Zusatzmaterial zum Übungsblatt 1

Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen (Abbschnitt 1.1)

- **Definition 1.1:** Ist $\Omega \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^m$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, so heißt die Gleichung

$$x^{(m)} = f(t, x, x', \dots, x^{(m-1)}) \tag{1.1}$$

  eine explizite n-dimensionale Differentialgleichung m-ter Ordnung, während die Gleichung

$$\tilde{f}(t, x, x', \dots, x^{(m-1)}, x^{(m)}) = 0 \tag{1.2}$$

  als implizite n-dimensionale Differentialgleichung m-ter Ordnung bezeichnet wird.[1]

- **Definition 1.2:** Eine Kurve $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt eine (klassische) Lösung der Differentialgleichung (1.1), falls x eine m-mal differenzierbare Kurve mit $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m-1)}(t)) \in \Omega$ und $x^{(m)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m-1)}(t))$ für alle $t \in I$ ist.

- **Definition 1.3:**
  - Ist die Funktion f auf der rechten Seite von (1.1) unabhängig von t, so spricht man von einer **autonom**en Differentialgleichung.
  - Ist $\Omega = I \times (\mathbb{R}^n)^m$ mit einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $(y_1, \dots, y_m) \mapsto f(t, y_1, \dots, y_m)$ für jedes $t \in I$ linear, dann nennt man (1.1) eine (homogene) **linear**e Differentialgleichung.

- **Satz 1.4 [Äquivalenz zu Systemen]:** Zu einer durch $f\colon \Omega \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^m \to \mathbb{R}^n$ gegebenen Differentialgleichung m-ter Ordnung definiere man $\tilde{f}\colon \Omega \to (\mathbb{R}^n)^m$ durch

$$\tilde{f}(t, y_1, y_2, \dots, y_m) := (y_2, y_3, \dots, y_m, f(t, y_1, \dots, y_m)) .$$

  Dann ist x genau dann eine Lösung von $x^{(m)} = f(t, x, x', \dots, x^{(m-1)})$, wenn die durch $y(t) := (x(t), x'(t), \dots, x^{(m-1)}(t))$ definierte Kurve im $(\mathbb{R}^n)^m$ eine Lösung von $y' = \tilde{f}(t, y)$ ist.

- **Definition 1.5:** Ist $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, so heißt die Gleichung

$$x' \; = \; f(t, x) \tag{1.3}$$

  eine (explizite) n-dimensionale Differentialgleichung erster Ordnung oder auch ein n-dimensionales System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

  Bemerkung: Die Abbildung f in (1.3) bezeichnet man auch als zeitabhängiges Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$. Tatsächlich gibt $f(t, x)$ gerade den Tangentialvektor an, den eine Lösungskurve haben soll, wenn sie zum Zeitpunkt t durch den Punkt x läuft.

- **Definition 1.7 [Lösung des Anfangswertproblems]:**
  Man sagt, eine Kurve x löst die Differentialgleichung (1.3) zum Anfangswert x_0 bei t_0, wenn x eine Lösung von (1.3) ist und zusätzlich $x(t_0) = x_0$ gilt.

  Man nennt eine Lösung x einer Differentialgleichung **global**, falls sie auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

- **Definition 1.11:** Eine Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$ heißt Fluss auf der Menge Ω, falls $\Phi(0, \cdot) = \mathrm{Id}_\Omega$ und $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und $x \in \Omega$ gilt.

- **Lemma 1.12:** Ist x Lösung einer autonomen Differentialgleichung $x' = f(x)$, dann ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ auch $s \mapsto x(s + t)$ eine Lösung der Differentialgleichung.

[1] Implizite Differentialgleichungen lassen sich nur dann in die Gestalt (1.1) umschreiben, wenn man nach $x^{(m)}$ auflösen kann. Wir werden uns in dieser Vorlesung nahezu ausschließlich mit expliziten Differentialgleichungen beschäftigen.

- **Satz 1.13:** Besitzt die autonome Differentialgleichung erster Ordnung $x' = f(x)$ mit der auf der Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definierten rechten Seite $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ zu jedem Anfangswert $x_0 \in \Omega$ bei $t = 0$ eine eindeutige globale Lösung und bezeichnet man diese mit $t \mapsto \Phi(t, x_0)$, so ist Φ ein Fluss.

Elementar lösbare Differentialgleichungen 1. Ordnung (Abschnitt 1.2)

- **Bezeichnung:** Eine (eindimensionale) lineare Differentialgleichung erster Ordnung hat die Form

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{1.4}$$

mit vorgegebenen Funktionen $a, b\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I, d.h. die rechte Seite ist durch die affin-lineare Funktion $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t,x) = a(t)x + b(t)$, gegeben. Im Fall $b = 0$ nennt man (1.4) homogen, und ist a von t unabhängig, dann spricht man von einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

- **Satz 1.16 [allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL erster Ordnung]:** Sind $a, b\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall I, ist $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}$, so hat (1.4) unter der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ genau eine Lösung $x\colon I \to \mathbb{R}$, nämlich

$$x(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \exp(-A(s))b(s)\,ds \right) \exp(A(t)) \tag{1.5}$$

mit $C(t_0) = x_0$ und $A(t) := \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$ für die Stammfunktion von a mit $A(t_0) = 0$.

Bemerkung: Eine Lösung der inhomogenen DGL erhält man mittels der Methode „Variation der Konstanten“ über den Ansatz $x(t) = C(t)\exp(A(t))$.

- **Bezeichnung:** Hat eine (eindimensionale) lineare Differentialgleichung erster Ordnung die Form

$$x' = g(t)h(x) \tag{1.6}$$

mit vorgegebenen Funktionen $g\colon I \to \mathbb{R}$ und $h\colon J \to \mathbb{R}$ auf (offenen) Intervallen $I, J \subset \mathbb{R}$, so spricht man von einer Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

- **Satz 1.18 [Trennung der Variablen]:** Seien $g\colon I \to \mathbb{R}$ und $h\colon J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf offenen Intervallen $I, J \subset \mathbb{R}$ und sei $(t_0, x_0) \in I \times J$ vorgegeben.

  - Ist $h(x_0) = 0$, dann hat (1.6) zum Anfangswert $x(t_0) = x_0$ die konstante Lösung $x(t) = x_0$ auf ganz I.
  - Ist $h(x_0) \neq 0$, dann besitzt (1.6) zum Anfangswert $x(t_0) = x_0$ auf einem hinreichend kleinen offenen Intervall $\tilde{I} \subset I$ um t_0 eine Lösung $x : \tilde{I} \to \mathbb{R}$, und diese erhält man durch Auflösen von

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{h(y)}\,dy = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds \tag{1.7}$$

  nach $x(t)$.

- **Substitutionsmethoden:** (a) **Lineare Substitution**: Hat eine Differentialgleichung die Form

$$x' = f(ax + bt + c) \tag{1.8}$$

mit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, dann kann man zu einer Lösung x die Funktion $y(t) := ax(t) + bt + c$ betrachten. Diese erfüllt

$$y'(t) = ax'(t) + b = af(ax + bt + c) + b = af(y) + b\,,$$

löst also die autonome Differentialgleichung $y' = af(y) + b$. Umgekehrt erhält man aus einer Lösung y von $y' = af(y) + b$ durch $x(t) := \frac{1}{a}(y(t) - bt - c)$ aber auch eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung (1.8).

Zusatzaufgabe 1.1: Lösen folgende Kurvenscharen für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ lineare Differentialgleichungen?

(a) $4 \;=\; x^2 + cy$ (b) $4 \;=\; x^2 + cy^2$

Wenn ja, dann geben Sie eine solche Differentialgleichung an. Was passiert bei $c = 0$?

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.1:

(a) Mit $y = y(x)$ erhalten wir aus $x^2 + cy = 4$ durch Differentiation beider Seiten die Gleichung

$$2x + cy' \;=\; 0 \;.$$

Ersetzen wir $c \;=\; \frac{4-x^2}{y}$ (was sich aus der Gleichung für die Kurvenschar ergibt), dann folgt

$$y' \;=\; -\frac{2xy}{4-x^2} \qquad \text{oder} \qquad (4-x^2)y' + 2xy \;=\; 0 \;.$$

Für $c = 0$ sind die Kurvenscharen genau $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x = 2\}$ und $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x = -2\}$, welche als Parallele zur y-Achse nicht als Funktionen $y(x)$, sondern nur als Funktionen $x(y)$ dargestellt werden können. Daher leiten wir nun bei $4 = x^2$ beide Seiten nach y ab und erhalten

$$0 = 2x' \cdot x \quad ,$$

so dass wegen $x^2 \neq 0$ (also auch $x \neq 0$) die Differentialgleichung $x'(y) = 0$ erfüllt wird.

(b) Differenzieren wir wiederum beide Seiten nach x, so erhalten wir

$$0 \;=\; 2x + c \cdot 2y \cdot y'$$

Wegen $c = \frac{4-x^2}{y^2}$ (was sich aus der Gleichung für die Kurvenschar ergibt) folgt nun

$$y'(x) \;=\; -\frac{xy}{4-x^2} \qquad \text{oder} \qquad (4-x^2)y' + xy \;=\; 0 \;.$$

Für $c = 0$ erhalten wir wie bei (a) die Differentialgleichung $x'(y) = 0$.

Zusatzaufgabe 1.2:

(a) Zeigen Sie, dass autonome und nichtautonome Differentialgleichungen im folgenden Sinne äquivalent sind: Definiert man zu $f\colon \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ das zeitunabhängige Vektorfeld $\tilde{f}(t, x) := (1, f(t, x))$ auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$, dann ist x genau dann eine Lösung von $x' = f(t, x)$, wenn $y(t) := (t, x(t))$ eine Lösung von $y' = \tilde{f}(y)$ mit $y_1(0) = 0$ ist.

(b) Sei $\mathbb{R} \ni f(t, x) \neq 0$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Löst x die DGL $x' = f(t, x)$ und löst y die DGL $y' = -\frac{1}{f(t,y)}$, dann stehen die Tangentialvektoren der Kurven $(t, x(t))$ und $(t, y(t))$ in Schnittpunkten senkrecht aufeinander.

(c) Lösen Sie die inhomogene lineare Differentialgleichung $ay' + y = b \qquad (a, b \in \mathbb{R})$. Unter welchen Bedingungen an a konvergiert $y(x)$ für $x \to \infty$ bzw. divergiert $y(x)$ für $x \to \infty$ bestimmt und gegen welchen Wert?

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.2:

(a) Ist x Lösung von $x' = f(t, x)$, so gilt $y'(t) = (t, x(t))' = (1, x'(t)) = (1, f(t, x(t))) = \tilde{f}(y(t))$. Löst umgekehrt y die DGL $y' = \tilde{f}(y)$ und gilt $y_1(0) = 0$, dann gilt aufgrund der Definition der ersten Komponente von $\tilde{f}$ die Gleichung $y_1' = 1$ und somit $y_1(t) = t + y_1(0) = t$. Desweiteren gilt aufgrund der Definition der letzten n Komponenten von $\tilde{f}$ mit $x := (y_2, \ldots, y_{n+1})$ die Gleichung $x' = f(y_1, \ldots, y_{n+1}) = f(t, x)$, d.h. x löst die ursprüngliche DGL.

(b) Es gilt $(t,x(t))' = (1,x'(t)) = (1,f(t,x(t)))$ und $(t,y(t))' = (1,y'(t)) = (1,-\frac{1}{f(t,y(t))})$, in einem Schnittpunkt $(t,x(t)) = (t,y(t))$ gilt also

$$\langle (t,x(t))', (t,y(t))' \rangle = 1 \cdot 1 + f(t,x(t)) \left(-\frac{1}{f(t,y(t))} \right) = 1 - 1 = 0\,.$$

(c) Die homogene lineare Differentialgleichung lautet hier $ay' + y = 0$ und besitzt für $a = 0$ die Lösung $y_h \equiv 0$ und $y_h(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}$ für $a \neq 0$. Eine partikuläre Lösung erhalten wir hierbei sofort durch den Ansatz $y_p(x) = \text{const}$, der auf die Lösung $y_p(x) = b$ führt. Somit ist die allgemeine Lösung

$$y(x) \;=\; y_p(x) + y_h(x) \;=\; \begin{cases} b\,, & a = 0, \\ b + c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}} \quad (c \in \mathbb{R}), & a \neq 0\,. \end{cases}$$

Somit erhalten wir für das Konvergenzverhalten $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) \;=\; \begin{cases} b\,, & a \geq 0 \text{ oder } a < 0 \wedge c = 0\,, \\ \infty\,, & a < 0 \wedge c > 0\,, \\ -\infty\,, & a < 0 \wedge c < 0\,. \end{cases}$

Zusatzaufgabe 1.3:

(a) Lösen Sie die lineare Differentialgleichung $5y' + x^2 y = 0$ mittels Trennung der Variablen.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = \dfrac{x^2}{y(1+x^3)}$ mittels Trennung der Variablen. Auf welchem Intervall existiert die Lösung? Für welches x_0 besitzt das Anfangswertproblem keine Lösung?

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung $y'(x^2+1) = xy + 2x$.

(d) Untersuchen Sie jeweils für die Differentialgleichungen aus (a),(b) und (c) das Anfangsproblem mit $y(0) = -1$ und geben Sie das entsprechende Intervall an, auf dem die Lösung existiert.

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.3:

(a) Aus $y' = -\dfrac{x^2 y}{5}$ ergibt sich neben der **singulären** Lösung $y = 0$ mittels Trennung der Variablen

$$\ln|y(x)| - \ln|y(x_0)| \;=\; \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{t}\,dt \overset{\text{Substitutions-regel}}{=} \int_{x_0}^{x} \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx \;=\; \int_{x_0}^{x} \frac{-s^2}{5}\,ds \;=\; -\frac{1}{15}\left(x^3 - x_0^3\right),$$

also $\ln|y(x)| \;=\; -\dfrac{1}{15}x^3 + \tilde{C}$ mit einem $\tilde{C} \in \mathbb{R}$ und somit $y(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{15}}$ für ein $C \in \mathbb{R}$. Beachten Sie, dass diese Kurvenschar für $C = 0$ die singuläre Lösung bereits enthält.

(b) Es gilt mit Trennung der Variablen

$$yy' \;=\; \frac{x^2}{1+x^3} \quad\Longrightarrow\quad \frac{y^2}{2} \;=\; \frac{\ln|1+x^3|}{3} + \tilde{C} \quad\Longrightarrow\quad y(x) \;=\; \pm\sqrt{\frac{2\ln|1+x^3|}{3} + C}\quad.$$

Da die Quadratwurzel nur für nichtnegative Zahlen definiert ist, muss die Variable x die Ungleichung $|1+x^3| \geq \mathrm{e}^{-\frac{3C}{2}}$ erfüllen, also in einem der Intervalle

$$\left]-\infty, -\sqrt[3]{\mathrm{e}^{-\frac{3C}{2}} + 1}\,\right] \qquad \text{oder} \qquad \left[\operatorname{sign}\left(\mathrm{e}^{-\frac{3C}{2}} - 1\right)\sqrt[3]{\left|\mathrm{e}^{-\frac{3C}{2}} - 1\right|}, \infty\right[$$

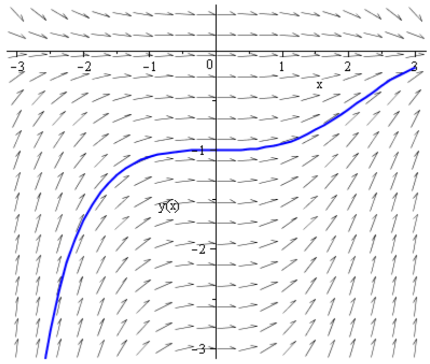
liegen. Da für kein $C \in \mathbb{R}$ die Exponentialfunktion verschwindet, besitzt das Anfangswertproblem für $x_0 = -1$ keine Lösung, d.h., keine Lösung existiert auf einem -1 enthaltenden Intervall.

(c) Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen $y'(x) = g(x)h(y)$ mit $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ und $h(y) = y+2$, wonach $y(x) \equiv -2$ die entsprechende singuläre Lösung ist und im Fall $h \neq 0$ somit

$$\ln|y(x)+2| - \ln|y(x_0)+2| \;=\; \int_{y(x_0)+2}^{y(x)+2} \frac{1}{t}\,dt \;=\; \int_{x_0}^{x} \frac{y'(x)}{y(x)+2}\,dx \;=\; \int_{x_0}^{x} \frac{s}{s^2+1}\,ds \;=\; \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x_0^2+1}\right),$$

also $\ln|y(x)+2| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tilde{C}$ für ein $\tilde{C} \in \mathbb{R}$ und somit $y(x) = C\sqrt{x^2+1} - 2$ für ein $C \in \mathbb{R}$. Beachten Sie wiederum, dass hier die singuläre Lösung schon dabei ist.

(d) Für die allgemeine Lösung $y(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{15}}$ aus (a) ergibt sich mit der Anfangsbedingung



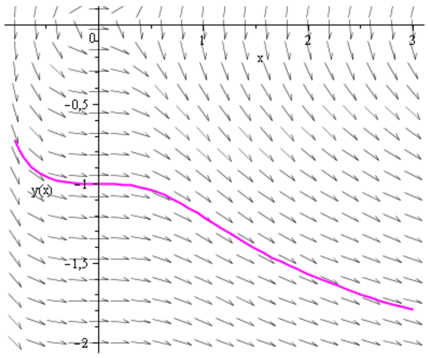
$$-1 \;=\; y(0) \;=\; C\mathrm{e}^{-\frac{0^3}{15}} \;=\; C \cdot 1 \quad\Longrightarrow\quad C \;=\; -1$$

und somit $y(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{15}}$ als Lösung (vgl. blaue Kurve) des Anfangswertproblems zu (a).

Für die allgemeine Lösung

$$y(x) \;=\; \pm\sqrt{\frac{2\ln|1+x^3|}{3} + C}$$

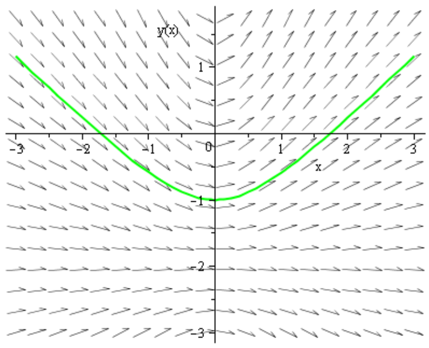
aus (b) ergibt sich mit der Anfangsbedingung



$$-1 \;=\; y(0) \;=\; -\sqrt{\frac{2\ln|1+0^3|}{3} + C} \;=\; -\sqrt{C}$$

somit $C = 1$, also $y(x) = -\sqrt{\frac{2\ln|1+x^3|}{3} + 1}$ auf dem Intervall $\left[-\sqrt[3]{1-\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}}, \infty\right[$ als Lösung (vgl. mangentafarbene Kurve) des Anfangswertproblems zu (b).

Für die allgemeine Lösung $y(x) = C\sqrt{x^2+1} - 2$ aus (c) ergibt sich mit der Anfangsbedingung



$$-1 \;=\; y(0) \;=\; C\sqrt{0^2+1} - 2 \;=\; C - 2 \quad\Longrightarrow\quad C \;=\; 1$$

und somit $y(x) = \sqrt{x^2+1} - 2$ auf $\mathbb{R}$ als Lösung (vgl. grüne Kurve) des AWPs zu (c).

Zusatzaufgabe 1.4:

(a) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen zum Anfangswert $x(0) = 1$.

(i) $x' = -(t^2+1) \cdot x$ (ii) $x' = \cos(t) \cdot x + \cos(t)$ (iii) $x' = t \cdot x(x-1)$

Lösen Sie (iii) auch für den Anfangswert $x(0) = \frac{1}{2}$.

(b) Lösen Sie die gewöhnlichen Differentialgleichungen (i) $y' = (x+y)^2$ und (ii) $y' = 3x + y$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.4:

(a) (i) Die DGL ist linear und homogen, und wegen $-\displaystyle\int_0^t (s^2+1)\,ds = -\frac{1}{3}t^3 - t = -\frac{1}{3}t(t^2+3)$ hat sie die Lösungen

$$x(t) = C\exp\left(-\frac{1}{3}t(t^2+3)\right).$$

Aus der Anfangsbedingung liest man $C = 1$ ab.

(ii) Die Differentialgleichung ist linear, aber inhomogen.

Wegen $\int_0^t \cos(s)\,ds = \sin(t)$ und $\int_0^t \mathrm{e}^{-\sin(s)} \cos(s)\,ds = \int_0^{\sin(t)} \mathrm{e}^{-z}\,dz = (1-\mathrm{e}^{-\sin(t)})$ ergeben sich die Lösungen

$$x(t) = (C + (1 - \mathrm{e}^{-\sin(t)}))\mathrm{e}^{\sin(t)} = (C+1)\mathrm{e}^{\sin(t)} - 1\,.$$

Aus der Anfangsbedingung liest man $C = 1$ ab.

(iii) Die Differentialgleichung hat getrennte Variablen mit $g(t) = t$ und $h(x) = x(x-1)$. Zu den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ bzw. $x(0) = 1$ lösen die beiden konstanten Funktionen $x(t) \equiv 0$ bzw. $x(t) \equiv 1$ das entsprechende Anfangswertproblem.

Im Fall $h(x) \neq 0$ für alle Zeiten liefert die Partialbruchzerlegung $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ so dann

$$\ln\left|\frac{x(t)-1}{x(t)}\right| - \ln\left|\frac{x(0)-1}{x(0)}\right| = \int_1^{x(t)} \frac{1}{y(y-1)}\,dy = \int_0^t s\,ds = \frac{1}{2}t^2\,,$$

Für $x(0) = \frac{1}{2}$ erhält man somit $\left|\frac{x(t)-1}{x(t)}\right| = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}$ und wegen $x(0) < 1$ somit $\frac{1-x(t)}{x(t)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}$ und daher

$$x(t) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}}\,.$$

(b) (i) Es handelt sich um eine Differentialgleichung der Form $y' = f(ax + by + c)$, so dass sich nach der Substitution $u(x) = x + y(x)$ aus $y' = (x+y)^2$ die Differentialgleichung

$$u' = 1 + u^2\,,$$

welche autonom und ohne singuläre Lösung ist. Demnach erhalten wir

$$\arctan(u(x)) - \arctan(u(x_0)) = \int_{u(x_0)}^{u(x)} \frac{1}{v^2+1}dv = \int_{x_0}^{x} 1ds = x - x_0\,,$$

also

$$y(x) = u(x) - x = \tan(x - x_0 + \arctan(x_0 + u(x_0))) - x\,.$$

Alternativ finden wir (Integration und Umstellen oder man sieht es einfach) die allgemeine Lösung $u(x) = \tan(x + C)$ von $u' = 1 + u^2$, also liefert uns Rücksubstitution nun

$$y(x) = \tan(x + C) - x \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

(ii) Die Differentialgleichung ist vom Typ $y' = f(ax + by + c)$. Wir substituieren also

$$z(x) = z := 3x + y, \qquad z' = 3 + y'\,, y' = z' - 3\,.$$

Somit lässt sich die Differentialgleichung auf die Form $z' - 3 = z$ bringen. Nach der Ableitung von z umgestellt, erhalten wir $z' = (z+3)\cdot 1 = h(z)\cdot g(x)$ mit $h(z) = z + 3$, $g(x) = 1$.

(1) Im Fall $h(z) = 0$ folgt aus $z' = 0$, dass z konstant, und andererseits aus $z + 3 = 0$ die einzige singuläre Lösung $z \equiv -3$ ist.

(2) Im Fall $h(z) \neq 0$ liefert die Methode „Trennung der Variablen“ :

$$\ln|z(x) + 3| = \int \frac{z'(x)}{z(x)+3}\,dx = \int 1dx = x + C_1 \implies z(x) = C_2\exp(x) - 3$$

mit $C_2 = \pm\exp(C_1)$ und $C_1 \in \mathbb{R}$.

Aus (1) und (2) erhalten wir für z insgesamt

$$z(x) = c\cdot \mathrm{e}^x - 3 \qquad (c \in \mathbb{R},\ \text{ einschließlich } z = -3 \text{ für } c = 0).$$

Die Rücksubstitution $z(x) = 3x + y(x)$ liefert schließlich die allgemeine Lösung

$$y(x) = c\cdot \mathrm{e}^x - 3(x+1) \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 2

- **Substitutionsmethoden [Fortsetzung]:**

(b) **Ähnlichkeitsdifferentialgleichung:** Ist $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ invertierbar und $e \in \mathbb{R}^2$, so heißt

$$x' = f\left(\frac{ax + bt + e_1}{cx + dt + e_2}\right) \tag{2.1}$$

Ähnlichkeitsdifferentialgleichung. Der Koordinatenwechsel $s := t - t_0$, $y(s) := x(s + t_0) - x_0$, wobei (x_0, t_0) die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

bezeichne, überführt (2.1) in die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} y(s) &= \frac{d}{ds} x(s + t_0) = x'(s + t_0) = f\left(\frac{ax(s + t_0) + b(s + t_0) + e_1}{cx(s + t_0) + d(s + t_0) + e_2}\right) \\ &= f\left(\frac{ay(s) + bs + ax_0 + bt_0 + e_1}{cy(s) + ds + cx_0 + dt_0 + e_2}\right) \overset{(2.2)}{=} f\left(\frac{ay(s) + bs}{cy(s) + ds}\right) = f\left(\frac{a\frac{y(s)}{s} + b}{c\frac{y(s)}{s} + d}\right) , \end{aligned}$$

also $y'(s) = g\left(\frac{y(s)}{s}\right)$ mit $g(r) = f\left(\frac{ar + b}{cr + d}\right)$.

(c) **Homogene Differentialgleichung**: Im Fall $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nennt man die Differentialgleichung (2.1) eine homogene Differentialgleichung, sie hat dann die Form

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right) . \tag{2.3}$$

Unter der Substitution $y := \frac{x}{t}$ geht (2.3) über in die Differentialgleichung

$$y' = \frac{f(y) - y}{t} .$$

(d) **Bernoulli-Differentialgleichung:** Eine Differentialgleichung der Form

$$x' + a(t)x + b(t)x^p = 0 \tag{2.4}$$

heißt bei $p \neq 1$ Bernoulli-Differentialgleichung. Die Substitution $y := x^{1-p}$ führt wegen

$$y' = (1 - p)x^{-p}x' = (p - 1)x^{-p}(a(t)x + b(t)x^p) = (p - 1)a(t)y + (p - 1)b(t)$$

auf eine lineare Differentialgleichung, die i.A. inhomogen mit nicht-konstanten Koeffizienten ist und Lösung (1.5) besitzt. Per Rücksubstitution $x = y^{1/(1-p)}$ erhalten wir daraus Lösungen von (2.4).

(e) **Ricatti-Differentialgleichung:** Differentialgleichungen der Form

$$x' + a(t)x + b(t)x^2 = c(t) \tag{2.5}$$

heißen Riccati-Differentialgleichungen, welche elementar allgemein gelöst werden können, sofern schon eine partikuläre Lösung x_p bekannt ist (z.B. geraten hat).

Dann geht die Riccati-Differentialgleichung (2.5) durch die Substitution $y = x - x_p$ wegen

$$\begin{aligned} y' &= x' - x_p' = \Big(c(t) - a(t)x - b(t)x^2\Big) - \Big(c(t) - a(t)x_p - b(t)x_p^2\Big) \\ &= -a(t)(x - x_p) - b(t)(x^2 - x_p^2) \;=\; -a(t)(x - x_p) - b(t)(x - x_p)\Big((x - x_p) + 2x_p\Big) \\ &= -\Big(a(t) + 2b(t)x_p(t)\Big)(x - x_p) - b(t)(x - x_p)^2 \;=\; -\Big(a(t) + 2b(t)x_p(t)\Big)y - b(t)y^2 \end{aligned}$$

in die Bernoulli-Differentialgleichung $y' + (a(t) + 2b(t)x_p(t))y + b(t)y^2 = 0$ über.

Exakte Differentialgleichungen – Unterabschnitt 1.2.4:

- Ist $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ stetig, so bilden die Lösungen von $x' = f(t, x)$ eine Schar von ebenen Kurven, die ganz Ω überdecken (Satz v. Peano). Eine Schar von Kurven lässt sich i.A. implizit durch eine Gleichung der Form $\Phi(t, x) = C$ mit einer differenzierbaren Funktion $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ und einer frei wählbaren Konstanten C beschreiben.
  Ist $(t, x(t))$ eine durch t parametrisierte Lösung von $\Phi(t, x) = C$, dann liefert Differentiation von $C = \Phi(t, x(t))$ nach t (also der für alle t gültigen Gleichung $C = (\Phi \circ H)(t)$ mit $H(t) = (t, x(t))$) nach Kettenregel die Differentialgleichung

  $$0 = d(\Phi \circ H)(t) = (d\Phi \circ H)(t) \cdot dH(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) & \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \end{pmatrix} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, x)x'$$

  Daher bezeichnet man eine Differentialgleichung der Form

  $$g(t, x) + h(t, x)x' = 0 \quad \text{oder symbolisch} \quad g(t, x)\,dt + h(t, x)\,dx = 0 \tag{2.6}$$

  mit zwei Funktionen $g, h\colon \Omega \to \mathbb{R}$ als exakte Differentialgleichung, wenn es ein $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit $g = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ und $h = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ gibt.

- **Satz 1.24 [Test auf Exaktheit]**: Ist $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet (d.h. Ω ist offen, zusammenhängend ohne „Löcher“) und sind die Funktionen $g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann ist die Differentialgleichung (2.6) genau dann exakt, wenn $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t}$ gilt.

- Ist (2.6) nicht exakt, existiert jedoch ein $m\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $m \neq 0$, mit

  $$m\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial x}g = m\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial t}h\,, \qquad \text{also} \quad \frac{\partial}{\partial x}(mg) = \frac{\partial}{\partial t}(mh) \tag{2.7}$$

  so ist nach Satz 1.24 immerhin noch die Differentialgleichung

  $$m(t, x)g(t, x) + m(t, x)h(t, x)x' = 0$$

  für ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ exakt, und wir nennen m dann einen **integrierenden Faktor** (oder **Eulerschen Multiplikator**) der Differentialgleichung (2.6).

  - Insbesondere existiert ein nur von x abhängiges m, d.h., es gilt $m = m(x)$, wenn $\frac{\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g}$ eine nur von x abhängige Funktion ist, da sich dann (2.7) zu

    $$\frac{m'(x)}{m(x)} = \frac{\dfrac{\partial h}{\partial t} - \dfrac{\partial g}{\partial x}}{g} \tag{2.8}$$

    vereinfacht, was eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für m liefert.

  - Insbesondere existiert ein nur von t abhängiges m, d.h., es gilt $m = m(t)$, wenn $\frac{\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial t}}{h}$ eine nur von t abhängige Funktion ist, da sich dann (2.7) zu

    $$\frac{m'(t)}{m(t)} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial x} - \dfrac{\partial h}{\partial t}}{h} \tag{2.9}$$

    vereinfacht, was eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für m liefert.

Spezielle homogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung – Abschnitt 1.3.1:

- Die **Legendre-Differentialgleichung**

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0\,, \qquad \text{oder auch} \qquad -\left((x^2-1)y'\right)' + n(n+1)y = 0 \tag{2.10}$$

bzw. ihre Umformung

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{n(n+1)}{1-x^2}y = 0$$

besitzt auf $(-1,1)$ neben dem n-ten **Legendre-Polynom** $P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}((x^2-1)^n)^{(n)}$ noch eine weitere von P_n linear unabhängige Lösung Q_n, die man mit dem Ansatz $Q_n(x) := z(x)P_n(x)$ erhalten kann.

Zusatzaufgabe 2.1:

(a) Welche konstante Zerfallsrate in Mol pro Tag hat Jod-131, von dem innerhalb von 8 Tagen die Hälfte zerfallen ist?

(b) Angenommen, nach einem Unfall in einem Atomkraftwerk gelangt zum Zeitpunkt $t = 0$ radioaktives Jod-131 mit der hohen relativen Rate b_1 für einen Tag in die Umwelt. Durch die nachfolgenden Reparaturen kann die relative Rate ab dem zweiten Tag auf die Hälfte des erlaubten Grenzwertes b_2 gesenkt werden, eine weitere Absenkung gelingt aber nicht. Ab welchem Zeitpunkt liegt die Menge des sich in der Umwelt befindlichen Jod-131 wieder unter dem Grenzwert b_2?

(c) Finden Sie alle Kurven $t \mapsto (t, x(t))$ in der Ebene mit der Eigenschaft, dass der Schnittpunkt der Tangente in $(t, x(t))$ mit der t-Achse vom Ursprung denselben Abstand hat wie vom Punkt $(t, x(t))$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.1:

(a) Es gilt $x' = -ax$, also $x(t) = C\exp(-at)$. Somit gilt $x(0) = C$, und gefragt ist, wie groß a sein muss, damit $x(t) = \frac{C}{2}$ für $t = 8\,d$ gilt. Aufgrund der Formel für $x(t)$ ergibt sich $\exp(-at) = \frac{1}{2}$ oder $a = \frac{\ln(2)}{t} \approx 0.08664338757$.

