1+x^p} \;\leq\; 2^{p-1}\,. \tag{12.5}$$

(ii) Aufgrund der Symmetrie können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a \geq b$ wählen.

- Im Fall $b=0$ degeneriert die Ungleichungskette (12.3) zu der wegen $p>1$ offensichtlich wahren Aussage $a^p \leq a^p \leq 2^{p-1}a^p$.
- Fall $b>0$ liefert $a \geq b$ sowohl $a>0$ als auch die Ungleichungkette $0 < \frac{b}{a} \leq 1$. Mit Hilfe von (12.5) sowie Ausklammern/Kürzen von $\frac{1}{a^p}$ ergibt sich nun die Aussage

$$1 \;\leq\; \frac{\left(1+\frac{b}{a}\right)^p}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^p} \;=\; \frac{(a+b)^p}{a^p+b^p} \;\leq\; 2^{p-1}\,,$$

welche nach Multiplikation mit (a^p+b^p) die behauptete Ungleichungskette (12.3) liefert.

(c) Wegen $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\searrow a} g(x)$ kann man f, g durch $f(a) := 0$, $g(a) := 0$, zu stetigen Funktionen auf $[a,b[$ fortsetzen. Wendet man bei $x \in]a,b[$ den verallgemeinerten Mittelwertsatz auf ein Intervall $[a,x]$ an, so ergibt sich die Existenz eines $\xi \in (a,x)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad .$$

Konvergiert in dieser Gleichung x von oben gegen a, dann konvergiert wegen $\xi \in (a,x)$ auch ξ von oben gegen a, und man erhält

$$\lim_{x\searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\searrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

unter der Voraussetzung, dass der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

(d) Nach der Regel von L'Hospital gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}\,.$$

Fügt man nun eine nahrhafte Null ein, so ergibt sich aufgrund der zweimaligen Differenzierbarkeit von f in x

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{2h} + \frac{f'(x-h)-f'(x)}{2(-h)} = \frac{f''(x)}{2} + \frac{f''(x)}{2} = f''(x)\,,$$

also gilt in diesem Fall wie behauptet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

(e) Für f gilt bei $x=0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{|h|h - 0 + |-h|(-h)}{h^2} \;=\; 0\,,$$

obwohl $f'(x) = 2|x|$ nicht im Nullpunkt differenzierbar ist.

(f) (i) Wegen $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ und $\lim\limits_{x\searrow 0}(-\ln(x)) = \infty$ folgt nach Anwendung der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x\searrow 0} x\ln(x) \;=\; -\lim_{x\searrow 0} \frac{-\ln(x)}{\frac{1}{x}} \;\overset{\text{Regel von L'Hospital}}{=}\; -\lim_{x\searrow 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \;=\; -\lim_{x\searrow 0} x \;=\; 0 \quad .$$

(ii) Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt nun aus (i) sofort

$$\lim_{x\searrow 0} x^x \;=\; \lim_{x\searrow 0} \exp\left(\ln\left(x^x\right)\right) \;=\; \exp\left(\lim_{x\searrow 0} \left(x\ln\left(x\right)\right)\right) \;=\; \exp(0) \;=\; 1 \quad .$$

(iii) Durch zweimalige Anwendung der Regel von L'Hospital ergibt sich

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)+x\cos(x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)} = \frac{0}{2} = 0\end{aligned}$$

wegen $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0}(2\cos(x)-x\sin(x))=2$.
(iv) Wiederum durch Anwenden der Regel von L'Hospital ergibt sich

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cot(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2}{-\frac{1}{(\sin(x))^2}} = \frac{-2}{-1} = 2\ .$$

(v) Es gilt zunächst $\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)^x} = \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$. Wegen $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ und

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) = \lim_{t\to 0}\ln(1+t\cdot a) = \ln(1+0\cdot a) = \ln(1) = 0$$

ist die Regel von L'Hospital anwendbar, so dass zunächst

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{Regel von L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\cdot a\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = a$$

folgt. Aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion ergibt sich dann $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a$.

(g) Für $x \in\ ]0,1]$ ist $x^x = \exp(x\ln x)$ als Verknüpfung und Hintereinanderausführung stetiger Funktionen selbst wiederum stetig. Wir betrachten nun $x = 0$. Wegen $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{1}{x} = \infty$ liefert die Regel von L'Hospital

$$\lim_{x\searrow 0}x\ln(x) = \lim_{x\searrow 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\searrow 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\searrow 0}x = 0\ .$$

Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion ist nun auch

$$\lim_{x\searrow 0}f(x) = \lim_{x\searrow 0}x^x = \lim_{x\searrow 0}\exp(x\ln(x)) = \exp(0) = 1 = f(1)\ .$$

Demnach ist f auch in 0 stetig. Die stetige Funktion $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ nimmt nach dem Satz vom Minimum/Maximum sowohl ihr (globales) Maximum als auch ihr (globales) Minimum an.

(h) Da f in $]0,1[$ sogar differenzierbar ist, muss jedes lokale Extremum in $]0,1[$ notwendigerweise die Bedingung $f'(x) = x^x(\ln(x)+1) = 0$ erfüllen. Aufgrund der Positivität von x^x gilt dies genau für $\ln(x)+1 = 0$, also für $x = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$. Neben diesem sind nur noch die Randpunkte 0 und 1 Kandidaten für (globale) Extrema.
Der Vergleich

$$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \exp\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right) < \exp(0) = 1 = f(0) = f(1)$$

liefert, dass f in den beiden Randpunkten 0 und 1 ihr Maximum und in $\frac{1}{\mathrm{e}}$ ihr Minimum annimmt.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 13

Treppenfunktionen, Riemann-Integral

- **Definition [Treppenfunktion]:** Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Gilt $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ für eine Menge $P := \{x_k \mid k = 0, \ldots, n\}$, so nennen wir P **Unterteilung** des Intervalls $[a, b]$. Eine Funktion $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, falls eine Unterteilung P existiert, so dass
$$\forall k = \{1, \ldots, n\}\ \exists c_k \in \mathbb{R}\ :\ \varphi_{\big|]x_{k-1}, x_k[} \equiv c_k\ . \tag{13.1}$$
Die Menge $\mathcal{T}[a, b] := \{\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ Treppenfunktion}\}$ ist ein linearer Unterraum des Vektorraumes aller Funktionen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, denn es gelten (i) $0 \in \mathcal{T}[a, b]$ sowie
(ii) $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{T}[a, b]\ :\ \varphi_1 + \varphi_2 \in \mathcal{T}[a, b]$ (iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall \varphi \in \mathcal{T}[a, b]\ :\ \lambda\varphi \in \mathcal{T}[a, b]$.

- **Definition [Integral einer Treppenfunktion]:** Besitzt $\varphi \in \mathcal{T}[a, b]$ eine Unterteilung P und gilt (13.1), so definieren wir
$$\int_a^b \varphi(x)dx\ :=\ \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1})\ . \tag{13.2}$$
Bem.: Das Integral einer Treppenfunktion ist wohldefiniert (unabhängig von der Wahl von P).

- **Satz 18.1 [Linearität, Monotonie des Integrals für Treppenfunktionen]:** Das Integral ist ein lineares, monotones Funktional auf dem Vektorraum $\mathcal{T}[a, b]$, d.h., es gelten
$$\text{(i) } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ \forall \varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]\ :\ \int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi)(x)dx\ =\ \lambda\int_a^b \varphi(x)dx + \mu\int_a^b \psi(x)dx,$$
$$\text{(ii) } \forall \varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]\ :\ \left(\varphi \le \psi\ \Longrightarrow\ \int_a^b \varphi(x)dx\ \le\ \int_a^b \psi(x)dx\right),$$
wobei $\varphi \le \psi\ :\Longleftrightarrow\ (\forall x \in [a, b]\ :\ \varphi(x) \le \psi(x))$.

- **Definition [Oberintegral, Unterintegral]:** Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann definieren wir
$$\int_a^{b^*} f(x)dx\ :=\ \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{T}[a,b]\\ \psi \ge f}} \int_a^b \psi(x)dx \qquad \text{und} \qquad \int_{a_*}^b f(x)dx\ :=\ \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{T}[a,b]\\ \varphi \le f}} \int_a^b \varphi(x)dx \tag{13.3}$$

- **Definition [Riemann-integrierbar]:** Eine beschränkte Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Riemann-integrierbar**, falls
$$\int_a^{b^*} f(x)dx\ =\ \int_{a_*}^b f(x)dx$$
gilt. In diesem Fall definieren wir das **Riemann-Integral** durch $\int_a^b f(x)dx\ :=\ \int_a^{b^*} f(x)dx$.

Bemerkung: Alternativ kann man auch die Riemannschen Ober- und Untersummen
$$\mathcal{OS}(P, f) := \sum_{k=1}^n \Big(\sup_{x \in\ ]x_{k-1}, x_k[} f(x)\Big)(x_k - x_{k-1})\ , \qquad \mathcal{US}(P, f) := \sum_{k=1}^n \Big(\inf_{x \in\ ]x_{k-1}, x_k[} f(x)\Big)(x_k - x_{k-1})\ ,$$
betrachten, welche Integrale von speziellen Treppenfunktionen $\psi \ge f$ bzw. $\varphi \le f$ darstellen, die in einem gewissen Sinne optimal gewählt sind. Aus der Definition sehen wir sofort, dass für jede Wahl von P offenbar
$$\mathcal{US}(P, f)\ \le\ \int_{a_*}^b f(x)dx \le \int_a^{b^*} f(x)dx\ \le\ \mathcal{OS}(P, f) \tag{13.4}$$
gilt. Finden wir nun eine Folge von Obersummen (d.h., auch eine entsprechende Folge von Unterteilungen P_n) und eine Folge von Untersummen, die gegen denselben Grenzwert konvergieren, so müssen auch Ober- und Unterintegral übereinstimmen, also f Riemann-integrierbar sein.

