Aufgabe 0.1: (3+3+6+3 P)

(a) Zeigen Sie, dass die für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ durch $\|x\| := 2|x_1| + \frac{1}{2}|x_2|$ definierte Abbildung $\|.\|: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^2$ ist und skizzieren Sie die Menge $M := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$.

(b) Sei nun $\|.\|_2$ die Euklidische Norm und $\|.\|$ die Norm aus (a). Bestimmen Sie Konstanten $a, b > 0$, so dass $\forall x \in \mathbb{R}^2 : a\ \|x\|_2 \leq \|x\| \leq b\ \|x\|_2$ gilt. Sind $\|.\|_2$ und $\|.\|$ äquivalent ?

(c) Sei $b \in \mathbb{R}^2$ gegeben und $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x) := Ax + b$ mit

$$\text{(i)} \qquad A := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \qquad\qquad \text{(ii)} \qquad A := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass die Iterationsfolge $x_n := f(x_{n-1})$ für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}^2$ gegen einen eindeutig bestimmten Fixpunkt in $\mathbb{R}^2$ konvergiert.

(d) Bestimmen Sie den Fixpunkt aus (c) in Abhängigkeit von A und b.

Aufgabe 0.2: (2+5 P)

(a) Beweisen Sie: Ist $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $a \in \mathbb{R}^n$, dann ist f auch stetig in a.

(b) Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^6 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und jedes $c \in \mathbb{R}$ die Folge $f(x_n, c \cdot x_n)$ konvergiert, d.h. dass im Nullpunkt der Grenzwert der Funktion entlang einer beliebigen Geraden existiert. Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$ für jede beliebige Nullfolge $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Ist f in $(0, 0)$ stetig?

Aufgabe 0.3: (4+3+3 P)

(a) Bestimmen Sie zu $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ den Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, für den die Summe der Quadrate der Abweichungen $\|x - a_1\|_2, \ldots, \|x - a_k\|_2$ minimal ist (wobei $\|.\|_2$ die Euklidische Norm bezeichnet).

(b) Bestimmen Sie für die folgenden Kurven jeweils den Tangentialvektor und die Bogenlänge:

(i) $c: [0, 1] \to \mathbb{R}^k$, $t \mapsto (1 - t)v + tw$ für $v, w \in \mathbb{R}^k$ fest gewählt.

(ii) $c: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} x + r\cos(t) \\ y + r\sin(t) \end{pmatrix}$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $r > 0$.

Welche Gebilde beschreiben die oben genannten Kurven?

Aufgabe 0.4: (3+2+3 P)

(a) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x^4 + y^2 - z &= 0 \\ x^2 - 2xy + 1 - z &= 0 \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 3, 8)$ lokal nach (x, y) auflösbar ist.

(b) Die nach (a) existierende auflösende Funktion $g(z) = (x(z), y(z))$ parametrisiert eine Kurve $\gamma(z) = (x(z), y(z), z)$. Berechnen Sie den Tangentialvektor $\gamma'(z)$ an die Kurve im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 3, 8)$.

(c) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(u+v)^2}\, du\, dv$ per Anwendung des Transformationssatzes auf den Diffeomorphismus $\Phi:]0, \infty[\times]0, 1[\to]0, \infty[\times]0, \infty[$, $\Phi: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x(1 - y) \\ xy \end{pmatrix}$.

Differentialgleichungen | **Sommersemester 2017, Universität Rostock**
Serie 1 | **Abgabetermin:** spätestens 21.04.2017, 11:15 Uhr
Prof. Dr. K. P. Rybakowski | Dr. K. Ihsberner

Aufgabe 1.1: (6 P)

Klassifizieren Sie die folgenden eindimensionalen gewöhnlichen Differentialgleichungen (Ordnung, explizit/implizit, autonom/nichtautonom, linear/nichtlinear):

(a) $y'''(x) = y(x) \cdot y'(x)$

(b) $u''(t) = (t^2+7)u(t) + t^4$

(c) $x^2 \cdot y''(x) + x \cdot y'(x) + 2y(x) - \sin(x) = 0$

(d) $y''(x) = y'(x)(x^2+1)$

(e) $(x''(t))^2 = x(t) \cdot \sin(x(t))$

(f) $y'(x) = x^2 \cdot y(x)$

Aufgabe 1.2: (2+2 P)

Schreiben Sie die folgenden Differentialgleichungen höherer Ordnung in Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung um.