(b) Nach der Aufgabenstellung ist die Inhomogenität mit $b(t) = \begin{cases} b_1 & 0 \le t \le 1 \\ \frac{1}{2}b_2 & 1 \le t \end{cases}$ durch $ab(t)$ gegeben (da die Raten relativ zur Zerfallsrate a betrachtet werden). Die Lösung der inhomogenen DGL $x' = -a(x - b(t)) = -ax + ab(t)$ ist unter der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ durch

$$x(t) = \left(\int_0^t a\mathrm{e}^{as} b(s)\,ds\right)\mathrm{e}^{-at}$$

gegeben, also gilt

$$x(t) = \left((\mathrm{e}^{at} - 1)b_1\right)\mathrm{e}^{-at}$$

für $0 \le t \le 1$ und

$$x(t) = \left((\mathrm{e}^{a} - 1)b_1 + \int_1^t a\mathrm{e}^{as}\frac{1}{2}b_2\,ds\right)\mathrm{e}^{-at} = \left((\mathrm{e}^{a} - 1)b_1 + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a(t-1)} - 1)\mathrm{e}^{a}b_2\right)\mathrm{e}^{-at}$$

für $t \ge 1$. Es ist somit die Lösung $t \ge 1$ von

$$(\mathrm{e}^{a} - 1)b_1 + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a(t-1)} - 1)\mathrm{e}^{a}b_2 = b_2\mathrm{e}^{at}$$

gesucht, oder äquivalenterweise die Lösung von

$$(\mathrm{e}^{a} - 1)b_1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{a}b_2 = \frac{1}{2}b_2\mathrm{e}^{at}\,.$$

Wenn die linke Seite positiv ist, d.h. $b_1 > \frac{1}{2}\frac{e^a}{e^a-1}b_2$ gilt, dann wird der Grenzwert bei

$$t = \frac{1}{a}\ln\left(2\frac{(e^a-1)b_1 - \frac{1}{2}e^a b_2}{b_2}\right)$$

wieder unterschritten. Ist $b_1 < \frac{1}{2}\frac{e^a}{e^a-1}b_2$, wird der Grenzwert gar nicht erst überschritten.

(c) Der Schnittpunkt $(t_0, 0)$ der Tangente mit der t-Achse ist durch die Gleichung

$$(t, x(t)) - s(1, x'(t)) = (t_0, 0)$$

bestimmt, aus der die beiden Gleichungen $s = t - t_0$ und $sx'(t) = x(t)$ folgen. Die Gleichheit des Abstandes von $(t_0, 0)$ zum Ursprung $(0, 0)$ und zum Punkt $(t, x(t))$ liefert die dritte Gleichung $(t-t_0)^2 + (x(t))^2 = t_0^2$. Eliminieren wir in den drei Gleichungen die Variablen s und t_0 (z.B. folgt aus der dritten Gleichung $t^2 - 2tt_0 + (x(t))^2 = 0$, also $t_0 = \frac{(x(t))^2+t^2}{2t}$ bei $t \neq 0$ und somit $s = t - t_0 = \frac{t^2-(x(t))^2}{2t}$), so bleibt noch eine Gleichung übrig, nämlich $x'(t) = \frac{2tx(t)}{t^2-(x(t))^2}$. Diese Differentialgleichung kann man umschreiben zur Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

$$x' = \frac{2\frac{x}{t}}{1-\frac{x^2}{t^2}}$$

Substitution $y(t) := \frac{x}{t}$ liefert $y' = \dfrac{x'-y}{t} = \dfrac{y(1+y^2)}{t(1-y^2)}$, und Trennung der Variablen ergibt mit der Partialbruchzerlegung $\dfrac{1-y^2}{y(1+y^2)} = \dfrac{1}{y} - \dfrac{2y}{y^2+1}$

$$\ln\left|\frac{y}{y^2+1}\right| = \int \frac{1-y^2}{y(1+y^2)}\,dy = \int \frac{1}{t} = \ln|t| + C\,.$$

Also gilt $\frac{y}{y^2+1} = \pm Ct$ und somit nach Rücksubstitution $x(t) = \pm C((x(t))^2 + t^2)$. Mit $C = \frac{1}{2r}$ sieht man $t^2 + ((x(t))^2 \pm 2rx(t)) = 0$ oder $t^2 + (x(t) \pm r)^2 = r^2$, d.h. die Kurven sind Kreise mit Mittelpunkt $(0, r)$ auf der x-Achse, deren Radius gerade der zweiten Koordinate des Mittelpunkts entspricht.

Zusatzaufgabe 2.2: Lösen Sie folgende Differentialgleichungen mittels geeigneter **Substitution**.

(a) $x' = (3x - 6t + 2)^2 + 6$

(b) $t^2x' - tx - t^2 = x^2$ für $t \neq 0$

(c) $tx' = x(\ln(x) - \ln(t))$ für $t, x > 0$

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.2:

(a) Die Substitution $y(t) := 3x(t) - 6t + 2$ liefert $y' = 3x' - 6 = 3((3x - 6t + 2)^2 + 6) - 6 = 3(y(t)^2 + 4)$. Trennung der Variablen liefert

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{2}\right) = \int \frac{1}{y^2+4}\,dy = 3t + C$$

und somit

$$y(t) = 2\tan(6t + C)\,.$$

Rücksubstitution ergibt $x(t) = \frac{2}{3}(\tan(6t + C) + 1) + 2t$.

(b) Die Gleichung $t^2x' - tx - t^2 = x^2$ hat für $t \neq 0$ die explizite Form

$$x' = \frac{x^2}{t^2} + \frac{x}{t} + 1$$

Die Substitution $y(t) := \frac{x}{t}$ liefert $y' = \frac{x'-y}{t} = \frac{y^2+y+1-y}{t}$ und daher $y' = \frac{y^2+1}{t}$. Trennung der Variablen ergibt

$$\arctan(y) = \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \int \frac{1}{s}\,ds = \ln|t| + C$$

und somit $y(t) = \tan(\ln|t|+C)$. Schließlich folgt aus der Rücksubstitution $x(t) = t\tan(\ln|t|+C)$. Man beachte, dass zum Anfangswert $t = 0$ keine Lösungen existieren, dort ist die Gleichung echt implizit.

(c) Die Gleichung kann man in die Änhnlichkeitsdifferentialgleichung $x' = \dfrac{x}{t}\ln\left(\dfrac{x}{t}\right)$ umschreiben. Die Substitution $y(t) := \dfrac{x}{t}$ liefert $y' = \dfrac{x'-y}{t} = \dfrac{y(\ln(y)-1)}{t}$. Trennung der Variablen ergibt

$$\int \frac{1}{y(\ln(y)-1)}\,dy = \int \frac{1}{s}\,ds = \ln|t| + C\,.$$

Um eine Stammfunktion von $\frac{1}{y(\ln(y)-1)}$ auszurechnen, substituiere man $z = \ln(y) - 1$, dann gilt $y = \mathrm{e}^{z+1}$ und $dy = y\,dz$. Also ist

$$\ln|\ln(y)-1| = \ln|z| = \int \frac{1}{z}\,dz = \int \frac{1}{y(\ln(y)-1)}\,dy = \ln|t| + C\,.$$

und somit $y(t) = \mathrm{e}^{1\pm Ct}$. Rücksubstitution liefert $x(t) = t\mathrm{e}^{1\pm Ct}$.

Zusatzaufgabe 2.3:

(a) Lösen Sie die **Bernoulli-Differentialgleichung** $\qquad xy' + y - y^5 = 0.$

(b) Lösen Sie die **Riccati-Differentialgleichung** $\qquad x' + (1-2t^2)x + tx^2 = t - t^3 + 1$
mit spezieller Lösung $x_p(t) = t$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.3:

(a) Einerseits gibt es die triviale Lösung $y \equiv 0$. Andernfalls substituieren wir $u(x) = (y(x))^{-4}$ und erhalten zusammen mit der ursprünglichen Differentialgleichung

$$u'(x) \;=\; -4\frac{y'(x)}{(y(x))^5} \;=\; -\frac{4}{x\,(y(x))^5}\left((y(x))^5 - y(x)\right) \;=\; \frac{4}{x}\,(u(x)-1)\;,$$

also für $u(x)$ eine DGL mit getrennten Veränderlichen, welche (inklusive der singulären Lösung $u \equiv 1$) die allgemeine Lösung $u(x) = c\cdot x^4 + 1 \quad (c \in \mathbb{R})$ besitzt. Demnach besitzt die obige Bernoulli-Differentialgleichung die allgemeine Lösung

$$y(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt[4]{c\cdot x^4+1}} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

wobei die Lösung für $c < 0$ nur auf dem Intervall $\left]-\sqrt[4]{\frac{1}{|c|}}, \sqrt[4]{\frac{1}{|c|}}\right[$ existiert.

(b) Die Riccati-Differentialgleichung $x' + (1-2t^2)x + tx^2 = t - t^3 + 1$ hat die spezielle Lösung $x_p(t) = t$. Die Differenz $y := x - x_p$ erfüllt die Bernoulli-Differentialgleichung

$$y' + ((1-2t^2) + 2t\cdot t)y + ty^2 = y' + y + ty^2 = 0 \quad .$$

Mit der Substitution $y = \dfrac{1}{z}$ ergibt sich über $y' = -\dfrac{z'}{z^2}$ und Einsetzen der obigen DGL für y nach Umstellen die lineare Differentialgleichung $z' = z + t$ mit allgemeiner Lösung $z(t) = C\mathrm{e}^t - (t+1)$. Zweimalige Rücksubstitution ergibt insgesamt $x(t) = \frac{1}{C\mathrm{e}^t-(t+1)} + t$ als allgemeine Lösung der obigen Riccati-Differentialgleichung.

Zusatzaufgabe 2.4: **(exakte Differentialgleichungen/integrierender Faktor)**

(a) Lösen Sie die exakte Differentialgleichung $xdx + ydy = 0$.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung $ydx - (x + y^2)dy = 0$, indem Sie sie mittels integrierendem Faktor auf eine exakte Differentialgleichung überführen und diese dann lösen.

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.4:

(a) Die Gleichung erfüllt wegen $\frac{\partial x}{\partial y} = 0 = \frac{\partial y}{\partial x}$ die Integrabilitätsbedingung, so dass sich einerseits aus der Gleichung $F_x(x, y) = P(x, y) = x$ durch Integration nach x die Gleichung

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} + \tilde{C}(y) \tag{2.11}$$

ergibt und durch anschließende Differentiation nach y und unter Berücksichtigung der Bedingung $F_y(x, y) = Q(x, y) = y$ somit $\tilde{C}'(y) = y = F_y(x, y)$ ergibt. Integration nach y liefert zunächst $\tilde{C}(y) = \frac{y^2 - C}{2}$. Einsetzen in (2.11) ergibt schießlich

$$F(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - C}{2}$$

bzw. mit $F(x, y) = 0$ als Lösung die Kurvenschar $x^2 + y^2 = C$.

(b) Wegen $g(x, y) = y$ und $h(x, y) = -(x + y^2)$ erhalten wir für einen möglichen nur von einer Variablen abhängigen integrierenden Faktor

$$\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{g_y - h_x}{h} = \frac{1 - (-1)}{x + y^2} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\mu_y}{\mu} = \frac{-g_y + h_x}{g} = \frac{-1 - 1}{y},$$

wobei die zweite Bedingung auf die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung $\mu_y = -\frac{2\mu}{y}$ führt, welche wegen

$$\mu_y = -\frac{2\mu}{y} \quad \Longrightarrow \quad \ln|\mu| = -\ln(y^2) + \tilde{c} \quad \Longrightarrow \quad \mu(y) = \frac{c}{y^2} \qquad (c \neq 0)$$

einen integrierenden Faktor liefert. Multiplikation der Ausgangsdifferentialgleichung mit $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$ führt dann auf die exakte Differentialgleichung

$$\frac{1}{y}dx - \frac{x + y^2}{y^2}dy = 0 \quad \text{mit} \quad g(x, y) = \Phi_x(x, y) = \frac{1}{y} \quad \text{und} \quad h(x, y) = \Phi_y(x, y) = -\frac{x + y^2}{y^2}.$$

Integrieren wir nun $h(x, y) = \Phi_y(x, y) = -\frac{x}{y^2} - 1$ nach y, erhalten wir

$$\Phi(x, y) = \frac{x}{y} - y + \tilde{C}(x)$$

Differenzieren wir nun nach x und beachten $\Phi_x(x, y) = \frac{1}{y}$, so ergibt sich $\tilde{C}'(x) = 0$, also die gesuchte Funktion

$$\Phi(x, y) = \frac{x}{y} - y - C$$

bzw. mit $\Phi(x, y) = 0$ als Lösung die implizit gegebene Kurvenschar $\frac{x}{y} - y = C$ oder in diesem Fall lokal explizit $y_{1,2}(x) = -\frac{C}{2} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} + x}$.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 3

Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen

- **Satz 1.30 [Banach]:** Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $T\colon X \to X$ eine Kontraktion, d.h. es gibt ein $L < 1$ mit $d(T(x),T(y)) \le Ld(x,y)$. Dann gibt es einen eindeutigen Punkt $x^* \in X$ mit $T(x^*) = x^*$. Insbesondere konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in X$ die durch $x_{k+1} := T(x_k)$ rekursiv definierte Folge gegen den Fixpunkt x^* von T.

- **Korollar 1.31:** Sei $(X,\|.\|)$ ein Banach-Raum. Ist $D \subset X$ abgeschlossen und $T\colon D \subset X \to X$ eine kontrahierende Selbstabbildung von D, d.h., gilt $T(D) \subset D$ und existiert ein $L < 1$ mit $\|T(x) - T(y)\| \le L\|x - y\|$, dann gibt es einen eindeutigen Fixpunkt $x^* \in D$ von T.

- **Satz 1.32 [Picard-Lindelöf]:**[2] Sei $f\colon \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, sei $(t_0,x_0) \in \Omega$ ein innerer Punkt und genüge f nahe (t_0,x_0) einer Lipschitzbedingung in der Variablen x, d.h. es gibt eine Umgebung $U \subset \Omega$ von (t_0,x_0) und ein $L < \infty$ mit
$$\|f(t,x) - f(t,\tilde{x})\| \le L\|x - \tilde{x}\| \tag{3.2}$$
für alle $(t,x),(t,\tilde{x}) \in U$, dann existiert eine positive Zahl $\varepsilon > 0$ und eine eindeutige Lösung $x\colon [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems
$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) &=& f(t,x(t))\ , \\ x(t_0) &=& x_0\ . \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

- **Bemerkungen:**
  (a) Im Fall eines stetigen $f\colon \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ geht das Anfangswertproblem (3.3) durch Integration über $[t_0,t]$ in die Fixpunktgleichung
  $$x(t) \ = \ (Tx)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s,x(s))\,,ds \tag{3.4}$$
  über. Insbesondere ist eine Funktion $x : I \to \mathbb{R}^n$ genau dann eine Lösung von (3.3), wenn x ein Fixpunkt des in (3.4) definierten Integraloperators T auf $C(I,\mathbb{R}^n)$ ist.

  (b) Wie im Banachschen Fixpunktsatz kann man den Fixpunkt x von T aus (3.4) und somit die eindeutige lokale Lösung auch konstruktiv durch Iteration annähern. Hier lautet die Iterationsvorschrift
  $$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,x_k(s))\,ds\,, \tag{3.5}$$
  und x_k konvergiert für den konstanten Startwert x_0 auf einem kleinen Intervall um t_0 gegen die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (3.3)

[2]**Weitere Formulierungen von Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen**:
(1) Auf dem Streifen $S := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \colon \tau \le t \le \tau + a\}$ $(a > 0)$ genüge die stetige Funktion $F\colon S \to \mathbb{R}$ einer Lipschitz-Bedingung im zweiten Argument. Dann existiert auf $I := [\tau, \tau + a]$ genau eine Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems
$$\dot{x} \ = \ F(t,x)\ , \quad x(\tau) = \xi\ . \tag{3.1}$$
(2) Auf dem Rechteck $R := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \colon \tau \le t \le \tau + a,\ |x - \xi| \le b\}$ $(a,b > 0)$ genüge die stetige Funktion $F\colon R \to \mathbb{R}$ einer Lipschitz-Bedingung in x mit einer Konstanten $L \ge 0$. Dann besitzt das Anfangswertproblem (3.1) genau eine Lösung $x(t)$, welche (mindestens) im Intervall $I := [\tau, \tau + \alpha]$ existiert, wobei
$$\alpha := \min\left\{a, \frac{b}{A}\right\} \quad \text{mit} \quad A \ := \ \max_{(t,x)\in R} |F(t,x)|$$
ist. Entsprechendes gilt auch für $\tilde{R} := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \colon \tau - a \le t \le \tau,\ |x - \xi| \le b\}$ $(a,b > 0)$.
(3) Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $F\colon G \to \mathbb{R}^n,\ (t,x) \mapsto F(t,x)$, stetig sowie in x lokal einer Lipschitz-Bedingung genügend. Dann existiert zu jedem $(\tau,\xi) \in G$ ein $\varepsilon > 0$ und ein $x\colon [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto x(t)$, welches (3.1) löst.

- **Lemma 1.33:** Ist $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und im Inneren von Ω stetig partiell differenzierbar nach x, dann genügt f nahe jedes inneren Punktes $(t_0, x_0) \in \Omega$ einer Lipschitzbedingung in der Variablen x.

- **Definition 1.34:** Eine Kurve $x\colon I_{\max} \to \mathbb{R}^n$ heißt maximale Lösung des Anfangswertproblems (3.3), falls x eine Lösung von (3.3) ist und jede andere Lösung von (3.3) nur die Einschränkung von x auf ein kleineres Intervall $I \subset I_{\max}$ ist.

- **Satz 1.35 [Existenz der maximalen Fortsetzung einer Lösung]:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig, und genüge f auf Ω einer lokalen Lipschitzbedingung. Dann gibt es zu jedem Anfangswert $(t_0, x_0) \in \Omega$ eine maximale Lösung $x\colon I_{\max} \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems (3.3), $I_{\max} = (a, b)$ ist offen, und falls $b < \infty$ (bzw. $a > -\infty$) gilt, dann strebt $x(t)$ für $t \nearrow b$ (bzw. $t \searrow a$) entweder gegen einen Randpunkt von Ω oder gegen unendlich.

- **Korollar 1.36:** Genügt die stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ einer lokalen Lipschitzbedingung und ist die maximale Lösung $x\colon I_{\max} \to \mathbb{R}^n$ zum Anfangswert (t_0, x_0) beschränkt, dann gilt $I_{\max} = (-\infty, \infty)$, d.h. x ist eine globale Lösung.

- **Definition 1.38** Ist $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung von $x' = f(x)$, dann nennt man das Bild $x(I)$ die Spur der Lösung x. Die Menge aller Spuren von Lösungen der autonomen Differentialgleichung $x' = f(x)$ nennt man ihr Phasenportrait.

- **Bezeichnung:** Besitzt eine autonome Differentialgleichung $x' = f(x)$ zu jedem Anfangswert eine globale Lösung, so nennt man das Vektorfeld f **vollständig**.

- **Proposition 1.39:** Ist das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so ist $\frac{f(x)}{1+|f(x)|^2}$ ein vollständiges Vektorfeld.

- **Definition 1.40:** Eine (abzählbare) Familie $x_k\colon I \to \mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{N})$ stetiger Kurven heißt gleichgradig stetig, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\ :\ \forall k \in \mathbb{N}\, \forall s, t \in I\ :\ (|s - t| \leq \delta \Longrightarrow |x_k(s) - x_k(t)| \leq \varepsilon) \tag{3.6}$$

- **Satz 1.42 [Arzela-Ascoli]:** Ist die Folge $x_k : I \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, von Kurven auf einem kompakten Intervall I gleichgradig stetig und gleichmäßig beschränkt [3], dann besitzt sie eine auf I gleichmäßig konvergente Teilfolge.

- **Satz 1.43 [Peano]:** Ist $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig, dann gibt es zu jedem Anfangswert (t_0, x_0) ein $\varepsilon > 0$ und eine Lösung $x : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ von (3.3).

Zusatzaufgabe 3.1: (Lipschitz & Co)

(a) Zeigen Sie, dass eine Lipschitz-stetige Funktion auch stetig ist.

(b) Sei $0 < a < b < \infty$. Zeigen Sie: Die Funktion $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \dfrac{1}{x}$ ist Lipschitz-stetig.

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.1:

(a) Sei $F\colon D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstanten $L \in [0, \infty[$ und $a \in D$ sowie $\varepsilon > 0$ beliebig. Mit $\delta := \frac{\varepsilon}{L+1}$ folgt dann

$$\forall x \in D\colon \left(|x - a| < \delta \implies |F(x) - F(a)| \leq L \cdot |x - a| \leq L \cdot \delta = \frac{L}{L+1} \cdot \varepsilon < \varepsilon\right) ,$$

also die Stetigkeit von F in a. Da $a \in D$ beliebig war, folgt somit die Stetigkeit von F auf D.

[3] x_k heißt gleichmäßig beschränkt, falls es ein $M < \infty$ mit $|x_k(t)| \leq M$ für alle $t \in I$ und $k \in \mathbb{N}$ gibt.

(b) Wegen $0 < a < b$ folgt

$$\forall x, y \in [a,b]\colon\ |F(x) - F(y)| \;=\; \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \;=\; \frac{|y-x|}{xy} \;\leq\; \frac{1}{a^2} \cdot |y - x|\ ,$$

also dass F auf $[a,b]$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstanten $L = \frac{1}{a^2}$ ist.

Alternative: Da F sogar stetig differenzierbar ist, ist $|.| \circ F'$ als Komposition stetiger Funktionen selber stetig und nimmt auf dem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ nach dem Satz vom Minimum/Maximum ihr Maximum an. Mit $L := \max_{\eta \in [a,b]} |F'(\eta)| = \max_{\eta \in [a,b]} \left|-\frac{1}{\eta^2}\right| = \frac{1}{a^2}$ und dem Mittelwertsatz folgt somit

$$\forall x, y \in [a,b]\colon \left(x \neq y \Longrightarrow \left|\frac{F(x) - F(y)}{x - y}\right| = |F'(\xi_{x,y})| \leq L \right),$$

und damit die Lipschitz-Stetigkeit von F.

Zusatzaufgabe 3.2: (Gleichgradige Stetigkeit)

(a) Ist die Menge der Funktionen $f_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$, gleichgradig stetig auf dem Intervall $[0,b]$, $b < 1$?

(b) Gilt dasselbe auch für das Intervall $[0,1]$?

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.2:

(a) Gleichgradig stetig heißt, dass zu jedem ε ein δ mit $|x^n - y^n| \leq \varepsilon$ für alle $|x-y| \leq \delta$ und alle $n \in \mathbb{N}$ existiert. Dies ist der Fall, denn $|x^{n+1} - y^{n+1}| = |x-y|\,|x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n| \leq \delta\,(n+1)b^n$ gilt, und somit lässt sich für f_{n+1} mit $n+1 \geq 2$ zu $\varepsilon > 0$ der Wert $\delta := \frac{\varepsilon}{(n+1)b^n}$ bzw. $\delta := \varepsilon$ für f_1 wählen. Dieser ist aber noch nicht unabhängig von n, jedoch gibt es wegen $b < 1$ ein N, ab dem $(n+1)b^n < 1$ für alle $n > N$ gilt.[4] Ein nun von $n \in \mathbb{N}$ unabhängiges δ ist daher etwa

$$\delta \;:=\; \min\left(\varepsilon, \min_{n=1,\ldots,N} \frac{\varepsilon}{(n+1)b^n}\right).$$

(b) Im Intervall $[0,1]$ hat man keine gleichgradige Stetigkeit mehr, nicht nur, weil das vorige Argument wegen $b = 1$ nicht mehr funktioniert, sondern weil die Folge x^n auf $[0,1]$ nur gegen die unstetige Funktion $f(x) = 0$ für $x < 1$ und $f(1) = 1$ punktweise konvergiert, eine unstetige Funktion aber nicht der gleichmäsige Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen sein kann, obwohl sie dies nach dem Satz von Arzela-Ascoli sein müsste.

Zusatzaufgabe 3.3: (Picard-Iterationen)

(a) Führen Sie jeweils die ersten n Schritte des PICARD-LINDELÖFschen Iterationsverfahrens zur Gewinnung einer Näherungslösung für die nachfolgenden Anfangswertprobleme durch:

(i) $x'(t) \;=\; t^2 + \big(x(t)\big)^2$, $x(0) = 0$, $n = 3$; (ii) $y'(t) \;=\; \sin(t) + \big(y(t)\big)^2$, $y(0) = 0$, $n = 2$.

Hinweis: Verwenden Sie für die Integrale $I_n := \displaystyle\int (\sin(x))^n dx$ die Rekursionsformel

$$\boxed{I_n \;=\; -\frac{\cos(x) \cdot (\sin(x))^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}\ , \qquad I_0 \;=\; x\ , \qquad I_1 \;=\; -\cos(x)}$$

[4] Mit L'Hospital folgt etwa $\lim_{x\to\infty} (x+1)b^x \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{b^{-x}} \;\overset{\text{L'H}}{=}\; \lim_{x\to\infty} \frac{1}{-\ln(b)b^{-x}} \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{b^x}{-\ln(b)} \;=\; 0$ wegen $0 < b < 1$.

(b) Auf dem Intervall $I = [0, a],\ a > 0$, betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) \ = \ -2tx(t) \ , \qquad x(0) = 1 \ . \tag{3.7}$$

(i) Berechnen Sie die Picard-Iterierten $x_0(t), \ldots, x_4(t)$.

(ii) Sei T_{2n} das Taylor-Polynom der Ordnung $2n$ der Lösung von (3.7) zum Entwicklungspunkt $t_0 = 0$. Zeigen Sie per Induktion für die Picard-Iterierten die Beziehung

$$x_n(t) \ = \ T_{2n}(t) \ , \qquad t \in I \ , \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.3:

(a) (i) Mit $(t_0, x_0) = (0, 0)$ und $f(t, x) = t^2 + x^2$ sowie mit der Rekursion (3.5) zu $x_0(t) = x_0 = 0$ ergeben sich die PICARD-Iterierten

$$x_1(t) \ = \ \int_0^t (s^2 + 0^2) ds \ = \ \frac{t^3}{3} \ , \quad x_2(t) \ = \ \int_0^t \left(s^2 + \left(\frac{s^3}{3} \right)^2 \right) ds \ = \ \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} \ ,$$

$$x_3(t) \ = \ \int_0^t \left(s^2 + \left(\frac{s^3}{3} + \frac{s^7}{63} \right)^2 \right) ds \ = \ \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{7 \cdot 3^2} + \frac{2t^{11}}{7 \cdot 3^3 \cdot 11} + \frac{t^{15}}{7^2 \cdot 3^5 \cdot 5} \ .$$

(ii) Da hier $f(t, y(t)) = \sin(t) + (y(t))^2$ und $(t, y_0) = (0, 0)$ ist, lauten mit $y_0(t) = y_0 = 0$ die entsprechenden PICARD-LINDELÖF-Iterationen

$$y_k(t) \ = \ \int_0^t f(s, y_{k-1}(s)) ds \ = \ \int_0^t \left(\sin(s) + (y_{k-1}(s))^2 \right) ds.$$

Somit ergeben sich

$$\begin{aligned} y_1(t) \ &= \ \int_0^t (\sin(s) + 0^2) ds \ = \ 1 - \cos(t) \ , \\ y_2(t) \ &= \ \int_0^t \left(\sin(s) + (1 - \cos(s))^2 \right) ds \ = \ \int_0^t \left(\sin(s) + 2 - 2\cos(s) - (\sin(s))^2 \right) ds \\ &= \ 1 - \cos(t) + 2t - 2\sin(t) - \frac{t - \sin(t)\cos(t)}{2} \end{aligned}$$

(b) (i) Mit $x_0(t) \ = \ 1$ ergeben sich die Picard-Iterierten

$$\begin{aligned} x_1(t) \ &= \ 1 + \int_0^t (-2s) \cdot 1 \ ds \ = \ 1 - t^2 \ , \\ x_2(t) \ &= \ 1 + \int_0^t (-2s) \cdot (1 - s^2) \ ds \ = \ 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} \ , \\ x_3(t) \ &= \ 1 + \int_0^t (-2s) \cdot \left(1 - s^2 + \frac{s^4}{2} \right) \ ds \ = \ 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} \ , \\ x_4(t) \ &= \ 1 + \int_0^t (-2s) \cdot \left(1 - s^2 + \frac{s^4}{2} - \frac{s^6}{3} \right) \ ds \ = \ 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^8}{24} \ . \end{aligned}$$

(ii) Mittels Trennung der Variablen ergibt sich $x(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}$ als Lösung von (3.7). Diese besitzt die Potenzreihenentwicklung (die mit der Taylor-Entwicklung um 0 übereinstimmt)

$$x(t) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k} \ = \ 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^8}{24} \mp \ldots$$

Wir zeigen nun (Induktionsanfang steht bereits oben) per Induktion, dass

$$x_n(t) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k} \,. \tag{3.8}$$

Angenommen, (3.8) gelte. Dann ergibt sich mit (3.5) wie behauptet

$$\begin{aligned}
x_{n+1}(t) &= 1 + \int_0^t (-2s) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} s^{2k}\, ds \;=\; 1 + 2\int_0^t \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} s^{2k+1}\, ds \\
&= 1 + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k! \cdot (2k+2)} t^{2k+2} \;=\; 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} t^{2(k+1)} \;=\; 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k}.
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 3.4:

(a) Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung $y' + 3y + \sqrt[3]{y^2} = 0$ zum Anfangswert $y(0) = 1$.

(b) Zeigen Sie:

  (i) Die Lösung aus (a) ist auf dem Intervall $0 \le x \le \ln(4)$ eindeutig (Satz von Picard-Lindelöf).

  (ii) Die Lösung der Anfangswertaufgabe aus (a) ist auf jedem Intervall $0 \le x \le b$ mit $b > \ln(4)$ nicht mehr eindeutig. Geben Sie insbesondere eine zweite Lösung an.

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.4:

(a) Die Gleichung ist eine Bernoulli-Differentialgleichung, so dass die Substitution $z := y^{\frac{1}{3}}$ für z wegen $z' = \frac{y'}{3y^{\frac{2}{3}}}$ über $3z^2 z' + 3z^3 + z^2 = 0$ die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$z' = -z - \frac{1}{3}$$

liefert, deren Lösung $z(x) = C\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{3}$ mittels Rücksubstitution schließlich auf $y(x) = (C\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{3})^3$ führt. Die Probe

$$\begin{aligned}
y' + 3y + \sqrt[3]{y^2} &= -3\left(C\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{3}\right)^2 C\mathrm{e}^{-x} + 3\left(C\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{3}\right)^3 + \left(C\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{3}\right)^2 \\
&= \left(C\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{3}\right)^2 \left(-3C\mathrm{e}^{-x} + 3C\mathrm{e}^{-x} - 1 + 1\right) \;=\; 0\,,
\end{aligned}$$

bestätigt, dass die obigen Funktionen wirklich die Differentialgleichung lösen.
Eine Lösung zum Anfangswert $y(0) = 1$ ist also $y_1(x) = (\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{3})^3$.

(b) (i) Die Differentialgleichung $y' + 3y + \sqrt[3]{y^2} = 0$ hat die Gestalt $y' = f(y)$ mit der rechten Seite $f(y) = -3y(x) - \sqrt[3]{y^2}$, deren Ableitung $f'(y) = -3 - \frac{2y}{3\sqrt[3]{y^4}}$ lautet. Somit ist f auf jedem Intervall $]\varepsilon, \infty[$, $\varepsilon > 0$, Lipschitz-stetig mit der Lipschitzkonstanten

$$L \;:=\; \max_{]\varepsilon,\infty[} |f'(y)| \;=\; f'(\varepsilon) \;=\; 3 + \frac{2}{3\sqrt[3]{\varepsilon}}\,.$$

Daher ist die Lösung zum Anfangswert $y(0) = 1$ eindeutig, solange $y_1 > 0$ ist, und dies ist aufgrund der Monotonie der Lösung und wegen $\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{3} = 0 \iff x = \ln(4)$ nur auf dem Intervall $0 \le x \le \ln(4)$ der Fall.

(ii) Eine offensichtliche Lösung der Gleichung, die nicht in der obigen Lösungsschar enthalten ist, ist die konstante Funktion $y_0 = 0$. Somit hat man neben der Lösung y_1 noch die zusammengesetzte Lösung, die bis zu $t = \ln(4)$ mit y_1 übereinstimmt und danach konstant 0 ist. Bemerkenswert ist, dass diese Lösung ebenso stetig differenzierbar (aber nicht analytisch) ist.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 4

Nichtlineare Schwingungen

- Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Form
$$\ddot{x}(t) = -U'(x(t)) \tag{4.1}$$
mit einer stetig differenzierbaren Funktion $U\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ treten in der Mechanik als Newtonsche Bewegungsgleichungen für ein eindimensionales Punktteilchen in einem Potentialfeld auf.