- **Satz 18.2 [Einschließung zwischen Treppenfunktionen]:** Für $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$f \text{ R-integrierbar} \iff \exists \varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]\colon \left(\varphi \le f \le \psi \ \wedge \ \int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \ < \ \varepsilon\right).$$

- **Satz 18.3/18.4:** Für $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt: $\Big(f \text{ stetig} \vee f \text{ monoton} \implies f \text{ Riemann-integrierbar}\Big)$.

- **Satz 18.5 [Linearität und Monotonie]:** Die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen $\mathcal{R}[a,b]$ bilden einen linearen Unterraum aller Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Insbesondere ist das Riemann-Integral ein lineares, monotones Funktional auf dem Vektorraum $\mathcal{R}[a,b]$.

- **Def. [Positiv-/Negativteil]:** Für $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) definieren wir $f_+, f_-\colon D \to \mathbb{R}$ durch

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \ge 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f_-(x) := \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) \le 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{13.5}$$

  Aus der Definition folgen sofort $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.

- **Satz 18.6**: Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gelten:
  (a) Die Funktionen f_+, f_- und $|f|$ sind Riemann-integrierbar mit $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \ \le \ \int_a^b |f|(x)dx$.
  (b) Für jedes $p \in [1, \infty[$ ist $|f|^p\colon D \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.
  (c) Die Funktion $fg : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

- **Definition [Riemann-Summe]:** Eine Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ des Intervalls $[a,b]$ zusammen mit Stützstellen $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, \ldots, n$ nennen wir eine **Zerlegung**

$$\mathcal{Z} := \{(x_k)_{0 \le k \le n}, (\xi_k)_{1 \le k \le n}\} \tag{13.6}$$

  der **Feinheit** $\mu(\mathcal{Z}) := \max\limits_{k=1,\ldots,n} (x_k - x_{k-1})$. Die **Riemann-Summe** von f bzgl. $\mathcal{Z}$ ist dann

$$\mathcal{S}(\mathcal{Z}, f) \ := \ \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \ . \tag{13.7}$$

Partialbruchzerlegung:

Rationale Funktionen $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ mit normierten, teilerfremden Polynomen $P(x), Q(x)$, welche $\deg(P) < \deg(Q)$ erfüllen, sind eindeutig in eine Summe von Partialbrüchen der Gestalt

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)^1}, \ \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}, \ \ldots \ , \ \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}, \quad \text{für } k\text{-fache Nullstellen } \alpha \text{ von } Q(x),$$

$$\frac{E_1 x + F_1}{(x^2+px+q)^1}, \ \frac{E_2 x + F_2}{(x^2+px+q)^2}, \ \ldots \ , \ \frac{E_k x + F_k}{(x^2+px+q)^m}, \quad \text{für } m\text{-fache Teiler } (x^2+px+q) \text{ von } Q(x) \text{ mit } p^2 - 4q < 0,$$

zerlegbar, wobei die $A_j, j = 1, \ldots, k$, bzw. $E_s, F_s, s = 1, \ldots, m$, jeweils reelle Konstanten sind.

Bemerkung: Die oben angeführten Konstanten erhalten wir, indem wir in Abhängigkeit der Nullstellen von $Q(x)$ den passenden Ansatz auswählen und einen Koeffizientenvergleich ausführen.

Beispiel: Bringen wir die rechte Seite aus dem Ansatz

$$\frac{7x^4 + 23x^3 + 45x^2 + 38x + 13}{(x+2)^3(x^2+x+1)^2} \ = \ \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2}$$

auf den Hauptnenner $(x+2)^3(x^2+x+1)^2$, kann die Gleichheit also nur erfüllt sein, wenn im Zähler jeweils dasselbe Polynom steht. Ein Koeffizientenvergleich, welcher auf ein LGS in den 7 Unbekannten $A, \ldots, G$ führt, liefert $A = B = D = E = 0$, $C = 5$, $F = 2$ und $G = 1$.

Zusatzaufgabe 13.1:

(a) Beweisen Sie den folgenden **Fixpunktsatz**:

> Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(D) \subseteq D$. Weiter existiere ein $q < 1$, so dass $|f'(x)| \leq q$ für alle $x \in D$. Sei $x_0 \in D$ beliebig und $x_n := f(x_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen die eindeutige Lösung $\xi \in D$ der Gleichung $f(\xi) = \xi$. Insbesondere gilt die Fehlerabschätzung
>
> $$|\xi - x_n| \;\leq\; \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \;\leq\; \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \;\;.$$

(b) Das Newton-Verfahren kann man als Iterationsverfahren zur Auffindung eines Fixpunktes von $F(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ interpretieren. Welche Bedingung an f für die Konvergenz des Newton-Verfahrens liefert die Anwendung des obigen Fixpunktsatzes auf F?

(c) Führen Sie, soweit möglich, die Newton-Iteration für $f(x) = x^2 - 1$ sowie die Startwerte $-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 2$ durch und begründen Sie, ob das Newton-Verfahren gegebenenfalls konvergiert.

Lösung zu Zusatzaufgabe 13.1:

(a)
- **Konvergenz**: Aus dem Mittelwertsatz erhalten wir $|f(x) - f(y)| \leq q|x-y|$ für alle $x, y \in D$. Daraus folgt nun insbesondere

  $$|x_{n+1} - x_n| \;\leq\; |f(x_n) - f(x_{n-1})| \;\leq\; q|x_n - x_{n-1}|$$

  und durch Induktion über n somit $\quad |x_{n+1} - x_n| \;\leq\; q^n|x_1 - x_0| \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
  Da $\quad x_{n+1} = x_0 + \sum\limits_{k=0}^{n}(x_{k+1} - x_k) \quad$ und die Reihe $\quad \sum\limits_{k=0}^{n}(x_{k+1} - x_k) \quad$ nach dem Majorantenkriterium konvergiert, existiert $\quad \xi := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
  Aus der Abgeschlossenheit von D folgt, dass auch $\xi \in D$ und $\xi = f(\xi)$ erfüllt ist, letzteres ist eine Konsequenz der Stetigkeit von f.
- **Eindeutigkeit**:
  Sei $\nu \in D$ eine weitere Lösung von $\nu = f(\nu)$, so gilt $\quad |\xi - \nu| \;=\; |f(\xi) - f(\nu)| \leq q|\xi - \nu|$.
  Wegen $q < 1$ folgt somit $|\xi - \nu| = 0$, also $\xi = \nu$.
- **Fehlerabschätzung**:

  Aus $\;|x_{n+k+1} - x_{n+k}| \leq q^k|x_{n+1} - x_n|\;$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und $\;\xi - x_n \;=\; \sum\limits_{k=0}^{\infty}(x_{n+k+1} - x_{n+k})$

  folgt sofort

  $$|\xi - x_n| \;\leq\; \sum_{k=0}^{\infty} q^k|x_{n+1} - x_n| \;\leq\; \frac{1}{1-q}|x_{n+1} - x_n| \;\leq\; \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \;\leq\; \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \;\;.$$

(b) F ist eine Kontraktion, wenn $|F(x) - F(y)| \leq L|x-y|$ mit einer Konstanten $L < 1$ gilt. Die Konstante L lässt sich aufgrund des Mittelwertsatzes durch Abschätzen der Ableitung von F ermitteln. Wegen

$$F'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \;=\; \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

liefert dies die Bedingung $L = \max\limits_{x\in I} \frac{|f(x)f''(x)|}{f'(x)^2} < 1$. Darüber hinaus muss F das Intervall I in sich abbilden, was bei $I = [x_0 - r, x_0 + r]$ für $\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| \leq (1-L)r$ wegen

$$|F(x) - x_0| \;\leq\; |F(x) - F(x_0)| + |F(x_0) - x_0| \;\leq\; L|x - x_0| + \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|$$

der Fall ist, da dann $|F(x) - x_0| \leq Lr + (1-L)r = r$ für $|x - x_0| \leq r$ gilt. Also erhält man:

Sei f auf dem Intervall $[x_0 - r, x_0 + r]$ zweimal stetig differenzierbar mit $f' \neq 0$, sei desweiteren $\max\limits_{x \in [a,b]} \frac{|f(x)f''(x)|}{f'(x)^2} =: L < 1$ und $|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}| \leq (1-L)r$, dann besitzt f genau eine Nullstelle in $[x_0 - r, x_0 + r]$ und die Newton-Iteration konvergiert gegen diese Nullstelle.

(c) Die Newton-Iteration $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ lautet hier $x_{n+1} = F(x_n) := x_n - \dfrac{x_n^2 - 1}{2x_n}$.