(a) $x'' = x' + \sin(x \cdot x')$

(b) $x''' = t \cdot x'' + x \cdot (x')^2$

Aufgabe 1.3: (2+2 P)

Bestimmen Sie zunächst alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

$$\text{(a)} \quad y' = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} \cdot y \qquad \text{(b)} \quad y' = 2xy + 5x$$

Lösen Sie anschließend das jeweilige Anfangswertproblem mit $y(1) = 3\mathrm{e}$.

Bonus: **(+1 ZP)**
Begründen Sie, warum das folgende Anfangswertproblem zur gegebenen impliziten Differentialgleichung zweiter Ordnung keine Lösungen besitzen kann:

$$(1+x^2)(y'')^2 + \big(\sin(x^2+y^2)\big)^2 + 1 = 0\,, \qquad y(4) = 3\,, \qquad y'(4) = 13\,.$$

Aufgabe 1.4: (3+3 P)

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' + \cos(x)y = (\cos(x))^3$.

(b) Lösen Sie mittels geeigneter Substitution die Differentialgleichung $y' = x + 5y$.

Differentialgleichungen **Sommersemester 2017, Universität Rostock**
Serie 2 **Abgabetermin:** spätestens 28.04.2017, 11:15 Uhr
Prof. Dr. K. P. Rybakowski Dr. K. Ihsberner

Aufgabe 2.1: (4 P)

Zu einer vorgegebenen Kurve $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sind diejenigen Kurven x gesucht, deren Tangentialvektor zum Zeitpunkt t die Summe aus den Ortsvektoren $x(t)$ und $b(t)$ ist. Stellen Sie eine Differentialgleichung für x auf und lösen Sie diese.

Aufgabe 2.2: Lösen Sie jeweils mittels geeigneter Substitution (2+4 P)

(a) die Differentialgleichung $x^2y' - xy - 5x^2 = y^2$ für $x > 0$,

(b) das Anfangswertproblem $xy^2y' = (\ln(x))^2 + \dfrac{y^3}{\ln(x)}$ zum Anfangswert $y(\mathrm{e}) = -3$.

Aufgabe 2.3: Finden Sie die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen (2+3+4 P)

(a) $y' + y - xy^2 = 0$,

(b) $y' - x^4y - x^4y^4 = 0$,

(c) $y' - y - \mathrm{e}^x y^2 = -3\mathrm{e}^{-x}$ mit der speziellen Lösung e^{-x}.

Aufgabe 2.4: (3+4+4 P)

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung $(2y^2 + 6xy - x^2) + (y^2 + 4xy + 3x^2)y' = 0$ exakt ist und geben Sie die Lösung implizit in der Form $\Phi(x, y) = C$ an.

(b) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen, indem Sie sie mittels eines integrierenden Faktors in eine exakte Differentialgleichung überführen.

(i) $(x^2 + y) - xy' = 0$ (ii) $xy^3\,dx + (1 + 2x^2y^2)\,dy = 0$

Aufgabe 3.1: Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichungen (3+3 P)

(a) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^3}{x^3}$ (b) $y' = \dfrac{y}{x} + \exp\left(-\dfrac{y}{x}\right)$ **Tipp:** Substitution und Trennung der Variablen.

Aufgabe 3.2: (4+4+4 P)

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $(xy^2 + 4x^3y) + (x^4 + x^2y) \cdot y' = 0, \quad y(1) = 4.$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $(y^2 + 4x^2y) + (x^3 + xy) \cdot y' = 0, \quad y(1) = -2.$

(c) Welche Lösung erhalten wir für das Anfangswertproblem aus (a), wenn wir die Anfangsbedingung zu $y(1) = 0$ abändern? Was passiert, wenn wir stattdessen nur $y(0) = 0$ fordern?