- Offensichtlich kann man jede Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form
$$\ddot{x} \;=\; f(x) \tag{4.2}$$
mit stetigem $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch Wahl einer Stammfunktion U von $-f$ in die Form (4.1) bringen.

- Multipliziert man (4.1) mit $\dot{x}$ und integriert auf beiden Seiten bezüglich t, so erhält man
$$\frac{1}{2}(\dot{x})^2 = E - U(x)\,. \tag{4.3}$$
Also erfüllt x eine autonome Differentialgleichung erster Ordnung $\dot{x} = \pm\sqrt{2(E-U(x))}$, die man mittels Trennung der Variablen lösen kann.

- **Satz 1.27 (Existenz und Eindeutigkeit periodischer Lösungen):** Sei $U\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $(t_0, x_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$ und sei $E := \frac{1}{2}v_0^2 + U(x_0)$. Ist (x_A, x_B) ein x_0 enthaltendes Intervall mit $U(x_A) = U(x_B) = E$, $U(x) < E$ auf (x_A, x_B) und $U'(x_A), U'(x_B) \neq 0$, dann besitzt (4.1) zu den Anfangswerten $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = v_0$, genau eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$. Diese hat Werte in $[x_A, x_B]$ und ist periodisch mit Periode $T := 2\displaystyle\int_{x_A}^{x_B} \frac{1}{\sqrt{2(E-U(\xi))}}\,d\xi$.

Autonome Differentialgleichungen zweiter Ordnung

- Eine allgemeine autonome Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die Form
$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})\,. \tag{4.4}$$

- Hängt f nur von $\dot{x}$ ab, so liefert die Substitution $y(t) := \dot{x}(t)$ eine autonome Differentialgleichung erster Ordnung für y, die man mit Trennung der Variablen lösen kann. Anschließende Rücksubstitution ergibt $x = \displaystyle\int y(t)\,dt + \text{const}$.

- Hängt f nur von x ab, so geht Gleichung (4.4) in Gleichung (4.1) über, und durch Multiplikation mit $\dot{x}$ führt man die Gleichung auf eine autonome Differentialgleichung erster Ordnung zurück.

- Im allgemeinen Fall kann man (4.4) nur auf eine nichtautonome Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen, indem man $p(x) := \dot{x}(t(x))$ mit der Umkehrfunktion $t(x)$ von $x(t)$ betrachtet. Da mittels Kettenregel und der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion
$$p'(x) \;=\; \ddot{x}(t(x)) \cdot t'(x) \;=\; f\Big(x(t(x)), \dot{x}(t(x))\Big) \cdot \frac{1}{\dot{x}(t(x))} \;=\; \frac{f(x,p)}{p}$$
folgt, erfüllt p die Differentialgleichung erster Ordnung $p'(x) = \dfrac{f(x, p(x))}{p(x)}$. Ist $p(x)$ eine solche Lösung, so kann man dann $t(x)$ durch
$$t(x) \;=\; \int t'(x)\,dx \;=\; \int \frac{1}{\dot{x}(t(x))}\,dx \;=\; \int \frac{1}{p(x)}\,dx \tag{4.5}$$
zurückgewinnen und erhält die Lösung $x(t)$ von (4.4) als Umkehrfunktion von $t(x)$.

Zusatzaufgabe 4.1:

(a) Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem beliebigen Intervall I.
Beweisen **oder** widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist I kompakt und f stetig differenzierbar, so ist f auch Lipschitz-stetig.

(ii) Ist I kompakt und f gleichmäßig stetig, so ist f auch Lipschitz-stetig.

(iii) Ist f stetig differenzierbar, so ist f auch Lipschitz-stetig.

(b) Diskutieren Sie die Lösbarkeit der folgenden autonomen nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

(i) $y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$ (ii) $y'' = -y^3$

(c) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme für Differentialgleichungen 2. Ordnung:

(i) $\begin{cases} \ddot{x}(t) &= \dfrac{t+2}{\dot{x}}, \\ x(0) &= 5, \\ \dot{x}(0) &= -2\ . \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} \ddot{x}(t) &= x(t) + 1, \\ x(0) &= -2, \\ \dot{x}(0) &= 1\ . \end{cases}$ (iii) $\begin{cases} \ddot{x}(t) &= x(t)\,(\dot{x}(t))^3\,, \\ x(0) &= 2, \\ \dot{x}(0) &= -\frac{1}{2}\ . \end{cases}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.1:

(a) (i) Diese Aussage ist stets richtig, da $|f'| = |.| \circ f'$ als Komposition stetiger Funktionen ebenso eine stetige Funktion ist und somit nach dem Satz vom Minimum/Maximum auf jedem Kompaktum I ihr globales Maximum annimmt und somit $L := \max\limits_{x\in I} |f'(x)|$ eine Lipschitz-konstante ist. Nach dem Mittelwertsatz folgt nämlich dann für beliebige $x, y \in I$ mit $x < y$ die Existenz eines $\xi = \xi(x, y) \in \,]x, y[$ mit

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \;=\; \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \;=\; |f'(\xi)| \;\le\; \max_{x\in I} |f'(x)| \;=\; L,$$

also wie behauptet $\forall x, y \in I\colon |f(x) - f(y)| \le L|x - y|$.

(ii) Diese Aussage ist im Allgemeinen **falsch**, denn beispielsweise ist $\sqrt{|x|}$ auf $I = [-1, 1]$ als stetige Funktion auf einem Kompaktum gleichmäßig stetig, aber wegen der Unbeschränktheit der Ableitung nahe Null nicht Lipschitz-stetig (vgl. auch Argumentation von (i)).
Ein anderes Beispiel etwa wäre die stetige Fortsetzung von x^x auf $[0, 1]$, deren einseitiger Differenzenquotient bei Null gegen $-\infty$ strebt, so dass auch hier keine Lipschitz-Stetigkeit vorliegen kann.

(iii) Diese Aussage ist auf nichtkompaktem I im Allgemeinen **falsch**, denn beispielsweise existiert für $f(x) = x^2$ wegen $|f'(x)| = 2|x|$ das Supremum von $|f'(x)|$ über $I = \mathbb{R}$ nicht, so dass wir ebenfalls keine Lipschitz-Konstante finden können (vgl. Argumentation von (ii)).
Ein weiteres Beispiel wäre $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $]0, 1]$.

(b) (i) Es handelt sich um eine autonome Differentialgleichung der Gestalt $y'' = f(y')$. Durch die Substitution $z := y'$ geht die Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$ in die autonome Differentialgleichung erster Ordnung $z' = \sqrt{1 + z^2}$ über. Trennung der Variablen liefert mit der Substitutionsregel und $z = \sinh(\varphi)$ die Beziehung

$$\operatorname{arsinh}(z(\varphi)) + C \;=\; \int \frac{z'(\varphi)}{\sqrt{1 + (z(\varphi))^2}}\, d\varphi \;=\; \int 1\, d\varphi \;=\; \varphi$$

und daher $z(\varphi) = \sinh(\varphi + C)$. Somit ergibt sich $y(\varphi) = \cosh(\varphi + C) + D$ mit beliebigen Konstanten $C, D \in \mathbb{R}$.

(ii) Es handelt sich um eine autonome Differentialgleichung zweiter Ordnung der Gestalt (4.2), also um eine nichtlineare Schwingung mit $U(t) = \frac{t^4}{4}$. Durch Multiplikation mit der Ableitung y' erhalten wir

$$\left(\frac{1}{2}(y')^2\right)' \;=\; y'y'' \;=\; -\,y'y^3 \;=\; -\left(\frac{1}{4}y^4\right)' \tag{4.6}$$

und somit nach Integration die implizite Differentialgleichung $(y')^2 = 2(E - \frac{1}{4}y^4)$, welche lokal nach

$$y' \;=\; \pm\sqrt{2\left(E - \frac{1}{4}y^4\right)} \tag{4.7}$$

aufgelöst werden kann. Prinzipiell kann diese Differentialgleichung für $E > 0$ mittels Trennung der Variablen gelöst werden, jedoch ist die Stammfunktion

$$H_E(y) := \int \frac{1}{\sqrt{2(E - \frac{1}{4}y^4)}}\,dy \tag{4.8}$$

nicht in geschlossener Form darstellbar.
Aus unseren Erkenntnissen über nichtlineare Schwingungen wissen wir jedoch nach Satz 1.27, dass es zu Anfangswerten $y(0) = y_0$, $y'(0) = v_0 \neq 0$, genau eine Lösung y auf ganz $\mathbb{R}$ gibt, welche Werte zwischen $y_A := -\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{4}y_0^4}$ und $y_B := \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{4}y_0^4}$ annimmt (Beachte, dass einerseits wegen $v_0 \neq 0$ und

$$-\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{4}y_0^4} \;<\; -\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{1}{4}y_0^4} \;=\; -\,|y_0| \;\leq\; |y_0| \;\leq\; \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{1}{4}y_0^4} \;<\; \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{4}y_0^4}$$

schon $y_0 \in \,]y_A, y_B[$ gilt und andererseits

$$U(y_A) \;=\; U(y_B) \;=\; \frac{1}{4}\left(\mp\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{4}y_0^4}\right)^4 \;=\; \frac{1}{2}v_0^2 + U(y_0) \;=\; E$$

sowie in der Tat für alle $y \in \,]y_A, y_B[$ auch $U(y) < E$ erfüllt ist.) und T-periodisch mit der Periode

$$T = 2\int_{y_A}^{y_B} \frac{1}{\sqrt{2(E - \frac{1}{4}y^4)}}\,dy \tag{4.9}$$

ist, wobei

$$E := \frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{4}y_0^4\,. \tag{4.10}$$

Ausrechnen kann man die Lösung prinzipiell (jedoch nicht explizit) mit Hilfe der Umkehrfunktion von $H_E\colon [y_A, y_B] \to [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ aus $H_E(y(t)) = t$.

(c) (i) Die zugrunde liegende Differentialgleichung ist nicht von x abhängig, sondern hat die Gestalt $\ddot{x} = f(t, \dot{x})$, so dass die Substitution $v(t) := \dot{x}(t)$ demnach

$$\dot{v} \;=\; \ddot{x} \;=\; \frac{t+2}{\dot{x}} \;=\; \frac{t+2}{v} \quad\overset{\text{TdV}}{\Longrightarrow}\quad \left(v^2\right)' \;=\; 2v\dot{v} \;=\; 2(t+2) \;=\; \left((t+2)^2 + C\right)'$$

sowie nach Integrieren $v^2 \;=\; (t+2)^2 + C$ liefert. Aus der Anfangsbedingung $v(0) = \dot{x}(0) = -2$ ergibt sich zunächst $C = 0$, also $v^2 \;=\; (t+2)^2$ und wegen $v(0) = \dot{x}(0) < 0$ schließlich $\dot{x}(t) \;=\; v(t) \;=\; -\,(t+2)$, sowie nach Integrieren dieser Gleichung

$$x(t) \;=\; -\,\frac{(t+2)^2 + D}{2}\,.$$

Aus der Anfangsbedingung $x(0) = 5$ ergibt sich nun $D = -14$ und somit am Ende

$$x(t) \;=\; 7 - \frac{(t+2)^2}{2} \;=\; \frac{10 - 4t - t^2}{2}\,.$$

(ii) Die zugrunde liegende Differentialgleichung ist autonom zweiter Ordnung der Gestalt (4.2), es handelt sich also um eine nichtlineare Schwingung mit $U(x) = -\frac{(x+1)^2}{2}$. Aufgrund der Anfangsbedingung $x(0) = -2$ entfällt die singuläre Lösung $x \equiv -1$. Multiplikation mit $2\dot{x}$ liefert

$$\left((\dot{x})^2\right)' \;=\; 2\dot{x}\ddot{x} \;=\; 2\dot{x}\,(x+1) \;=\; \left((x+1)^2 + C\right)'$$

und nach Integrieren somit $(\dot{x})^2 \;=\; (x+1)^2 + C$. Aus den Anfangsbedingungen $x(0) = -2$ sowie $\dot{x}(0) = 1$ ergibt sich nun $C = 0$ und wegen $(\dot{x})^2 \;=\; (x+1)^2$ weiter

$$\ln|x(t)+1| \;=\; \int \frac{\dot{x}(t)}{x(t)+1}\,dt \;=\; \pm\int 1\;dt \;=\; \pm\,t + \ln(D)$$

sowie nach Umstellen

$$x(t) \;=\; -1 \pm D\mathrm{e}^{\pm t}$$

Mit der Anfangsbedingung $x(0) = -2$ ergibt sich zunächst $x(t) = -1 - \mathrm{e}^{\pm t}$ und wegen der Anfangsbedingung $\dot{x}(0) = 1$ somit insgesamt $x(t) \;=\; -1 - \mathrm{e}^{-t}$.

(iii) Die zugrunde liegende Differentialgleichung ist autonom und hat die allgemeine Gestalt (4.4), Aufgrund der Anfangsbedingungen wissen wir, dass $\dot{x} \not\equiv 0$ ist, also keine Geradenstücke in Frage kommen. Setzen wir nun $p(x) = \dot{x}(t(x))$ mit der Umkehrfunktion $t(x)$ von $x(t)$, so ergibt sich mit der Differentialgleichung in x sowie mittels Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion

$$p'(x) \;=\; \ddot{x}(t(x))\cdot t'(x) \;=\; x\,(\dot{x}(t(x)))^3\cdot\frac{1}{\dot{x}(t(x))} \;=\; x(p(x))^3\cdot\frac{1}{p(x)} \;=\; x(p(x))^2\;,$$

welche eine Differentialgleichung in p ist. Trennung der Variablen sowie Integrieren liefert

$$-\frac{1}{p(x)} \;=\; \int\frac{p'(x)}{(p(x))^2}dx \;=\; \int x dx \;=\; \frac{x^2+C}{2} \qquad\Longleftrightarrow\qquad -2 \;=\; (x^2+C)p(x)\;.$$

Aus den Anfangsbedingungen $x(0) = 2$ sowie $p(x(0)) = \dot{x}(0) = -\frac{1}{2}$ folgt wegen

$$-2 \;=\; (2^2+C)\left(-\frac{1}{2}\right) \;=\; -\,\frac{4+C}{2} \;=\; -\,2 - \frac{C}{2}$$

zunächst $C = 0$ sowie nach Rücksubstitution von $-2 \;=\; (x^2+0)p(x)$ in x anschließend die Differentialgleichung erster Ordnung $-2 \;=\; x^2\dot{x}$. Dies führt nach Integration auf

$$-2t \;=\; \frac{(x(t))^3 + D}{3}\;.$$

Die Anfangsbedingung $x(0) = 2$ liefert nun $D = -8$, also $x(t) \;=\; \operatorname{sign}(8-6t)\sqrt[3]{|8-6t|}$.

Zusatzaufgabe 4.2: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig.

Zeigen Sie folgende Eigenschaften der matrixwertigen Exponentialfunktion

(a) $AB \;=\; BA \;\Longrightarrow\; \mathrm{e}^{A+B} \;=\; \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B$ (b) $\det C \neq 0 \;\Longrightarrow\; \mathrm{e}^{C^{-1}AC} \;=\; C^{-1}\mathrm{e}^A C$

(c) $\mathrm{e}^{\operatorname{diag}(\kappa_1,\ldots,\kappa_n)} \;=\; \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{\kappa_1},\ldots,\mathrm{e}^{\kappa_n})$ (d) $\left(\mathrm{e}^A\right)^{-1} \;=\; \mathrm{e}^{-A}$ (e) $\mathrm{e}^{(s+t)A} \;=\; \mathrm{e}^{sA}\cdot\mathrm{e}^{tA}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.2:

(a) Zunächst erinnern wir uns, dass der Raum $L(X,X)$ der stetigen linearen Endomorphismen $A\colon X \to X$ eines Banach-Raumes $(X, \|.\|_X)$ mit der Operatornorm

$$\|A\|_{L(X,X)} := \sup_{x\in X\setminus\{0_X\}} \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X}$$

und bezüglich der Hintereinanderausführung eine Banach-Algebra ist (Lemma 1.53, J. Merker, Analysis 2), also insbesondere $\big(L(X,X), \|.\|_{L(X,X)}\big)$ ein Banach-Raum ist, in dem jede absolut konvergente Reihe konvergiert (Lemma 1.54, J. Merker, Analysis 2). Aufgrund der absoluten Konvergenz der Reihen

$$\mathrm{e}^A \ := \ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m \quad , \qquad \mathrm{e}^B \ := \ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} B^m \tag{4.11}$$

können wir die Reihen beliebig umordnen. Dementsprechend folgt die behauptete Funktionalgleichung aus der Kommutativität von A und B (vgl. Cauchy-Produkt von Reihen und Binomischer Lehrsatz sowie Koeffizientenvergleich nach Ausmultiplizieren) wegen

$$\frac{(A+B)^m}{m!} \ = \ \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^{m-k} B^k \ = \ \sum_{k=0}^{m} \frac{A^{m-k}}{(m-k)!} \cdot \frac{B^k}{k!} \ .$$

(b) Jeweils über Induktion erhalten wir die Aussagen $\forall k \in \mathbb{N}\colon \big(C^{-1}AC\big)^k \ = \ C^{-1}A^kC$ sowie

$$\forall m \in \mathbb{N}\colon \sum_{k=0}^{m} C^{-1}A_kC \ = \ C^{-1} \sum_{k=0}^{m} A_kC$$

und somit auch
$$\forall m \in \mathbb{N}\colon \sum_{k=0}^{m} \frac{\big(C^{-1}AC\big)^k}{k!} \ = \ C^{-1} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!} \right) C \ ,$$

woraus für $m \to \infty$ die Behauptung folgt.

(c) Wiederum mittels Induktion erhalten wir die Aussagen

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon \ (\mathrm{diag}(\kappa_1, \ldots, \kappa_n))^k \ = \ \mathrm{diag}(\kappa_1^k, \ldots, \kappa_n^k)$$

sowie
$$\forall m \in \mathbb{N}\colon \sum_{k=0}^{m} (\mathrm{diag}(\kappa_1, \ldots, \kappa_n))^k \ = \ \sum_{k=0}^{m} \mathrm{diag}(\kappa_1^k, \ldots, \kappa_n^k) \ = \ \mathrm{diag}\left(\sum_{k=0}^{m} \kappa_1^k, \ldots, \sum_{k=0}^{m} \kappa_n^k \right)$$

und damit auch
$$\forall m \in \mathbb{N}\colon \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} (\mathrm{diag}(\kappa_1, \ldots, \kappa_n))^k \ = \ \sum_{k=0}^{m} \mathrm{diag}\left(\frac{\kappa_1^k}{k!}, \ldots, \frac{\kappa_n^k}{k!} \right) \ = \ \mathrm{diag}\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{\kappa_1^k}{k!}, \ldots, \sum_{k=0}^{m} \frac{\kappa_n^k}{k!} \right),$$

woraus für $m \to \infty$ erneut die Behauptung folgt.

(d) Fassen wir die Nullmatrix als spezielle Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$ mit $\kappa_1 = \ \ldots \ = \kappa_n \ = \ 0$ auf, so folgt aus (a) und (c) demnach

$$\mathrm{e}^A \mathrm{e}^{-A} \ \overset{\text{(a)}}{=} \ \mathrm{e}^{A-A} \ = \ \mathrm{e}^{0 \cdot I_n} \ = \ \mathrm{e}^{\mathrm{diag}(0,\ldots,0)} \ \overset{\text{(c)}}{=} \ \mathrm{diag}(\mathrm{e}^0, \ldots, \mathrm{e}^0) \ = \ \mathrm{diag}(1, \ldots, 1) \ = \ I_n$$

und aufgrund der Eindeutigkeit der multiplikativen Inverse im Matritzenring somit $\big(\mathrm{e}^A\big)^{-1} \ = \ \mathrm{e}^{-A}$.

(e) Dies folgt sofort aus (a) mit $A = sA$ und $B = tA$, die als Vielfache derselben Matrix offenbar kommutieren.

Zusatzaufgabe 4.3:

(a) Bestimmen Sie e^{tA} für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit (i) $A^2 = I_n$ (ii) $A^2 = A$ (iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Zeigen Sie, dass für die Matrizen $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ wirklich die Ungleichheit $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$ gilt.

(c) Wie sieht die Matrix e^{tJ} zu einem Jordan-Block $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ aus?

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.3:

(a) (i) Für selbstinverse Matrizen A (also $A^2 = I_n$) erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = I_n + tA + \frac{t^2}{2!}\underbrace{A^2}_{=I_n} + \frac{t^3}{3!}\underbrace{A^3}_{=A} + \frac{t^4}{4!}\underbrace{A^4}_{=I_n} + \frac{t^5}{5!}\underbrace{A^5}_{=A} + \frac{t^6}{6!}\underbrace{A^6}_{=I_n} + \frac{t^7}{7!}\underbrace{A^7}_{=A} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \dots\right) I_n + \left(t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} + \dots\right) A \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\right) I_n + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) A = \cosh(t) I_n + \sinh(t) A\,. \end{aligned}$$

(ii) Für idempotente Matrizen A (also $A^2 = A$) erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = I_n + tA + \frac{t^2}{2!}\underbrace{A^2}_{=A} + \frac{t^3}{3!}\underbrace{A^3}_{=A} + \frac{t^4}{4!}\underbrace{A^4}_{=A} + \frac{t^5}{5!}\underbrace{A^5}_{=A} + \frac{t^6}{6!}\underbrace{A^6}_{=A} + \dots \\ &= I_n + \left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^6}{6!} + \dots\right) A = I_n + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\right) A = I_n + (e^t - 1) A\,. \end{aligned}$$

(iii) Da $R \cdot R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = R^2 \cdot R$ gilt, erhalten wir wegen $A = R^2 + R$ demnach

$$e^{tA} = e^{tR^2} e^{tR} = (I_3 + tR^2)\left(I_3 + tR + \tfrac{t^2}{2} R^2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t + \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und wegen $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ auch wirklich

$$\exp\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

(c) Ähnlich wie zuvor erhalten wir

$$e^{tJ} = e^{t\lambda I_4 + R} = e^{t\lambda I_4} \cdot e^R = e^{t\lambda} e^R = e^{t\lambda}\left(I_4 + R + \frac{1}{2!} R^2 + \frac{1}{3!} R^3\right)$$

mit der nilpotenten Matrix $R = t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d.h.

$$e^{tJ} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \frac{t^2}{2}e^{t\lambda} & \frac{t^3}{6}e^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \frac{t^2}{2}e^{t\lambda} \\ 0 & 0 & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}.$$

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 5

Lineare Systeme 1. Ordnung versus Lineare Differentialgleichungen n.-ter Ordnung

- In Verallgemeinerung von (1.4) hat eine (explizite) lineare n-dimensionale Differentialgleichung erster Ordnung die Form
$$x' = A(t)x + b(t) \tag{5.1}$$
mit einer zeitabhängigen Matrix $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und einem zeitabhängigen Vektor $b : I \to \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Man nennt (5.1) auch ein n-dimensionales lineares System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Im Fall $b = 0$ nennt man (5.1) **homogen**, und ist A von t unabhängig, dann spricht man von einem linearen System **mit konstanten Koeffizienten**.

- **Satz 2.1 (Existenz & Eindeutigkeit der Lösung des AWP):** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $A\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie $b\colon I \to \mathbb{R}^n$ stetig, dann gibt es zu jedem $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems $x' = A(t)x + b(t)$, $x(t_0) = x_0$.

- **Satz 2.3 (Lösungsraum im homogenen Fall):** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig. Dann bilden die Lösungen des homogenen linearen Systems $x' = Ax$ einen n-dimensionalen Vektorraum, und für Lösungen $x_1, \ldots, x_k$ von $x' = Ax$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:
  (a) $x_1, \ldots, x_k$ sind linear unabhängige Kurven.
  (b) Es gibt ein $t_0 \in I$, so dass die Vektoren $x_1(t_0), \ldots, x_k(t_0)$ linear unabhängig sind.
  (c) Für jedes $t \in I$ sind die Vektoren $x_1(t), \ldots, x_k(t)$ linear unabhängig.

- **Definition 2.4:** Eine Basis $x_1, \ldots, x_n$ des Lösungsraumes des n-dimensionalen homogenen linearen Systems $x' = Ax$ nennt man ein **Fundamentalsystem**.

- **Satz 2.5:** Ist $X\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ein Lösungssystem der homogenen linearen Differentialgleichung $x' = A(t)x$, dann genügt die **Wronski-Determinante** genannte Funktion $y := \det(X)$ der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = \operatorname{tr}(A(t))y$, wobei $\operatorname{tr}(A(t))$ die Spur der Matrix $A(t)$ bezeichnet.

- **Bemerkung:** Da die Differentialgleichung $y' = \operatorname{tr}(A(t))y$ zum Anfangswert $y(t_0) = y_0$ durch
$$y(t) \;=\; \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}(A(s))\, ds\right) y_0 \tag{5.2}$$
gelöst wird, folgt aus Satz 2.5, dass für ein Lösungssystem die Wronski-Determinante entweder für alle Zeiten verschwindet (dies ist bei $y_0 = 0$ der Fall) oder für alle Zeiten ungleich Null ist (falls $y_0 \neq 0$ gilt). Diese Aussage ist mit der Äquivalenz von (b) und (c) aus Satz 2.3 gleichbedeutend.

- **Satz 2.6:** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $A\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie $b\colon I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Ist x_p eine Lösung des inhomogenen linearen Systems (5.1), dann hat jede weitere Lösung x von (5.1) die Form $x = x_p + x_h$ mit einer Lösung x_h des homogenen linearen Systems $x' = A(t)x$.

- **Satz 2.7 (Variation der Konstanten):** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie $b\colon I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Ist X ein Fundamentalsystem des homogenen linearen Systems $x' = A(t)x$, so erhält man eine Lösung x_p des inhomogenen linearen Systems $x' = A(t)x + b(t)$ durch den Ansatz $x_p(t) = X(t)c(t)$, aus dem sich bis auf einen konstanten Vektor
$$c(t) = \int_{t_0}^{t} X(s)^{-1} b(s)\, ds \tag{5.3}$$
ergibt.

- In Verallgemeinerung von (1.4) hat eine (explizite) lineare (eindimensionale) Differentialgleichung n-ter Ordnung die Form

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \tag{5.4}$$

mit zeitabhängigen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ und einer Inhomogenität $b\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

- Nach Satz 1.4 ist die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung (5.4) über

$$y(t) = (x(t), x'(t), \ldots, x^{(m-1)}(t))$$

zum linearen n-dimensionalen System

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \ldots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

äquivalent. Insbesondere kann man die Sätze 2.1, 2.3 und 2.6 auf lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung übertragen:

- **Satz 2.8 (AWP, Lösungsraum):** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a_0, a_1, \ldots, a_n\colon I \to \mathbb{R}$ sowie $b\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert zu jedem $(t_0, x_0, \ldots, x_{n-1}) \in I \times \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $x\colon I \to \mathbb{R}$ von (5.4) zu den Anfangswerten $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$, $\ldots$, $x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$.
Die Lösungen der homogenen Gleichung

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0 \tag{5.6}$$

$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$ bilden einen n-dimensionalen Vektorraum, und kennt man eine Lösung x_p der inhomogenen Gleichung (5.4), dann hat jede weitere Lösung x der inhomogenen Gleichung (5.4) die Form $x = x_p + x_h$ mit einer Lösung x_h der homogenen Gleichung.

- **Bemerkungen:**

  (a) Eine Basis des Lösungsraumes der homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung (5.6) wird ebenfalls als **Fundamentalsystem** bezeichnet.

  (b) Für n linear unabhängige Lösungen $x_1, \ldots, x_n$ von (5.6) ist das Fundamentalsystem des zugehörigen Systems (5.5) durch

$$Y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1' & x_2' & \ldots & x_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

  gegeben, wobei die Inhomogenität bei (5.5) nur in der letzten Zeile einen nicht verschwindenden Eintrag besitzt. Mit den Bezeichnungen

$$W(s) \;:=\; \det(Y(s)) \qquad \text{und} \qquad W_i(s) \;:=\; \det(Y_i(s)) \;, \tag{5.8}$$

  wobei $Y_i(s)$ diejenige Matrix ist, welche aus $Y(s)$ durch Streichen der i-ten Spalte und n-ten Zeile hervorgeht[5], liefert die Cramersche Regel sowie Satz 2.7 (Variation der Konstanten) als eine partikuläre Lösung x_p von (5.4) somit

$$x_p(t) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} x_i(t) \int_{t_0}^{t} \frac{W_i(s)}{W(s)} b(s)\, ds \,. \tag{5.9}$$

[5] $W_i(s)$ ist also die Wronski-Determinante zu $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ bis zur $(n-2)$-ten Ableitung

Die Reduktionsmethode von d'Alembert

- **Reduktion der Dimension:**
Kennen wir zum n-dimensionalen homogenen linearen Systems $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ bereits eine nichttriviale[6] Lösung $\xi\colon I \to \mathbb{R}^n$, so liefert der Ansatz[7]

$$x(t) := \lambda(t)\xi(t) + z(t) \qquad \text{mit} \qquad z(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad y(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

mit einem skalaren $\lambda\colon I \to \mathbb{R}$ wegen der Übereinstimmung von

$$\begin{aligned} A(t)x(t) &= \lambda(t)A(t)\xi(t) + A(t)z(t)\ , \\ \dot{x}(t) &= \lambda(t)\underbrace{\dot{\xi}(t)}_{=A(t)\xi(t)} + \dot{\lambda}(t)\xi(t) + \dot{z}(t) \end{aligned}$$

die Gleichung

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) - \dot{\lambda}(t)\xi(t) \iff \begin{cases} \dot{\lambda}(t) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{a_{1k}(t)}{\xi_1(t)} z_k(t) = \sum_{k=2}^{n} \frac{a_{1k}(t)}{\xi_1(t)} y_{k-1}(t)\ , \\ \dot{y}_j(t) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(a_{j+1,k}(t) - \frac{\xi_{j+1}(t)}{\xi_1(t)} a_{1k}(t) \right) y_{k-1}(t)\ , \end{cases} \tag{5.12}$$

also das $(n-1)$-dimensionale homogene lineare System $\dot{y}(t) = B(t)y(t)$ für $y\colon I \to \mathbb{R}^{n-1}$ mit

$$B(t) := \left(a_{j+1,r+1}(t) - \frac{\xi_{j+1}(t)}{\xi_1(t)} a_{1,r+1}(t) \right)_{j,r=1}^{n-1}\ . \tag{5.13}$$

Ist nun $\Upsilon_2(t), \ldots, \Upsilon_n(t)$ ein Fundamentalsystem zu $\dot{y}(t) = B(t)y(t)$, so kann man zu jedem Υ_k durch Integration der ersten Gleichung in (5.12) zunächst eine skalare Funktion $\lambda_k(t)$ und danach mittels (5.11) eine Lösung $\xi_k(t)$, $k = 2, \ldots, n$ von $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ gewinnen.

- **Reduktion der Ordnung:**
Kennen wir auf I eine nichttriviale Lösung ξ_1 (also $\xi_1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$) der homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung (5.6), also von $Lx = 0$ mit

$$Lx := \sum_{k=0}^{n} a_k(t)x^{(k)} = x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x \qquad (\text{mit } a_n = 1),$$

so löst $x(t) = y(t)\xi_1(t)$ die DGL $Lx = 0$ wegen (Produktregel/Summationsreihenfolgenwechsel)

$$\begin{aligned} Lx(t) &:= \sum_{k=0}^{n} a_k(t) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} y^{(j)} \xi_1^{(k-j)}(t) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k(t)\xi_1^{(k-j)}(t) \right) y^{(j)} \\ &\overset{L\xi_1=0}{=} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k(t)\xi_1^{(k-j)}(t) \right) y^{(j)} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=j+1}^{n} \binom{k}{j+1} a_k(t)\xi_1^{(k-j-1)}(t) \right) (y')^{(j)}\ , \end{aligned}$$

wenn y' Lösung von $L_1 v := \sum_{j=0}^{n-1} b_j(t)v^{(j)} = 0$ mit $b_j(t) := \sum_{k=j+1}^{n} \binom{k}{j+1} a_k(t)\xi_1^{(k-j-1)}(t)$ ist.

[6] O.B.d.A. gelte $\xi_1(t) \neq 0$ auf dem Intervall I (anderenfalls verkleinere man I oder benenne Komponenten um)

[7] Alternativ findet man im Fall $\xi_n(t) \neq 0$ in (5.11) oftmals auch den Ansatz $z(t) := \begin{pmatrix} y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, der in äquivalenter Weise zum Ziel führt, wobei sich das resultierende Gleichungssystem (5.12) hier schreibt als

$$\dot{\lambda}(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{nk}(t)}{\xi_n(t)} z_k(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{nk}(t)}{\xi_n(t)} y_k(t)\ , \qquad \dot{y}_j(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_{j,k}(t) - \frac{\xi_j(t)}{\xi_n(t)} a_{nk}(t) \right) y_k(t)\ , \tag{5.10}$$

Zusatzaufgabe 5.1:

(a) Überführen Sie $y'''(t) - y''(t) - y'(t) + y(t) \;=\; f(t)$ in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung (in Matrix–Vektor–Schreibweise).