- Wegen $f'(x) = 2x$ funktioniert das Newton-Verfahren nicht für den Startwert 0.
- Auf $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$ gilt $f'(x) \neq 0$, $f''(x) = 2$ und $f(-2) = 3 > 0$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} < 0$. Somit konvergiert das Newton-Verfahren für Startwerte $x_0 \in [-2, \xi]$ monoton von unten gegen die eindeutige Nullstelle ξ (hier $\xi = -1$) von f in $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$. Also ist der Startwert -2 richtig gewählt, während wir wegen $x_1 = F\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$ und $f(x_1) = \frac{9}{16} > 0$ beim Startwert $x_0 = -\frac{1}{2}$ Glück haben, dass wir nach dem ersten Schritt auf die richtige Seite der Nullstelle springen.
- Analog auf $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

Zusatzaufgabe 13.2: Wählen Sie zwei beliebige Treppenfunktionen $\varphi, \psi \colon [-3, 8]$ aus.

(a) Bestimmen Sie $\varphi_+, \varphi_-, \psi_+, \psi_-$.

(b) Bestimmen Sie die Integrale

$$\int_{-3}^{8} \varphi(t)\, dt\ , \quad \int_{-3}^{8} |\varphi(t)|\, dt\ , \quad \left|\int_{-3}^{8} \varphi(t)\, dt\right|, \quad \int_{-3}^{8} (\varphi(t))^3\, dt\ , \quad \int_{-3}^{8} (3\psi \pm 5\varphi)(t)\, dt$$

sowie

$$\int_{-3}^{8} (\varphi \cdot \psi)(t)\, dt\ .$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 13.2:

Mit Hilfe der für jede beliebige Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ verwendbaren **charakteristischen Funktion**

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A, \end{cases} \tag{13.8}$$

welche manchmal auch als **Indikatorfunktion** bezeichnet wird, können wir eine Treppenfunktion $\varphi \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zu einer Unterteilung $P = \{x_k \mid k = 0, \ldots, n\}$ von $[a,b]$ als eine Linearkombination von charakteristischen Funktionen (13.8) zu (ggf. entarteten) Intervallmengen A in der Form

$$\varphi(x) \ := \ \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \mathbf{1}_{]x_{k-1}, x_k[}(x) \ + \ \sum_{k=0}^{n} d_k \cdot \mathbf{1}_{\{x_k\}}(x)$$

darstellen. Beispielsweise sind $\varphi, \psi \colon [-3, 8] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\varphi(x) \ := \ -3 \cdot \mathbf{1}_{[-2,1]}(x) + 2 \cdot \mathbf{1}_{[2,5]}(x) - 5 \cdot \mathbf{1}_{[6,7]}(x)$$

und

$$\psi(x) \ := \ 7 \cdot \mathbf{1}_{\{-2\}}(x) + 4 \cdot \mathbf{1}_{]-1,3]}(x) - 12 \cdot \mathbf{1}_{]4,6[}(x)\ ,$$

Treppenfunktionen auf $[-3, 8]$.

(a) Für den Positivteil - bzw. Negativteil ergeben sich

$$\begin{aligned} \varphi_+(x) &= 2 \cdot \mathbf{1}_{[2,5]}(x), & \varphi_-(x) &= 3 \cdot \mathbf{1}_{[-2,1]}(x) + 5 \cdot \mathbf{1}_{[6,7]}(x), \\ \psi_+(x) &= 7 \cdot \mathbf{1}_{\{-2\}}(x) + 4 \cdot \mathbf{1}_{]-1,3]}(x), & \psi_-(x) &= 12 \cdot \mathbf{1}_{]4,6[}(x). \end{aligned}$$

(b) Entsprechend (13.2) gelten nun

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{8} \varphi(t)\ dt &= (-3)\cdot(1-(-2)) + 2\cdot(5-2) + (-5)\cdot(7-6) = -9+6-5 = -8,\\ \int_{-3}^{8} |\varphi(t)|\ dt &= |-3|\cdot(1-(-2)) + 2\cdot(5-2) + |-5|\cdot(7-6) = 9+6+5 = 20,\end{aligned}$$

so dass wir hier eine Funktion haben, für die – da sowohl ihr Positivteil als auch auch ihr Negativteil nichttrivial sind – insbesondere $\left|\int_{-3}^{8} \varphi(t)\ dt\right| = 8 < 20 = \int_{-3}^{8} |\varphi(t)|\ dt$ gilt. Weiter erhalten wir entsprechend (13.2) die Integrale

$$\int_{-3}^{8} (\varphi(t))^3\ dt = (-3)^3\cdot(1-(-2)) + 2^3\cdot(5-2) + (-5)^3\cdot(7-6) = -81+24-125 = -182$$

und – aufgrund der Linearität des Integrals – dann ebenso

$$\int_{-3}^{8} (3\psi \pm 5\varphi)(t)\ dt = 3\int_{-3}^{8} \psi(t)\ dt \pm 5\int_{-3}^{8} \varphi(t)\ dt = 3\Big(16-24\Big) \pm 5\cdot(-8) = (-8)\cdot(3\pm 5).$$

Da das Produkt zweier Linearkombinationen charakteristischer Funktionen über

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \mathbf{1}_{A_k}(x)\right)\left(\sum_{\ell=1}^{m} \beta_\ell \cdot \mathbf{1}_{A_\ell}(x)\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m} \alpha_k\cdot\beta_\ell\cdot\mathbf{1}_{A_k\cap A_\ell}$$

wiederum eine Linearkombination charakteristischer Funktionen darstellt, erhalten wir hier

$$(\varphi\cdot\psi)(x) = (-21)\cdot\mathbf{1}_{\{-2\}} + (-12)\cdot\mathbf{1}_{]-1,1]} + 8\cdot\mathbf{1}_{[-2,3]} + (-24)\cdot\mathbf{1}_{]4,5]}$$

und wiederum nach (13.2) somit

$$\int_{-3}^{8} (\varphi\cdot\psi)(t)\ dt = (-12)\cdot(1-(-1)) + 8\cdot(3-(-2)) + (-24)\cdot(5-4) = -24+40-24 = -8.$$

Zusatzaufgabe 13.3:

(a) Finden Sie beschränkte $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\int_0^{1^*} (f+g)(x)dx < \int_0^{1^*} f(x)dx + \int_0^{1^*} g(x)dx.$

(b) Zeigen Sie: Potenzen $|f|^p$, $1 \le p < \infty$, Riemann-integrierbarer Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sind wieder Riemann-integrierbar.

(c) Zeigen Sie: Produkte Riemann-integrierbarer Funktionen sind wieder Riemann-integrierbar.

(d) Geben Sie für eine monoton wachsende Funktion $f\colon [1,n] \to \mathbb{R}$ die Riemannsche Untersumme zur äquidistanten Zerlegung $1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$ des Intervalls $[1,n]$ an.

Lösung zu Zusatzaufgabe 13.3:

(a) Wählen wir beispielsweise $f = \mathbf{1}_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ und $g = \mathbf{1}_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}$, so ist $f+g = \mathbf{1}_{[0,1]}$ und daher

$$\int_0^{1^*} (f+g)(x)dx = 1 < 1+1 = \int_0^{1^*} f(x)dx + \int_0^{1^*} g(x)dx\ .$$

(b) Aufgrund der nach Satz 18.5 gültigen Linearität (d.h. dass insbesondere mit f und g auch $\lambda f \pm \mu g$ Riemann-integrierbar ist) und da mit f auch f_+ und f_- Riemann-integrierbar sind (und somit auch $|f| = f_+ + f_-$), genügt es, die Riemann-Integrierbarkeit von $|f|^p$ für den Fall $0 \le f \le 1$ zu beweisen.

Aufgrund der Riemann-Intergrierbarkeit von f finden wir nach Satz 18.2 zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen φ, ψ mit $0 \le \varphi \le f \le \psi \le 1$ und

$$0 \le \int_a^b (\psi - \varphi)(x)dx \le \frac{\varepsilon}{p} \quad .$$

Es sind weiterhin auch φ^p und ψ^p Treppenfunktionen, für die aufgrund der strengen Monotonie der Potenz ebenso $0 \le \varphi^p \le f^p \le \psi^p \le 1$ gelten. Wegen $(x^p)' = px^{p-1}$ folgt nun mit Hilfe des Mittelwertsatzes (Corollar zu Satz 16.2) – hier angewendet auf die Funktion x^p eingeschränkt auf das Intervall $[0,1]$ – nun

$$0 \le \psi^p - \varphi^p \le p(\psi - \varphi) \quad \Longrightarrow \quad 0 \le \int_a^b \left(\psi^p - \varphi^p\right)(x)dx \le p\int_a^b \left(\psi - \varphi\right)(x)dx \le p \cdot \frac{\varepsilon}{p} \le \varepsilon \quad ,$$

also wiederum nach Satz 18.2 die Riemann-Integrierbarkeit von f^p für $0 \le f \le 1$.

(c) Wegen $|f|^2 = f^2$ und mit Hilfe der Linearität des Riemann-Integrals folgt für Riemann-integrierbare Funktionen f, g, dass $fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$ Riemann-integrierbar ist.

(d) Da f monoton wächst, gilt $\inf\limits_{x \in [k,k+1]} f(x) = f(k)$. Wegen $(k+1) - k = 1$ lautet somit die Untersumme daher

$$\mathcal{US}(f; \{1, \ldots, n-1, n\}) \;=\; \sum_{k=1}^{n-1} \left(\inf_{x \in [k,k+1]} f(x)\right) ((k+1) - k) \;=\; \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \; .$$

Zusatzaufgabe 13.4:

(a) Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf dem Intervall $[0,10]$ bezüglich der äquidistanten Unterteilung $\left(x_k^{(n)} = \frac{10k}{n}\right)_{k=0,\ldots,n}$ die Riemannsche Untersumme

$$U(n,f) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \left(\inf_{]x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}[} f(x)\right) \cdot (x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) \tag{13.9}$$

und die analog definierte Riemannsche Obersumme $O(n,f)$ der Funktion $f(x) = 2^x$.