Aufgabe 3.3: (6+9 P)

(a) Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen $f(t, x)$ auf dem jeweils angegebenen Rechteck R eine Lipschitz-Bedingung erfüllen:

(i) $f(t,x) = \mathrm{e}^{t^2x}\cos(tx), \quad R = [0,1] \times [-\pi,\pi]$;

(ii) $f(t,x) = \sqrt{1+t+x^2}, \quad R = [1,\infty[\times \mathbb{R}$;

(iii) $f(t,x) = t\sqrt{|x|}, \quad R = [0,\infty[\times \mathbb{R}$.

(b) Betrachten Sie zu den Funktionen aus (a) die Anfangswertprobleme $\dot{x} = f(t,x)$ mit den Anfangswerten (i) $x(0) = 0$; (ii) $x(1) = 1$; (iii) $x(0) = 0$ und entscheiden Sie, ob diese Probleme eindeutige Lösungen besitzen. Wie groß können die Lösungsintervalle gegebenenfalls gewählt werden? (Satz von PICARD-LINDELÖF)

Aufgabe 3.4: (3+2+2 P)

(a) Bestimmen Sie eine Lösung der Differentialgleichung $y' + y + \sqrt[3]{y^2} = 0$ zum Anfangswert $y(0) = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass die Lösung auf dem Intervall $0 \le t \le 3\ln(2)$ eindeutig ist (Satz von P.L.).

(c) Zeigen Sie durch Angabe einer zweiten Lösung, dass die Lösung der obigen Anfangswertaufgabe auf jedem Intervall $0 \le t \le b$ mit $b > 3\ln(2)$ nicht mehr eindeutig ist.

Aufgabe 4.1: (6 P)

Zeigen Sie: Bezüglich des Maßes $\mathrm{e}^{-x}\,dx$ auf $]0,\infty[$ sind die Laguerre-Polynome

$$L_n(x) := \frac{\mathrm{e}^x}{n!}(\mathrm{e}^{-x}x^n)^{(n)} \tag{4.1}$$

orthogonal. Desweiteren lösen sie die Laguerre-Differentialgleichung

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0\ . \tag{4.2}$$

Bonus: Zeigen Sie: Die Laguerre-Polynome erfüllen für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichungen: **(+6 ZP)**

(i) $xL_n'(x) \;=\; nL_n(x) - nL_{n-1}(x)$ (ii) $L_n'(x) - L_{n-1}'(x) + L_{n-1}(x) \;=\; 0$?

Zeigen Sie nun mittels (i) und (ii), dass $L_n(x)$ die Laguerre-Gleichung erfüllt.

Aufgabe 4.2: (9 P)

Die Höhe $x(t)$ einer senkrecht gestarteten Rakete über der Erdoberfläche kann (bis auf Konstanten) durch die Differentialgleichung $x'' = -\dfrac{1}{x^2}$ beschrieben werden.

(a) Ermitteln Sie $x(t)$ für eine Rakete, deren Triebwerk in der Höhe $x(0) = 2$ bei Geschwindigkeit $x'(0) = 1$ abgeschaltet wird, und zeigen Sie $x(t) \to +\infty$ für $t \to +\infty$.

(b) Beweisen Sie, dass $x(t)$ bei $x'(0) < 1$ beschränkt bleibt.

(c) Müssten nach unseren Resultaten über nichtlineare Schwingungen die Lösungen nicht eigentlich periodisch sein?

Aufgabe 4.3: (5+5 P)

Bestimmen Sie die Lösungen $x(t)$ der folgenden autonomen nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu den gegebenen Anfangswerten mit Hilfe der Substitution $y(x) := x'(t(x))$, wobei $t(x)$ die Umkehrfunktion zu $x(t)$ bezeichnet.

(a) $x'' = \dfrac{(x')^2}{x}$ zu den Anfangswerten $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$,

(b) $x'' = (x')^2 x$ zu den Anfangswerten $x(0) = \sqrt{2}$, $x'(0) = \mathrm{e}$.