(b) Zeigen Sie, dass

$$Y(t) \;=\; \begin{pmatrix} e^t & te^t & e^{-t} \\ e^t & (1+t)e^t & -e^{-t} \\ e^t & (2+t)e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

ein Fundamentalsystem für das in (a) ermittelte lineare System bei $f = 0$ ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.1:

(a) Die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung $y'''(t) - y''(t) - y'(t) + y(t) \;=\; f(t)$ lässt sich in folgender Weise als ein System von gewöhnlichen DGLen 1. Ordnung darstellen:

Wir setzen: $\begin{array}{rcccl} y_1 & := & y & & \\ y_2 & := & y' & = & y_1' \\ y_3 & := & y'' & = & y_2' \\ & & y''' & = & y_3' \end{array}$ und erhalten $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} y_1' & = & & & y_2 & & & & \\ y_2' & = & & & & & y_3 & & \\ y_3' & = & -y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & f(t) \end{array}\right.$

In Matrix–Vektor–Schreibweise ergibt sich daher

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & + & y_2 & + & 0 \\ 0 & + & 0 & + & y_3 \\ -y_1 & + & y_2 & + & y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix}, \quad \text{also}$$

$$\mathbf{y}' \;=\; A\mathbf{y} + \mathbf{b} \qquad \text{mit} \qquad A \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} \;=\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt $\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} (1+t)e^t \\ (2+t)e^t \\ (3+t)e^t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} te^t \\ (1+t)e^t \\ (2+t)e^t \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$, also sind alle drei Kurven Lösungen. Desweiteren ist (5.14) sogar ein Fundamentalsystem, da die Wronski-Determinante

$$W(t) \;:=\; \det Y(t) \;=\; \det \begin{pmatrix} e^t & te^t & e^{-t} \\ e^t & (1+t)e^t & -e^{-t} \\ e^t & (2+t)e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \;=\; 4e^t$$

nirgends verschwindet, also sind die Spalten insbesondere linear unabhängig.

Bemerkung: Nach Satz 2.3 hätte es auch ausgereicht, die lineare Unabhängigkeit der Spalten von (5.14) für ein spezielles t nachzuweisen. So folgte die Behauptung auch, da beispielsweise für $t = 0$ die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind (die Wronski-Determinante ist 4 in $t = 0$).

Zusatzaufgabe 5.2:

(a) Gegeben seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $\frac{p^2}{4} - q = 0$ und die Differentialgleichung

$$y'' + py' + qy \;=\; 0. \tag{5.15}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode von d'Alembert die allgemeine Lösung von (5.15).

(b) Gegeben seien die Funktionen $p(t), q(t)$. Weiter sei y_1 eine (l.u.) Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + p(t)y' + q(t)y \;=\; 0. \tag{5.16}$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (5.16).

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.2:

(a) Nach Voraussetzung ist $q = \frac{p^2}{4}$ und demnach muss $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda t}$ mit $\lambda = -\frac{p}{2}$ eine Lösung der Differentialgleichung (5.15) sein. Mit dem Ansatz

$$y(t) \;=\; c(t) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{p}{2}t}$$

gehen wir in die Differentialgleichung (5.15) hinein und erhalten

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; qy(t) + py'(t) + y''(t) \;=\; \frac{p^2}{4} \cdot \left(c(t) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{p}{2}t}\right) + p \cdot \left(c(t) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{p}{2}t}\right)' + \left(c(t) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{p}{2}t}\right)'' \\ &=\; \left(\frac{p^2}{4} \cdot c(t) + p \cdot \left(c'(t) - \frac{p}{2} \cdot c(t)\right) + \left(c''(t) - p \cdot c'(t) + \frac{p^2}{4} \cdot c(t) \cdot\right)\right) \mathrm{e}^{-\frac{p}{2}t} \;=\; c''(t) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{p}{2}t}\,, \end{aligned}$$

also (wegen der Positivität der Exponentialfunktion) für $c(t)$ die Differentialgleichung

$$0 \;=\; c''(t) \qquad \Longrightarrow \qquad c_2 \;=\; c'(t) \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 + c_2 t \;=\; c(t)\,.$$

Somit ergibt sich die allgemeine Lösung

$$y(t) \;=\; (c_1 + c_2 t)\, \mathrm{e}^{-\frac{p}{2}t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

(Über die Wronski-Determinante können wir zeigen, dass $y_1(t) = \mathrm{e}^{-\frac{p}{2}t}$ und $y_2 = t\mathrm{e}^{-\frac{p}{2}t}$ linear unabhängig sind, da speziell für dieses Fundamentalsystem $W(t) = \mathrm{e}^{-\frac{p}{2}t} > 0$ gilt.)

(b) Angenommen, $y_1(t)$ sei eine Lösung von (5.16). Mit dem Ansatz $y(t) \;=\; c(t) \cdot y_1(t)$ folgt

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; q(t) \cdot y(t) + p(t) \cdot y'(t) + y''(t) \\ &=\; q(t) \cdot \Big(c(t)y_1(t)\Big) + p(t) \cdot \Big(c(t)y_1(t)\Big)' + \Big(c(t)y_1(t)\Big)'' \\ &=\; q(t) \cdot c(t)y_1(t) + p(t) \cdot \Big(c'(t)y_1(t) + c(t)y_1'(t)\Big) + \Big(c''(t)y_1(t) + 2c'(t)y_1'(t) + c(t)y_1''(t)\Big) \\ &=\; c(t)\Big(\underbrace{q(t)y_1(t) + p(t)y_1'(t) + y_1''(t)}_{=0}\Big) + c'(t)\Big(p(t)y_1(t) + 2y_1'(t)\Big) + c''(t)y_1(t)\,, \end{aligned}$$

also für $u(t) := c'(t)$ die lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung

$$u'(t)y_1(t) \;=\; -\Big(p(t)y_1(t) + 2y_1'(t)\Big)u(t)\,.$$

Demnach ergibt sich (unter zeitweiliger Vernachlässigung singulärer Lösungen)

$$\begin{aligned} \frac{u'(t)}{u(t)} \;=\; -p(t) - 2\frac{y_1'(t)}{y_1(t)} \;&\Longrightarrow\; u(t) \;=\; c_1 \cdot (y_1(t))^{-2}\, \mathrm{e}^{-\int^t p(s)ds} \quad \text{(inklusive sing. Lösung } u \equiv 0) \\ &\Longrightarrow\; c(t) \;=\; \int^t u(s)ds \;=\; c_1 \cdot \int^t \left((y_1(s))^{-2}\, \mathrm{e}^{-\int^s p(r)dr}\right) ds + c_2 \\ &\Longrightarrow\; y(t) \;=\; c(t) \cdot y_1(t) \;=\; \left(c_1 \cdot \int^t \left((y_1(s))^{-2}\, \mathrm{e}^{-\int^s p(r)dr}\right) ds + c_2\right) y_1(t) \end{aligned}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Zusatzaufgabe 5.3:

Lösen Sie die LEGENDRE-Differentialgleichung

$$(1-t^2)\ddot{x}(t) - 2t\dot{x}(t) + 2x(t) \;=\; 0 \tag{5.17}$$

auf $I =]-1,1[$, indem Sie sie in ein System 1. Ordnung überführen und anschließend mittels der Reduktionsmethode von D'ALEMBERT $\mathbf{u}(t) = (t,1)^T$ zu einem Fundamentalsystem auffüllen.

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.3:

Mit der Substitution $y_1(t) = x(t),\ y_2(t) = \dot{x}(t)$ gelangen wir zum System

$$\dot{\mathbf{y}}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2} \end{pmatrix} \mathbf{y}(t) \quad\Longrightarrow\quad \dot{\mathbf{u}}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t)$$

Unter der Annahme, dass die gewählte Ansatzfunktion

$$\mathbf{v}(t) \;=\; \varphi(t)\mathbf{u}(t) \;+\; \begin{pmatrix} z_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

obiges Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{v}}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2} \end{pmatrix} \mathbf{v}(t)$ erfüllt, gelangen wir zu

$$\dot{\varphi}(t)\mathbf{u}(t) \;+\; \varphi(t)\dot{\mathbf{u}}(t) \;+\; \begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \varphi(t) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t)}_{=\dot{\mathbf{u}}(t)} \;+\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und nach Substraktion von $\varphi(t)\dot{\mathbf{u}}(t)$ somit zu

$$\dot{\varphi}(t)\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \;+\; \begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \dot{\varphi}(t)\mathbf{u}(t) + \begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{1-t^2} z_1(t) \end{pmatrix}.$$

Aus der letzten Zeile erhalten wir $-\dfrac{2}{1-t^2} z_1(t) \;=\; \dot{\varphi}(t)$. Damit bleibt nun für die erste Zeile

$$t\dot{\varphi}(t) + \dot{z}_1(t) \;=\; -\frac{2t}{1-t^2} z_1(t) + \dot{z}_1(t) \;=\; 0 \quad \overset{z_1 \neq 0}{\Longrightarrow} \quad \frac{\dot{z}_1(t)}{z_1(t)} \;=\; \frac{2t}{1-t^2} \;=\; \frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t}$$

also nach Integration und Umstellen $z_1(t) = \dfrac{1}{1-t^2}$. Somit ist für die skalare Funktion $\varphi(t)$ das Integral

$$\varphi(t) \;=\; -\int_0^t \frac{2}{1-s^2} z_1(s)ds \;=\; -\int_0^t \frac{2}{(1-s^2)^2} ds$$

zu berechnen. Mittels Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\frac{2}{(1-s^2)^2} \;=\; \frac{a}{1-s} + \frac{b}{(1-s)^2} + \frac{c}{1+s} + \frac{d}{(1+s)^2}$$

mit $b = \lim\limits_{s\to 1} \dfrac{2}{(1+s)^2} \;=\; \dfrac{1}{2},\ d = \lim\limits_{s\to -1} \dfrac{2}{(1-s)^2} \;=\; \dfrac{1}{2}$. Setzen wir nun jeweils $s = 0$ und $s = 3$ erhalten wir für a und c noch das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 2 & = & a & + & \frac{1}{2} & + & c & + & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{32} & = & -\frac{a}{2} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{c}{4} & + & \frac{1}{32} \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 1 & = & a & + & c \\ -4 & = & -16a & + & 8c \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{2} \\ c & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

und somit ergibt sich

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{1}{1-s}+\frac{1}{(1-s)^2}+\frac{1}{1+s}+\frac{1}{(1+s)^2}\right) ds \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln|1-s|+\frac{1}{s-1}-\ln|1+s|+\frac{1}{s+1}\right]_0^t = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + \frac{t}{t^2-1}\,.\end{aligned}$$

Demzufolge ist eine zu $\mathbf{u}(t)$ linear unabhängige Lösung durch

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \varphi(t)\mathbf{u}(t) + \begin{pmatrix} z_1(t) \\ 0\end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + \frac{t}{t^2-1}\right)\begin{pmatrix} t \\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{1-t^2} \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + 1 \\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + \frac{t}{t^2-1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

gegeben, denn für alle $t \in]-1,1[$ verschwindet zur Matrix

$$Y(t) = (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) = \begin{pmatrix} t & \frac{t}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + 1 \\ 1 & \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + \frac{t}{t^2-1}\end{pmatrix}$$

die Wronski-Determinante

$$W(t) := \det Y(t) = \det\begin{pmatrix} t & \frac{t}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + 1 \\ 1 & \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + \frac{t}{t^2-1}\end{pmatrix} = \frac{1}{t^2-1}$$

nicht. Die allgemeine Lösung der Legendre-Differentialgleichung ist somit

$$x(t) = c_1 t + c_2\left(\frac{t}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + 1\right) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Bemerkung: Die Funktion $t \mapsto \frac{t}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + 1$ ist jeweils in $]-1,0[$ und $]0,1[$ (mindestens zweimal) stetig differenzierbar und eine Lösung der Legendre-Differentialgleichung, jedoch kann sie im Nullpunkt stetig differenzierbar fortgesetzt werden.

Zusatzaufgabe 5.4:

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' - \cos(x)y' + \sin(x)y = 0$, indem Sie nachprüfen, dass $\tilde{y}(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$ eine Lösung ist, und anschließend die Ordnung reduzieren.

(b) Ermitteln Sie mittels Variation der Konstanten eine partikuläre Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' - \cos(x)y' + \sin(x)y = \sin(x)$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.4:

(a) Es gilt $\tilde{y}'(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}$, $\tilde{y}''(x) = (\cos^2(x) - \sin(x))\mathrm{e}^{\sin(x)}$ und daher $\tilde{y}'' - \cos(x)\tilde{y}' + \sin(x)\tilde{y} = 0$. Also ist $\tilde{y}$ eine Lösung, und eine davon linear unabhängige Lösung suchen wir mittels des Ansatzes $y(x) = z(x)\tilde{y}(x)$. Dieser liefert $\tilde{y}z'' + (2\tilde{y}' - \cos(x)\tilde{y})z' = 0$ und daher $z'' + \cos(x)z' = 0$. Als Lösung dieser homogenen linearen DGL erster Ordung für z' ergibt sich $z' = C\mathrm{e}^{-\sin(x)}$, also ist $y(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-\sin(\tilde{x})}\,d\tilde{x}\right)\mathrm{e}^{\sin(x)}$ eine von $\tilde{y}$ linear unabhängige Lösung. Die Lösungen $\tilde{y}$ und y bilden somit ein Fundamentalsystem.

(b) Um mittels Variation der Konstanten eine partikuläre Lösung von $y'' - \cos(x)y' + \sin(x)y = \sin(x)$ zu finden, wählen wir das in (a) gefundene Fundamentalsystem $y_1(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$, $y_2(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-\sin(\tilde{x})}\, d\tilde{x}\right) \mathrm{e}^{\sin(x)}$. Für dieses lautet die Wronski-Determinate

$$W(t) = \det\left(\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\sin(x)} & \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-\sin(\tilde{x})}\, d\tilde{x}\right) \mathrm{e}^{\sin(x)} \\ \cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)} & 1 + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-\sin(\tilde{x})}\, d\tilde{x}\right) \cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{e}^{\sin(x)}\,.$$

Daher ergibt sich aus der allgemeinen Formel

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} y_i(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_i(s)}{W(s)} b(s)\, ds\,.$$

im hier behandelten Fall ($n = 2$)

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= -y_1(x) \int_0^x \frac{y_2(s)}{W(s)} b(s)\, ds + y_2(x) \int_0^x \frac{y_1(s)}{W(s)} b(s)\, ds \\
&= -\mathrm{e}^{\sin(x)} \int_0^x \left(\int_0^s \mathrm{e}^{-\sin(\tilde{x})}\, d\tilde{x} \right) \sin(s)\, ds + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-\sin(\tilde{x})}\, d\tilde{x} \right) \mathrm{e}^{\sin(x)} \int_0^x \sin(s)\, ds \\
&= -\mathrm{e}^{\sin(x)} \int_0^x \mathrm{e}^{-\sin(\tilde{x})} \left(\int_{\tilde{x}}^x \sin(s)\, ds \right) d\tilde{x} - \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-\sin(\tilde{x})}\, d\tilde{x} \right) \mathrm{e}^{\sin(x)} (\cos(x) - 1) \\
&= \mathrm{e}^{\sin(x)} \int_0^x \mathrm{e}^{-\sin(\tilde{x})} \left(\cos(x) - \cos(\tilde{x})\right) d\tilde{x} - \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-\sin(\tilde{x})}\, d\tilde{x} \right) \mathrm{e}^{\sin(x)} (\cos(x) - 1) \\
&= -\mathrm{e}^{\sin(x)} \int_0^x \mathrm{e}^{-\sin(\tilde{x})} \cos(\tilde{x})\, d\tilde{x} + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-\sin(\tilde{x})}\, d\tilde{x} \right) \mathrm{e}^{\sin(x)} \\
&= 1 - \mathrm{e}^{\sin(x)} + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-\sin(\tilde{x})}\, d\tilde{x} \right) \mathrm{e}^{\sin(x)}\,.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist auch die konstante Funktion 1 eine partikuläre Lösung, und diese hätte man vermutlich auch direkt raten können.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 6

Lineare Systeme 1. Ordnung mit konstanter Koeffizientenmatrix

- **Satz 2.9:** Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist die eindeutige Lösung von $x' = Ax$ zum Anfangswert $x(0) = x_0$ durch $x(t) = \exp(tA)x_0$ gegeben.

- **Lemma 2.10:** Für das m-dimensionale lineare System $\dot{x}(t) = (\lambda \operatorname{Id} + N)x(t)$ ist das Fundamentalsystem $X(t)$ mit $X(0) = \operatorname{Id}$ gegeben durch

$$X(t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} . \qquad \text{Dabei bezeichne} \qquad N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} .$$

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- **Bemerkung:** In jedes abstrakte Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ mit möglicherweise komplexen Koeffizienten, wie z.B. das Polynom

$$P(X) := X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \tag{6.1}$$

  mit Höchstkoeffizient $a_n := 1$, können für die Variable X nicht nur reelle oder komplexe Zahlen eingesetzt werden, sondern auch Matrizen und sogar Differentialoperatoren wie z.B. den Differentialoperator erster Ordnung $D := (\cdot)' = \frac{d}{dt}$. Potenzen D^k interpretiert man dabei als k-malige Anwendung von D.

- **Lemma 2.11:** Für jedes $P \in \mathbb{C}[X]$ und jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $P(D)e^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t}$.

  Korollar: Für jede Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$ von $P(\lambda)$ ist die Funktion $x(t) := e^{\lambda t}$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$P(D)x \;=\; 0\,. \tag{6.2}$$

- **Bemerkung:** Im Falle konstanter Koeffizienten können wir somit den $\boxed{\text{Ansatz } y(t) = e^{t\lambda}}$ wählen.

- **Satz 2.12:** Sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom vom Grad n. Hat P genau n paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$, so ist $\left\{e^{\lambda_j t} \;\middle|\; j = 1, \dots, n\right\}$ ein Fundamentalsystem von (6.2).

- **Satz 2.13:** Sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom vom Grad n. Hat P die paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, r$, der Vielfachheit k_j, so bilden die Funktionen $t^{q-1}e^{\lambda_j t}$, $q = 1, \dots, k_j$, $j = 1, \dots, r$, ein Fundamentalsystem von (6.2).

- **Satz 2.14:** Sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom vom Grad n und $b(t) = p(t)e^{\mu t}$ mit einem Polynom p vom Grad $n_p \geq 1$ sowie einem Exponenten $\mu \in \mathbb{C}$. Dann besitzt die inhomogene Differentialgleichung

$$P(D)x \;=\; b \tag{6.3}$$

  (a) eine partikuläre Lösung $x_p(t) = q(t)e^{\mu t}$ mit einem Polynom q mit $\deg q = n_p$, falls $P(\mu) \neq 0$.

  (b) eine partikuläre Lösung $x_p(t) = t^k q(t)e^{\mu t}$ mit einem Polynom q mit $\deg q = n_p$, falls μ eine Nullstelle von P der Vielfachheit k ist.

Euler-Differentialgleichungen

- **Euler-Differentialgleichungen** sind lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung der Gestalt

$$a_n t^n y^{(n)}(t) + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 t y'(t) + a_0 y(t) \;=\; f(t) \quad , \tag{6.4}$$

also lineare Differentialgleichungen, deren n-ter Koeffizient ein Vielfaches des Monoms n-ten Grades ist. Durch die Substitution

$$t = \mathrm{e}^z \;, \quad y(\mathrm{e}^z) = u(z) \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = \ln(t) \;, \quad y(t) = u(\ln(t)) \tag{6.5}$$

können wir sie in eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten überführen (welche wir bereits lösen können), denn nach Kettenregel folgen

$$\begin{aligned} u'(z) &= (y' \circ \exp)(z) \cdot \exp(z) \;=\; y'(t) \cdot t \\ u''(z) &= (y'' \circ \exp)(z) \cdot \exp(2z) \;+\; (y' \circ \exp)(z) \cdot \exp(z) \;=\; y''(t) \cdot t^2 \;+\; y'(t) \cdot t \\ u'''(z) &= (y''' \circ \exp)(z) \cdot \exp(3z) \;+\; 3(y'' \circ \exp)(z) \cdot \exp(2z) \;+\; (y' \circ \exp)(z) \cdot \exp(z) \\ &= y'''(t) \cdot t^3 \;+\; 3y''(t) \cdot t^2 \;+\; y'(t) \cdot t \\ &\;\vdots \end{aligned}$$

also nach Umstellen

$$\left.\begin{aligned} t \cdot y'(t) &= u'(z) \\ t^2 \cdot y''(t) &= u''(z) - u'(z) \\ t^3 \cdot y'''(t) &= u'''(z) - 3u''(z) + 2u'(z) \\ &\;\vdots \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

und somit erhalten wir für $u(z)$ eine lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

- **Bemerkung:** Für Euler-Differentialgleichungen können wir somit den $\boxed{\text{Ansatz } y(t) = t^\lambda}$ wählen.

Zusatzaufgabe 6.1: Gegeben sei die konstante Matrix A.

(a) Geben Sie mit Hilfe der Exponentialfunktion für Matrizen ein Fundamentalsystem $X(t)$ mit $X(0) = I_n$ für das System $\dot{\mathbf{y}}(t) \;=\; A\mathbf{y}(t)$ an.

(b) Wie sieht das Fundamentalsystem aus (a) konkret aus, wenn A diagonalisierbar ist, also falls eine reguläre Matrix C existiert mit $C^{-1}AC \;=\; \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$?

(c) Wie sieht das Fundamentalsystem aus (a) konkret aus, wenn A nicht diagonalisierbar ist, also falls lediglich eine reguläre Matrix C mit $C^{-1}AC \;=\; J$ mit einer Matrix in (nichttrivialer) Jordan-Normalform existiert?

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\quad \dot{\mathbf{y}}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y}(0) \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$

(e) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $\quad \dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t).$

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.1:

(a) Die matrixwertige Funktion $f(t) \;=\; \mathrm{e}^{tA}$ besitzt – wie man anhand der Reihe ablesen kann – die Ableitung $\dot{f}(t) \;=\; A\mathrm{e}^{tA}$. Wegen der nach ZA 4.2 (c) gültigen Beziehung

$$\mathrm{e}^{0A} \;=\; \mathrm{e}^{0 \cdot I_n} \;=\; \mathrm{e}^{\operatorname{diag}(0,\ldots,0)} \;=\; \operatorname{diag}(1, \ldots, 1) \;=\; I_n$$

und da mit $\mathbf{y}(t) \;=\; f(t)\mathrm{c} \;=\; \mathrm{e}^{tA}\mathrm{c}$ dann auch $\dot{\mathbf{y}}(t) \;=\; \dot{f}(t)\mathrm{c} \;=\; A\mathrm{e}^{tA}\mathbf{c} \;=\; Af(t)\mathrm{c} \;=\; A\mathbf{y}(t)$ gilt, haben wir mit $X(t) = \mathrm{e}^{tA}$ ein Fundamentalsystem wie gefordert gefunden.

(b) Mit der vorangegangenen Zusatzaufgabe sowie ZA 4.2(b) folgt dann

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tC\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)C^{-1}} = \mathrm{e}^{C\,\mathrm{diag}(t\lambda_1,\ldots,t\lambda_n)C^{-1}} \\ &= C\mathrm{e}^{\mathrm{diag}(t\lambda_1,\ldots,t\lambda_n)}C^{-1} = C\,\mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{t\lambda_1},\ldots,\mathrm{e}^{t\lambda_n}\right)C^{-1} \end{aligned}$$

(c) Seien J_k, $k = 1,\ldots,r$ die entsprechenden Jordan-Kästchen von J. Wiederum mit den Zusatzaufgaben 4.2 (b) und 4.2 (c) sowie analog zur vorangegangenen Aufgabe folgt

$$X(t) = \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tCJC^{-1}} = C\mathrm{e}^{tJ}C^{-1} = C\mathrm{e}^{\mathrm{diag}(tJ_1,\ldots,tJ_r)}C^{-1} = C\,\mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{tJ_1},\ldots,\mathrm{e}^{tJ_r}\right)C^{-1}\,,$$

wobei sich die Blöcke e^{tJ_k} der Größe n_k mit $\sum_{k=1}^{r} n_k = n$ analog wie in Zusatzaufgabe 4.3 (c) ergeben. Also folgt

$$X(t) = C\left(\bigoplus_{k=1}^{r}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t\lambda_k} & t\mathrm{e}^{t\lambda_k} & \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{t\lambda_k} & \ldots & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!}\mathrm{e}^{t\lambda_k} & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\mathrm{e}^{t\lambda_k} \\ 0 & \mathrm{e}^{t\lambda_k} & t\mathrm{e}^{t\lambda_k} & \ldots & \frac{t^{n_k-3}}{(n_k-3)!}\mathrm{e}^{t\lambda_k} & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!}\mathrm{e}^{t\lambda_k} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t\lambda_k} & \ldots & \frac{t^{n_k-4}}{(n_k-4)!}\mathrm{e}^{t\lambda_k} & \frac{t^{n_k-3}}{(n_k-3)!}\mathrm{e}^{t\lambda_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathrm{e}^{t\lambda_k} & t\mathrm{e}^{t\lambda_k} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mathrm{e}^{t\lambda_k} \end{pmatrix}\right)C^{-1}\,,$$

wobei $\bigoplus_{k=1}^{r} A_k := \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$ bezeichnet.

(d) Da die konstante Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

symmetrisch und reellwertig ist, existiert demzufolge eine orthogonale Matrix $C = (\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$ (d.h. $C^TC = E$) von Eigenvektoren $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$, und eine Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ mit den zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, so dass

$$D = C^TAC \qquad \text{bzw.} \qquad CDC^T = A\,.$$

Eine Lösung $\mathbf{y}$ von $\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y}$ erfüllt dann auch

$$\mathbf{y}' = CDC^T\,\mathbf{y} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{z}' = D\,\mathbf{z} \quad \text{mit} \quad \mathbf{z} = C^T\,\mathbf{y}\,.$$

Wegen $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ ist $\mathbf{z} = (c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}, c_3\mathrm{e}^{\lambda_3 x})^T$ die allgemeine Lösung von $\mathbf{z}' = D\,\mathbf{z}$. Weiterhin folgt aus $\mathbf{z} = C^T\,\mathbf{y}$ und $C^TC = CC^T = E$ demnach

$$\mathbf{y} = C\mathbf{z} = (\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)\begin{pmatrix} c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} \\ c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x} \\ c_3\mathrm{e}^{\lambda_3 x} \end{pmatrix} = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\mathbf{u}_1 + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}\mathbf{u}_2 + c_3\mathrm{e}^{\lambda_3 x}\mathbf{u}_3\,.$$

für die allgemeine Lösung von $\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y}$. Also genügt es, die Eigenwerte und anschließend die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix A zu bestimmen:
Die Eigenwerte der Matrix sind aufgrund von

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & \frac{9}{2}-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(5-\lambda)(\tfrac{9}{2}-\lambda) - (5-\lambda) \\ &= (5-\lambda)\Big((3-\lambda)(\tfrac{9}{2}-\lambda) - 1\Big) = (5-\lambda)\Big(\tfrac{27}{2} - \tfrac{15}{2}\lambda + \lambda^2 - 1\Big) \\ &= (5-\lambda)\Big(\tfrac{25}{2} - \tfrac{15}{2}\lambda + \lambda^2\Big) = (5-\lambda)(\tfrac{5}{2}-\lambda)(5-\lambda) \end{aligned}$$

(wegen $\lambda_{2/3} = \frac{15}{4} \pm \sqrt{\frac{225}{16} - \frac{200}{16}}$) genau $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = \frac{5}{2},\ \lambda_3 = 5$, so dass sich $\mathbf{z} \;=\; (c_1 e^{5x}, c_2 e^{\frac{5x}{2}}, c_3 e^{5x})^T$ ergibt. Mit den in der orthogonalen Matrix C zusammengefassten zugehörigen (normierten!!!) Eigenvektoren

$$C \;=\; (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir die daraus resultierende allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \;=\; C\mathbf{z} \;&=\; c_1 e^{5x}\mathbf{u}_1 \;+\; c_2 e^{\frac{5x}{2}}\mathbf{u}_2 \;+\; c_3 e^{5x}\mathbf{u}_3 \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}) \\ &=\; c_1 e^{5x} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \;+\; c_2 e^{\frac{5x}{2}} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \;+\; c_3 e^{5x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Probe: $\quad CDC^T \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & & \\ & \frac{5}{2} & \\ & & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \;=\; A\,.$

Aus der Anfangsbedingung

$$\mathbf{y}(0) \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

erhalten wir für die drei Unbekannten c_1, c_2, c_3 die drei Bedingungen

$$\begin{aligned} 2 \;&=\; \tfrac{1}{\sqrt{5}}c_1 \;-\; \tfrac{2}{\sqrt{5}}c_2 \\ 5 \;&=\; c_3\,, \\ 6 \;&=\; \tfrac{2}{\sqrt{5}}c_1 \;+\; \tfrac{1}{\sqrt{5}}c_2 \end{aligned}$$

welche genau von $(c_1, c_2, c_3) \;=\; \left(\frac{14}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ 5\right)$ erfüllt werden. Demzufolge ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \;&=\; \frac{14}{\sqrt{5}} e^{5x} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \;+\; \frac{2}{\sqrt{5}} e^{\frac{5x}{2}} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \;+\; 5e^{5x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &=\; e^{5x} \begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ 0 \\ \frac{28}{5} \end{pmatrix} \;+\; e^{\frac{5x}{2}} \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \;+\; e^{5x} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; e^{5x} \begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ 5 \\ \frac{28}{5} \end{pmatrix} \;+\; e^{\frac{5x}{2}} \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

(e) Die konstante Systemmatrix besitzt die reellen Eigenwerte $\lambda_1 \;=\; 4$ und $\lambda_2 \;=\; -10$ mit den zugehörigen (nichtorthogonalen !!! – die Matrix ist nicht!!! symmetrisch) Eigenvektoren

$$v_1 \;=\; \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Entsprechend ZA 6.1 (b) ist mit $D = C^{-1}AC = \operatorname{diag}(4, -10)$ und

$$C \;=\; \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad C^{-1} \;=\; \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem $X(t)$ mit $X(0) = \mathrm{Id}$ bzw. die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\begin{aligned} y(t) \;&=\; X(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \;=\; C \operatorname{diag}\left(e^{4t}, e^{-10t}\right) C^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-10t} \end{pmatrix} \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2(6e^{4t} + e^{-10t}) & 8(e^{4t} - e^{-10t}) \\ 3(e^{4t} - e^{-10t}) & 2(e^{4t} + 6e^{-10t}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 6.2: **(Homogene Differentialgleichungen)**

(a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von $x(t) - \frac{1}{2}\ddot{x}(t) + \frac{1}{16}x^{(4)}(t) = 0.$

(b) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von $x(t) = x^{(5)}(t) + x^{(4)}(t) - \dot{x}(t).$

(c) Wie lauten die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen?

(i) $3y'' - 24y' + 48y = 0$, (ii) $y^{(4)} - y = 0$.

(d) Wie lauten die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen?

(i) $2y'' - 16y' + 32y = 0$, (ii) $y''' + y' = 0$, (iii) $y''' + y = 0$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.2:

(a) Das zugehörige charakteristische Polynom lautet

$$P(\lambda) \;=\; \lambda^4 - 8\lambda^2 + 16 \;=\; (\lambda^2 - 4)^2 \;=\; (\lambda + 2)^2(\lambda - 2)^2 \ ,$$

so dass sich nach Satz 15.2 (O. Forster, Analysis 2) aufgrund der mehrfachen Nullstellen als allgemeine Lösung dieser homogenen Differentialgleichung

$$x(t) \;=\; \Big(c_1 + c_2t\Big)\mathrm{e}^{2t} + \Big(c_3 + c_4t\Big)\mathrm{e}^{-2t} \qquad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R})$$

ergibt. Durch $\boxed{\{\mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}, \mathrm{e}^{-2t}, t\mathrm{e}^{-2t}\}}$ ist somit ein Fundamentalsystem gegeben.

(b) Das zugehörige charakteristische Polynom lautet

$$P(\lambda) \;=\; \lambda^5 + \lambda^4 - \lambda - 1 \;=\; (\lambda+1)(\lambda^4 - 1) \;=\; (\lambda+1)(\lambda^2 - 1)(\lambda^2+1) \;=\; (\lambda+1)^2(\lambda-1)(\lambda^2+1)$$

und besitzt die zweifache Nullstelle $\lambda_{1,2} = -1$, die einfache Nullstelle $\lambda_3 = 1$ und das komplexe Nullstellenpaar $\lambda_{4,5} = \pm\mathrm{i}$. Nach Satz 15.2 (O. Forster, Analysis 2) bzw. nach Aufgabe 5.2 ist die allgemeine Lösung demnach

$$x(t) \;=\; \Big(c_1 + c_2t\Big)\mathrm{e}^{-t} + c_3\mathrm{e}^t + c_4\sin(t) + c_5\cos(t) \qquad (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}).$$

Durch $\boxed{\{\mathrm{e}^{-t}, t\mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^t, \sin(t), \cos(t)\}}$ ist somit ein Fundamentalsystem gegeben.