(b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^{10} 2^x \, dx$ als den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} U(n,f)$ der entsprechend (13.9) gebildeten n-ten Untersummen. Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} O(n,f)$?

Lösung zu Zusatzaufgabe 13.4:

Sei $f(x) = 2^x$. Wir wählen die äquidistante Zerlegung $\mathcal{Z}_n = \left(x_k^{(n)}\right)_{k=0}^{n} = \left(\frac{10k}{n}\right)_{k=0}^{n}$. Da es sich um eine monoton wachsende Funktion handelt, folgt für die Untersumme

$$US(\mathcal{Z}_n, f) \;=\; \sum_{k=1}^{n} f\left(x_{k-1}^{(n)}\right) \cdot \left(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}\right) \;=\; \frac{10}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{\frac{10k}{n}} \;=\; \frac{10}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (2^{\frac{10}{n}})^k \;=\; \frac{10}{n}\, \frac{2^{10} - 1}{2^{\frac{10}{n}} - 1},$$

und mittels $\left(2^{\frac{10}{x}}\right)' \;=\; \left(\mathrm{e}^{\ln 2^{\frac{10}{x}}}\right)' \;=\; \mathrm{e}^{\ln 2^{\frac{10}{x}}} \left(-\frac{10}{x^2} \cdot \ln 2\right) \;=\; -\,2^{\frac{10}{x}} \cdot \frac{10}{x^2} \cdot \ln 2$ ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} US(\mathcal{Z}_n, f) \;=\; (2^{10} - 1) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{10}{n}}{2^{\frac{10}{n}} - 1} \;=\; (2^{10} - 1) \cdot \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{2^x - 1} \;\overset{\text{L'Hospital}}{=}\; \frac{2^{10} - 1}{\ln 2} \quad .$$

Entsprechend erhalten wir als Obersumme

$$OS(\mathcal{Z}_n, f) \;=\; \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^{(n)}\right) \cdot \left(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}\right) \;=\; \frac{10 \cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (2^{\frac{10}{n}})^k \;=\; \frac{10 \cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n}\, \frac{2^{10} - 1}{2^{\frac{10}{n}} - 1}.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{10}{n}} = 1$, folgt analog $\lim\limits_{n\to\infty} OS(\mathcal{Z}_n, f) \;=\; \frac{2^{10}-1}{\ln 2}$.

Zusatzaufgabe 13.5: Zerlegen Sie die folgenden rationalen Funktionen in Partialbrüche:

(a) $\dfrac{1}{x^3-x}$, (b) $\dfrac{1}{1+x^4}$, (c) $\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$, (d) $\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$, (e) $\dfrac{1}{x^2(x+1)}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 13.5:

(a) Da $x^3-x=x(x+1)(x-1)$ die einfachen Nullstellen $x_1=0, x_2=1, x_3=-1$ besitzt, ergibt sich für die rationale Funktion $h(x)=\dfrac{1}{x^3-x}=\dfrac{1}{x(x+1)(x-1)}$ der Definitionsbereich $\mathbb{R}\setminus\{0,1,-1\}$ und für die Partialbruchzerlegung der Ansatz

$$h(x)=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x-1}+\frac{a_3}{x+1}\ ,$$

deren Koeffizienten wir mittels Koeffizientenvergleich oder einfacher mit $a_i=\lim\limits_{x\to x_i}(x-x_i)h(x)$, $i=1,2,3$ erhalten:

$$a_1 = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(x+1)(x-1)} = -1\ ,\quad a_2 = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{2}\ ,\quad a_3 = \lim_{x\to -1}\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{2}\ .$$

Somit ergibt sich die Partialbruchzerlegung $h(x)=\frac{-1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$.

(b) Da $1+x^4$ keine reellen Nullstellen besitzt, ergibt sich für $g(x)=\dfrac{1}{1+x^4}$ der Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Unter Verwendung von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}=-1$ sowie $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ kann der Nenner wegen

$$\begin{aligned}
x^4+1 &= \left(x^2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)\left(x^2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}\right) = \left(x+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)\left(x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)\left(x+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)\left(x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)\\
&= \left(\left(x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)\left(x+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)\right)\left(\left(x+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)\left(x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)\right)\\
&= \left(x^2-2x\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2}+1\right)\left(x^2+2x\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2}+1\right) = (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)
\end{aligned}$$

in $1+x^4=(x^2-\mathrm{i})(x^2+\mathrm{i})=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$ zerlegt werden. Mit dem Ansatz

$$g(x) = \frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)} = \frac{E_1x+F_1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{E_2x+F_2}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
1 &= (E_1x+F_1)(x^2+\sqrt{2}x+1)+(E_2x+F_2)(x^2-\sqrt{2}x+1)\\
&= x^3(E_1+E_2)+x^2(E_1\sqrt{2}+F_1-E_2\sqrt{2}+F_2)+x(E_1+F_1\sqrt{2}+E_2-F_2\sqrt{2})+(F_1+F_2)
\end{aligned}$$

Somit ergeben sich nacheinander $E_1=-E_2$, $F_1=1-F_2$ und

$$x^2(2E_1\sqrt{2}+1)+x(-2F_2\sqrt{2}+\sqrt{2})=0 \qquad\Longrightarrow\qquad E_1=\frac{-1}{2\sqrt{2}}\ ,\quad E_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ ,\quad F_1=F_2=\frac{1}{2}\ ,$$

also insgesamt die Partialbruchdarstellung

$$g(x) = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\ .$$

(c) Die Funktion $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$ besitzt die doppelte Polstelle -1. Somit ist der Definitionsbereich $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ und wir verwenden für die Partialbruchzerlegung den Ansatz

$$f(x) = \frac{A_{1,1}}{x+1}+\frac{A_{1,2}}{(x+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}\ .$$

Nach der Grenzwertmethode erhalten wir nacheinander

$$\begin{aligned}
A_{1,2} &= \lim_{x\to-1}(x+1)^2 f(x) = \lim_{x\to-1}\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}\,,\\
A_{1,1} &= \lim_{x\to-1}(x+1)\left(f(x)-\frac{A_{1,2}}{(x+1)^2}\right) = \lim_{x\to-1}\left((x+1)f(x)-\frac{A_{1,2}}{x+1}\right)\\
&= \lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}-\frac{1}{2(x+1)}\right) = \lim_{x\to-1}\frac{1-x^2}{2(x+1)(x^2+1)} = \lim_{x\to-1}\frac{1-x}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Somit folgt nun für E und F die Bedingung

$$\frac{1}{2}(x+1)(x^2+1)+\frac{1}{2}(x^2+1)+(Ex+F)(x+1)^2 = 1 \qquad\Longrightarrow\qquad E=-\frac{1}{2}\,,\quad F=0$$

und wir erhalten die Partialbruchzerlegung $\qquad f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{x}{x^2+1}\right).$

(d) Für die Funktion $r_4 = \frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ liefert der Ansatz der Partialbruchzerlegung

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

den Koeffizientenvergleich $A(x-3)+B(x-2)=2x-1$ mit dem linearen Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{rcr} A+B &=& 2,\\ -3A-2B &=& -1 \end{array}\right. \qquad\Longrightarrow\qquad A=-3,\ B=5,$$

also erhalten wir

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}\,.$$

(e) Mit dem Ansatz

$$r_6 = \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1} \qquad (\star)$$

erhalten wir zunächst C, indem wir die gesamte Gleichung $(\star)$ mit $(x+1)$ multiplizieren und $x=-1$ einsetzen (dann fallen nämlich die Terme mit A und B weg, so dass auf der rechten Seite nur noch C stehen bleibt):

$$C = \lim_{x\to-1}(x+1)r_6 = \lim_{x\to-1}\frac{1}{x^2} = 1\,.$$

Genauso erhalten wir B, indem wir die gesamte Gleichung $(\star)$ mit x^2 multiplizieren und anschließend $x=0$ einsetzen (dann fallen auf der rechte Seite die Terme mit A und C weg, so dass nur noch B stehen bleibt):

$$B = \lim_{x\to0}x^2 r_6 = \lim_{x\to0}\frac{1}{x+1} = 1\,.$$

Da Gleichung $(\star)$ zu $r_6-\frac{B}{x^2} = -\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{C}{x+1}$ äquivalent ist, erhalten wir A, wenn wir dies mit x multiplizieren und wiederum $x=0$ einsetzen (da dann der Term mit C wegfällt und auf der rechten Seite tatsächlich nur noch A stehenbleibt):

$$A = \lim_{x\to0}x\left(r_6-\frac{B}{x^2}\right) = \lim_{x\to0}\frac{-1}{x+1} = -1\,.$$

Somit ergibt sich

$$r_6 = \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\,.$$

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 14

Treppenfunktionen, Riemann-Integral - Teil II

- **Satz 18.7** [**Mittelwertsatz der Integralrechnung**]:

$$\Big(f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig } \;\wedge\; g \geq 0\Big) \implies \exists \xi \in]a,b[\;:\; \int_a^b f(x)g(x)dx \;=\; f(\xi)\int_a^b g(x)dx \;.$$

Bemerkung: Im Fall $g \equiv 1$ bedeutet dies $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

- **Satz 18.8:** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt $\lim\limits_{\mu(\mathcal{Z})\to 0} \mathcal{S}(\mathcal{Z}, f) = \int_a^b f(x)dx$.
- **Satz 18.9:** Gegeben seien $a < b < c$ und eine Funktion $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f \text{ Riemann-integrierbar} \iff f\Big|_{[a,b]} \text{ und } f\Big|_{[b,c]} \text{ Riemann-integrierbar} \;.$$

Ist eine (und damit auch die andere) der beiden Seiten wahr, gilt

$$\int_a^c f(x)dx \;=\; \int_a^b f(x)dx \;+\int_b^c f(x)dx \;. \tag{14.1}$$

- **Definition:** Wir setzen $\displaystyle\int_a^a f(x)dx \;:=\; 0$ und $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \;:=\; -\int_b^a f(x)dx$ im Fall $b < a$.