Aufgabe 4.4: (3+2 P)

(a) Seien die Funktionen $A(t), B(t), \mathbf{x}(t)$ (bei t_0) differenzierbar. Bestimmen Sie

(i) $\dfrac{d}{dt}(A(t)B(t))$ (ii) $\dfrac{d}{dt}(A(t)\mathbf{x}(t))$ (iii) $\dfrac{d}{dt}(\det A(t))$

(b) Überführen Sie ein **komplexes System** $\dot{\mathbf{z}}(t) = B(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}(t)$ von n Differentialgleichungen mit Aufspaltung in Real- und Imaginärteil der Gestalt

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + \mathrm{i}\mathbf{y}(t)\ , \qquad \mathbf{b}(t) = \mathbf{c}(t) + \mathrm{i}\mathbf{d}(t)\ , \qquad B(t) = C(t) + \mathrm{i}D(t)\ ,$$

in ein reelles System von $2n$ Differentialgleichungen.

Aufgabe 5.1: (4 P)

Beweisen Sie: Für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ folgt aus der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $t^{q-1}\mathrm{e}^{\lambda t}$, $t^{q-1}\mathrm{e}^{\overline{\lambda}t}$, $q = 1, \ldots, k$, auch die lineare Unabhängigkeit der Funktionen

$$t^{q-1}\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda)t}\cos(\mathrm{Im}(\lambda)t),\ t^{q-1}\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda)t}\sin(\mathrm{Im}(\lambda)t),\ q = 1, \ldots, k.$$

Aufgabe 5.2: Überprüfen Sie, ob die Funktionen (3+3 P)

(a) $y_1(x) \ = \ x^2,\ y_2(x) \ = \ x,\ y_3(x) \ = \ x^2 - 2x$

(b) $y_1(x) \ = \ x,\ y_2(x) \ = \ x^2 - x,\ y_3(x) \ = \ \mathrm{e}^x - x$

jeweils ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$y''' \ - \ \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2}\, y'' \ + \ \frac{2x}{x^2 - 2x + 2}\, y' \ - \ \frac{2}{x^2 - 2x + 2}\, y \ = \ 0$$

bilden. Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

Aufgabe 5.3: (6+6 P)

Reduzieren Sie die Ordnung der folgenden homogenen linearen Differentialgleichungen mit Hilfe der angegebenen nichttrivialen Lösung und geben Sie die allgemeine Lösung an.

(a) $(x+1)y'' + (x-1)y' - 2y = 0$ mit der nichttrivialen Lösung $\tilde{y}(x) = \mathrm{e}^{-x}$

(b) $y''' + \dfrac{3}{x}y'' + y' + \dfrac{1}{x}y = 0$ mit der nichttrivialen Lösung $\tilde{y}(x) = \dfrac{1}{x}$

Aufgabe 5.4: (8 P)

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des homogenen linearen Systems

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{t+1}{t-1} \end{pmatrix} y$$

auf dem Intervall $(1, \infty)$, indem Sie nachprüfen, dass $y(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}$ eine Lösung ist, und anschließend die Dimension reduzieren.

Aufgabe 6.1: Finden Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen (3+3+3 P)

(a) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$; (b) $y'' + y' + 4y = 2\sinh(t)$; (c) $y'' + 9y = t^2 + \mathrm{e}^{3t} + 6$.

Aufgabe 6.2: Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme (3+3 P)

(a) $8y'' + 6y' + y = 2x + 5$ zu den Anfangswerten $y(0) = y'(0) = 0$.

(b) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$ zu den Anfangswerten $y(0) = 1,\ y'(0) = y''(0) = 0$.

Aufgabe 6.3: (5 P)

Lösen Sie die Euler-Differentialgleichung $-6t^2x(t) + 4t^3\dot{x}(t) - t^4\ddot{x}(t) = t + 1$.

Aufgabe 6.4: (4+6 P)

(a) Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind $\sin(A)$ und $\cos(A)$ definiert durch

$$\sin(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1} \quad \text{und} \quad \cos(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k}\,.$$

Zeigen Sie, dass $\cos(tA)$ (bzw. $\sin(tA)$) die Matrix-Differentialgleichung $X'' = -A^2X$ zum Anfangswert $X(0) = \mathrm{Id}$, $X'(0) = 0$ (bzw. $X(0) = 0$, $X'(0) = A$) löst.