(c) (i) Mit dem Ansatz $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ erhalten wir zunächst $3\,(\lambda^2 - 8\lambda + 16)\,\mathrm{e}^{\lambda t} = 0$ und somit die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 = 0$ mit der zweifachen reellen Nullstelle $\lambda = 4$. Somit sind $y_1(t) = \mathrm{e}^{4t}$ und $y_2(t) = t\mathrm{e}^{4t}$ nach Satz 15.2 (O. Forster, Analysis 2) zwei linear unabhängige Lösungen. Also ergibt sich die allgemeine Lösung zu

$$y(t) \;=\; (C_1 + C_2t)\,\mathrm{e}^{4t} \qquad (C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}) \ .$$

(ii) Wiederum mit dem Ansatz $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ erhalten wir $(\lambda^4 - 1)\,\mathrm{e}^{\lambda t} = 0$ und somit die biquadratische Gleichung $\lambda^4 - 1 = 0$ als Charakteristikum. Wir substituieren zunächst $\lambda^2 = \mu$ und erhalten wegen $\mu^2 - 1 = (\mu + 1)(\mu - 1) = 0$ die zwei Lösungen $\mu_{1,2} = \pm\,1$. Demzufolge besitzt die charakteristische Gleichung $\lambda^4 - 1 = 0$ die vier Lösungen

$$\lambda_{1,2} \;=\; \pm\,1\ , \qquad \lambda_{3,4} \;=\; \pm\,\mathrm{i}\ ,$$

so dass sich für die Differentialgleichung nach Satz 15.1 (O. Forster, Analysis 2) sowie mit Aufgabe 5.2 die vier linear unabhängigen Lösungen

$$y_1(t) \;=\; \mathrm{e}^t\ , \qquad y_2(t) \;=\; \mathrm{e}^{-t}\ , \qquad y_3(t) \;=\; \cos(t)\ , \qquad y_4(t) \;=\; \sin(t)$$

ergeben. Damit ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(t) \;=\; C_1 \mathrm{e}^t + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \cos(t) + C_4 \sin(t) \qquad (C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \in \mathbb{R})$$

bzw. mit Hilfe der hyperbolischen Funktionen ausgedrückt

$$y(t) \;=\; C_1 \cosh(t) + C_2 \sinh(t) + C_3 \cos(t) + C_4 \sin(t) \qquad (C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \in \mathbb{R})\ .$$

(d) (i) Gehen wir mit dem Ansatz $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ in die Differentialgleichung $2y'' - 16y' + 32y = 0$ hinein, so erhalten wir $(2\lambda^2 - 16\lambda + 32)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0$. Aufgrund der charakteristischen Gleichung $0 = 2(\lambda^2 - 8\lambda + 16) = 2(\lambda - 4)$ ist nun analog zu (c.i) die allgemeine Lösung

$$y(t) \;=\; (C_1 + C_2 t)\, \mathrm{e}^{4t} \qquad (C_1,\ C_2 \in \mathbb{R})\ .$$

Beachte: Die DGL aus (c.i) ist ein Vielfachen der DGL aus (d.i).

(ii) Gehen wir mit dem Ansatz $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ in die Differentialgleichung $y''' + y' = 0$, so erhalten wir analog zuvor als charakteristische Gleichung $0 = \lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + 1)$. Nach Satz 15.1 (O. Forster, Analysis 2) sowie mit Aufgabe 5.2 ergibt sich nun als allgemeine Lösung

$$y(t) \;=\; C_1 + C_2 \cos(t) + C_3 \sin(t) \qquad (C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R})\ .$$

(iii) Wegen $P(D) = D^3 + 1 = (D+1)(D^2 - D + 1) = (D+1)\Big(D - \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\Big)\Big(D - \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\Big)$ ergibt sich hier als allgemeine Lösung

$$y(t) \;=\; C_1 \mathrm{e}^{-t} + \Big(C_2 \cos(\sqrt{3}t) + C_3 \sin(\sqrt{3}t)\Big)\, \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \qquad (C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R})\ .$$

Zusatzaufgabe 6.3: **(Inhomogene Differentialgleichungen)**

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $\ddot{x}(t) = \dot{x}(t) + 2x(t) + \cos(t) + \sin(t)$.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichungen

(i) $y''' + 2y'' + y' = 2\sin(t)\,,$ (ii) $8y'' + 6y' + y = 2t + 3\,,$ (iii) $y''' + 4y' = 4t - 8\,.$

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.3:

(a) Das zugehörige charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$. Demzufolge wird die entsprechende homogene Gleichung von

$$x_h(t) \;=\; c_1 \cdot \mathrm{e}^{2t} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

gelöst. Mit dem Ansatz $\boxed{x_p(t) = a_1 \sin(t) + a_2 \cos(t)}$ für eine partikuläre Lösung folgt

$$\begin{aligned}\cos(t) + \sin(t) \;&=\; \Big(-a_1 \sin(t) - a_2 \cos(t)\Big) - \Big(a_1 \cos(t) - a_2 \sin(t)\Big) - 2\Big(a_1 \sin(t) + a_2 \cos(t)\Big) \\ &=\; \Big(a_2 - 3a_1\Big) \sin(t) + \Big(-a_1 - 3a_2\Big) \cos(t) \quad \Longrightarrow \quad a_1 \;=-\frac{2}{5}, \quad a_2 \;=-\frac{1}{5}\end{aligned}$$

und somit für die allgemeine Lösung

$$x(t) \;=\; x_h(t) + x_p(t) \;=\; c_1 \cdot \mathrm{e}^{2t} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-t} - \frac{2\sin(t) + \cos(t)}{5} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

(b) (i) Die zu $y''' + 2y'' + y' = 2\sin(t)$ gehörige homogene Differentialgleichung besitzt wegen $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1)^2$ das Fundamentalsystem $\{1, \mathrm{e}^{-t}, t\mathrm{e}^{-t}\}$ und demnach die allgemeine Lösung $y_h(t) = c_1 + (c_2 + c_3 t)\mathrm{e}^{-t}$. Da $\pm\mathrm{i}$ keine Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind, führt für die Inhomogenität $2\sin(t)$ der Ansatz $y_p(t) = a\sin(t) + b\sin(t)$ zum Ziel. Einsetzen in die Differentialgleichung und anschließender Koeffizientenvergleich liefert nun die allgemeine Lösung

$$y(t) \;=\; y_h(t) + y_p(t) \;=\; c_1 + (c_2 + c_3 t)\mathrm{e}^{-t} - \sin(t)\ .$$

(ii) Die zu $8y'' + 6y' + y = 2t + 3$ gehörige homogene Differentialgleichung besitzt das charakteristische Polynom $P(\lambda) = 8\left(\lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{8}\right) = 8\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{4}\right)$ und somit als allgemeine Lösung

$$y_h(t) \;=\; c_1 e^{-\frac{t}{2}} + c_2 e^{-\frac{t}{4}} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Da die Inhomogenität von der Gestalt $q(t)e^{\mu t}$ mit $\deg q = 1$ und $\mu = 0$ ist sowie $P(\mu) \neq 0$ gilt (0 ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms), führt der Ansatz

$$y_p(t) = at + b \quad\Longrightarrow\quad y_p'(t) = a \quad\Longrightarrow\quad y_p''(t) = 0$$

zum Ziel. Einsetzen in die ursprüngliche Differentialgleichung und anschließender Koeffizientenvergleich in $2t + 3 = 8y_p'' + 6y_p' + y_p = 8 \cdot 0 + 6a + at + b = at + (6a + b)$ liefert $a = 2$ und $b = -9$. Somit ist die allgemeine Lösung

$$y(t) \;=\; y_h(t) + y_p(t) \;=\; c_1 e^{-\frac{t}{2}} + c_2 e^{-\frac{t}{4}} + 2t - 9 \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

(iii) Die zu $y''' + 4y' = 4t - 8$ gehörige homogene Differentialgleichung besitzt das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda = \lambda(\lambda^2 + 4) = \lambda(\lambda + 2i)(\lambda - 2i)$, also das Fundamentalsystem

$$\{1, \cos(2t), \sin(2t)\}\ .$$

Da die Inhomogenität von der Gestalt $q(t)e^{\mu t}$ mit $\deg q = 1$ und $\mu = 0$ ist sowie $P(\mu) = 0$ gilt (0 ist einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms), führt der Ansatz

$$y_p(t) = at^2 + bt + c \quad\Longrightarrow\quad y_p'(t) = 2at + b \quad\Longrightarrow\quad y_p''(t) = 2a \quad\Longrightarrow\quad y_p'''(t) = 0$$

zum Ziel. Einsetzen in die ursprüngliche Differentialgleichung und anschließender Koeffizientenvergleich in $4t - 8 = y_p'''(t) + 4y_p'(t) = 0 + 4 \cdot (2at + b)$ liefert $a = \frac{1}{2}$ und $b = -2$ sowie c beliebig. Konstanten sind jedoch bereits im homogenen Lösungsraum enthalten. Somit ist die allgemeine Lösung

$$y(t) \;=\; c_1 + c_2\cos(2t) + c_3\cos(2t) + \frac{1}{2}t^2 - 2t \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$$

Zusatzaufgabe 6.4: **(Euler-Differentialgleichungen)**

(a) Lösen Sie die Euler-Differentialgleichung $\quad t^3 x^{(3)}(t) - 3t^2\ddot{x}(t) + 6t\dot{x}(t) - 6x(t) \;=\; 0.$

(b) Lösen Sie die folgenden homogenen EULERschen Differentialgleichungen:

(i) $x^2y'' - 2y = 0\,,\quad (x > 0)\,,$ (ii) $x^3y''' + 3x^2y'' - 2xy' - 2y = 0\,,\quad (x > 0)\,.$

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.4:

(a) Es handelt sich um eine Euler-Differentialgleichung. Führen wir nun die Substitution (6.5) durch, so erhalten wir entsprechend (6.6) nach Einsetzen in die ursprüngliche Differentialgleichung $t^3x^{(3)}(t) - 3t^2\ddot{x}(t) + 6t\dot{x}(t) - 6x(t) \;=\; 0$ somit die inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \Big(u'''(z) - 3u''(z) + 2u'(z)\Big) - 3\Big(u''(z) - u'(z)\Big) + 6u'(z) - 6u(z) \\ &=\; u'''(z) - 6u''(z) + 11u'(z) - 6u(z)\ . \end{aligned}$$

Da wir drei einfache Nullstellen für das zugehörige charakteristische Polynom

$$P(\lambda) \;=\; \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 \;=\; (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \;=\; (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

finden, ergibt sich für $u(z)$ die allgemeine Lösung $u(z) = c_1e^z + c_2e^{2z} + c_3e^{3z}$ mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Rücksubstitution liefert nun

$$x(t) \;=\; u(\ln(t)) \;=\; c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})\ .$$

(b) (i) Mit dem Ansatz

$$y(x) \;=\; x^\lambda \qquad\Longrightarrow\qquad y'(x) \;=\; \lambda x^{\lambda-1}\ ,\ y''(x) \;=\; \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2}$$

geht die Differentialgleichung über in

$$0 \;=\; x^2 \cdot \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2} - 2x^\lambda \;=\; x^\lambda\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right) \;=\; x^\lambda\,(\lambda - 2)\,(\lambda + 1)\ .$$

Da $x^\lambda \neq 0$, können wir kürzen und erhalten daraus die zwei linear unabhängigen Lösungen $y_1(x) = x^2$ und $y_2(x) = x^{-1}$ und somit die allgemeine Lösung

$$y(x) \;=\; C_1 x^2 + \frac{C_2}{x} \qquad (C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}) \;.$$

(ii) Wiederum mit dem Ansatz

$$y(x) \;=\; x^\lambda \quad\Longrightarrow\quad y'(x) \;=\; \lambda x^{\lambda-1} \;,\; y''(x) \;=\; \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} \;,\; y'''(x) \;=\; \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}$$

geht die Differentialgleichung über in

$$x^3 \cdot \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3} + 3x^2 \cdot \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} - 2x \cdot \lambda x^{\lambda-1} - 2 \cdot x^\lambda \;=\; 0 \;.$$

Da wiederum $x^\lambda \neq 0$, können wir kürzen und erhalten

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + 3\lambda(\lambda-1) - 2\lambda - 2 \;&=\; (\lambda^2 - 2\lambda + 3\lambda)(\lambda-1) - 2(\lambda+1) \\ &=\; \lambda(\lambda+1)(\lambda-1) - 2(\lambda+1) \\ &=\; (\lambda-2)\,(\lambda+1)^2 \;=\; (\lambda^2-\lambda-2)(\lambda+1) \;. \end{aligned}$$

Da -1 eine zweifache Nullstelle ist, erhalten wir (vgl. Satz 2.13 oder alternativ auch Satz 15.2 (O. Forster, Analysis 1) und (6.5)) die drei linear unabhängigen Lösungen

$$y_1(x) \;=\; x^{-1} \;, \qquad y_2(x) \;=\; x^{-1} \cdot \ln(x) \;, \qquad y_3(x) \;=\; x^2$$

und somit als allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) \;=\; \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x}\ln(x) + C_3 x^2 \qquad (C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R}) \;.$$

Zusatzaufgabe 6.5: Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme

(a) $x^{(3)}(t) - 6\ddot{x}(t) + 12\dot{x}(t) - 8x(t) = 0$ zu den Anfangswerten $x(1) = 0,\ \dot{x}(1) = 1,\ \ddot{x}(1) = 2.$

(b) $\ddot{x}(t) + 8\dot{x} + 17x(t) - 51 = 0$ zu den Anfangswerten $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1.$

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.5:

(a) Aufgrund des zugehörigen charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 \;=\; (\lambda-2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) \;=\; (\lambda-2)^3$$

ergibt sich als allgemeine Lösung $\boxed{x(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)\mathrm{e}^{2t}}$ mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Aus den Anfangsbedingungen erhalten wir

$$\left.\begin{array}{rcccl} 0 &=& x(1) &=& (c_1+c_2+c_3)\mathrm{e}^2 \\ 1 &=& \dot{x}(1) &=& 2(c_1+c_2+c_3)\mathrm{e}^2 + (c_2+2c_3)\mathrm{e}^2 \\ 2 &=& \ddot{x}(1) &=& 4(c_1+c_2+c_3)\mathrm{e}^2 + 4(c_2+2c_3)\mathrm{e}^2 + 2c_3\mathrm{e}^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 0 &=& c_1+c_2+c_3 \\ 1 &=& (c_2+2c_3)\mathrm{e}^2 \\ 2 &=& 4 + 2c_3\mathrm{e}^2 \end{array}\right.$$

und damit nacheinander $\boxed{c_3 = -\mathrm{e}^{-2}}$, $\boxed{c_2 = 3\mathrm{e}^{-2}}$, $\boxed{c_1 = -2\mathrm{e}^{-2}}$. Demzufolge ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$x(t) \;=\; (3t - t^2 - 2)\mathrm{e}^{2(t-1)} \;.$$

(b) Das zugehörige charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 17 = (\lambda+4)^2 + 1$, so dass sich hier aufgrund des komplexen Nullstellenpaares $\lambda_{1,2} = -4 \pm \mathrm{i}$ als allgemeine reelle Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung

$$x_h(t) \;=\; \mathrm{e}^{-4t}\Big(c_1\cos(t) + c_2\sin(t)\Big) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

ergibt. Mit dem Ansatz $x_p(t) = A$ ergibt sich $0 + 0 + 17A - 51 = 0$, also $\boxed{x_p(t) = 3}$ und somit die allgemeine Lösung

$$x(t) \;=\; x_h(t) + x_p(t) \;=\; \mathrm{e}^{-4t}\Big(c_1\cos(t) + c_2\sin(t)\Big) + 3 \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Mit dem Anfangswert $x(0) = 0$ ergibt sich $c_1 = -3$, mit der zweiten Anfangsbedingung

$$1 \;=\; \dot{x}(0) \;=\; -4\Big(-3+0\Big) + \Big(0 + c_2\Big) \;=\; 12 + c_2 \qquad\Longrightarrow\qquad c_2 = -11$$

und somit als Lösung des Anfangswertproblems $\boxed{x(t) = 3 - \mathrm{e}^{-4t}\Big(3\cos(t) + 11\sin(t)\Big)}$.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 7

Existenz & Eindeutigkeit:

- **Fixpunktsatz von Banach** Sei (M, d_M) ein vollständiger metrischer Raum und $f\colon M \to M$ eine Kontraktion, d.h., es existiere ein $L < 1$, so dass
$$\forall x, y \in M\colon d_M(f(x), f(y)) \le L \cdot d_M(x, y)\ . \tag{7.1}$$
Dann existiert genau ein $x \in M$ mit $f(x) = x$. Insbesondere konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in M$ die durch $x_{k+1} := f(x_k)$ rekursiv definierte Folge gegen diesen Fixpunkt x von f.

- **Satz 2.32** [**Mittelwertsatz in Integralform – Analysis II**]: Seien X, Y Banach-Räume, sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge und seien $x, \tilde{x} \in U$ Punkte, für die die Strecke $C := \{x + t(\tilde{x} - x) \mid t \in [0, 1]\}$ in U enthalten ist. Ist die Abbildung $f\colon U \to Y$ in jedem Punkt der Strecke C partiell differenzierbar in Richtung $\tilde{x} - x$ und ist $t \mapsto \partial_{\tilde{x}-x} f(x + t(\tilde{x} - x))$ stetig auf $[0, 1]$, dann gilt
$$f(\tilde{x}) - f(x) = \int_0^1 \partial_{\tilde{x}-x} f(x + t(\tilde{x} - x))\, dt \quad .$$

- **Satz 2.36** [**Schrankensatz – Analysis II**]: Unter den Voraussetzungen von Satz 2.32 gilt
$$\|f(\tilde{x}) - f(x)\|_Y \le \sup_{t\in[0,1]} \|\partial_{\tilde{x}-x} f(x + t(\tilde{x} - x))\|_Y \quad .$$
Ist darüberhinaus $f\colon U \to Y$ sogar stetig differenzierbar, so gilt
$$\|f(\tilde{x}) - f(x)\|_Y \le \left(\max_{t\in[0,1]} \|df(x + t(\tilde{x} - x))\|_{L(X,Y)}\right) \|\tilde{x} - x\|_X \quad .$$

- **Definition:** Seien $(X, \|.\|_X)$ und $(Y, \|.\|_Y)$ normierte Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt **kompakt**, falls f beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen (d.h., Mengen, deren Abschluss kompakt ist) abbildet.

Schwache Lösungen

- **Definition 1.44:** Eine Kurve $x\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt **absolut stetig**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $\sum\limits_{i=1}^{N} |x(b_i) - x(a_i)| \le \varepsilon$ für N paarweise disjunkte Intervalle $[a_i, b_i] \subset [a, b]$ der Gesamtlänge $\sum\limits_{i=1}^{N} |b_i - a_i| \le \delta$.

- **Definition 1.46:** Eine Kurve $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt **schwache Lösung** der Differentialgleichung (1.3) zum Anfangswert x_0 bei t_0, wenn x absolut stetig auf jedem kompakten Teilintervall von I ist, die Differentialgleichung (1.3) für fast alle $t \in I$ erfüllt ist und $x(t_0) = x_0$ gilt.

- **Beispiel 1.47:** Die lineare Differentialgleichung $x' = \operatorname{sign}(t)x$, hat zum Anfangswert x_0 bei t_0 die schwache Lösung $x(t) = x_0 \exp(|t| - |t_0|)$. Diese Funktion x ist zwar absolut stetig, aber in $t = 0$ nicht klassisch differenzierbar.

  Während man die Differentialgleichung $x' = \operatorname{sign}(t)x$ möglicherweise als rein akademisches Beispiel ansehen kann, ist $x' = -\frac{1}{2}(1 + \operatorname{sign}(t))x$ eine häufig in Anwendungen auftretende Differentialgleichung, die Schaltvorgänge modelliert. Tatsächlich haben ihre schwachen Lösungen die Form
$$x(t) = \begin{cases} x_0 & t \le 0 \\ x_0 \exp(-t) & t \ge 0 \end{cases} \tag{7.2}$$
und modellieren einen Abschaltvorgang (siehe Schaltungstechnik).

Zusatzaufgabe 7.1: (a) Zeigen Sie den Fixpunktsatz von Banach (siehe oben).

(b) Zeigen Sie: Für $\gamma > 0$ gilt die Abschätzung

$$\int_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} \mathrm{e}^{\gamma|s-t_0|}\, ds \;\leq\; \frac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma|t-t_0|} \tag{7.3}$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.1:

(a)
- Zunächst halten wir fest, dass die Voraussetzung (7.1) aufgrund der Nichtnegativität von Metriken $L \geq 0$ impliziert. Desweiteren ist der Fall $L = 0$ trivial, dann dann folgte aus der Definitheit der Metrik die Konstanz von f, also gäbe es wegen $f(M) \subseteq M$ in diesem Fall ein $x^* \in M$, so dass $\forall x \in M\colon f(x) = x^*$, also auch $f(x^*) = x^*$ gilt. Somit können wir im Folgenden o.B.d.A. annehmen, dass $L > 0$ gilt.
- Die Eindeutigkeit des Fixpunktes erhalten wir aus der Kontraktionseigenschaft. Angenommen, es existierten $x, \tilde{x} \in M$ mit $x = f(x)$ und $\tilde{x} = f(\tilde{x})$, dann folgt wegen

  $$d_M(x, \tilde{x}) = d_M(f(x), f(\tilde{x})) \leq L d_M(x, \tilde{x})$$

  und $L < 1$ schon $d_M(x, \tilde{x}) = 0$, also muss nach der Definitheit einer Metrik bereits $x = \tilde{x}$ gelten.
- Die Existenz des Fixpunktes erhalten wir nun aus der Vollständigkeit des Raumes, indem wir – wiederum mit Hilfe der Kontraktionseigenschaft – zeigen, dass die zu einem (sogar beliebigen) Startwert $x_0 \in M$ durch $x_{k+1} := f(x_k)$ rekursiv definierte Folge die Cauchy-Eigenschaft besitzt, also – aufgrund der Vollständigkeit des metrischen Raumes – in (M, d_M) auch einen Grenzwert x^* hat. Für diesen gilt dann – da die Kontraktionseigenschaft von f die Lipschitz-Stetigkeit, also auch die Stetigkeit von f impliziert – schließlich

  $$x^* \;=\; \lim_{k\to\infty} x_{k+1} \;=\; \lim_{k\to\infty} f(x_k) \;=\; f\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) \;=\; f(x^*)\ . \tag{7.4}$$

  Nun zur Cauchy-Eigenschaft der oben zu einem Startwert $x_0 \in M$ durch $x_{k+1} := f(x_k)$ rekursiv definierte Folge. Wegen $d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq L d(x_n, x_{n-1})$ folgt für $\ell > k \geq 0$ auch unter mehrfacher Anwendung der Dreiecksungleichung

  $$d(x_\ell, x_k) \leq \sum_{n=k}^{\ell-1} d(x_{n+1}, x_n) \leq \sum_{n=k}^{\ell-1} L^{n-k} d(x_{k+1}, x_k) \leq \left(\sum_{n=0}^{\ell-k-1} L^n\right) L^k d(x_1, x_0)\ .$$

  Aufgrund der (im ersten Punkt begründeten) Positivität von L erhalten wir unter Kenntnis der geometrischen Reihe die Abschätzung

  $$\sum_{n=0}^{\ell-k-1} L^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} L^n = \frac{1}{1-L}\ ,$$

  so dass wegen $0 < L < 1$ für alle $\ell > k \geq 0$ schließlich

  $$d_M(x_\ell, x_k) \leq \frac{L^k}{1-L} d_M(x_1, x_0)$$

  folgt. Also finden wir aufgrund der Konvergenz $L^k \to 0$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\ell > k \geq K$ wie behauptet $d_M(x_\ell, x_k) \leq \varepsilon$ gilt.

(b) Die folgt sofort mit Hilfe einer Fallunterscheidung in $t \leq t_0$ und in $t \geq t_0$ und elementarer Integration.

Zusatzaufgabe 7.2:

(a) Sei $f\colon [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und erfülle eine globale Lipschitzbedingung im dritten Argument, d.h., es gäbe ein $L < \infty$ mit

$$|f(t,s,u) - f(t,s,v)| \;\leq\; L|u-v| \quad \text{für alle } t,s \in [0,T], u,v \in \mathbb{R}\ . \tag{7.5}$$

(i) Zeigen Sie: Ist g stetig, $r > 0$ und ist $T > 0$ klein genug, so besitzt die (nichtlineare) **Volterra-Integralgleichung**

$$x(t) \;=\; \int_0^t f(t,s,x(s))ds + g(t) \qquad (t \in [0,T]) \tag{7.6}$$

eine eindeutige Lösung x in

$$K_r(g) := \{x \in C([0,T])\colon \|x-g\|_\infty \leq r\}, \tag{7.7}$$

wobei

$$\|x\|_\infty \;:=\; \max_{t\in[0,T]} |x(t)|. \tag{7.8}$$

Für Anwendungen ist wichtig, dass man für den Beweis die Lipschitzbedingung tatsächlich nur für diejenigen (t,s,u,v) mit $|u-g(t)| \leq r$, $|v-g(t)| \leq r$ braucht.

Bemerkung: Ein Spezialfall der Volterra-Gleichung ist das Anfangswertproblem

$$x'(s) \;=\; f(s,x(s)), \qquad x(0) = x_0\ . \tag{7.9}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Fixpunktsatz von Banach im Raum $X = K_r(g)$.

(ii) Zeigen Sie: Falls die Lipschitzbedingung tatsächlich global ist, kann man $r = \infty$ setzen, und die Voraussetzung, dass $T > 0$ klein genug ist, ist überflüssig.

Hinweis: Verwenden Sie den Fixpunktsatz von Banach im Raum $X := C([0,T])$, wobei die Maximumsnorm $\|.\|_\infty$ mit der Funktion $w_\gamma(t) := \mathrm{e}^{-\gamma t}$ ($\gamma > 0$ geeignet gewählt) gewichtet wird, d.h., versehen mit der Norm

$$\|x\|_\gamma \;:=\; \|w_\gamma \cdot x\|_\infty \;=\; \max_{t\in[0,T]} |\mathrm{e}^{-\gamma t}x(t)|. \tag{7.10}$$

(b) Zeigen Sie, dass $X := C([0,T])$ mit (7.10) vollständig ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.2:

(a) (i) Wir überprüfen die Gültigkeit der Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach:

- Im Fall $LT < 1$ ist der Operator

$$A\colon C([0,T]) \to C([0,T])\ , \quad x(t) \mapsto Ax(t) := \int_0^t f(t,s,x(s))ds + g(t) \tag{7.11}$$

eine Kontraktion, denn für beliebige $x, \tilde{x} \in C([0,T])$ gilt

$$\begin{aligned}
\forall t \in [0,T]\colon\ |Ax(t) - A\tilde{x}(t)| \;&=\; \left|\int_0^t f(t,s,x(s))ds - \int_0^t f(t,s,\tilde{x}(s))ds\right| \\
&\leq\; \int_0^t |f(t,s,x(s)) - f(t,s,\tilde{x}(s))|ds \\
&\leq\; L\int_0^t \|x-\tilde{x}\|_\infty ds \;\leq\; LT \cdot \|x-\tilde{x}\|_\infty
\end{aligned}$$

und somit auch $\|Ax - A\tilde{x}\|_\infty \leq LT \cdot \|x-\tilde{x}\|_\infty$.

- Es ist $(K_r(g), d|_{K_r(g)})$ vollständig, da $K_r(g)$ eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes $(C([0,T]), d_{\|\cdot\|_\infty})$ ist.
- Da g stetig auf einem Kompaktum ist, ist g und somit auch jedes $x \in K_r(g)$ wegen $|x(s)-g(s)| \le r$ beschränkt. Somit existiert ein $M < \infty$, so dass garantiert $(t,s,x(s)) \in [0,1] \times [0,1] \times [-M,M]$. Auf letzterem ist in Folge der Stetigkeit insbesondere ebenso f durch eine Konstante $K < \infty$ beschränkt. Ist $T > 0$ nun genügend klein gewählt, d.h., gilt $TK \le r$, so ist der Operator A aus (7.11) wegen

$$x \in K_r(g) \Longrightarrow \forall t \in [0,T]\colon\ |Ax(t) - g(t)| \ \le\ \int_0^t \underbrace{|f(t,s,x(s))|}_{\le K} ds \ \le\ TK \ \le\ r$$

und somit $x \in K_r(g) \Longrightarrow Ax \in K_r(g)$ eine Selbstabbildung.

Demnach besitzt der Operator A aus (7.11) nach dem Fixpunktsatz von Banach einen eindeutigen Fixpunkt, also die Integralgleichung (7.6) auf $K_r(g)$ eine eindeutige Lösung.

(ii) Da wir den ganzen Raum betrachten, haben wir die Selbstabbildung geschenkt, darüber hinaus ist der ganze Raum vollständig. Somit bleibt nur die Kontraktion zu überprüfen. Für beliebige $x, \tilde{x} \in C([0,\infty[)$ gilt jedoch

$$\begin{aligned}
\forall t \in [0,\infty[\colon\ |Ax(t) - A\tilde{x}(t)|\, \mathrm{e}^{-\gamma t} \ &\le\ \int_0^t L \cdot |x(s)) - \tilde{x}(s)| ds \cdot \mathrm{e}^{-\gamma t} \\
&=\ \int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-s)} L \cdot |x(s)) - \tilde{x}(s)| \cdot \mathrm{e}^{-\gamma s} ds \\
&\le\ L \int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-s)} ds \cdot \|x - \tilde{x}\|_\gamma \ \le\ \frac{2L}{\gamma} \cdot \|x - \tilde{x}\|_\gamma
\end{aligned}$$

und nach Übergang zum Supremum somit $\|Ax - A\tilde{x}\|_\gamma \ \le\ \dfrac{2L}{\gamma} \cdot \|x - \tilde{x}\|_\gamma$, so dass für ein beliebiges $\gamma > 2L$ eine Kontraktion vorliegt. Demnach ist wiederum der Fixpunktsatz von Banach anwendbar.

(b) Dies ergibt sich aufgrund der Äquivalenz von (7.10) zu (7.8) – denn mit $C = 1$ und $c = \mathrm{e}^{-\gamma T}$ gilt für alle $x \in C([0,T],\mathbb{R})$ die Ungleichungskette $c\|x\|_\infty \le \|x\|_\gamma \le C\|x\|_\infty$ – und der Vollständigkeit von $(C([0,T],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ – denn der gleichmäßige Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen ist wieder stetig.

Zusatzaufgabe 7.3:

(a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung von $y''' + y'' + y' + y = f$ im homogenen Fall $f := 0$.

(b) Wie lautet die allgemeine Lösung der in (a) gegebenen Differentialgleichung im inhomogenen Fall $f(t) := 4\mathrm{e}^t + 4\mathrm{e}^{-t}$?

(c) Gegeben seien die Funktionen $y_1, y_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $y_1(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x^2 \end{pmatrix}$, $\quad y_2(x) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ x^2\mathrm{e}^x \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Vektoren $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear abhängig sind, während die Funktionen y_1, y_2 linear unabhängig sind.

(d) Kann eine stetige Funktion $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ existieren, so dass y_1 und y_2 aus (c) beides Lösungen von $y'(x) \ = \ A(x)y(x)$ sind ?

(e) Wie lautet die allgemeine Lösung von $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{y} + f$ bei (i) $f := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und (ii) $f := \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$?

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.3:

(a) Das zugehörige charakteristische Polynom lautet

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - i)(\lambda + i)(\lambda + 1)$$

und besitzt somit die Nullstellen -1 und $\pm i$. Somit erhalten wir als komplexes Fundamentalsystem $\{\mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^{it}, \mathrm{e}^{-it}\}$ und als allgemeine reelle homogene Lösung folglich

$$y_h(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2 \sin(t) + c_3 \cos(t) \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}) \ .$$

(b) Einsetzen des Ansatzes $y(t) = a\mathrm{e}^t$ in die DGL mit $f(t) = \mathrm{e}^t$ liefert die Gleichung $4a\mathrm{e}^t = 4\mathrm{e}^t$, also $a = 1$. Desweiteren liefert Einsetzen des Ansatzes $bt\mathrm{e}^{-t}$ in die DGL mit $f(t) = 4\mathrm{e}^{-t}$ die Gleichung $2b\mathrm{e}^t = 4\mathrm{e}^t$, also $b = 2$. Somit ist $y_p(t) = \mathrm{e}^t + 2t\mathrm{e}^{-t}$ eine partikuläre Lösung, und als allgemeine Lösung ergibt sich $y = y_p + y_h$.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig, fest. Für $\lambda = \mathrm{e}^x$ folgt dann $\lambda y_1(x) - y_2(x) = 0$. Daher sind die Vektoren $y_1(x)$ und $y_2(x)$ für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ als Elemente des $\mathbb{R}^2$ linear abhängig.