Stammfunktion, Newton-Integral

- **Definition** [**Stammfunktion**]: Eine differenzierbare Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ Intervall) heißt **Stammfunktion/primitive Funktion** zu $f\colon I \to \mathbb{R}$ (auf I), falls $F' = f$ auf I gilt.

Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung

- **Satz 19.2:** Sind $F, G\colon I \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f\colon I \to \mathbb{R}$, so ist $F - G$ konstant.
- **Satz 19.1/19.3**[**Hauptsatz der Diff.- & Integralrechnung**]: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $c \in I$.

  (1) Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, so besitzt f eine Stammfunktion, z.B., $F_c(x) := \displaystyle\int_c^x f(t)dt$.

  (2) Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und F eine Stammfunktion von f auf I, so gilt

$$\forall a, b \in I\colon \int_a^b f(x)dx \;=\; F(x)\Big|_a^b \;:=\; F(b) - F(a) \;. \tag{14.2}$$

Bemerkungen:

(a) Aus historischen Gründen werden Funktionen, für welche eine Stammfunktion existiert, manchmal auch **Newton-integrierbar** genannt und der Begriff der Stammfunktion F von f synonym zum Begriff des unbestimmten (bzw. **Newton**-) Integrals $\int f(x)dx$ verwendet.

(b) Jedoch folgt weder aus der Riemann-Integrierbarkeit die Newton-Integrierbarkeit (Existenz einer Stammfunktion) – vgl. die sogenannte Darboux-Eigenschaft differenzierbarer Funktionen und betrachte nichtkonstante Treppenfunktionen – noch folgt aus der Newton-Integrierbarkeit die Riemann-Integrierbarkeit, da auch unbeschränkte Funktionen existieren, welche eine Stammfunktion besitzen.
Bsp.: Mit der Stetigkeit von $\frac{1}{\cdot}\colon\;]0,1] \to \mathbb{R}$ folgt nach Satz 19.1 Newton-integrierbar, aufgrund der Unbeschränktheit gilt jedoch $\nexists \varphi \in \mathcal{T}[0,1]\colon \big(\forall x \in\,]0,1]\colon \varphi(x) \geq \frac{1}{x}\big)$.

(c) Satz 19.3 ist also genau auf die Riemann-integrierbaren Funktionen anwendbar, die gleichzeitig Newton-integrierbar sind.

Substitutionsregel, Partielle Integration, Riemannsches Lemma

- **Satz 19.4 [Substitutionsregel]:** Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\varphi([a,b]) \subset I$, so gilt
$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t)dt \;=\; \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \;. \tag{14.3}$$
- Ist $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion, so heißt
$$x \mapsto R(\mathrm{e}^{ax}) \tag{14.4}$$
eine **rationale Funktion in Exponentialtermen**. Die Integration von Funktionen der Gestalt (14.4) lässt sich durch die Substitution $t := \varphi(x) := \mathrm{e}^{ax}$ auf die Integration rationaler Funktionen zurückführen.
- Sind $P(x,y)$ und $Q(x,y)$ Polynome in zwei Variablen und damit $R(x,y) = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ eine rationale Funktion in zwei Variablen, so heißt
$$x \mapsto R(\sin(x), \cos(x)) \tag{14.5}$$
eine **rationale Funktion in Sinus und Cosinus**. Die Integration von Funktionen der Gestalt (14.5) lässt sich durch die Substitution $t := \varphi(x) := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ auf die Integration rationaler Funktionen zurückführen (vgl. Zusatzaufgabe 10.3 (d) und 14.7 (a)). Ist (14.5) sogar π-periodisch, dann kommen wir schon mit der Substitution $t := \varphi(x) := \tan(x)$ aus (Zusatzaufgabe 14.7 (c)).

- Ist $R(x,y) = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ eine rationale Funktion in zwei Variablen, so können wir die Integration von Funktionen der Gestalt
$$x \mapsto R(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c}) \;, \tag{14.6}$$
welche rationale Funktionen in x und einer Wurzel aus dem Quadrat von x genannt werden, durch quadratische Ergänzung auf die Integration von Funktionen der Gestalt
$$x \mapsto R(x, \sqrt{x^2+1}) \;, \quad x \mapsto R(x, \sqrt{x^2-1}) \quad \text{oder} \quad x \mapsto R(x, \sqrt{1-x^2}) \tag{14.7}$$
zurückführen, deren Integration wiederum durch Substitution von $x = \sinh(t)$, $x = \pm\cosh(t)$ bzw. $x = \pm\cos(t)$ auf die Integration rationaler Funktionen in Exponentialtermen bzw. in Sinus und Cosinus zurückgeführt werden kann. Eine weitere Substitution findet sich in ZA 14.2 (b).
- **Satz 19.5 [Partielle Integration]:** Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt
$$\int_a^b f(x)g'(x)dx \;=\; f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{14.8}$$
- **Satz 19.6 [Riemannsches Lemma]:** Für $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_a^b f(x)\sin(nx)dx = 0$.

Existenz uneigentlicher Integrale

- Wir sprechen jeweils von der **Existenz uneigentlicher Riemann-Integrale**, falls eine der folgenden Definitionen möglich ist:
  (a) Ist $f\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ für jedes $u > a$ über $[a,u]$ Riemann-integrierbar, existiert $\lim\limits_{u\to\infty} \displaystyle\int_a^u f(t)\,dt$ und ist endlich, so definieren wir $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{u\to\infty} \int_a^u f(t)\,dt$.
  (b) Ist $f\colon]a,b] \to \mathbb{R}$ über jedem Intervall $[u,b]$ mit $a < u < b$ Riemann-integrierbar und existiert $\lim\limits_{u\searrow a} \displaystyle\int_u^b f(t)dt$ (und ist endlich), so definieren wir $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{u\searrow a} \int_u^b f(t)dt$.
  (c) Analog sind uneigentliche Integrale für auf $]-\infty, b]$ und $[a,b[$ gegebene Funktionen definiert.
  (d) Der Fall einer auf $]a,b[$ definierten Funktion wird auf die Fälle $]a,c]$ und $[c,b[$ zurückgeführt, wobei die entsprechenden uneigentlichen Integrale für jedes $c \in]a,b[$ existieren müssen.

- **Satz 20.1 [Integralvergleichskriterium für Reihen]**: Sei $f\colon [1,\infty[\to [0,\infty[$ eine monoton fallende Funktion. Dann gilt:
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty \,.$$

Zusatzaufgabe 14.1:

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung die **Trapezregel**:
Für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b)) - f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{12}$$

(b) Begründen Sie knapp, warum die Funktion $f(x) := \max(x^3, x^2, x)$ auf jedem beliebigen Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ eine Stammfunktion besitzt.
Finden Sie eine Stammfunktion von f und bestimmen Sie mit deren Hilfe das Integral $\displaystyle\int_{-6}^{3} f(x)\,dx$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 14.1:

(a) Sei $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x-a)(b-x)$. Mit $\varphi(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ sowie $\varphi'(x) = \frac{a+b}{2} - x$ und $\varphi''(x) = -1$ ist
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= -\int_a^b \varphi''(x)f(x)dx = -\varphi'(x)f(x)\Big|_a^b + \int_a^b \varphi'(x)f'(x)dx \\ &= \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \int_a^b \varphi(x)f''(x)dx \,.\end{aligned}$$
Nach dem Mittelwertsatz existiert nun ein $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b \varphi(x)f''(x)dx = f''(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx = f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{12}$.

(b) Da eine Fallunterscheidung $f(x) = \max(x^3,x^2,x) = \begin{cases} x^2\,, & \text{für } x<0, \\ x\,, & \text{für } x\in[0,1], \\ x^3\,, & \text{für } x>1, \end{cases}$ liefert, ist f wegen
$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x\nearrow 0} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\searrow 1} f(x) = 1 = \lim_{x\nearrow 1} f(x)$$
auf $\mathbb{R}$ stetig, so dass f nach dem ersten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf jedem Intervall (mindestens) eine Stammfunktion besitzt. Da eine Stammfunktion differenzierbar und somit insbesondere auch stetig sein muss, ist jede stetige Funktion aus der Funktionenschar
$$F_{a,b,c}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + a\,, & \text{für } x<0, \\ \frac{1}{2}x^2 + b\,, & \text{für } x\in[0,1], \\ \frac{1}{4}x^4 + c\,, & \text{für } x>1, \end{cases}$$
eine Stammfunktion von f. Aus den Bedingungen
$$\lim_{x\searrow 0} F_{a,b,c}(x) = b = a = \lim_{x\nearrow 0} F_{a,b,c}(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\searrow 1} F_{a,b,c}(x) = \frac{1}{4}+c = \frac{1}{2}+b = \lim_{x\nearrow 1} F_{a,b,c}(x)$$
erhalten wir für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Lösung $(a,b,c) = \left(t,t,\frac{1}{4}+t\right)$. Somit sind genau die Funktionen $F_{t,t,\frac{1}{4}+t}(x)$ Stammfunktionen von f. Nach dem zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt sich mit $F := F_{0,0,\frac{1}{4}}$ sowie $\beta = 3$ und $\alpha = -6$ nun
$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{1}{4}\left(\beta^4+1\right) - \frac{1}{3}\alpha^3 = \frac{1}{4}\left(3^4+1\right) - \frac{1}{3}(-6)^3 = \frac{41}{2} + 72 = \frac{185}{2}\,.$$

Zusatzaufgabe 14.2: (a) Finden Sie eine Stammfunktion von $\dfrac{2e^{3x}+5e^{2x}-3e^x}{e^{3x}+e^{2x}-e^x-1}$. **Tipp:** A 14.1 (a).