(b) (i) Lösen Sie die Differentialgleichung $\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} 5 & -2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -2 & 5 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t)$.

(ii) Welche Lösung erfüllt $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$?

Aufgabe 7.1: Lösen Sie für $x > 0$ die Euler-Differentialgleichungen (3+3 P)

(a) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, (b) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$.

Aufgabe 7.2: Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung (3+6+3 P)

$$y''' - 3y'' + 2y' = \cos(t) \ . \tag{7.1}$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und seine Nullstellen. Leiten Sie daraus ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung her.

(b) Berechnen Sie sowohl einmal mit Satz 2.14 als auch einmal mit Satz 2.7 eine Partikulärlösung und finden Sie mit ihrer Hilfe eine Darstellung für die allgemeine Lösung von (7.1).

(c) Bestimmen Sie die Lösung von (7.1) zu den Anfangswerten $(y(0), y'(0), y''(0)) = (0, 1, 2)$.

Aufgabe 7.3: (4+4 P)

(a) Bestimmen Sie die optimalen Lipschitz-Konstanten des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) + z(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + y(t) \\ \dot{z}(t) &= z(t) - x(t) \end{aligned}$$

bezüglich der Euklidischen Metrik, der Manhattan-Metrik und der Maximumsmetrik, indem Sie die entsprechenden Operatornormen ermitteln.

(b) Bestimmen Sie auf $D := \{(t, x, y) \ : \ x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^3$ bzgl. $\| \cdot \|_2$ eine Lipschitz-Konstante für das System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) - (y(t))^2 \\ \dot{y}(t) &= \sin(x(t) \cdot y(t)) \end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Schrankensatz und $\|A\|_2 \ \leq \ \|A\|_F \ := \ \sqrt{\sum\limits_{j,k=1}^{n} a_{jk}^2}$.

Aufgabe 7.4: (4 P)

Sei $(X, \| \cdot \|)$ ein normierter Raum und $D \subset X$ abgeschlossen und beschränkt.
Weiter sei $T \colon D \to X$ ein in D stetiger und kompakter Operator, für den zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in D$ existiert, so dass $\|x - Tx\| < \varepsilon$ gilt. Zeigen Sie, dass T einen Fixpunkt in D besitzt.

Aufgabe 8.1: (5+3 P)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \mathbf{b}$ im Fall $\mathbf{b} = 0$.

(b) Bestimmen Sie in (a) eine partikuläre Lösung für $\mathbf{b} = (3, 2, 1)^T$.

Aufgabe 8.2: (10 P)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = 1 - (y(x))^2$, sowie die speziellen Lösungen zu den fünf Anfangswerten $y(0) = -3, -1, 0, 1, 3$.

Für welche $x \in \mathbb{R}$ existieren die speziellen Lösungen ?

Aufgabe 8.3: (4 P)

(a) Ermitteln Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ zum Anfangswert $y_n(0) = \tan(\frac{\pi}{2} - 1 - \frac{1}{n})$ die Lösung $y_n(t)$ der Differentialgleichung
$$y'(t) \;=\; (1 + (y(t))^2)\cos(t) \;.$$

(b) Zeigen Sie, dass jede der Lösungen y_n aus (a) auf ganz $\mathbb{R}$ existiert, dass aber die Lösung zum Anfangswert $y(0) = \tan(\frac{\pi}{2} - 1)$ maximal bis zur Zeit $t = \frac{\pi}{2}$ existiert.

Bonus: Widerspricht (b) nicht der Aussage, dass die Lösungen stetig vom Anfangswert abhängen?

Aufgabe 8.4: (4 P)

(a) Ermitteln Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ die Lösung $y_n(t)$ der Differentialgleichung $y'(t) = \mathrm{e}^y \sin(t)$ zum Anfangswert $y_n(0) = -\ln(2) - \frac{1}{n}$.