Sind dagegen λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, dass

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) \ = \ 0 \in \mathbb{R}^2$$

gilt, dann liefert dies für $x = 0$ einerseits die Bedingung $\lambda_1+\lambda_2 = 0$ und für $x = \ln(2)$ andererseits die Bedingung $\lambda_1 + 2\lambda_2$, so dass $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ folgt. Demnach sind die Funktionen y_1 und y_2 als Elemente des Vektorraumes $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ linear unabhängig.

(d) Angenommen, es gäbe ein stetiges $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass die Funktionen y_1 und y_2 beide das Differentialgleichungssystem $y'(x) \ = \ A(x)y(x)$ lösen. Dann müssten sie aufgrund ihrer linearen Unabhängigkeit ein Fundamentalsystem zu $y'(x) \ = \ A(x)y(x)$ bilden. In diesem Fall dürfte die Wronski-Determinante $W(x) = \det(y_1(x), y_2(x))$ an keinem Punkt verschwinden. Nach (c) tut sie dies jedoch sogar für alle x.

(e) (i) Die Matrix hat das charakteristische Polynom $(3 - \lambda)(-4 - \lambda) + 10 = \lambda^2 + \lambda - 2 = (1 - \lambda)(-2 - \lambda)$ und daher die Eigenwerte 1 und -2. Den Eigenvektor zum Eigenwert 1 bestimmt man als Lösung von

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} v = 0 \qquad \text{zu } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Zum Eigenwert -2 ergibt sich analog der Eigenvektor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ aus $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} v \ = \ 0.$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist also

$$y_h(t) = C_1\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad .$$

(ii) Da $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$ die Lösung $\mathbf{y} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ besitzt, ist die Konstante $\mathbf{y} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine partikuläre Lösung, und somit lautet die allgemeine Lösung

$$\mathbf{y}(t) \ = \ c_1\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ + \ c_2\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \ - \ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 8

Schwache Lösungen & Monotone Vektorfelder

- **Definition 1.48:** Eine Abbildung $f\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt **Carathéodory-Vektorfeld**, falls
  - $t \mapsto f(t,x)$ messbar für jedes feste $x \in \mathbb{R}^n$ ist,
  - $x \mapsto f(t,x)$ stetig für fast alle $t \in I$ ist.
- **Lemma 1.49 [Wachstumsbedingung]:** Ist $f\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Carathéodory-Vektorfeld und gilt mit einem $1 < p < \infty$ zusätzlich die Wachstumsbedingung, dass es
  - zu jedem kompakten Teilintervall $[a,b] \subset I$ und jedem $r < \infty$ eine Funktion $\gamma_r \in L^p([a,b])$ mit $|f(t,x)| \leq \gamma_r(t)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| \leq r$ und fast alle $t \in [a,b]$ gibt,

  dann liegt $t \mapsto f(t,x(t))$ für jede Kurve $x \in C(I,\mathbb{R}^n)$ in $L^p_{loc}(I,\mathbb{R}^n)$.
- **Satz 1.50 [Wachstums- und Lipschitz-Bedingung]:** Genügt das Carathéodory-Vektorfeld $f\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit einem $1 < p < \infty$ der in Lemma 1.49 genannten L^p-Wachstumsbedingung und zusätzlich der L^p-Lipschitzbedingung, dass
  - zu jedem kompakten Teilintervall $[a,b] \subset I$ und jedem $r < \infty$ eine Funktion $L_r \in L^p([a,b])$ mit $|f(t,x) - f(t,\tilde{x})| \leq L_r(t)|x - \tilde{x}|$ für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $|x|, |\tilde{x}| \leq r$ und fast alle $t \in [a,b]$ existiert,

  dann gibt es zu jedem Anfangswert $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutige schwache Lösung $x \in W^{1,p}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathbb{R}^n)$ von (3.3).
- **Definition 1.51:** Man sagt, ein zeitabhängiges Vektorfeld $f\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ genügt einer (globalen) **einseitigen Lipschitzbedingung**, falls es ein $L < \infty$ mit
  $$\langle f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x - \tilde{x}\rangle \leq L|x - \tilde{x}|^2 \tag{8.1}$$
  für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und fast alle $t \in I$ gibt.
- **Satz 1.52:** Genügt die rechte Seite f der Differentialgleichung $x' = f(t,x)$ einer einseitigen Lipschitzbedingung, dann gibt es zu jedem Anfangswert vorwärts in der Zeit höchstens eine schwache Lösung.
- **Lemma 1.53 [Gronwall]:** Ist $u\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall I mit linkem Randpunkt $t_0 \in I$ und gilt für alle $t \in I$ die Abschätzung
  $$u(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^t u(s)\,ds \tag{8.2}$$
  mit zwei Konstanten $\alpha, \beta \geq 0$, dann gilt für alle $t \in I$ die Ungleichung $u(t) \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)}$.
- **Bem.:** Aufgrund der bei $u(t_0) = 0$ und $\beta \geq 0$ vorliegenden Äquivalenz der Integralungleichung $u(t) \leq \beta \int_{t_0}^t u(s)\,ds$ zur Differentialungleichung $u' \leq \beta u$ auf einem Intervall I mit linkem Randpunkt $t_0 \in I$, wird das Lemma von Gronwall häufig auch mit letzterer Voraussetzung formuliert, d.h.,
  - Falls $u' \leq \beta u$ auf einem Intervall I mit linkem Randpunkt $t_0 \in I$ und $u(t_0) = 0$ gilt, folgt auch schon $u \leq 0$ auf I.
- **Definition 1.54 [monotones Vektorfeld]:** Ein zeitabhängiges Vektorfeld $g\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt **monoton**, falls
  $$\Big\langle g(t,x) - g(t,\tilde{x}), x - \tilde{x} \Big\rangle \;\geq\; 0 \tag{8.3}$$
  für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und fast alle $t \in I$ gilt.

- **Korollar 1.55:** Ist g monoton, dann besitzt die Differentialgleichung $x' + g(t,x) = 0$ zu jedem Anfangswert vorwärts in der Zeit höchstens eine Lösung.

Stetige Abhängigkeit

- **Bezeichnung:** Ist y_0 die zu einem Anfangswert x_0 gehörige eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ mit maximalem Lösungsintervall $I := I_{x_0}$, so spricht man von stetiger Abhängigkeit vom Anfangswert, falls die zu einer gegen x_0 konvergenten Folge von zulässigen Anfangwerten $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörige Folge von Lösungen y_n auf I existieren und dort gleichmäßig gegen y_0 konvergieren, d.h., falls $\left(|x_n - x_0| \overset{n\to\infty}{\to} 0 \Longrightarrow \|y_n - y_0\|_{C(I,\mathbb{R})} \overset{n\to\infty}{\to} 0\right)$ gilt.

- **Satz 1.57 [Stetige Abhängigkeit von den Daten]:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ und sei $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$. Ist f auf einer kompakten Umgebung $K \subset [a,b] \times \mathbb{R}^n$ des Graphen von x stetig und genügt f auf K einer (globalen) Lipschitzbedingung, dann hängt die Lösung x in folgendem Sinne stetig vom Anfangswert und von der rechten Seite ab:

  Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass bei

$$|t_0 - \tilde{t}_0| \leq \delta\,,\ \|x_0 - \tilde{x}_0\| \leq \delta \ \text{ und } \ \|f(t,x) - \tilde{f}(t,x)\| \leq \delta \text{ für alle } (t,x) \in K$$

  mit einem stetigen $\tilde{f}\colon K \to \mathbb{R}^n$, das einer (globalen) Lipschitzbedingung genügt, die Lösung $\tilde{x}$ des Anfangswertproblems $\tilde{x}' = \tilde{f}(t,\tilde{x})$, $\tilde{x}(\tilde{t}_0) = \tilde{x}_0$, auf ganz $[a,b]$ definiert ist und $|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq \varepsilon$ für alle $t \in [a,b]$ gilt.

  Andere Formulierung – Satz 12.VI [Satz über stetige Abhängigkeit]:[8]

  In einem kompakten Intervall J mit $\xi \in J$ löse $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0(t)$ das Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{y}}(t) \ = \ \mathbf{f}(\mathbf{y},t) \quad \text{in } J\,, \qquad \mathbf{y}(\xi) = \eta\,. \tag{8.4}$$

  Weiter sei $\mathbf{f}(\mathbf{y},t)$ in $S_\alpha := \{(\mathbf{y},t)\colon t \in J \wedge \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0(t)\| \leq \alpha\}$ für ein $\alpha > 0$ stetig und genüge für ein $L < \infty$ der Lipschitz-Bedingung

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{y}_1,t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_2,t)\| \ \leq \ L\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|\,. \tag{8.5}$$

  Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass mit einem in S_α stetigen $\mathbf{g}$ und

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{y},t) - \mathbf{f}(\mathbf{y},t)\| \ < \ \delta \quad \text{in } S_\alpha\,, \qquad \|\zeta - \eta\| \ < \ \delta$$

  jede Lösung $\mathbf{z}(t)$ des „gestörten“ Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{z}}(t) \ = \ \mathbf{g}(\mathbf{z},t) \quad \text{in } J\,, \qquad \mathbf{y}(\xi) = \zeta\,, \tag{8.6}$$

  in ganz J existiert und der Ungleichung $\|\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}_0(t)\| \ < \ \varepsilon$ genügt.

- **Definition 1.58 [gleichmäßig konvergent auf komapkten Teilmengen]:** Man sagt, f_n konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω gegen f, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ und jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\|f - f_n\|_{\infty,K} \leq \varepsilon$ auf K für alle $n \geq N$.

- **Satz 1.59 [Stetige Abhängigkeit für nur stetige rechte Seite]:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, konvergiere $f_n \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω gegen $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und gelte $(t_{0n}, x_{0n}) \to (t_0, x_0)$ in Ω für $n \to \infty$. Bezeichne desweiteren x_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine nicht weiter fortsetzbare Lösung von $x' = f_n(t,x)$, $x_n(t_{0n}) = x_{0n}$. Dann gilt:

  Existiert eine eindeutige Lösung x des Anfangswertproblems $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, auf dem kompakten Intervall $[a,b]$, dann existiert für genügend große n auch x_n auf $[a,b]$ und x_n konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen x.

[8] vgl. Wolfgang Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 7. Auflage, Springer, 2000

- **Bemerkung:** Als Konsequenz aus Satz 1.59 ist $(t_0, x_0, f) \mapsto (t \mapsto x(t; t_0, x_0, f))$ als Abbildung von $\Omega \times C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ nach $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ in den Punkten (t_0, x_0, f) stetig, für die auf $[a,b]$ eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, existiert. Man bemerke, dass auf die Eindeutigkeit nicht verzichtet werden kann, denn existieren verschiedene Lösungen zum selben Anfangswert, dann liegt selbstverständlich keine stetige Abhängigkeit vor.

- **Korollar 1.60 [Stetige Abhängigkeit von Parametern]:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, Λ eine metrischer Raum und $f : \Omega \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges zeit- und parameterabhängiges Vektorfeld. Existiert auf $[a,b]$ eine eindeutige Lösung $x(t; t_0, x_0, \lambda_0)$ von $x' = f(t, x, \lambda_0)$ zum Anfangswert $x(t_0) = x_0$, dann existieren für jedes (s, ξ, λ) nahe (t_0, x_0, λ) Lösungen $x(t; s, \xi, \lambda)$ auf $[a,b]$ von $x' = f(t, x, \lambda)$ zum Anfangswert $x(s) = \xi$, und $(s, \xi, \lambda) \mapsto (t \mapsto x(t; s, \xi, \lambda))$ ist als Abbildung von $\Omega \times \Lambda$ nach $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ stetig in (t_0, x_0, λ_0).

Zusatzaufgabe 8.1:

(a) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Warum ist eine stetige Funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, ds \tag{8.7}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ automatisch stetig differenzierbar?

(b) Begründen Sie, warum die Lösung einer Differentialgleichung $y' = f(y)$ zu einem Anfangswert $y(0) = y_0$ auf $[0, \infty)$ eindeutig ist, falls es zu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein $L < \infty$ mit

$$(f(y) - f(\tilde{y}))(y - \tilde{y}) \le L(y - \tilde{y})^2 \tag{8.8}$$

für alle $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ gibt.

Hinweis: Welcher Differentialungleichung genügt das Quadrat der Differenz zweier Lösungen?

Bem.: Die Ungleichung (8.8) ist ein Spezialfall der in Definition 1.51 eingeführten einseitigen Lipschitz-Bedingung.

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.1:

(a) Nach dem Hauptsatz der Differentialrechnung ist $t \mapsto y_0 + \displaystyle\int_0^t f(s, y(s))\, ds$ aufgrund der Stetigkeit von $s \mapsto f(s, y(s))$ differenzierbar mit Ableitung $f(t, y(t))$ an der Stelle t. Nun gilt aber $y(t) = y_0 + \displaystyle\int_0^t f(s, y(s))\, ds$, also ist auch $y(t)$ differenzierbar mit Ableitung $y'(t) = f(t, y(t))$, und da $t \mapsto f(t, y(t))$ stetig ist, ist y sogar stetig differenzierbar.

(b) Angenommen, y und $\tilde{y}$ seien Lösungen des Anfangswertproblems. Dann gilt einerseits wegen $y' - \tilde{y}' = f(y) - f(\tilde{y})$ für $u(t) = \frac{1}{2}(y(t) - \tilde{y}(t))^2$ offenbar die Differentialungleichung

$$u'(t) \;=\; \left(\frac{1}{2}(y(t) - \tilde{y}(t))^2\right)' \;=\; (f(y(t)) - f(\tilde{y}(t)))(y(t) - \tilde{y}(t)) \;\overset{(8.8)}{\le}\; 2L\frac{(y(t) - \tilde{y}(t))^2}{2} \;=\; 2Lu(t)\,,$$

welche durch Integration über dem Intervall $[t_0, t]$ auf beiden Seiten zu $u(t) - u(t_0) \le 2L \displaystyle\int_{t_0}^t u(s) ds$ wird, was äquivalent zur Integralungleichung (8.2) mit $\alpha = u(t_0) \ge 0$ und $\beta = 2L \ge 0$ ist, so dass andererseits wegen $y(t_0) = \tilde{y}(t_0)$ und somit $u(t_0) = 0$ sowie mit $t_0 = 0$ nach dem Lemma von Gronwall für alle $t \in I = [0, \infty[$ die Ungleichung

$$0 \;\le\; \frac{1}{2}(y(t) - \tilde{y}(t))^2 \;=\; u(t) \;\overset{\text{Lemma 1.53}}{\le}\; \alpha \cdot e^{\beta(t - t_0)} \;=\; u(t_0) \cdot e^{2L(t - t_0)} \;=\; 0 \cdot e^{2Lt} \;=\; 0$$

folgt. Also gilt $y(t) = \tilde{y}(t)$ für alle $t \in [0, \infty)$, für welche die Lösung definiert ist.

Zusatzaufgabe 8.2: Finden Sie die allgemeine Lösung von $y'(x) = Ay(x)$ für $A := \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.2:

Die Matrix A besitzt das charakteristische Polynom

$$\operatorname{charpol}_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = (\lambda+1)(\lambda+3)+1 = (\lambda+2)^2 ,$$

hat also nur den Eigenwert $\lambda = -2$, der wegen

$$\operatorname{Ker}(A+2I_2) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

geometrisch einfach ist. Somit gibt es nur einen Jordanblock, so dass A die Jordan-Normalform

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

besitzt. Da die Matrix A zweidimensional ist, muss der verallgemeinerte Eigenraum-Raum $\operatorname{Ker}(A+2I_2)^2$ schon der ganze Raum sein (wegen $(A+2I_2)^2 = 0$, was man gar nicht nachrechnen muss). Somit starten wir mit einem beliebigen Element aus dem Raum, welches nicht in $\operatorname{Ker}(A+2I_2)$ liegt, beispielsweise mit

$$c_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad c_2 = (A+2I_2)c_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die zugehörige Transformationsmatrix $T = (c_2, c_1)$ erfüllt in der Tat

$$T^{-1}AT = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Somit ist wegen $A = TJT^{-1}$ die allgemeine Lösung

$$y(x) = \exp(Ax)\tilde{c} = T\exp(Jx)T^{-1}\tilde{c} = T\exp(Jx)c = Y(x)c$$

mit einem $c \in \mathbb{R}^2$ und dem Fundamentalsystem (vgl. auch Lemma 2.10)

$$Y(x) = T\exp(Jx) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3\mathrm{e}^{-2x}\begin{pmatrix} 1 & x+1 \\ 2 & 2x \end{pmatrix} .$$

Also erhalten wir $y(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} x+1 \\ 2x \end{pmatrix}\right)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ als allgemeine Lösung.

Zusatzaufgabe 8.3:

(a) Ermitteln Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ die maximale Lösung $y_n(t)$ der Differentialgleichung $y'(t) = \mathrm{e}^{y(t)}\cos(t)$ zum Anfangswert $y_n(0) = -\frac{1}{n}$.

(b) Zeigen Sie, dass jede der Lösungen y_n aus Teil (a) auf ganz $\mathbb{R}$ existiert, dass aber die Lösung zum Anfangswert $y(0) = 0$ nur auf $]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ existiert.

(c) Warum widerspricht (b) nicht dem Satz über die stetige Abhängigkeit vom Anfangswert?

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.3:

(a) Trennung der Variablen liefert

$$\sin(t) = \int_0^t \cos(s)\,ds = \int_0^t \mathrm{e}^{-y_n(s)}y_n'(s)ds = -\mathrm{e}^{-y_n(t)} + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$$

und nach Umstellen daher $y_n(t) = -\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - \sin(t)\right)$.

(b) Aufgrund der strengen Monotonie der n-ten Wurzel gilt offenbar $e^{\frac{1}{n}} > 1^{\frac{1}{n}} = 1 \geq \sin(t)$. Somit existiert jede der Lösungen $y_n(t)$ für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$.

Jedoch existiert die Lösung $y(t) = -\ln(1 - \sin(t))$ zum Anfangswert $y(0) = 0$ nur noch auf dem Intervall

$$I := \left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ . \tag{8.9}$$

Diese starke qualitative Eigenschaftsänderung kann man durchaus als eine „intuitive Unstetigkeit" in Bezug auf die Änderung des Anfangswertes interpretieren.

(c) Der Satz über die stetige Abhängigkeit vom Anfangswert erfordert zu einer festen Lösung $y(t)$, dass die rechte Seite auf einer Umgebung des Graphen $G := \{(t, y(t)) \,|\, t \in I\}$ Lipschitz-stetig ist (dabei wird I häufig als kompakt, zumindest aber als abgeschlossen vorausgesetzt).
Somit können wir

(i) den Satz für $y(t)$ auf ein kleineres abgeschlossenes (und damit kompaktes) Intervall $\tilde{I} \subseteq I$ anwenden, da aufgrund der Stetigkeit dann auch $y(t)$ sein Maximum und sein Minimum annehmen muss und somit insbesondere auch eine kompakte Umgebung des Graphen $\tilde{G} := \{(t, y(t)) \,|\, t \in \tilde{I}\}$ existiert, auf der die geforderte Lipschitz-Bedingung aufgrund der stetigen Differenzierbarkeit der rechten Seite $e^y \cos(t)$, des Schrankensatzes und des Satzes vom Minimum/Maximum erfüllt werden kann.

(ii) den Satz für jedes $y_n(t)$ auf ein beliebiges kompaktes Intervall I_n mit der gleichen Argumentation (Existenz kompakter Umgebungen des Graphen $G_n := \{(t, y_n(t)) \,|\, t \in I_n\}$, stetige Differenzierbarkeit der rechten Seite $e^y \cos(t)$, Schrankensatz, Satz v. Minimum/Maximum) anwenden. Allerdings muss das $\delta > 0$, dessen Existenz vom Satz über die stetige Abhängigkeit zu beliebigem $\varepsilon > 0$ garantiert wird, im Fall $I_n \supseteq I$ offensichtlich echt kleiner als $|y(0) - y_n(0)| = \frac{1}{n}$ sein.

(iii) den Satz **nicht** für $y(t)$ auf I aus (8.9) anwenden, da einerseits I noch nicht einmal abgeschlossen ist und andererseits aufgrund der Unbeschränktheit von $y(t)$ auf I keine kompakte Umgebung des Graphen $G := \{(t, y(t)) \,|\, t \in I\}$ existiert. Insbesondere ist die rechte Seite $e^y \cos(t)$ auf jeder beliebigen Umgebung von G **nicht** Lipschitz-stetig (denn schon e^y ist auf $\mathbb{R}$ nicht Lipschitz-stetig).

Zusatzaufgabe 8.4:

(a) Bestimmen Sie die Lösung $y(t; y_0)$ der Differentialgleichung $y' = -t^2 y^2$ zu einem beliebigen Anfangswert $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie in Abhängigkeit von y_0 das maximale Existenzintervall der Lösung $y(t; y_0)$ an.

(c) Warum gibt es in (a) zu jedem Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}$ nur eine Lösung?

(d) Zeigen Sie $\lim\limits_{t \nearrow \sqrt[3]{\frac{3}{|y_0|}}} y(t; y_0) = -\infty$ für die Lösung $y(t; y_0)$ aus (a) zum Anfangswert $y_0 < 0$.

(e) Hängen die Lösungen $y(t; y_0)$ stetig vom Anfangswert y_0 ab?

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.4:

(a) Neben $y(t, 0) \equiv 0$ liefert im Fall $y_0 \neq 0$ Trennung der Variablen

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \quad = \quad \int_0^t \frac{-y'(s)}{(y(s))^2} \, ds \quad = \quad \int_0^t s^2 \, ds \quad = \quad \frac{1}{3} t^3$$

und (inkl. der singulären Lösung) daher $y(t; y_0) = \dfrac{3y_0}{3 + t^3 y_0}$ als Lösung des Anfangswertproblems.

(b) (i) Im Fall $y_0 < 0$ ist das maximale Existenzintervall $\left]-\infty, \sqrt[3]{\frac{3}{|y_0|}}\right[$.

(ii) Im Fall $y_0 = 0$ ist das maximale Existenzintervall ganz $\mathbb{R}$.

(iii) Im Fall $y_0 > 0$ ist das maximale Existenzintervall $\left]-\sqrt[3]{\frac{3}{y_0}}, \infty\right[$.

(c) Aufgrund der stetigen Differenzierbarkeit von $f : (t, y) \mapsto -t^2y^2$ genügt f einer lokalen Lipschitz-Bedingung, wonach Lösungen eindeutig sind (Picard-Lindelöf).

(d) Für $y_0 < 0$ gilt

$$\lim_{t \nearrow \sqrt[3]{\frac{3}{|y_0|}}} y(t; y_0) = \lim_{t \nearrow \sqrt[3]{3/|y_0|}} \frac{3y_0}{3 + t^3 y_0} = -\infty .$$

(e) Intuitiv könnte man meinen, dass die Lösungen nicht stetig vom Anfangswert abhängen, denn für $y_0 < 0$ existiert die Lösung nur für eine endliche Zeit, während die Lösung zum Anfangswert $y_0 = 0$ für alle Zeiten existiert.

Der Satz über die stetige Abhängigkeit vom Anfangswert erfordert zu einer festen Lösung $y(t)$, dass die rechte Seite auf einer Umgebung des Graphen $G := \{(t, y(t)) \,|\, t \in I\}$ Lipschitz-stetig ist (dabei wird I häufig als kompakt, zumindest aber als abgeschlossen vorausgesetzt).
Somit können wir den Satz für $y(t, 0)$ auf beliebige kompakte Intervalle $I := [a, b]$ anwenden, da mit der Kompaktheit von I auch eine kompakte Umgebung des Graphen $G := \{(t, y(t, 0)) \,|\, t \in I\}$ existiert, auf der die geforderte Lipschitz-Bedingung aufgrund der stetigen Differenzierbarkeit der rechten Seite $-t^2y^2$, des Schrankensatzes und des Satzes vom Minimum/Maximum erfüllt werden kann.
Allerdings muss das $\delta > 0$, dessen Existenz vom Satz über die stetige Abhängigkeit zu beliebigem $\varepsilon > 0$ garantiert wird, im Fall $\sqrt[3]{\frac{3}{|y_0|}} \in I_n$ oder $-\sqrt[3]{\frac{3}{|y_0|}} \in I_n$ offensichtlich echt kleiner als $|y(0, 0) - y(0, y_0)| = |y_0|$ sein. Dies ist keine echte Einschränkung, da $\sqrt[3]{\frac{3}{|y_0|}} \to \infty$ für $|y_0| \to 0$.

Zusatzaufgabe 8.5: Besitzt die Bernoulli-Differentialgleichung $y'(x) = x\sqrt{y(x)} - y(x)$ zum Anfangswert $y(0) = 4$ eine eindeutige Lösung? Ist auf das obige Anfangswertproblem der Satz von Picard-Lindelöf anwendbar?

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.5:

Die Differentialgleichung $y'(x) = x\sqrt{y(x)} - y(x)$ kann aufgrund des Definitionsbereiches der Wurzel nur nichtnegative Lösungen besitzen. Da die singuläre Lösung $y \equiv 0$ nicht die obige Anfangsbedingung erfüllt, kann sie vernachlässigt werden.
Die Substitution $z(x) := \sqrt{y(x)} > 0$ (da y in 0 nicht differenzierbar) in der vorliegenden Bernoulli-Differentialgleichung $y'(x) = x\sqrt{y(x)} - y(x)$ liefert nach Kettenregel die lineare Differentialgleichung

$$z'(x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{y(x)}} y'(x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{y(x)}}\left(x\sqrt{y(x)} - y(x)\right) \;=\; \frac{1}{2}(x - z(x)) \,,$$

deren homogene Gleichung die allgemeine Lösung $z_h(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ mit einem $C \in \mathbb{R}$ besitzt. Eine Partikulärlösung ist offenbar $z_p(x) = x-2$. Somit hat die Differentialgleichung $z'(x) = \frac{1}{2}(x-z(x))$ die allgemeine Lösung

$$z(x) \;=\; z_h(x) + z_p(x) \;=\; C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + x - 2 \,.$$

Mit der Anfangsbedingung $z(0) = \sqrt{y(0)} = \sqrt{4} = 2$ erhalten wir somit aus $2 = C - 2$ die eindeutige Konstante $C = 4$ und (da $z(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + x - 2 > 0$ in der Umgebung von $x = 0$ aufgrund der Stetigkeit von $z(x)$ und $z(0) > 0$) nach Rücksubstitution

$$y(x) \;=\; (4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + x - 2)^2$$

als (zumindest lokal eindeutige) Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 9

Stabile und asymptotisch stabile Ruhelagen

- **Definition 3.1:** Sei $Q \subset \mathbb{R} \times \Omega$ offen. Eine stetige Abbildung $\Phi\colon Q \to \Omega$ heißt **lokaler Fluss** (oder auch **kontinuierliches lokales dynamisches System**) auf der Menge Ω, falls $\{0\} \times \Omega \subset Q$ und $\Phi(0, \cdot) = \mathrm{Id}_\Omega$ gilt, $\{t \in \mathbb{R} \,|\, (t, x) \in Q\}$ für jedes $x \in \Omega$ ein Intervall ist, sowie für jedes $(t, x) \in Q$ mit $(s, \Phi(t, x)) \in Q$ auch schon $(s + t, x) \in Q$ und $\Phi(s + t, x) = \Phi(s, \Phi(t, x))$ gilt.

- **Satz 3.2:** Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, genügt das stetige Vektorfeld $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ einer **lokalen Lipschitzbedingung**, und bezeichnet man die maximale Lösung von
$$x' = f(x) \tag{9.1}$$
zum Anfangswert $x(0) = x_0$ mit $I_{x_0} \ni t \mapsto \Phi(t, x_0)$, so ist $Q := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega \,|\, t \in I_x\}$ eine offene Umgebung von $\{0\} \times \Omega$ sowie eine Vereinigung $Q = \bigcup_{x\in\Omega} I_x \times \{x\}$ von Intervallen, und $\Phi\colon Q \to \Omega$ ist lokaler Fluss.
Ist darüberhinaus f stetig differenzierbar, so ist auch Φ stetig differenzierbar.

- **Weitere Bezeichnungen/Bemerkungen:**
  (a) Betrachtet man nur nichtnegative Zeiten $t \geq 0$, so spricht man von einem (lokalen) **Halbfluss** statt von einem (lokalen) Fluss.
  (b) Die Menge Ω bezeichnet man als den **Phasenraum** (=Zustandsraum)
  (c) Die Spur $x(I_{x_0}) = \Phi(I_{x_0}, x_0)$ einer maximalen Lösung x von (9.1) zu einem Anfangswert $x_0 \in \Omega$ bezeichnet man als **Orbit** (=**Zeitorbit**, **Trajektorie**, **Phasenkurve**) durch x_0.
  (d) Betrachtet man nur positive Zeiten, so spricht man vom (positiven) **Halborbit** durch x_0.
  (e) Wie wir aufgrund unserer Existenz- und Eindeutigkeitsresultate wissen, geht durch jeden Punkt des Phasenraums genau ein Orbit.

- **Definition 3.3:** Ein Punkt $x_0 \in \Omega$ heißt **Ruhelage** (=**Gleichgewicht**, **Equilibrium**) der autonomen Differentialgleichung (9.1), falls $f(x_0) = 0$ oder äquivalenterweise $\Phi(t, x_0) = x_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

- **Definition 3.4:** Ist x eine T-periodische Lösung der autonomen Differentialgleichung (9.1) zum Anfangswert x_0 oder gilt äquivalenterweise $\Phi(T, x_0) = x_0$, so heißt die Spur von x bzw. der Orbit durch x_0 ein **periodischer Orbit**.

- **Lemma 3.5:** Auf jeden Orbit $x(I_{x_0}) = \Phi(I_{x_0}, x_0)$ des von (9.1) generierten lokalen Flusses Φ trifft genau eine der folgenden Aussage zu:
  - Der Orbit ist ein Punkt und somit eine Ruhelage.
  - Der Orbit ist eine geschlossene Kurve und somit ein periodischer Orbit.
  - Der Orbit ist nicht geschlossen. Dann ist $t \mapsto \Phi(t, x_0)$ eine Bijektion von I_{x_0} auf den Orbit.

- **Definition 3.6:** Eine Menge $A \subset \Omega$ heißt **(Lyapunov-)stabil** unter dem von (9.1) generierten lokalen Fluss Φ, wenn es für jede Umgebung V von A eine Umgebung U von A gibt, für die jede Lösung zu einem Anfangswert $x \in U$ auf $[0, +\infty)$ definiert ist und $\Phi(t, x) \in V$ für alle $t \geq 0$ und $x \in U$ erfüllt.

- **Definition 3.7:** Eine Menge $A \subset \Omega$ heißt ein **Attraktor** des von (9.1) generierten lokalen Fluss Φ, falls es eine Umgebung U von A gibt, für die jede Lösung zu einem Anfangswert $x \in U$ auf $[0, +\infty)$ definiert ist und $\lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(\Phi(t, x), A) = 0$ erfüllt.

- **Definition 3.8:** Ist eine Menge $A \subset \Omega$ sowohl (Lyapunov-)stabil als auch ein Attraktor, so heißt sie **asymptotisch stabil**.

- **Definition 3.9:** Zwei lokale Flüsse Φ auf Ω (definiert auf Q) und $\tilde{\Phi}$ auf $\tilde{\Omega}$ (definiert auf $\tilde{Q}$) heißen **topologisch äquivalent**, wenn es eine topologische Konjugation zwischen ihnen gibt, d.h. eine Zahl $a > 0$ und einen Homöomorphismus $h : \Omega \to \tilde{\Omega}$ mit der Eigenschaft

$$\forall (t, x) \in Q \, : \, h(\Phi(t, x)) = \tilde{\Phi}(at, h(x)) \, .$$

  Bem.: Sind die Flüsse Φ und $\tilde{\Phi}$ topologisch äquivalent, dann sieht das Phasenportrait von Φ samt zeitlicher Orientierung der Orbits in den neuen durch h gegebenen Koordinaten qualitativ genauso aus wie das Phasenportrait von $\tilde{\Phi}$.

Lineare Flüsse

- **Satz 3.10 [stabile Ruhelage im Fall einer konstanten Systemmatrix]:** Der Nullpunkt von $x' = Ax$ ist genau dann eine stabile Ruhelage, wenn für alle Eigenwerte λ von A die Ungleichung $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ gilt und jeder Eigenwert λ mit $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ halbeinfach ist, d.h. seine algebraische und geometrische Vielfachheit stimmen überein.

- **Korollar 3.11 [Hinreichendes Kriterium für instabile Ruhelage]:** Gibt es einen Eigenwert λ von A mit $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, so ist der Nullpunkt von $x' = Ax$ eine instabile Ruhelage.

- **Satz 3.12 [asymptotisch stabile Ruhelage bei konstanter Systemmatrix]:** Der Nullpunkt von $x' = Ax$ ist genau dann eine asymptotisch stabile Ruhelage, wenn für alle Eigenwerte λ von A die Ungleichung $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ gilt.