(b) Sei $R(u,v)$ eine rationale Funktion in zwei Variablen, $a,b\in\mathbb{R}$ und $n\in\mathbb{N}$. Führen Sie das Integral $\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})\,dx$ mittels geeigneter Substitution auf das Integral einer rationalen Funktion in einer Variablen zurück.

Wenden Sie dies auf das unbestimmte Integral $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{2x+1}}\,dx$ an.

(c) Finden Sie eine Stammfunktion von $\dfrac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}$

(d) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-1}^{3}(x^2+10x+9)\sqrt{x+1}\,dx$. (e) Berechnen Sie $\displaystyle\int_1^2\frac{\ln(x)}{x^n}\,dx$ für $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 14.2:

(a) Die Substitutionsregel $\int(f\circ\varphi)(x)\cdot\varphi'(x)dx=\int f(t)dt$ mit $t=\varphi(x)=\varphi'(x)=e^x$ liefert zunächst

$$\int\frac{2e^{3x}+5e^{2x}-3e^x}{e^{3x}+e^{2x}-e^x-1}\,dx \;=\; \int\frac{2e^{2x}+5e^x-3}{e^{3x}+e^{2x}-e^x-1}\cdot e^x\,dx \;=\; \int\frac{2t^2+5t-3}{t^3+t^2-t-1}\,dt\;.$$

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{2t^2+5t-3}{t^3+t^2-t-1} \;=\; \frac{2t^2+5t-3}{(t+1)^2(t-1)} \;=\; \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{(t+1)^2}$$

liefert wegen $A=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{2t^2+5t-3}{(t+1)^2}=1$ und $C=\lim\limits_{t\to-1}\dfrac{2t^2+5t-3}{t-1}=3$ und schließlich

$$B \;=\; \lim_{t\to-1}\left(\frac{2t^2+5t-3}{(t+1)(t-1)}-\frac{3}{t+1}\right) \;=\; \lim_{t\to-1}\frac{2t(t+1)}{(t+1)(t-1)} \;=\; \lim_{t\to-1}\frac{2t}{t-1} \;=\; 1$$

nun insgesamt

$$\begin{aligned}\int\frac{2e^{3x}+5e^{2x}-3e^x}{e^{3x}+e^{2x}-e^x-1}\,dx \;&=\; \int\frac{2t^2+5t-3}{(t+1)^2(t-1)}\,dt \;=\; \int\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}+\frac{3}{(t+1)^2}\right)dt\\ &=\; \ln(t^2-1)-\frac{3}{t+1} \;=\; \ln(e^{2x}-1)-\frac{3}{e^x+1}\;.\end{aligned}$$

(b) Mit der Substitution $y:=\sqrt[n]{ax+b}$, d.h. $x=\varphi(y)=\dfrac{y^n-b}{a}$ und $\varphi'(y)=\dfrac{n}{a}y^{n-1}$, gilt

$$\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})\,dx=\frac{n}{a}\int R\left(\frac{y^n-b}{a},y\right)y^{n-1}\,dy\,.$$

Mit $n=3$, $x=\varphi(t)=\dfrac{t^3-1}{2}$, $\varphi'(t)=\dfrac{3}{2}t^2$ folgt

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{2x+1}}\,dx \;&=\; \int\frac{\left(\frac{t^3-1}{2}\right)^2}{t}\cdot\frac{3}{2}t^2\,dt=\frac{3}{8}\int(t^7-2t^4+t)\,dt\\ &=\; \frac{3}{8}\left(\frac{(\sqrt[3]{2x+1})^8}{8}-2\frac{(\sqrt[3]{2x+1})^5}{5}+\frac{(\sqrt[3]{2x+1})^2}{2}\right)\;.\end{aligned}$$

(c) Mit der Substitution $x = \varphi(y) = y^2 - 1$, $\varphi'(y) = 2y$ folgt

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx &= \int \frac{y+2}{y^4-y}\,2y\,dy = \int \frac{2y+4}{(y-1)(y^2+y+1)}\,dy \\
&= \int \left(\frac{2}{y-1} - \frac{2y+1}{y^2+y+1} - \frac{1}{y^2+y+1}\right) dy \\
&= 2\ln(y-1) - \ln(y^2+y+1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)} dy \\
&= \ln\left(\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+\sqrt{x+1}+2}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}\right) .
\end{aligned}$$

(d) Mit der Substitution $y := x + 1$ erhält man

$$\int_0^4 (y^2+8y)\sqrt{y}\,dy = \int_0^4 (y^{\frac{5}{2}} + 8y^{\frac{3}{2}})\,dy = \left(\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}} + \frac{16}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^4 = \frac{2^8}{7} + \frac{2^9}{5} = 2^8 \cdot \frac{19}{35}.$$

(e) Mit partieller Integration ergibt sich

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^n}\,dx = -\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}}\Big|_1^2 + \frac{1}{n-1}\int_1^2 \frac{1}{x^n}\,dx = -\frac{\ln(2)}{(n-1)2^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2 2^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)^2} \quad .$$

Zusatzaufgabe 14.3:

(a) Sei $f\colon\,]a,b[\, \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

  (i) Finden Sie eine Stammfunktion von $f \cdot f'$.

  (ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, fest. Finden Sie eine Stammfunktion von $f^n \cdot f'$.

  (iii) Es gelte nun noch zusätzlich $f > 0$. Finden Sie eine Stammfunktion von $\dfrac{f'}{f}$.

(b) Sei $f\colon\,]a,b[\, \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit echt positiver Ableitung und einer Stammfunktion F. Berechnen Sie eine Stammfunktion zur Umkehrfunktion f^{-1}.

Lösung zu Zusatzaufgabe 14.3:

(a) (i) $F_c(x) = \displaystyle\int f(x)\cdot f'(x)dx = \int y dy = \frac{1}{2}y^2 + c = \frac{1}{2}\left(f(x)\right)^2 + c$.

  (ii) $F_c(x) = \displaystyle\int \left(f(x)\right)^n \cdot f'(x)dx = \int y^n dy = \frac{1}{n+1}y^{n+1} + c = \frac{1}{n+1}\left(f(x)\right)^{n+1} + c$.

  (iii) $F_c(x) = \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{y}dy = \ln(y) + c = (\ln\circ f)(x) + c$.

(b) Mittels Substitution und anschließender partieller Integration und Rücksubstitution erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int f^{-1}(y)dy &= \int \left(f^{-1}\circ f\right)(x)\cdot f'(x)dx = \int x f'(x)dx \\
&= x f(x) - \int 1\cdot f(x)dx = x f(x) - F(x) = f^{-1}(y)\cdot y - (F\circ f^{-1})(y) .
\end{aligned}$$

Probe:

$$\left(y f^{-1}(y) - (F\circ f^{-1})(y)\right)' = f^{-1}(y) + \frac{y}{\left(f'\circ f\right)(y)} - (f\circ f^{-1})(y)\cdot\frac{1}{\left(f'\circ f\right)(y)} = f^{-1}(y) .$$

Zusatzaufgabe 14.4: Berechnen Sie die folgenden Integrale und führen Sie ggf. die Probe durch:

(a) $\int x\sin(x^2)\,dx$, (b) $\int \tan(x)\,dx$ (c) $\int x\sin(x)\,dx$, (d) $\int \mathrm{e}^x\sin(x)\,dx$, (e) $\int (\sin(x))^2\,dx$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 14.4:

(a) Mit der Substitution $z = \varphi(x) = x^2$, d.h. $\frac{dz}{dx} = \varphi'(x) = 2x$, ergibt sich

$$\int x\sin(x^2)\ dx = \int \frac{\sin(z)}{2}dz = -\frac{\cos(z)}{2} + C = -\frac{\cos(x^2)}{2} + C\ .$$

(b) Wegen $(\ln\circ f)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ erhalten wir $\int \tan(x)\ dx \;=\; -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\ dx \;=\; -\ln(\cos(x))$.

(c) Partielle Integration liefert $\int x\sin(x)\ dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\ dx = \sin(x) - x\cos(x) + C$.

(d) Zweimalige Anwendung von partieller Integration mit jeweils $u' = u = \mathrm{e}^x$ und $v = \sin(x)$, $v' = \cos(x)$ bzw. $v = \cos(x)$, $v' = -\sin(x)$ ergibt

$$\int \mathrm{e}^x \sin(x)\ dx \;=\; \mathrm{e}^x\sin(x) - \int \mathrm{e}^x\cos(x)\ dx \;=\; \mathrm{e}^x\sin(x) - \left[\mathrm{e}^x\cos(x) + \int \mathrm{e}^x\sin(x)\ dx\right]$$

und nach Umstellen daher $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\sin(x)\ dx \;=\; \frac{\mathrm{e}^x\left(\sin(x)-\cos(x)\right)}{2}$.