(b) Zeigen Sie, dass jede der Lösungen y_n aus Teil (a) auf ganz $\mathbb{R}$ existiert, dass aber die Lösung zum Anfangswert $y(0) = -\ln(2)$ nur auf $]-\pi, \pi[$ existiert.

Bonus: Warum widerspricht dies nicht dem Satz über die stetige Abhängigkeit vom Anfangswert?

Aufgabe 8.5: (4 P)

(a) Beweisen Sie, dass jede Lösung y der Differentialgleichung $y' = 2xy$ von der Form $y(x) = C\mathrm{e}^{x^2}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass zwei Lösungen $y, \tilde{y}$ der Differentialgleichung aus (a) zu (beliebig nahe beieinander gelegenen) Anfangswerten $y_0 \neq \tilde{y}_0$ in $x = 0$ die Eigenschaft $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |y(x) - \tilde{y}(x)| = \infty$ haben.

Bonus: Warum widerspricht dies nicht dem Satz über die stetige Abhängigkeit vom Anfangswert?

Aufgabe 9.1: (6 P)

Finden Sie die Ruhelagen und untersuchen Sie deren Typus sowie Stabilität für das System

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t)$$

und lösen Sie das System. Bestimmen Sie weiterhin e^{tA} für $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 9.2: (2+2 P)

(a) Überführen Sie die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = ay' + by$ für Konstanten $a, b > 0$ in ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung.

Zeigen Sie, dass der Ursprung für das System ein instabiler Sattelpunkt ist.

(b) Beweisen Sie, dass das zu $y'' = ay' + by + f(y)$ gehörige System für Konstanten $a, b > 0$ und eine differenzierbare Funktion f im Ursprung einen instabilen Sattel besitzt, falls $f(0) = 0 = f'(0)$ gilt.

Aufgabe 9.3: (2+2 P)

(a) Überführen Sie die Gleichung zweiter Ordnung $y'' = -y' - y - \sinh(y)$ in das zugehörige System erster Ordnung, und ermitteln Sie die Linearisierung dieses Systems im Nullpunkt.

(b) Ist die Nulllösung aus (a) asymptotisch stabil?

Aufgabe 9.4: (4+2 P)

(a) Bestimmen Sie die Ruhelagen des Systems

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f(x, y) := \begin{pmatrix} -x^3 + y \\ -x - y^5 \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

und zeigen Sie, dass man das Prinzip der linearisierten Stabilität nicht anwenden kann.

(b) Finden Sie für das System (9.1) eine Lyapunov-Funktion der Form $V(x, y) := ax^2 + by^2$ mit $a, b > 0$ und zeigen Sie mit Hilfe von V die asymptotische Stabilität der gefundenen Ruhelagen.

Aufgabe 10.1: (2+3 P)

(a) Berechnen Sie $F(a) = \int_{]0,\infty[} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-x}}{x} d\lambda_1(x)$, $a > 0$, durch Differentiation von F nach a, $a > 0$.

(b) Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion $u(t,x) := \begin{cases} \frac{tx^3}{(x^2+t^2)^2}\ , & \text{falls } (t,x) \neq (0,0)\ , \\ 0\ , & \text{falls } (t,x) = (0,0)\ . \end{cases}$

Zeigen Sie, dass die Integrale $f(x) := \int_0^1 u(t,x)dt$ und $g(x) := \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} u(t,x)dt$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert sind, die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, jedoch $f'(0) \neq g(0)$ gilt.

Aufgabe 10.2: ((2+2+2)+(2+3+4) P)

(a) Gegeben seien $u, v \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Bestimmen Sie jeweils die Differentialgleichung zweiter Ordnung, die den folgenden Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung entspricht:

$$(1) \quad \begin{cases} u_x + v_y &= 0 \\ v_x + u_y &= 0 \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} u_x + v_y &= 0 \\ v_x - u_y &= 0 \end{cases} \qquad (3) \quad \begin{cases} u_x + v_y &= 0 \\ v_x + u &= 0 \end{cases}$$

(b) Lösen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

(i) $2u_x + 3u_y = 0$ (ii) $yu_x - xu_y = 0$ (iii) $u_x + u_y = xy$

Aufgabe 10.3: **(Formel von d'Alembert & Co.)** (1+4 P)

(a) Lösen Sie mittels Formel von d'Alembert auf $\mathbb{R}$ die Wellengleichung

$$u_{tt} = 4u_{xx} \tag{10.1}$$

zu den Anfangsbedingungen $u(0,x) = \mathrm{e}^x$ und $u_t(0,x) = \sin(x)$.