- **Definition 3.13:** Ein linearer Fluss $\exp(tA)$ heißt **hyperbolisch**, falls kein Eigenwert von A einen verschwindenden Realteil besitzt.

- **Lemma 3.14 [Exponentielles Streben in Richtung asymptotisch stabiler Ruhelagen]:** Gilt mit einer reellen Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $\mathrm{Re}(\lambda) < \alpha$ für jeden Eigenwert λ von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann gibt es eine von einem Skalarprodukt induzierte Norm $\|.\|$ auf $\mathbb{R}^n$ mit $\|\exp(tA)\| \leq \mathrm{e}^{t\alpha}$.

- **Satz 3.15:** Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind äquivalent:

  (a) Der Nullpunkt ist eine asymptotisch stabile Ruhelage (oder Senke) von $x' = Ax$.

  (b) Es gibt Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta \geq 1$ mit $\|\exp(tA)x\|_2 \leq \beta \mathrm{e}^{-t\alpha} \|x\|_2$ für alle $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$.

  (c) Es gibt eine Konstante $\alpha > 0$ und eine von einem Skalarprodukt induzierte Norm $\|.\|$ auf $\mathbb{R}^n$ mit $\|\exp(tA)x\| \leq \mathrm{e}^{-t\alpha}\|x\|$ für alle $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$.

- **Satz 3.16 [Zerlegung in stabilen und instabilen Anteil]:** Ist $\exp(tA)$ ein hyperbolischer linearer Fluss, dann kann man den Phasenraum eindeutig in eine direkte Summe $X_s \oplus X_u$ von Unterräumen zerlegen, so dass A eine Zerlegung $A = A_s \oplus A_u$ mit $A_s \colon X_s \to X_s$, $A_u \colon X_u \to X_u$, besitzt und $\exp(tA_s)$ auf X_s kontrahierend (und somit stabil) ist, während $\exp(tA_u)$ auf X_u expandierend (und somit instabil) ist.

- **Bezeichnungen:**

  (a) Die Menge aller Eigenwerte einer Matrix A nennen wir das **Spektrum** von A, welches üblicherweise mit $\sigma(A)$ abgekürzt wird.

  (b) Zwei Füsse $\exp(tA)$ und $\exp(tB)$ heißen **linear äquivalent**, falls eine Zahl $a > 0$ und eine lineare Bijektion $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $h \circ \exp(tA) = \exp(atB) \circ h$ für alle $t \in \mathbb{R}$ existieren.

- **Satz 3.17:** Zwei lineare Flüsse $\exp(tA)$ und $\exp(tB)$ sind genau dann linear äquivalent, wenn ein $a > 0$ existiert mit $\sigma(A) = \sigma(aB)$ und die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der korrespondierenden Eigenwerte übereinstimmen.

- **Satz 3.18:** Zwei hyperbolische lineare Flüsse $\exp(tA)$ und $\exp(tB)$ auf dem $\mathbb{R}^n$ sind genau dann topologisch äquivalent, wenn $\dim(X_s^A) = \dim(X_s^B)$ gilt.[9]

- **Lemma 3.19:** Gelte für jeden Eigenwert λ von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Ungleichung $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Dann ist $\exp(tA)$ topologisch äquivalent zu $\exp(-t\,\mathrm{Id})$, wobei man die Zeit unverändert lassen kann.

Prinzip der linearisierten Stabilität & Satz von Hartman-Grobman

- **Bemerkungen:**

  (a) Jede nichtlineare Differentialgleichung (9.1) mit f stetig differenzierbar können wir in der Nähe einer Ruhelage x_0 mit $A := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ als Störung $x' = A(x-x_0)+g(x-x_0)$ der linearen Differentialgleichung $x' = A(x-x_0)$ auffassen, wobei $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\|g(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} = 0$ gilt.

  (b) Durch die Transformation $y := x - x_0$ ist (9.1) nahe der Ruhelage x_0 zur gestörten linearen Differentialgleichung $y' = Ay + g(y)$ mit $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\|g(y)\|}{\|y\|} = 0$ nahe der Ruhelage 0 äquivalent.

  (c) Genau dann löst y die Differentialgleichung $y' = Ay + g(y)$ zum Anfangswert $y(t_0) = y_0$, wenn y der folgenden Integralgleichung genügt:

$$y(t) = \exp((t-t_0)A)y_0 + \int_{t_0}^{t} \exp((t-s)A)g(y(s))\,ds\ . \tag{9.2}$$

- **Satz 3.20/3.21 [Prinzip der linearisierten Stabilität/Instabilität]**
  Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und sei $x_0 \in \Omega$ ein Punkt mit $f(x_0) = 0$. Weiter bezeichne $\sigma(A)$ das Spektrum der Matrix $A := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

  - Gilt $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$, dann ist die Ruhelage x_0 asymptotisch stabil.
  - Gilt $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ für ein $\lambda \in \sigma(A)$, dann ist die Ruhelage x_0 instabil.

- **Satz 3.24 [Grobman-Hartman]:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, x_0 eine hyperbolische Ruhelage von (9.1), d.h., mit $A := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ gelte $\forall\lambda \in \sigma(A)\colon\ \mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$. Dann ist der von f generierte lokale Fluss nahe x_0 topologisch äquivalent zu $\exp(tA)$ nahe 0.

- **Korollar 3.25:** In einem n-dimensionalen Raum gibt es genau $n+1$ topologisch verschiedene Typen von hyperbolischen Ruhelagen einer autonomen Differentialgleichung (9.1) mit f stetig differenzierbar.

Lyapunov-Funktionen & Gradientensysteme

- **Motivation:**

  (a) Lyapunov-Funktionen dienen oft dazu, die Stabilität einer Ruhelage in den Fällen zu überprüfen, in denen das Prinzip der linearisierten Stabilität/Instabilität nicht anwendbar ist.

  (b) Lyapunov-Funktionen werden auch verwendet, um die Invarianz gewisser Teilmengen des Phasenraumes zu zeigen oder sogenannte ω-Limesmengen zu diskutieren.

- **Definition 3.26:** Ein Menge $A \subset \Omega$ heißt **positiv invariant** unter dem von (9.1) generierten lokalen Fluss Φ, falls $x \in A$ schon $\Phi(t,x) \in A$ für alle $t \geq 0$ impliziert.[10]

- **Definition 3.27:** Ein Menge $A \subset \Omega$ heißt **exponentiell stabil** unter dem von (9.1) generierten lokalen Fluss Φ, wenn es eine Umgebung U von A und Konstanten $\alpha > 0$, $\beta \geq 1$, gibt, für die jede Lösung zum Anfangswert $x \in U$ auf $[0,+\infty[$ definiert ist und $\mathrm{dist}(\Phi(t,x),A) \leq \beta e^{-\alpha t}\,\mathrm{dist}(x,A)$ für alle $t \geq 0$ erfüllt.

[9] Zu den Bezeichnungen siehe Satz 3.16.
[10] Insbesondere muss die Lösung zu jedem Anfangswert $x \in A$ für alle Zeiten existieren.

- **Lemma 3.28:** Ist $A \subset \Omega$ kompakt und exponentiell stabil, dann ist A auch asymptotisch stabil.

- **Definition 3.29:** Eine stetig differenzierbare Funktion $V\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **Lyapunov-Funktion** für den von (9.1) generierten lokalen Fluss Φ auf Ω, falls

$$\dot{V}(x) := \lim_{t\to 0} \frac{V(\Phi(t,x)) - V(x)}{t} = \langle (\operatorname{grad} V)(x), f(x) \rangle \leq 0$$

für alle $x \in \Omega$ gilt, d.h. V ist entlang von Lösungen der Differentialgleichung monoton fallend.[11][12]

- **Satz 3.30 [Lyapunov]:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, $V\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion für (9.1), $A := V^{-1}(]-\infty, 0]) \subset \Omega$ kompakt und nicht leer. Dann gelten:

  (a) Es ist A positiv invariant und stabil.

  (b) Im Fall $\dot{V}(x) < 0$ für alle $x \in \Omega \setminus A$ ist A asymptotisch stabil.

  (c) Falls die Ungleichungen $\dot{V}(x) \leq -p\alpha V(x)$ sowie $c \operatorname{dist}(x,A)^p \leq V(x) \leq \tilde{c} \operatorname{dist}(x,A)^p$ für alle $x \in \Omega$ mit Konstanten $\alpha, \tilde{c}, c, p > 0$ erfüllt sind, ist A exponentiell stabil.

- **Korollar 3.31:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, $V\colon \Omega' \to \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion für (9.1) auf einer Umgebung $\Omega' \subset \Omega$ des Punktes $x^* \in \Omega$. Weiter besitze V in x^* ein striktes lokales Minimum. Dann gelten:

  (a) Es ist x^* eine stabile Ruhelage von (9.1).

  (b) Im Fall $\dot{V}(x) < 0$ für alle $x_0 \neq x \in \Omega'$ ist x^* asymptotisch stabil.

  (c) Falls die Ungleichungen $\dot{V}(x) \leq -p\alpha V(x)$ sowie $c|x - x^*|^p \leq V(x) \leq \tilde{c}|x - x^*|^p$ für alle $x \in \Omega'$ mit Konstanten $\alpha, \tilde{c}, c, p > 0$ erfüllt sind, ist x^* exponentiell stabil.

- **Definition 3.33:** Ist $A \subset \Omega$ unter dem lokalen Fluss Φ auf Ω attraktiv, so heißt die Menge $\{x \in \Omega \,|\, \lim\limits_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\Phi(t,x), A) = 0\}$ der **Einzugsbereich** von A.

- **Bezeichnung:** Eine autonome Differentialgleichung (9.1) wird **Gradientensystem** genannt, falls es eine C^2-Funktion $V\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, mit $f(x) = -(\operatorname{grad} V)(x)$.

- **Definition 3.35:** Für einen lokalen Fluss Φ auf Ω ist die **ω-Limesmenge** $\omega(x)$ des Orbits durch $x \in \Omega$ die Menge aller Punkte $y \in \Omega$, für die es eine Folge $t_k \to \infty$ mit $\Phi(t_k, x) \to y$ gibt.

  Bem.: Offenbar gilt

$$\omega(x) \;=\; \bigcap_{t>0} \overline{\Phi([t,\infty), x)}\;. \tag{9.3}$$

- **Satz 3.36:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen Φ ein lokaler Fluss auf Ω. Ist der positive Halborbit durch x relativ kompakt in Ω, so ist die ω-Limesmenge $\omega(x)$ nicht leer, kompakt, zusammenhängend und (positiv) invariant.
  Ist darüberhinaus V eine Lyapunov-Funktion auf einer Umgebung Ω' des positiven Halborbits durch x, dann gibt es einen Wert γ von V mit $\omega(x) \subset V^{-1}(\{\gamma\})$, und insbesondere gilt $\omega(x) \subset \{x \in \Omega' \,|\, \dot{V}(x) = 0\}$.

- **Korollar 3.37:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V\colon \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist jeder ω-Limespunkt eines Orbits des Gradientensystems $x' = -(\operatorname{grad} V)(x)$ ein kritischer Punkt von V.

- **Korollar 3.38:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V\colon \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann sind strikte lokale Minima von V asymptotisch stabile Ruhelagen des Gradientensystems $x' = -(\operatorname{grad} V)(x)$.

---

[11] Für eine Lösung x von $x' = f(x)$ folgt hier $\frac{d}{dt} V(x(t)) = \langle (\operatorname{grad} V)(x(t)), x'(t) \rangle = \langle (\operatorname{grad} V)(x(t)), f(x(t)) \rangle$.

[12] In der Literatur werden Lyapunov-Funktionen manchmal auch als nur stetige, entlang von Lösungen motonon fallende Funktionen definiert.

Zusatzaufgabe 9.1:

Diskutieren Sie die Stabilität des Systems $\dot{x} = Ax$ im Fall $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ in Abhängigkeit der möglichen Eigenschaften der Eigenwerte λ, μ bzw. der Jordan-Normalform

$$J = S^{-1}AS \; . \tag{9.4}$$

Geben Sie jeweils die allgemeine Lösung in den neuen Koordinaten $y = h(x) := S^{-1}x$ an.

Bem.: Bezeichnet $B = S^{-1}AS$ die Jordansche Normalform von A, dann ist der Fluss $\exp(tA)$ zum Fluss $\exp(tB)$ topologisch äquivalent, indem man die Zeit unverändert lässt ($a = 1$) und als topologische Konjugation die lineare Abbildung $h(x) := S^{-1}x$ wählt, denn es gilt

$$S^{-1}\exp(tA)x = \exp(tB)S^{-1}x \; . \tag{9.5}$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.1:

(a) $\boxed{\lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \lambda < 0 < \mu\text{:}}$

Dann ist die Ruhelage 0 instabil nach Korollar 3.11 und wird als **Sattel** bezeichnet.

(b) $\boxed{\mathrm{Re}(\lambda) \le \mathrm{Re}(\mu) < 0\text{:}}$

Dann ist die Ruhelage 0 asymptotisch stabil nach Satz 3.12 und wird als **Senke** bezeichnet.

(i) $\boxed{\text{sowie } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ halbeinfach:}}$

Dann bezeichnet man die Ruhelage 0 als **stabilen Knoten** oder **stabilen Fokus**, J aus (9.4) besitzt Diagonalgestalt und die allgemeine Lösung ist $\exp(tJ)y = \big(\mathrm{e}^{\lambda t}y_1, \mathrm{e}^{\lambda t}y_2\big)$. Weiter unterscheidet man zwischen stabilen Knoten **erster Art** (im Fall $\lambda \neq \mu$) und **zweiter Art** (im Fall $\lambda = \mu$).

(ii) $\boxed{\text{sowie } \lambda = \mu \in \mathbb{R} \text{ nicht halbeinfach:}}$

Dann bezeichnet man die Ruhelage 0 als **uneigentlichen stabilen Knoten** oder stabilen Knoten **dritter Art**, J aus (9.4) ist ein echtes Jordankästchen der Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$$

und die allgemeine Lösung ist $\exp(tJ)y = \big(\mathrm{e}^{\lambda t}y_1 + t\mathrm{e}^{\lambda t}y_2, \mathrm{e}^{\lambda t}y_2\big)$.

(iii) $\boxed{\text{sowie } \lambda = \overline{\mu} = a + \mathrm{i}\omega \text{ mit } \omega > 0\text{:}}$

Dann bezeichnet man die Ruhelage 0 als **stabilen Strudel**, J aus (9.4) ist eine fast orthogonale Matrix der Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} a & -\omega \\ \omega & a \end{pmatrix}$$

und die allgemeine Lösung ist $\exp(tJ)y = \mathrm{e}^{ta}(\cos(\omega t)y_1 - \sin(\omega t)y_2, \sin(\omega t)y_1 + \cos(\omega t)y_2)$.

(c) $\boxed{0 < \mathrm{Re}(\lambda) \le \mathrm{Re}(\mu)\text{:}}$

Dann ist die Ruhelage 0 instabil nach Korollar 3.und wird als **Quelle** bezeichnet.

(i) $\boxed{\text{sowie } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ halbeinfach:}}$

Dann bezeichnet man die Ruhelage 0 als **instabilen Knoten** oder **instabilen Fokus**, J aus (9.4) sowie die allgemeine Lösung als auch die Unterscheidung nach erster und zweiter Art sind wie bei (b.i).

(ii) $\boxed{\text{sowie } \lambda = \mu \in \mathbb{R} \text{ nicht halbeinfach:}}$

Dann bezeichnet man die Ruhelage 0 als **uneigentlichen instabilen Knoten** oder instabilen Knoten **dritter Art**, J aus (9.4) und die allgemeine Lösung sind wie bei (b.ii).

(iii) $\boxed{\text{sowie } \lambda = \overline{\mu} = a + \mathrm{i}\omega \text{ mit } \omega > 0\text{:}}$

Dann bezeichnet man die Ruhelage 0 als **instabilen Strudel**, J aus (9.4) und die allgemeine Lösung sind wie bei (b.iii).

(d) $\boxed{\lambda = \overline{\mu} = \mathrm{i}\omega \text{ mit } \omega > 0}$

Dann bezeichnet man die Ruhelage 0 als ein **Zentrum** oder als einen **Wirbel**, wobei die Ruhelage stabil, aber nicht asymptotisch stabil ist. Weiter ist J aus (9.4) eine fast orthogonale Matrix der Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

Insbesondere sind alle Lösungen $\exp(tJ)y = (\cos(\omega t)y_1 - \sin(\omega t)y_2, \sin(\omega t)y_1 + \cos(\omega t)y_2)$ periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{\omega}$.

(e) Singulärer Fall $\boxed{\mu = 0}$:

(i) $\boxed{\text{sowie } \lambda \neq 0\text{:}}$

Dann gibt es eine Gerade von Ruhelagen, die im Fall $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ nach Satz 3.10 stabil bzw. im Fall $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ nach Korollar 3.11 instabil sind.
Jede Lösung hat die Form $\exp(tJ)y = (\mathrm{e}^{t\lambda}y_1, y_2)$.

(ii) $\boxed{\text{sowie } \lambda = 0\text{:}}$

Dann sind alle Lösungen Ruhelagen, welche nach Satz 3.10 stabil sind.

Zusatzaufgabe 9.2:

Skizzieren Sie jeweils die Phasenportraits (inklusive Charakterisierung der Ruhelagen) und bestimmen Sie jeweils mittels e^{tA} die allgemeine reelle Lösung für die Systeme

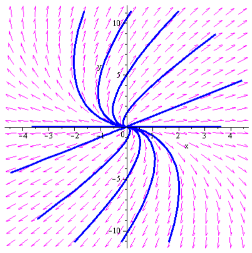
$$\dot{\mathbf{y}}(t) = A_k \mathbf{y}(t) \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \qquad (k = 1, \ldots, 5)$$

und

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.2:

(a) Da es sich bei A_1 um eine Diagonalmatrix handelt, stehen die beiden positiven Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 4$ genau auf der Diagonalen. Somit ist die Matrix regulär und besitzt den Nullpunkt als einzigen stationären Punkt, der in diesem Fall ein instabiler Knoten zweiter Art ist.
Mittels der Matrix der Eigenvektoren



$$C := (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir wegen $\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{CtDC^{-1}} = C\mathrm{e}^{tD}C^{-1}$ demnach

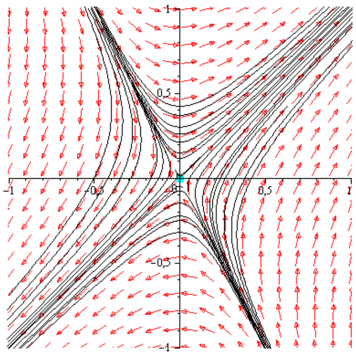
$$Y(t) = C\mathrm{e}^{tD}C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & -\mathrm{e}^{3t} \\ 0 & \mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{4t} - \mathrm{e}^{3t} \\ 0 & \mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix}$$

als Fundamentalsystem und somit als allgemeine (reelle) Lösung

$$\mathbf{y}(t) = Y(t)\mathbf{c} = c_1 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4t} - \mathrm{e}^{3t} \\ \mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

(b) Die Eigenwerte des charakteristischen Polynoms von A_2 besitzen wegen

$$P(\lambda) \;=\; \det(A_2-\lambda I_2) \;=\; \lambda(\lambda-2)-8 \;=\; \lambda^2-2\lambda-8 \;=\; (\lambda-4)(\lambda+2)$$



verschiedenes Vorzeichen, so dass es sich beim einzigen stationären Punkt $(0,0)$ um einen instabilen Sattelpunkt handelt. Mittels der Matrix der Eigenvektoren

$$C \;:=\; (\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad C^{-1} \;=\; \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir wegen $\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{CtDC^{-1}} = C\mathrm{e}^{tD}C^{-1}$ demnach

$$\begin{aligned} Y(t) \;&=\; C\mathrm{e}^{tD}C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{4t} & \mathrm{e}^{4t} \\ \mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} \\ &=\; \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{4t}+\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{4t}-\mathrm{e}^{-2t} \\ 2\mathrm{e}^{4t}-2\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{4t}+2\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

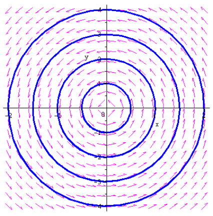
als Fundamentalsystem und somit als allgemeine (reelle) Lösung

$$\mathbf{y}(t) \;=\; 3Y(t)\mathbf{c} \;=\; c_1\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{4t}+\mathrm{e}^{-2t} \\ 2\mathrm{e}^{4t}-2\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} \;+\; c_2\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4t}-\mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^{4t}+2\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} \qquad (c_1,c_2\in\mathbb{R}).$$

(c) Die Eigenwerte des charakteristischen Polynoms von A_3 sind wegen

$$P(\lambda) \;=\; \det(A_3-\lambda I_2) \;=\; \lambda^2+16 \;=\; (\lambda-4\mathrm{i})(\lambda+4\mathrm{i})$$

ein rein imaginäres konjugiertes Eigenwertpaar $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}4$, so dass es sich beim einzigen stationären Punkt $(0,0)$ um ein stabiles Zentrum handelt. Mit



$$C \;:=\; (\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & -2 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad C^{-1} \;=\; \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir wegen $Y(t) = \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{CtDC^{-1}} = C\mathrm{e}^{tD}C^{-1}$ dann

$$\begin{aligned} Y(t) \;&=\; \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4\mathrm{i}t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t} \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t} \\ -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t} & -\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t} \end{pmatrix} \\ &=\; \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t}) & \mathrm{i}(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t}) \\ -4\mathrm{i}(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t}) & 2(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t}) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \cos(4t) & -\frac{1}{2}\sin(4t) \\ 2\sin(4t) & \cos(4t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

als Fundamentalsystem und somit als allgemeine (reelle) Lösung

$$\mathbf{y}(t) \;=\; Y(t)\mathbf{c} \;=\; c_1\begin{pmatrix} \cos(4t) \\ 2\sin(4t) \end{pmatrix} \;+\; c_2\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin(4t) \\ \cos(4t) \end{pmatrix} \qquad (c_1,c_2\in\mathbb{R}).$$

(d) Das charakteristische Polynom von A_4 besitzt wegen

$$P(\lambda) \;=\; \det(A_4-\lambda I_2) \;=\; (\lambda-8)(\lambda-4)+4 \;=\; \lambda^2-12\lambda+36 \;=\; (\lambda-6)^2$$

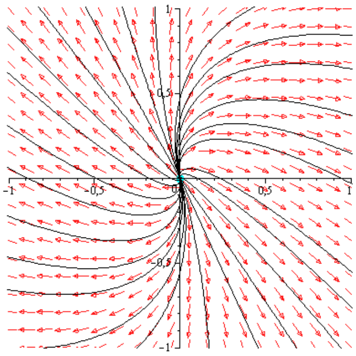
den doppelten Eigenwert $\lambda_{1,2} = 6$. Wegen $\operatorname{Ker}(A-6I_2) \;=\; \operatorname{span}\{\mathbf{v}\}$ mit

$$\mathbf{v} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (A-6I_2)\mathbf{u} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{u} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{u}(p) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1-p}{2} \\ p \end{pmatrix}$$

liegt hier ein instabiler Knoten dritter Art vor. Wir erhalten wegen $AC = CJ$ mit

$$J \;:=\; \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\,, \quad C \;:=\; (\mathbf{v}, \mathbf{u}(1)) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad C^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie wegen $Y(t) = \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{CtJC^{-1}} = C\mathrm{e}^{tJ}C^{-1}$ als Fundamentalsystem



$$\begin{aligned} Y(t) \;&=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{6t} & t\mathrm{e}^{6t} \\ 0 & \mathrm{e}^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{6t} & t\mathrm{e}^{6t} \\ -2\mathrm{e}^{6t} & \mathrm{e}^{6t}(1-2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} (1+2t)\mathrm{e}^{6t} & t\mathrm{e}^{6t} \\ -4\mathrm{e}^{6t} & (1-2t)\mathrm{e}^{6t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

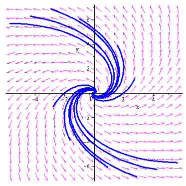
und somit als allgemeine (reelle) Lösung

$$\mathbf{y}(t) \;=\; Y(t)\mathbf{c} \;=\; c_1 \begin{pmatrix} (1+2t)\mathrm{e}^{6t} \\ -4\mathrm{e}^{6t} \end{pmatrix} \;+\; c_2 \begin{pmatrix} t\mathrm{e}^{6t} \\ (1-2t)\mathrm{e}^{6t} \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

(e) Das charakteristische Polynom von A_5 besitzt wegen

$$P(\lambda) \;=\; \det(A_5 - \lambda I_2) \;=\; (\lambda - 1)^2 + 1$$

das komplexe Eigenwertpaar $\lambda_{1,2} = 1 \pm \mathrm{i}$. Da der Realteil echt positiv ist, handelt es sich beim einzigen stationären Punkt $(0,0)$ um einen instabilen Strudelpunkt. Mit



$$C \;:=\; (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad C^{-1} \;=\; \frac{1}{2\mathrm{i}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir wegen $Y(t) = \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{CtDC^{-1}} = C\mathrm{e}^{tD}C^{-1}$ demnach

$$\begin{aligned} Y(t) \;&=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t} \end{pmatrix} \frac{1}{2\mathrm{i}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} & \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t} \\ -\mathrm{i}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \\ &=\; \frac{1}{2\mathrm{i}} \begin{pmatrix} \mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} + \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t}\right) & -\left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} - \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t}\right) \\ \left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} - \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t}\right) & \mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} + \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t}\right) \end{pmatrix} \;=\; \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

als Fundamentalsystem und somit als allgemeine (reelle) Lösung

$$\mathbf{y}(t) \;=\; Y(t)\mathbf{c} \;=\; \mathrm{e}^t \left(c_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Zusatzaufgabe 9.3: Zeigen Sie: (a) Satz 3.30 (a).

(b) Für f stetig differenzierbar ist (9.1) genau dann ein Gradientensystem, wenn gilt:

$$\forall j, k = 1, \ldots, n\colon \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) \;=\; \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)\;.$$

(c) Die Funktion V ist eine Lyapunov-Funktion für das Gradientensystem $f(x) = -(\operatorname{grad} V)(x)$. Desweiteren gilt $\dot{V}(x) = 0$ nur in den Punkten x mit $(\operatorname{grad} V)(x) = 0$.

(d) Die Linearisierung eines Gradientensystems besitzt in einer Ruhelage nur reelle Eigenwerte.

(e) Die folgenden ebenen Systeme sind Gradientensysteme. Finden Sie die Ruhelagen. Welche der Ruhelagen sind asymptotisch stabil?

(i) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - 2x^3 \\ x - 2y \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(x^2+y^2-1) \\ -y(x^2+y^2-1) \end{pmatrix}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.3:

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, $V\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion für (9.1). Weiter sei $A := V^{-1}(]-\infty, 0]) \subset \Omega$ kompakt und nicht leer.

(i) Wir zeigen: A ist positiv invariant.
Sei x Lösung von (9.1) zum Anfangswert $x_0 \in A$. Dann gilt einerseits aufgrund der Monotonie von $V \circ x$ schon $\forall 0 \leq t \in I_{x_0} : V(x(t))$ und andererseits $V(x_0) \leq 0$ nach Definition von A, also insgesamt $\forall 0 \leq t \in I_{x_0} : x(t) \in A$. Aufgrund der Kompaktheit von $A \subset \Omega$ und der Offenheit von Ω kann sich eine Lösung in A nicht dem Rand von Ω nähern, so dass sie für alle Zeiten existiert.

(ii) Wir zeigen: A ist stabil.
Bezeichne $B_r(A) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x, A) < r\}$ für $r > 0$ die Menge aller Punkte, deren Abstand zu A kleiner als r ist.

- Um die Stabilität von A nachzuweisen, reicht es, zu jedem genügend kleinen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ zu finden, für das $x \in B_\delta(A)$ schon $\Phi(t, x) \in B_\varepsilon(A)$ impliziert, da aufgrund der Kompaktheit von A schon jede Umgebung V von A eine Umgebung der Form $B_\varepsilon(A)$ enthält.
- Zunächst bemerke man, dass es aufgrund der Kompaktheit von $A := V^{-1}((-\infty, 0])$ ein $r > 0$ mit $\overline{B_r(A)} \subset \Omega$ gibt.
- Sei nun $0 < \varepsilon < r$ vorgegeben. Dann nimmt die stetige Funktion V nach dem Satz vom Minimum/Maximum auf der nach dem Satz von Heine Borel kompakten (da beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$) Menge $\partial B_\varepsilon(A)$ an, welches wir mit γ bezeichnen wollen. Nach Definition von A muss V auf ganz $\partial B_\varepsilon(A)$ positiv sein, weswegen auch $\gamma > 0$ folgt.
- Zu diesem $\gamma > 0$ gibt es ein $0 < \delta < \varepsilon$ mit $V(x) < \gamma$ für $x \in B_\delta(A)$, da $V^{-1}(]-\infty, \gamma[)$ offene Umgebung von A ist und daher $B_\delta(A)$ für ein $\delta > 0$ enthält.
- Da V eine Lyapunov-Funktion ist, ist $V(x(t))$ entlang jeder Lösung von (9.1) zu einem Anfangswert $x(0) \in B_\delta(A)$ monoton fallend, so dass insbesondere $V(x(t)) \leq V(x(0)) < \gamma$ für alle $t \geq 0$ gilt. Insbesondere erreicht $V(x(t))$ niemals den Wert γ, und somit erreicht $x(t)$ niemals den Rand $\partial B_\varepsilon(A)$. Dies bedeutet aber, dass $x(0) \in B_\delta(A)$ schon $x(t) \in B_\varepsilon(A)$ für alle $t \geq 0$ impliziert.

(b) Dies folgt sofort aus dem Satz von Schwarz.

(c) Nach Definition von V folgt für jede Lösung des Gradientensystems $f(x) = -(\operatorname{grad} V)(x)$ offenbar

$$\dot{V}(x) = \langle (\operatorname{grad} V)(x), f(x) \rangle = -\langle (\operatorname{grad} V)(x), (\operatorname{grad} V)(x) \rangle = -\|(\operatorname{grad} V)(x)\|^2 \leq 0 .$$

Mit der Definitheit der Norm folgt insbesondere $\dot{V}(x) = 0 \iff (\operatorname{grad} V)(x) = 0$.

(d) Die Linearisierung von $x' = -(\operatorname{grad} V)(x)$ in einem Punkt x^* ist die negative Hesse-Matrix $-(\operatorname{Hess} V)(x^*)$ von V in x^*. Die Hesse-Matrix ist aber symmetrisch für zweimal stetig differenzierbare Funktionen V und besitzt somit nur reelle Eigenwerte.

(e) (i) Es gilt $\partial_y(2x^3 - x - y) = -1 = \partial_x(2y - x)$, also ist das System ein Gradientensystem. Aus $\partial_x V = 2x^3 - x - y$ ergibt sich $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^4 - x^2) - xy + C(y)$, und aus $-x + C'(y) = \partial_y V = 2y - x$ folgt $C(y) = y^2$, also $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^4 - x^2) - xy + y^2$.

Die Ruhelagen des Gradientensystems sind die kritischen Punkte von V, d.h. die Punkte mit $2x^3 - x - y = 0$ und $2y - x = 0$. Aus der letzten Gleichung folgt $y = \frac{1}{2}x$, und Einsetzen in die erste Gleichung liefert $4x^3 - 3x = 0$, d.h. $x = 0$ (und dann $y = 0$) sowie $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (und dann $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$). Die Linearisierung $-(\operatorname{Hess} V)(x,y)$ des Systems in einem Punkt (x,y) ist $-\begin{pmatrix} 6x^2-1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. In $(0,0)$ lautet die Linearisierung $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ und die Eigenwerte sind $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$, also ist $(0,0)$ ein Sattel von V und somit instabil. In $\pm(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ lautet die Linearisierung $\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ und die Eigenwerte sind $\lambda_{1/2} = -\frac{11}{4} \pm \frac{\sqrt{97}}{4}$. Daher haben alle Eigenwerte einen negativen Realteil, d.h. in $\pm(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ liegen strikte (lokale) Minima von V, und somit sind $\pm(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ asymptotisch stabil nach Korollar 3.38.

(ii) Es gilt $\partial_y x(x^2+y^2-1) = 2xy = \partial_x y(x^2+y^2-1)$, also ist das System ein Gradientensystem. Aus $\partial_x V = x(x^2+y^2-1)$ ergibt sich $V(x,y) = \frac{1}{4}(x^2+y^2-1)^2 + C(y)$, und aus $y(x^2+y^2-1) + C'(y) = \partial_y V = y(x^2+y^2-1)$ folgt $C(y) = 0$, also $V(x,y) = \frac{1}{4}(x^2+y^2-1)^2$. Die Ruhelagen des Gradientensystems sind die kritischen Punkte von V, also der Punkt $(0,0)$ und alle Punkte auf dem Kreis $x^2+y^2 = 1$. Die Linearisierung $-(\operatorname{Hess} V)(x,y)$ des Systems im Punkt (x,y) ist $-\begin{pmatrix} 3x^2+y^2-1 & 2xy \\ 2xy & x^2+3y^2-1 \end{pmatrix}$, In $(0,0)$ lautet die Linearisierung $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. 1 ist ein doppelter Eigenwert und somit ist $(0,0)$ instabil. Alle Punkte auf dem Kreis $x^2+y^2 = 1$ sind dagegen offensichtlich globale Minimalstellen von V, aber da sie nicht isoliert sind, sind sie nur stabile Ruhelagen und nicht asymptotisch stabil.