(e) Partielle Integration mit $u'(x) = \sin(x), u(x) = -\cos(x)$ und $v(x) = \sin(x), v'(x) = \cos(x)$ liefert

$$\int (\sin(x))^2\ dx \;=\; -\sin(x)\cos(x) + \int (\cos(x))^2\ dx \;=\; -\sin(x)\cos(x) + \int (1-(\sin(x))^2)\ dx$$

Umstellen führt zu $\displaystyle\int (\sin(x))^2\ dx \;=\; \frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2} + C$

Zusatzaufgabe 14.5: Finden Sie eine Stammfunktion von

(a) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}\ dx$ für $k \in \mathbb{N}$.   (b) $\displaystyle\int \frac{Ex+F}{(x^2+px+q)^\ell}\ dx$ für $\ell \in \mathbb{N}$, falls $q - \frac{p^2}{4} > 0$ gilt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 14.5:

(a) Bei $k = 1$ gilt $\displaystyle\int \frac{A}{x-\alpha} = A\ln(x-\alpha)$, bei $k \geq 2$ dagegen $\displaystyle\int \frac{A}{(x-\alpha)^k} = \frac{A}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}}$.

(b) Wegen $D := q - \frac{p^2}{4} > 0$ besitzt $x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 + D \geq D$ keine reellen Nullstellen.[17] Wegen $Ex+F \;=\; Ex + \frac{pE}{2} - \frac{pE}{2} + F \;=\; \frac{E}{2}(2x+p) + \left(F - \frac{pE}{2}\right)$ erhalten wir im Fall

- $\boxed{\ell = 1}$
$$\begin{aligned}\int \frac{Ex+F}{x^2+px+q}dx &= \frac{E}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(F - \frac{pE}{2}\right)\int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+D}dx \\ &= \frac{E}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(F-\frac{pE}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{D}}\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}\right) + C,\end{aligned}$$

  wobei wir für das erste Integral die Substitutionsmethode mit $t = \varphi(x) = x^2+px+q$ und folglich $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x) = 2x+p$ benötigten. Für das zweite Integral brauchten wir, dass

$$\frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+D} \;=\; \frac{1}{D}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}\right)^2+1} \qquad \text{und} \qquad \int \frac{1}{x^2+1}\ dx \;=\; \arctan(x)$$

  gilt, sowie die Substitutionsmethode mit $t = \varphi(x) = \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}$ und folglich $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{D}}$.

---

[17] **Achtung**: D ist hier genau das Negative der Diskriminanten $\frac{p^2}{4} - q$, welche ihrerseits im Fall, dass das Polynom x^2+px+q zwei echt komplexe Nullstellen besitzt, negativ ist. Insbesondere gilt dann $x^2+px+q > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- $\boxed{\ell \geq 2}$
$$\begin{aligned}\int \frac{Ex+F}{(x^2+px+q)^\ell}\,dx &= \frac{E}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^\ell}\,dx + \left(F-\frac{pE}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+px+q)^\ell}\,dx \\ &= \frac{\frac{E}{2(1-\ell)}}{(x^2+px+q)^{\ell-1}} + \left(F-\frac{pE}{2}\right)\int \frac{1}{\left((x+\frac{p}{2})^2+D\right)^\ell}\,dx,\end{aligned}$$

wobei wir für das erste Integral die Substitutionsmethode mit $t=\varphi(x)=x^2+px+q$ und folglich $\frac{dt}{dx}=\varphi'(x)=2x+p$ benötigten. Das zweite Integral lässt sich mit Hilfe der Formel

$$\int \frac{1}{(t^2+D)^\ell}\,dt = \frac{1}{2(\ell-1)D}\left[\frac{t}{(t^2+D)^{\ell-1}} + (2\ell-3)\int \frac{1}{(t^2+D)^{\ell-1}}\,dt\right] \tag{14.9}$$

sowie der Substitutionsmethode mit $t=\varphi(x)=x+\frac{p}{2}$ und $\frac{dt}{dx}=\varphi'(x)=1$ rekursiv für alle ganzzahligen $\ell \geq 2$ bestimmen, denn Ableiten der rechten Seite von (14.9) liefert

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2(\ell-1)D}\left[\frac{(t^2+D)^{\ell-1}-2(\ell-1)t^2(t^2+D)^{\ell-2}}{(t^2+D)^{2(\ell-1)}} + (2\ell-3)\frac{1}{(t^2+D)^{\ell-1}}\right] \\ &= \frac{1}{2(\ell-1)D}\left[\frac{(t^2+D)-2(\ell-1)t^2}{(t^2+D)^\ell} + (2\ell-3)\frac{(t^2+D)}{(t^2+D)^\ell}\right] \\ &= \frac{1}{(2\ell-2)D}\left[\frac{(2\ell-2)(t^2+D)-(2\ell-2)t^2}{(t^2+D)^\ell}\right] = \frac{1}{(t^2+D)^\ell}\,.\end{aligned}$$

Beispielsweise für $\ell=2$ ergibt sich

$$\int \frac{Ex+F}{(x^2+px+q)^2}\,dx = \frac{-\frac{E}{2}}{x^2+px+q} + \left(F-\frac{pE}{2}\right)\cdot\frac{1}{2D}\left[\frac{x+\frac{p}{2}}{x^2+px+q} + \frac{1}{\sqrt{D}}\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}\right)\right]$$

Zusatzaufgabe 14.6: Zerlegen Sie $\dfrac{7x^4+12x^3-4x^2+4x+8}{x^3+3x+14}$ und integrieren Sie anschließend.

Lösung zu Zusatzaufgabe 14.6:

Der Grad des Zählerpolynoms ist größer als der Grad des Nennerpolynoms, daher führen wir zunächst eine Polynomdivision durch, welche als Ergebnis

$$\frac{7x^4+12x^3-4x^2+4x+8}{x^3+3x+14} = 7x+12-5\cdot\frac{5x^2+26x+32}{x^3+3x+14}$$

besitzt. Da Zähler- und Nennerpolynom im Restterm jeweils die Nullstelle $x=-2$ besitzen, so dass per Polynomdivision jeweils eine weitere Faktorisierung in $5x^2+26x+32=(x+2)(5x+16)$ bzw. $x^3+3x+14=(x+2)(x^2-2x+7)$ möglich ist, erhalten wir wegen

$$\frac{5x+16}{x^2-2x+7} = \frac{5}{2}\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+7} + \frac{5+16}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{6}}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}$$

insgesamt unter mehrfacher Verwendung der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int \frac{7x^4+12x^3-4x^2+4x+8}{x^3+3x+14}dx &= \int 7x\,dx + \int 12\,dx - 5\int \frac{5x+16}{x^2-2x+7}\,dx \\ &= \frac{7}{2}x^2+12x-\frac{25}{2}\ln(x^2-2x+7)-\frac{105}{\sqrt{6}}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{6}}\right)\,.\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 14.7:

(a) Sei $R(t,s)$ eine rationale Funktion zweier Variablen. Führen Sie durch die Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$ für $-\pi<x<\pi$ das Integral $\int R(\cos x,\sin x)\,dx$ auf das Integral einer rationalen Funktion von t zurück. Bestimmen Sie nun eine Stammfunktionen von $f(x) := \dfrac{1}{4+\cos(x)}$.

(b) Zeigen Sie: Ist $R(x, y)$ eine rationale Funktion in zwei Variablen und ist $f\colon x \mapsto R(\cos(x), \sin(x))$ sogar π-periodisch, dann kann man die Integration von f durch die Substitution $y := \tan(x)$ auf die Integration einer rationalen Funktion zurückführen.

(c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{a^2(\sin(x))^2 + b^2(\cos(x))^2}\, dx$ mittels (b), wobei $a \neq 0 \neq b$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 14.7:

(a) Die Substitution liefert $x = \varphi(t) = 2\arctan(t)$ sowie $\varphi'(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$ (Ableitung der Umkehrfunktion). Mit $\frac{1}{2}(\cos(2\alpha)+1) = (\cos(\alpha))^2$ bzw. $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ und wegen $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ sowie

$$(\cos(\alpha))^2 = \frac{(\cos(\alpha))^2}{(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2} = \frac{1}{1 + \frac{(\sin(\alpha))^2}{(\cos(\alpha))^2}} = \frac{1}{1 + (\tan(\alpha))^2}$$

folgt (wie bereits in Gleichung (10.2) aus Zusatzaufgabe 10.3 (d) ermittelt) weiter

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= 2\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2},\\
\sin(x) &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} = \frac{2t}{1+t^2}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\int R(\cos(x), \sin(x))\, dx &= \int R\Big((\cos\circ\varphi)(t), (\sin\circ\varphi)(t)\Big) \cdot \varphi'(t) dt\\
&= \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt. \qquad (14.10)
\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist ein Integral einer rationalen Funktion, welches wir bereits berechnen können. Mit obiger Substitution und $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ sowie $\dfrac{1}{4 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \dfrac{2}{t^2+1} = \dfrac{2}{3t^2+5}$ erhalten wir

$$\int \frac{1}{4+\cos(x)} dx \overset{(14.10)}{=} \int \frac{2}{3t^2+5} dt = \frac{2}{\sqrt{15}} \int \frac{\sqrt{\frac{3}{5}}}{\left(\sqrt{\frac{3}{5}}t\right)^2 + 1} dt = \frac{2}{\sqrt{15}} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

(b) Ist $f\colon x \mapsto R(\cos(x), \sin(x))$ nicht nur 2π-periodisch, sondern sogar π-periodisch, dann ist $\tilde{f}\colon x \mapsto R(\cos(2x), \sin(2x))$ eine 2π-periodische Funktion, die aufgrund der Additionstheoreme eine rationale Funktion in $\sin(x)$ und $\cos(x)$ ist. Deren Integral kann nach (e) durch Substitution von $\tan(\frac{2x}{2}) = \tan(x)$ auf die Integration einer rationalen Funktion zurückgeführt werden.