(b) Lösen Sie $u_{xx} + u_{xt} - 20u_{tt} = 0$ zu den Anfangsbedingungen $u(0,x) = \varphi(x)$, $u_t(0,x) = \psi(x)$.

Aufgabe 10.4: **(Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten)** (2+3 P)

(a) Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$\left.\begin{aligned} y''(x) + \omega^2 y(x) &= 0\ , \\ y(0) &= 0\ , \\ y(1) &= 0\ , \end{aligned}\right\} \tag{10.2}$$

für alle $\omega \in [0,\infty) \setminus \mathbb{N}\pi$ nur die triviale Lösung besitzt.

(b) Lösen Sie die Laplace-Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ auf dem Quadrat $[0,1] \times [0,1]$ unter den Randbedingungen $u(0,y) = 0 = u(1,y)$, $u(x,0) = 0$ und $u(x,1) = \sin(2\pi x)$ mit Hilfe des Ansatzes $u(x,y) = X(x)Y(y)$.

Aufgabe 11.1: **(Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten)** (2+4 P)

(a) Zeigen Sie, dass das Randwertproblem $y''(x)+\omega^2 y(x) = 0$, $y(0) = 0 = y(\pi)$, für alle $\omega \in [0, \infty)\setminus\mathbb{N}$ nur die triviale Lösung besitzt.

(b) Lösen Sie die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ im Halbkreis $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\,,\, x^2 + y^2 < 1\}$ unter den Randbedingungen $u = 0$ bei $y = 0$ und $u = \sin(3\varphi)$ auf dem durch die Winkelvariable $\varphi \in (0, \pi)$ parametrisierten Halbkreis $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\,,\, x^2 + y^2 = 1\}$.

Aufgabe 11.2: (2+3+3+2 P)

Seien $u, v \in C^2([a, b], \mathbb{R})$, $p \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ mit $p > 0$ und $q, g \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. Weiterhin betrachten wir das Sturm-Liouvillesche Randwertproblem.

$$\left.\begin{array}{rcll} Lu(x) & := & (p(x)u'(x))' + q(x)u(x) & = & g(x) \\ R_1u(x) & := & \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a)u'(a) & = & \eta_1 \\ R_2u(x) & := & \beta_1 u(b) + \beta_2 p(b)u'(b) & = & \eta_2 \end{array}\right\} \tag{11.1}$$

(a) Zeigen Sie die **Lagrange-Identität**

$$(vLu - uLv)(x) \;=\; \Big(p(x)\big[u'(x)v(x) - v'(x)u(x)\big]\Big)' \,. \tag{11.2}$$

(b) Zeigen Sie: Erfüllen u, v die homogenen Randbedingungen $R_k u = R_k v = 0,\ k = 1, 2$, dann gilt

$$\int_a^b (vLu - uLv)(x)dx \;=\; 0 \,. \tag{11.3}$$

(c) Für welche $p \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ gilt (11.3) im Falle periodischer Randbedingungen an u und v?

(d) Drücken Sie die Beziehung (11.3) mit Hilfe des Innenproduktes $\boxed{(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx}$ aus.

Aufgabe 11.3: (4 P)

Seien $\alpha, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$. Auf dem Intervall $[0, 1]$ sei die folgende Randwertaufgabe gegeben:

$$\left.\begin{array}{rcl} u''(x) + 2u'(x) + u(x) & = & g(x) \\ u(0) - u(1) & = & \eta_1 \\ \alpha u'(0) + 2u(1) & = & \eta_2 \end{array}\right\}$$

Für welche Werte von α ist die Randwertaufgabe für beliebige $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ und beliebige auf dem Intervall $[0, 1]$ stetige Funktionen $g(x)$ eindeutig lösbar?

Aufgabe 12.1: **(Eigenwertprobleme)** (4+4 P)

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenfunktionen von $Lu(x) = -u''(x)$ auf dem Raum $D = \{u \in C^2([0,\pi])\colon u(0) = u'(\pi) = 0\}$.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenfunktionen von $Lu(x) = -u''(x) + 2u'(x)$ auf dem Raum $D = \{u \in C^2([0,\pi])\colon u(0) = u(\pi) = 0\}$.

Aufgabe 12.2: **(Separationsansatz für partielle Differentialgleichungen)** (4+4 P)

(a) Lösen Sie mittels Ansatz $u(t,x) = T(t)X(x)$ die Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ unter den Randbedingungen $u(t,0) = u'(t,\pi) = 0$ zu den Anfangsdaten $u(0,x) = 3\sin\left(\frac{5}{2}x\right)$ und $u_t(0,x) = 0$.

(b) Lösen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $u(t,x) = T(t)X(x)$ die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx} - 2u_x$ unter den Randbedingungen $u(t,0) = 0$ und $u(t,\pi) = 0$ zu den Anfangsdaten $u(0,x) = \mathrm{e}^x\,(3\sin(5x) - 5\sin(3x))$.

Aufgabe 12.3: **(Separationsansatz für die Laplace-Gleichung auf dem Kreis)** (4 P)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ die Lösungen der Laplace-Gleichung

$$Lu = \Delta u = 0$$

auf dem Kreis mit Radius 1 unter der Randbedingung $u(1,\varphi) = 7\cos(3\varphi) - 5\sin(11\varphi) + 13$.

Hinweis: Es ist der Operator in Polarkoordinaten zu verwenden (siehe Gl. (11.1) im ZM).

Aufgabe 13.1: (3+3 P)

Beweisen Sie für eine integrierbare Funktion $u_0 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften der Lösung

$$u(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) u_0(y)\, dy \tag{13.1}$$

der Diffusionsgleichung $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ in $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$:

(a) Gilt $0 \leq u_0(x) \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit einer Konstanten $M < \infty$, dann gilt auch $0 \leq u(t,x) \leq M$ für alle $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Für jedes $t > 0$ gilt $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\, dx$.

Aufgabe 13.2: (8+2 P)

(a) Lösen Sie die Diffusionsgleichung $u_t = k u_{xx}$ unter der Anfangsbedingung $u(0,x) = x^2$ mittels folgender Methode:

(i) Zeigen Sie zunächst, dass u_{xxx} eine Lösung der Diffusionsgleichung mit **homogener** Anfangsbedingung ist.

(ii) Nach dem Eindeutigkeitssatz muss dann $u_{xxx} \equiv 0$ gelten.

(iii) Dreimalige Integration liefert $u(t,x) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t)$.

(iv) Bestimmen Sie anschließend A, B und C.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus (a) das Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p^2 \mathrm{e}^{-p^2} dp.$

Aufgabe 13.3: Zeigen Sie die Gültigkeit von $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-p^2} dp \;=\; 1}$. (6 P)

Hinweis:
Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{[0,\infty)} \left(\int_{[0,\infty)} y \mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}\, d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x).$

Zeigen Sie dann mit Hilfe des Satzes von Fubini $\displaystyle\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-x^2}\, d\lambda_1(x) \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Aufgabe 13.4: (4 P)

Sei $u(t,x)$ die Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ mit Anfangsbedingungen $u(0,x) = \varphi(x)$ und $u_t(0,x) = \psi(x)$. Zeigen Sie, dass $u(t,x)$ für jedes t eine gerade Funktion in x ist, wenn sowohl φ als auch ψ gerade Funktionen sind.

Aufgabe 13.5: Lösen Sie auf der gesamten reellen Achse (4 P)

$$u_{tt} \;=\; c^2 u_{xx} + \cos(x)\ , \qquad u(0,x) = \sin(x)\ , \qquad u_t(0,x) \;=\; 1 + x\ .$$