(c) Mit der Substitution $t = \tan(x)$ und $x'(t) = (\arctan(t))' = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{a^2\sin(x)^2 + b^2\cos(x)^2} &\overset{t=\tan x}{=} \int \frac{dt}{(t^2+1)\left(a^2\frac{t^2}{t^2+1} + b^2\frac{1}{t^2+1}\right)} = \int \frac{dt}{a^2t^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dt}{\left(\frac{at}{b}\right)^2+1}\\
&\overset{y=\frac{at}{b}}{=} \frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{a}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{ab}\arctan(y) \overset{\substack{\text{RS:}\\ y=\frac{at}{b}}}{=} \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{at}{b}\right) \overset{\substack{\text{RS:}\\ t=\tan(x)}}{=} \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a\tan(x)}{b}\right).
\end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{x\nearrow\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ gilt dann $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{a^2(\sin(x))^2 + b^2(\cos(x))^2}\, dx = \frac{\pi}{2ab}$.

Sachwortverzeichnis

Äquivalenzrelation, 2

Abbildung, 2
- bijektive, 2
- Graph einer, 2
- injektive, 2
- surjektive, 2

Ableiten
- Logarithmisches, 86

Ableitung, 76
- k-te, 76

Anordnung, 9
Arcus Cosinus, 70
Arcus Sinus, 70
Arcus Tangens, 70
Argument, 70
Assoziativität, 8

Betrag
- einer komplexen Zahl, 64

Bild, 2

Cauchy-Produkt, 41
Cosinus, 69
Cotangens, 70

Definitheit, 21
Distributivität, 12
Divergenz
- bestimmte, 22

Dreieck
- Pascalsches, 19

Einheitswurzel
- n-te, 70

Element
- neutrales Gruppen-, 8

Exponentialfunktion, 36

Folge, 21
- $\mathbb{K}$-, 20
- beschränkte, 22
  - nach oben, 22
  - nach unten, 22
- bestimmt divergente, 22
- Cauchy-, 21
  - in $\mathbb{C}$, 65
- Grenzwert einer, 21
- Häufungspunkt einer, 29
- konvergente, 21, 65
- monoton fallende, 29
  - streng, 29
- monoton wachsende, 29
  - streng, 29
- Null-, 21
- Teil-, 29

Formel
- Eulersche, 69
- von Moivre, 73

Funktion
- arccos, 70
- arcsin, 70
- arctan, 70
- ceil(x), 20
- cos(x), 69
- cot(x), 70
- exp(x), 36
- floor(x), 20
- ln(a), 64
- max(a, b), 9
- min(a, b), 9
- sqrt(a), 29
- sin(x), 69
- tan(x), 70
- charakteristische, 100
- differenzierbare, 76
  - k-mal, 76
  - zweimal, 76
- Exponential-, 36
- Indikator, 100
- konkave, 89
- konvexe, 89
- monoton fallende, 56
  - streng, 56
- monoton wachsende, 56
  - streng, 56
- monotone, 56
  - streng, 56
- primitive, 105
- rationale
  - in Exponentialtermen, 106
  - in Sinus und Cosinus, 106
- Stamm-, 105
- stetig differenzierbare, 76
  - k-mal, 76
- stetige, 49
  - gleichmäßig, 56
  - Lipschitz-, 56
- Treppen-, 97

Funktionalgleichung
- der allgemeinen Potenz, 64
- der Exponentialfunktion, 41
  - im Komplexen, 69
- des natürlichen Logarithmus, 64
- linearer Funktionen, 57

gleichmächtig, 41
Grenzwert
  einer Folge, 21
  einer Funktion, 49
  einseitiger, 49
  linksseitiger, 49
  rechtsseitiger, 49
Gruppe, 8
  abelsche, 8
  kommutative, 8

Hauptsatz
  der Differential- und Integralrechnung, 105
Hauptzweig
  trigonometrischer Umkehrfunktionen, 70
Hintereinanderausführung
  von Abbildungen, 2

imaginäre Einheit, 64
Imaginärteil, 64
Indikatorfunktion, 100
Infimum, 41
Integral
  einer Treppenfunktion, 97
  Newton-, 105
  Ober-, 97
  Riemann-, 97
    uneigentliches, 106
  unbestimmtes, 105
  Unter-, 97
Integralvergleichskriterium
  für Reihen, 107
Integration
  partielle, 106
integrierbar
  Newton-, 105
  Riemann-, 97
Inverse
  eines Gruppenelementes, 8

Körper, 8, 12
  angeordneter, 9
  der komplexen Zahlen, 64
Kettenregel, 76
Koeffizient
  Binomial-, 19
Kommutativität, 8
Komposition
  stetiger Funktionen, 49
konvergent, 21
Kriterium
  Integralvergleichs-
    für Reihen, 107
  Konvergenz-
    Cauchy'sches, 30
    notwendiges, 30
  Leibniz-, 30
  Majoranten-, 35, 69
  Minoranten-, 35
  Quotienten-, 35, 69
  Wurzel-, 35, 69

Lehrsatz
  Binomischer, 17
Lemma
  Riemannsches, 106
Limes
  inferior, 42
  superior, 41
Logarithmus
  natürlicher, 64

Maximum, 9
  lokales, 77
Menge
  überabzählbare, 41
  abzählbar unendliche, 41
  abzählbare, 41
  der natürlichen Zahlen, 9, 20
  der rationalen Zahlen, 21
  induktive, 9
Methode
  der partiellen Integration, 106
Minimum, 9
  lokales, 77
Mittelwertsatz
  der Differentialrechnung, 77
  der Integralrechnung, 105
Multiplikativität, 21

Nebenzweig
  trigonometrischer Umkehrfunktionen, 70
Negativteil
  einer Funktion, 98
Nullfolge, 21
Nullstellensatz, 49
nullteilerfrei, 8, 10

Oberintegral, 97
Ordnungsrelation, 2

Partialsumme, 29
Positivteil
  einer Funktion, 98
Potenz
  allgemeine, 64
Produktregel, 76
  Leibnizsche, 89

Quotientenregel, 76

Realteil, 64
Regel
  Ketten-, 76
  Produkt-, 76
  Quotienten-, 76
  Substitutions-, 106
Reihe, 29
  Cosinus-, 70
  Exponential-, 36
    Restglied der , 36
  geometrische, 29
  komplexer Zahlen, 69
  konvergente
    absolut, 35, 69
  Sinus-, 70
Relation, 2, 4
  Äquivalenz-, 2
  antisymmetrische, 2, 4
  Ordnungs-, 2
  reflexive, 2
  relfexive, 4
  symmetrische, 2, 4
  transitive, 2, 4
Restgliedabschätzung
  der Exponentialreihe, 36
    im Komplexen, 69

Satz
  über algebraische Ableitungsregeln, 76
  über die Ableitung der Umkehrfunktion, 76
  über die Existenz einer stetigen
    Umkehrfunktion, 57
  über die lineare Approximierbarkeit, 76
  Hinreichendes Kriterium
    für Konvexität, 89
    für lokale Extrema, 77
  Kettenregel, 76
  Mittelwert-
    der Differentialrechnung, 77
    der Integralrechnung, 105
  Notwendiges Kriterium
    für Konvexität, 89
    für lokale Extrema, 77
  Nullstellen-, 49
  vom Minimum/Maximum, 56
  von Bolzano-Weierstraß, 29
  von Rolle, 77
  Zwischenwert-, 49
Sinus, 69
Stammfunktion, 105
Substitutionsregel, 106
Summe
  Ober-
    Riemannsche, 97
  Riemann-, 98
  Unter-
    Riemannsche, 97
Supremum, 41
Symbol
  $-a$, 8
  0, 8
  1, 8
  $\mathbb{C}$, 64
  $\binom{n}{k}$, 19
  $\circ$, 2
  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, 29
  $\lceil x \rceil$, 20
  $\lfloor x \rfloor$, 20
  $\lim_{n\to\infty} a_n$, 21
  $\liminf_{n\to\infty} a_n$, 42
  $\limsup_{n\to\infty} a_n$, 41
  i, 64
  $\overline{z}$, 64
  π, 70
  $\sqrt[k]{a}$, 29
  a^{-1}, 8
  $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, 21

Tangens, 70
Teilfolge, 29
Treppenfunktion, 97

Umkehrfunktion
  Ableitung der, 85
Umordnung
  von Reihen, 35
Ungleichung
  Bernoulli-, 20
  Dreiecks-, 21
Unterintegral, 97
Unterteilung, 97
Urbild, 2

Verkettung
  von Abbildungen, 2

Wendepunkt, 89
Wurzel
  k-te, 29, 57

Zahl
  Eulersche, 36
  komplexe, 64
    konjugiert, 64
Zerlegung, 98
Zwischenwertsatz, 49