Zusatzaufgabe 9.4: Bestimmen Sie alle Ruhelagen des ebenen Systems [13] $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 - x^3 \\ (x^2-1)y \end{pmatrix}$ und überprüfen Sie, ob man das Prinzip der linearisierten Stabilität/Instabilität anwenden kann. Finden Sie in den Ruhelagen, wo dies nicht der Fall ist, Lyapunov-Funktionen der Form $V(x,y) = ax^2 + by^2$ mit $a, b > 0$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.4:

Die Ruhelagen des Systems sind die Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit
$$\begin{aligned} y^2 - x^3 &= 0, \\ (x^2-1)y &= 0. \end{aligned}$$
Aus der zweiten Gleichung ergibt sich $y = 0$ und dann $x = 0$ aus der ersten Gleichung, oder $x = \pm 1$ und $y^2 = \pm 1$ aus der ersten Gleichung. Daher sind nur $(0,0)$ und $(1,\pm 1)$ Ruhelagen. Wegen $df(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2 & 2y \\ 2xy & (x^2-1) \end{pmatrix}$ ist die Linearisierung der rechten Seite $A_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ nahe der Ruhelage $(0,0)$ bzw. $A_{\pm 1} := \begin{pmatrix} -3 & \pm 2 \\ \pm 2 & 0 \end{pmatrix}$ nahe der Ruhelagen $(1,\pm 1)$. Letztere sind instabil, da $A_{\pm 1}$ die Eigenwerte -4 und 1 besitzt. Auf die Ruhelage $(0,0)$ ist das Prinzip der linearisierten Stabilität/Instabilität (Satz 3.20, 3.21) dagegen nicht anwendbar, da A_0 die Eigenwerte 0 und -1 besitzt. Aus dem Ansatz $V(x,y) = ax^2 + by^2$ mit $a, b > 0$ ergibt sich

$$\dot V(x,y) = \langle (\operatorname{grad} V)(x,y), f(x,y) \rangle = 2ax(y^2-x^3) + 2by(x^2-1)y = (2bx^2 + 2ax - 2b)y^2 - 2ax^4\,.$$

Daher gilt $\dot V \le 0$ in dem Streifen $\Omega' := \{(x,y) \mid 2bx^2 + 2ax - 2b < 0\}$ und $\dot V = 0$ nur in $(0,0) \in \Omega'$ für alle $a, b > 0$. Die Menge Ω' ist nun einerseits genau dann nichtleer, wenn $2bx^2 + 2ax - 2b = 0$ zwei Nullstellen $x_1 \ne x_2$ besitzt und andererseits genau dann eine Umgebung von $(0,0)$, wenn $x_1 x_2 < 0$, also $\frac{a^2}{4b^2} + 1 > \frac{a^2}{4b^2}$ gilt, was für alle $a, b > 0$ der Fall ist. Also ist V für jede Wahl von $a, b > 0$ eine strikte Lyapunov-Funktion auf einer Umgebung von $(0,0)$, so dass nach Korollar 3.31 (b) die asymptotische Stabilität von $(0,0)$ folgt.

[13] Dieses ist kein(!) Gradientensystem.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 10

Parameterabhängige Integrale

- Ist $f(x,y)$ stetig auf dem Rechteck $[a,b]\times[c,e]$ und existiert dort überall $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$, dann existiert nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aufgrund der Stetigkeit von f zu beliebigem $\eta\in[c,e]$ eine Stammfunktion $F_\eta(\xi)=F(\xi,\eta)$ von $f_\eta(\xi):=f(\xi,\eta)$ mit $F_\eta(\xi)=\int_a^\xi f_\eta(s)ds=\int_a^\xi f(s,\eta)ds$. Sind darüber hinaus $\alpha\colon[c,e]\to[a,b]$ und $\beta\colon[c,e]\to[a,b]$ differenzierbare Kurven, so gilt

$$\frac{d}{dy}\left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\right) = f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y)+\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\frac{\partial}{\partial y}f(s,y)ds\,. \quad (10.1)$$

- **Lemma 6.32 [Differentiationslemma für parameterabhängige Integrale]:** Sei $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum, $E\in\mathcal{A}$, $I\subset\mathbb{R}$ ein nichtdegeneriertes Intervall, $f\colon X\times E\to\mathbb{R}$, $(x,\omega)\mapsto f(x,\omega)$, eine Funktion, für die gilt:

  (a) $\omega\mapsto f(x,\omega)$ ist μ-integrierbar für jedes $x\in X$.

  (b) $x\mapsto f(x,\omega)$ ist differenzierbar auf I für jedes $\omega\in E$.

  (c) $\exists\, h\colon E\to[0,\infty]$ μ-integrierbar, so dass $|\partial_x f(x,\omega)|\le h(\omega)$ für alle $(x,\omega)\in X\times E$.

  Dann ist die Funktion $\varphi\colon X\to\mathbb{R}$, definiert durch $\varphi(x)=\int_E f(x,\omega)\,d\mu(\omega)$, differenzierbar auf I, die Funktion $\omega\mapsto\partial_x f(x,\omega)$ ist μ-integrierbar für jedes $x\in I$ und es gilt:

$$\varphi'(x) = \int_E \partial_x f(x,\omega)\,d\mu(\omega) \quad \text{für jedes } x\in I.$$

Elementare Lösungsmethoden für partielle Differentialgleichungen

- **Bezeichnungen:**

  (a) Eine **vollständig nichtlineare m-dimensionale partielle Differentialgleichung** k-ter Ordnung für eine Funktion $u\in C^k(\Omega,\mathbb{R}^m)$ auf einem Gebiet[14] $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ besitzt die Form

$$f(x,u,Du,\dots,D^ku) = 0$$

  mit einer Funktion $f\colon\Omega\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{nm}\times\cdots\times\mathbb{R}^{n^km}\to\mathbb{R}^m$.

  (b) Sei nun speziell $\ell\ge 2$, $\Omega\subset\mathbb{R}^\ell$ und $u\in C^1(\Omega,\mathbb{R})$. Dann heißt eine Gleichung der Gestalt

$$Lu(\mathbf{x}) := F\left(x_1,\dots,x_\ell,u(x_1,\dots,x_\ell),\frac{\partial}{\partial x_1}u(x_1,\dots,x_\ell),\dots,\frac{\partial}{\partial x_\ell}u(x_1,\dots,x_\ell)\right) = 0$$

  homogene partielle Differentialgleichung (PDE) erster Ordnung in ℓ Veränderlichen. Dabei heißt L dann **Differentialoperator erster Ordnung**. Die Gleichung

$$Lu(\mathbf{x})=g(\mathbf{x}) \quad (10.2)$$

  heißt entsprechend **inhomogene partielle Differentialgleichung (inhomogenen PDE)**.

  (c) Ist L Differentialoperator m-ter Ordnung und gilt $L(\lambda u+\mu v)=\lambda Lu+\mu Lv$ für beliebige $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ und $u,v\in C^m$, dann heißt L **linear**.

  (d) Ist L ein linearer Differentialoperator erster Ordnung, so heißen die Kurven, entlang denen eine Lösung $u(\mathbf{x})$ von $Lu(\mathbf{x})=0$ konstant sind, **Charakteristiken**.

[14] Gebiete sind im Allgemeinen offene einfach zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

- **Spezielle Typen linearer Differentialgleichungen erster Ordnung:**

  (a) $\boxed{\text{mit konstanten Koeffizienten:}}$ Für einen Vektor $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$ mit $\prod_{j=1}^{\ell} \alpha_j \neq 0$ (oder mindestens $a_\ell \neq 0$) gilt

  $$Lu(\mathbf{x}) \; := \; \sum_{j=1}^{\ell} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} u((x)) \; = \; 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \partial_{\mathbf{a}} u(\mathbf{x}) \; = \; \langle \operatorname{grad} u(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle \; = \; 0 \, . \tag{10.3}$$

  (b) $\boxed{\text{hom. lineare PDE erster Ordnung in zwei Variablen mit nicht-konstanten Koeffizienten:}}$

  $$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y \; = \; 0 \, . \tag{10.4}$$

  (c) $\boxed{\text{inhom. lin. PDE erster Ordnung in zwei Variablen mit nicht-konstanten Koeffizienten:}}$

  $$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y \; = \; c(x,y) \, . \tag{10.5}$$

  (d) $\boxed{\text{hom. lineare PDE erster Ordnung mit variablen Koeffizienten } (\ell \geq 3)\text{:}}$

  $$Lu(x_1, \ldots, x_\ell) := \sum_{j=1}^{\ell} a_j(x_1, \ldots, x_\ell) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x_1, \ldots, x_\ell) \; = \; 0 \tag{10.6}$$

- **Laplace-Operator:** Eine PDE zweiter Ordnung ist die **Laplace-Gleichung**

  $$\Delta u = 0 \tag{10.7}$$

  für eine Funktion $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, wobei der **Laplace-Operator** Δ für zweimal stetig differenzierbares u definiert ist durch

  $$\Delta u := \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \, . \tag{10.8}$$

- **Wellengleichung:** Als Wellengleichung bezeichnen wir die partielle Differentialgleichung

  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u \tag{10.9}$$

  zweiter Ordnung für eine zeitabhängige Funktion $u \colon \;]0, \infty[\, \times \Omega \to \mathbb{R}$ auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, wobei die Zahl $c \in \;]0, \infty[$ die Geschwindigkeit der Wellen angibt.

  Bem.: Der lineare Differentialoperator aus (10.9) besitzt im Fall $\Omega = \mathbb{R}$ die Zerlegung

  $$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \; = \; \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \; = \; \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \, . \tag{10.10}$$

- **Definition 5.1:** Eine Lösung u von (10.7) in Ω heißt **harmonische Funktion** auf Ω.

- **Beispiel 5.2:**

  (a) Die Funktion $u_1(x,y) := xy$ ist harmonisch in jedem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

  (b) Die Funktion $u_2(x,y) := x^2 - y^2$ ist harmonisch in jedem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

  (c) Die Funktion $u_3(x,y) := \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ ist harmonisch in allen Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, die nicht den Ursprung enthalten. Da u_3 nicht stetig in den Punkt $(0,0)$ fortgesetzt werden kann, ist u_3 somit insbesondere keine Lösung von (10.7) in einem Gebiet, das den Ursprung enthält.

- **Bemerkungen:**
  (a) Der Laplace-Operator ist ein linearer Operator, d.h., es gilt $\Delta(\lambda u + \mu v) = \lambda \Delta u + \mu \Delta v$ für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $u, v \in C^2$. Also bilden die harmonischen Funktionen auf Ω einen linearen Vektorraum. Eindeutigkeit erhalten wir etwa durch Bedingungen an $\partial\Omega$.
  (b) Im Spezialfall $n = 1$, $\Omega =]a, b[$ ist $\partial\Omega = \{a, b\}$ und die Laplace-Gleichung degeneriert zur gewöhnlichen DGL $u'' = 0$, deren Lösungen durch die Randwerte $u(a)$,$u(b)$ eindeutig festgelegt sind (siehe Randwertaufgabe, Kapitel 4).

Zusatzaufgabe 10.1: (a) Beweisen Sie (10.1).

(b) Berechnen Sie $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, für die folgenden Funktionen:

(i) $F(x) := \int\limits_{[1,2]} \frac{e^{xy}}{y} d\lambda_1(y);$ (ii) $F(x) := \int\limits_{[0,x]} e^{(x-y)^2} d\lambda_1(y).$

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.1:

(a) Mit Hilfe des Satzes über die Differentiation parameterabhängiger Integrale und nach der Kettenregel folgt

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dy}\left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\right) &= \frac{d}{dy}\left(F_y(\beta(y)) - F_y(\alpha(y))\right) = \frac{d}{dy}F(\beta(y),y) - \frac{d}{dy}F(\alpha(y),y)\\
&= dF(\beta(y),y)\cdot\begin{pmatrix}\beta'(y)\\1\end{pmatrix} - dF(\alpha(y),y)\cdot\begin{pmatrix}\alpha'(y)\\1\end{pmatrix}\\
&= \left(\tfrac{\partial}{\partial\xi}F(\beta(y),y) \quad \tfrac{\partial}{\partial\eta}F(\beta(y),y)\right)\begin{pmatrix}\beta'(y)\\1\end{pmatrix} - \left(\tfrac{\partial}{\partial\xi}F(\alpha(y),y) \quad \tfrac{\partial}{\partial\eta}F(\alpha(y),y)\right)\begin{pmatrix}\alpha'(y)\\1\end{pmatrix}\\
&= f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y) + \int_a^{\beta(y)}\frac{\partial}{\partial\eta}f(s,y)ds - f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y) - \int_a^{\alpha(y)}\frac{\partial}{\partial\eta}f(s,y)ds\\
&= f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y) + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\frac{\partial}{\partial y}f(s,y)ds\ .
\end{aligned}
$$

(b) (i) Mit Hilfe des Satzes über die Differentiation parameterabhängiger Integrale ergibt sich

$$
\frac{d}{dx}\int\limits_{[1,2]}\frac{e^{xy}}{y}d\lambda_1(y) = \int\limits_{[1,2]}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{xy}}{y}\right)d\lambda_1(y) = \int\limits_{[1,2]} e^{xy}d\lambda_1(y) = \frac{e^{xy}}{x}\Big|_{y=1}^{y=2} = \frac{e^x(e^x-1)}{x}\ .
$$

Alternative: Mittels Substitutionsregel und der Vorbemerkung erhalten wir ebenfalls

$$
\frac{d}{dx}\int\limits_{[1,2]}\frac{e^{xy}}{y}d\lambda_1(y) = \frac{d}{dx}\int_1^2\frac{e^{xy}}{xy}x\,dy = \frac{d}{dx}\int_x^{2x}\frac{e^z}{z}dz = \frac{e^{2x}}{2x}\cdot 2 - \frac{e^x}{x}\cdot 1 + 0 = \frac{e^x(e^x-1)}{x}\ .
$$

(ii) Mit der Vorbemerkung folgt hier

$$
\begin{aligned}
F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) &= e^{(x-x)^2}\cdot 1 - e^{(x-0)^2}\cdot 0 + \int_0^x\frac{\partial}{\partial x}e^{(x-y)^2}d\lambda_1(y)\\
&= 1 + \int_0^x 2(x-y)e^{(x-y)^2} = 1 - e^{(x-y)^2}\Big|_{y=0}^{y=x} = e^{x^2}.
\end{aligned}
$$

Alternative: Mittels Substitutionsregel und der Vorbemerkung erhalten wir ebenfalls

$$
F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x e^{z^2}dz = e^{x^2}\cdot 1 - e^{0^2}\cdot 0 + 0 = e^{x^2}\ .
$$

Zusatzaufgabe 10.2: Welche Ordnung haben die folgenden PDE? Sind sie lineare PDE?

(a) $u_x + u_y = 0$	(c) $u_x + uu_y = 0$	(e) $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$	(g) $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
(b) $u_x + yu_y = 0$	(d) $u_{xx} + u_{yy} = 0$	(f) $u_t - \mathrm{i}u_{xx} = 0$	(h) $u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.2:

(a) lineare PDE erster Ordnung (in der Physik als eine Transportgleichung bekannt).
(b) lineare PDE erster Ordnung (in der Physik ebenfalls als eine Transportgleichung bekannt).
(c) nichtlineare PDE erster Ordnung (modelliert in der Physik eine Stoßwelle).
(d) lineare PDE zweiter Ordnung (Laplace-Gleichung).
(e) lineare PDE vierter Ordnung (modelliert in der Physik einen schwingenden Stab).
(f) lineare PDE zweiter Ordnung (tritt in der Quantenmechanik auf).
(g) nichtlineare PDE dritter Ordnung (modelliert in der Physik eine Dispersionswelle).
(h) nichtlineare PDE zweiter Ordnung (modelliert in der Physik eine Welle mit Rückkopplung).

Zusatzaufgabe 10.3: (a) Lösen Sie die Differentialgleichung (10.3).

(b) Führen Sie die Differentialgleichungen (10.4) und (10.6) auf gewöhnliche DGlen/Systeme zurück.

(c) Behandeln Sie die Differentialgleichung (10.5).

(d) Finden Sie die allgemeine Lösung der **Wellengleichung** $\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx}}$.

(e) Leiten Sie die Formel von d'Alembert

$$u(t,x) \;=\; \frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\right] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\sigma)d\sigma \qquad \textbf{d'Alembert } (1746) \qquad (10.11)$$

her, die das **AWP für die Wellengleichung** $\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx},\;\; u(0,x)=\varphi(x),\;\; u_t(0,x)=\psi(x)}$ löst.

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.3:

(a) Wegen (10.3) suchen wir $u(\mathbf{x})$ mit $\partial_{\mathbf{a}} u(\mathbf{x}) = 0$, d.h. Lösungen $u(\mathbf{x})$, welche entlang einer jeden Geraden in Richtung $\mathbf{a}$ konstant ist, denn mit $\tilde{u}(s) := u(\mathbf{y}+s\mathbf{a})$ für beliebiges $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^\ell$ folgt nach Kettenregel

$$\tilde{u}'(s) \;=\; \left\langle \operatorname{grad} u(\mathbf{y}+s\mathbf{a}), \frac{d}{ds}(\mathbf{y}+s\mathbf{a})\right\rangle \;=\; \langle \operatorname{grad} u(\mathbf{y}+s\mathbf{a}), \mathbf{a}\rangle \;=\; 0\,, \quad \text{also} \quad \tilde{u} \;\equiv\; c := \tilde{u}(s)$$

für ein beliebiges $s \in \mathbb{R}$. Wählen wir nun $\mathbf{y} := a_\ell \mathbf{x}$ und $s := -x_\ell$, so ergibt sich

$$u(a_\ell\mathbf{x}) \;=\; u(a_\ell\mathbf{x}+s\mathbf{a}) \;=\; u\Big(a_\ell x_1 - a_1 x_\ell, a_\ell x_2 - a_2 x_\ell, \ldots, a_\ell x_{\ell-1} - a_{\ell-1}x_\ell, \underbrace{a_\ell x_\ell - a_\ell x_\ell}_{=0}\Big)\,.$$

Das heißt, es gibt wie erwartet nur $\ell - 1$ Freiheitsgrade. Somit wird $Lu(\mathbf{x}) = 0$ durch

$$u(x_1,\ldots,x_\ell) \;:=\; f\Big(a_\ell x_1 - a_1 x_\ell, a_\ell x_2 - a_2 x_\ell, \ldots, a_\ell x_{\ell-1} - a_{\ell-1}x_\ell\Big) \qquad (10.12)$$

mit einer beliebigen differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^{\ell-1} \to \mathbb{R}$ gelöst. Die Charakteristiken sind genau alle Parallelen zur Geraden $g(s) := s\mathbf{a}$.

(b) (i) Für jede Lösung ist die Richtungsableitung in Richtung $(a(x,y), b(x,y))^{\mathrm{T}}$ gleich Null. Verwenden wir den Ansatz $x = x(t),\; y = y(t)$, dann erhalten wir aus der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}u(x(t),y(t)) \;=\; u_x \cdot \dot{x}(t) + u_y \cdot \dot{y}(t) \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{b(x,y)}{a(x,y)} \;=\; \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \;=\; \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \;=\; \frac{dy}{dx}\,,$$

was einer gewöhnlichen Differentialgleichung entspricht.

(ii) Mit dem Ansatz $x_j = x_j(t),\ j = 1, \ldots, \ell$ erhalten wir analog (a) ein (i.A. nichtlineares) System von $\ell - 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen, beispielsweise

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_\ell} = \dfrac{a_1(x_1, \ldots, x_\ell)}{a_\ell(x_1, \ldots, x_\ell)} \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dx_{\ell-1}}{dx_\ell} = \dfrac{a_{\ell-1}(x_1, \ldots, x_\ell)}{a_\ell(x_1, \ldots, x_\ell)} \end{cases}$$

oder – falls erst später nach einer Variablen aufgelöst werden soll – ein System von ℓ gew. DGLen

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1(x_1(t), \ldots, x_\ell(t)) \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_\ell(t) = a_\ell(x_1(t), \ldots, x_\ell(t)) \end{cases}$$

(c) Jede Lösung ändert sich in Richtung $(a(x,y), b(x,y))^{\mathrm{T}}$ wie $c(x,y)$. Wir verwenden wiederum den Ansatz $x = x(t),\ y = y(t)$ und lösen das System $\dot{x}(t) = a(x(t), y(t)),\ \dot{y}(t) = b(x(t), y(t))$. Aufgrund der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = u_x \cdot \dot{x}(t) + u_y \cdot \dot{y}(t) = c(x(t), y(t))$$

ergibt sich nach Integration dann $\boxed{u(x(t), y(t)) = u(x(0), y(0)) + \int_0^t c(x(s), y(s))\, ds\ .}$

(d) Aufgrund von (10.10) ist die lineare PDE $0 = u_{tt} - c^2 u_{xx}$ zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten etwa äquivalent zu den beiden gekoppelten linearen PDE erster Ordnung

$$v_t - cv_x = 0\ , \qquad u_t + cu_x = v\ .$$

(i) Nach ZA 10.3 (a) wird die homogene PDE $u_t + cu_x = 0$ durch $u_h(t,x) = f(x - ct)$ mit einer beliebigen differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelöst.

(ii) Analog wird die homogene PDE $v_t - cv_x = 0$ durch $v(t,x) = g(x + ct)$ mit einer beliebigen differenzierbaren Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelöst.

(iii) Angenommen G ist eine Stammfunktion von g, dann folgt

$$\frac{d}{dt}G(x + tc) + c\frac{d}{dx}G(x + tc) = g(x + tc) \cdot c + c \cdot g(x + tc) = 2c \cdot g(x + tc)\ .$$

(iv) Setzen wir nun $h := \frac{1}{2c}G$, dann ist $u_p(t,x) := h(x + tc)$ eine partikuläre Lösung und wir erhalten

$$u(t,x) = u_h(t,x) + u_p(t,x) = f(x - ct) + h(x + tc)$$

als allgemeine Lösung mit beliebigen (zweimal) differenzierbaren Funktionen $f, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(e) Wegen

$$u(t,x) = h(x{+}tc) + f(x{-}ct) \implies \left.\begin{aligned} \varphi(x) &= h(x) + f(x) \\ \psi(x) &= ch'(x) - cf'(x) \end{aligned}\right\} \implies \begin{pmatrix} \varphi' \\ \frac{\psi}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h' \\ f' \end{pmatrix}$$

erhalten wir $h'(s) = \dfrac{1}{2}\left(\varphi'(s) + \dfrac{\psi(s)}{c}\right)$ und $f'(s) = \dfrac{1}{2}\left(\varphi'(s) - \dfrac{\psi(s)}{c}\right)$ und nach Integration

$$h(s) = \frac{1}{2}\varphi(s) + \frac{1}{2c}\int_0^s \psi(\sigma)d\sigma \qquad \text{sowie} \qquad f(s) = \frac{1}{2}\varphi(s) - \frac{1}{2c}\int_0^s \psi(\sigma)d\sigma$$

und wegen $u(t,x) = h(x + tc) + f(x - ct)$ somit die Behauptung (10.11)

Zusatzaufgabe 10.4: (a) Bestimmen Sie alle Funktionen $u(x,y)$, welche $u_{xx} = 0$ erfüllen.

(b) Lösen Sie die partielle Differentialgleichung $u_{xx} + u = 0$.

(c) Welche Gestalt besitzt die allgemeine Lösung von $u_{xy} = 0$?

(d) Zeigen Sie, dass $u(x,y) = f(x)g(y)$ für jedes Paar von (mindestens einmal differenzierbaren) Funktionen f und g einer Veränderlichen Lösung von $uu_{xy} = u_x u_y$ ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.4:

(a) Zweimaliges Integrieren ergibt offenbar $u(x,y) = xf(y)+g(y)$ mit beliebigen Funktionen $f(y), g(y)$.

(b) Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen wissen wir, dass $\ddot{v}(x) + v(x) = 0$ die allgemeine Lösung $v(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$. Somit erhalten wir nun

$$u(x,y) \;=\; f(y)\cos(x) \;+\; g(y)\sin(x) \qquad (f(y), g(y) \text{ beliebig}).$$

(c) Integrieren wir zunächst nach x und betrachten y als konstant, so erhalten wir $u_y(x,y) = f(y)$ mit einer beliebigen stetigen (mindestens integrierbaren) Funktion $f(y)$. Betrachten wir nun x als konstant und integrieren nach y, so ergibt sich

$$u(x,y) \;=\; F(y) + G(x) \qquad (F' = f)$$

mit beliebigen mindestens einmal (stetig) differenzierbaren Funktionen $G(x), F(y)$.

(d) Offensichtlich gilt für $u(x,y) = f(x)g(y)$ mit jedem Paar von (mindestens einmal differenzierbaren) Funktionen f und g einer Veränderlichen

$$\begin{aligned}\underbrace{f(x)g(y)\cdot\Big(f(x)g(y)\Big)_{xy}}_{=uu_{xy}} = f(x)g(y)f'(x)g'(y) \;&=\; \Big(f'(x)g(y)\Big)\Big(f(x)g'(y)\Big)\\ &=\; \underbrace{\Big(f(x)g(y)\Big)_x\Big(f(x)g(y)\Big)_y}_{=u_x u_y}\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 10.5:

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung $5u_x - 2u_y = 0$ unter der Zusatzbedingung $u(0,y) = y^3$.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung $u_x + yu_y = x$.

(c) Lösen Sie $2x^2yu_x + u_y = 0$.

(d) Lösen Sie die nichtlineare Differentialgleichung $u_t + uu_x = 0$ zum Anfangswert $u(0,x) = x$. Wie lange existiert die Lösung? Skizzieren Sie dazu die Charakteristiken.

(e) Lösen Sie $u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} = 0$ zu den Anfangsbedingungen $u(0,x) = x^2,\ u_t(0,x) = \mathrm{e}^x$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.5:

(a) Wir haben hier als Charakteristiken genau alle Parallelen zur Geraden $g(s) = (5s, -2s)$, also – in Hessescher Normalform – genau die Parallelen zu $2x + 5y = 0$. Somit hat die allgemeine Lösung (vgl. etwa auch mit (10.12)) die Gestalt

$$u(x,y) \;=\; f(2x+5y)$$

Wegen $u(0,y) = y^3$ folgt weiter $y^3 = f(5y)$ und somit $f(y) = \frac{y^3}{125}$. Damit erhalten wir als Lösung

$$u(x,y) \;=\; \frac{(2x+5y)^3}{125}$$

(b) Mit dem Ansatz $u = u(x(t), y(t))$ ergibt sich mittels Kettenregel

$$\frac{d}{dt}u(x(t),y(t)) \;=\; u_x\cdot\dot{x}(t) + u_y\cdot\dot{y}(t) \qquad\Longrightarrow\qquad \dot{x}(t) \;=\; 1\,, \quad \dot{y}(t) \;=\; y(t)\,.$$

Somit können wir $x(t) = t + x_0$ und $y(t) = y_0\mathrm{e}^t$ annehmen und erhalten durch Integrieren

$$\frac{d}{dt}u(t+x_0, y_0\mathrm{e}^t) \;=\; t + x_0 \qquad\Longrightarrow\qquad u(t+x_0, y_0\mathrm{e}^t) \;=\; u(x_0,y_0) \;+\; \frac{t^2}{2} \;+\; tx_0\,.$$

Stellen wir nun nach $u(x_0, y_0)$, setzen $t = -x_0$ und lassen dann den Index 0 weg, so ergibt sich

$$u(x,y) \;=\; u(0, y\mathrm{e}^{-x}) \;+\; \frac{x^2}{2}\,.$$

Somit erhalten wir als allgemeine Lösung $u(x,y) = f(y\mathrm{e}^{-x}) + \frac{x^2}{2}$ mit einer beliebigen differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. **Probe**:

$$u_x + yu_y = f'(y\mathrm{e}^{-x}) \cdot (-y\mathrm{e}^{-x}) + x + yf'(y\mathrm{e}^{-x}) \cdot \mathrm{e}^{-x} = x \ .$$

Hinweis: Als Nebenprodukt haben wir herausgefunden, dass $u(x,y) = f(y\mathrm{e}^{-x})$ mit einer beliebigen differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von $u_x + yu_y = 0$ ist, also die zugehörige homogene PDE gelöst.

Alternative: Wir hätten auch gleich $x = t$ und demzufolge $y(t) = y(x) = y_0\mathrm{e}^x$ annehmen können und wären durch Integrieren zu

$$\frac{d}{dx}u(x, y_0\mathrm{e}^x) = x \qquad \Longrightarrow \qquad u(x, y_0\mathrm{e}^x) = u(0, y_0) + \frac{x^2}{2}$$

gelangt. Nun müssen wir nur noch in der zweiten Komponente von u die Gleichung $y = y_0\mathrm{e}^x$ nach y_0 umstellen, also $y_0 = y\mathrm{e}^{-x}$ und erhalten wie zuvor

$$u(x,y) = u(0, y\mathrm{e}^{-x}) + \frac{x^2}{2} \ .$$

(c) Mit dem Ansatz $u = u(x(t), y(t))$ ergibt sich mittels Kettenregel

$$\frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = u_x \cdot \dot{x}(t) + u_y \cdot \dot{y}(t) \quad \Longrightarrow \quad \dot{x}(t) = 2(x(t))^2 y(t) \ , \quad \dot{y}(t) = 1 \ .$$

Daraus erhalten wir $y = t$ und die gewöhnliche DGL $\dot{x}(t) = 2(x(t))^2 t$, welche wir mittels Trennung der Variablen lösen können. Wir erhalten

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2(x(t))^2 t \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{x(t)} = t^2 - d \qquad \Longleftrightarrow \qquad x(t) = \frac{1}{d - t^2}$$

und demnach $$\frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = \frac{d}{dt}u\left(\frac{1}{d-t^2}, t\right) = \underbrace{\frac{2t}{(d-t^2)^2}}_{2x^2y} u_x + u_y = 0$$

also folgt $$u(x(t), y(t)) = u(x(0), y(0)) = u\left(\frac{1}{d}, 0\right) = c \ .$$

Lösen wir nun nach d auf und setzen wiederum $y = t$, so erhalten wir als allgemeine Lösung

$$u(x,y) = u\left(\frac{1}{d}, 0\right) = f(d) = f\left(\frac{1}{x} + y^2\right)$$

für beliebiges differenzierbares $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Probe: $$2x^2 y u_x + u_y = 2x^2 y f'\left(\frac{1}{x} + y^2\right) \cdot \frac{-1}{x^2} + f'\left(\frac{1}{x} + y^2\right) \cdot 2y = 0 \ .$$

(d) Verwenden wir wieder den Ansatz $u = u(t(s), x(s))$, dann erhalten wir mittels Kettenregel

$$\frac{d}{ds}u(t(s), x(s)) = u_t \cdot t'(s) + u_x \cdot x'(s)$$

Wegen $t'(s) = 1$ können wir $s = t$ annehmen und erhalten

$$\dot{x}(t) = u(t, x(t)) \ .$$

Aus der Differentialgleichung wissen wir jedoch

$$\frac{d}{dt}u(t, x(t)) = u_t \cdot 1 + u_x \cdot \dot{x}(t) = 0 \ ,$$

d.h. entlang der Kurven $(t, x(t))$ ist die Funktion u konstant, also gilt insbesondere

$$\dot{x}(t) \;=\; u(t, x(t)) \;=\; c \qquad \Longrightarrow \qquad u(t, x(t)) \;=\; u(0, x(0)) \;=\; x(0)$$

entsprechend der Anfangsbedingung und damit auch

$$\dot{x}(t) \;=\; u(t, x(t)) \;=\; c \qquad \Longrightarrow \qquad x = x(t) \;=\; c{\cdot}t + x(0) \;=\; u(t, x(t)){\cdot}t + x(0) \;=\; x(0){\cdot}t + x(0)\ .$$

Lösen wir nun noch nach $x(0)$ auf, so erhalten wir als Lösung

$$u(t, x) \;=\; u(0, x(0)) \;=\; u\left(0, \frac{x}{1+t}\right) \;=\; \frac{x}{1+t}\ .$$

Offenbar existiert die Lösung für alle $t \in [0, \infty[$. **Probe**:

$$u_t + uu_x \;=\; -\frac{x}{(1+t)^2} + \frac{x}{1+t} \cdot \frac{1}{1+t} \;=\; 0\ , \qquad u(0, x) \;=\; \frac{x}{1+0} \;=\; x\ .$$

(e) Diese lineare PDE zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist wegen

$$0 \;=\; u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right) \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} - 4\frac{\partial}{\partial t}\right) u}_{=:v}$$

äquivalent zu den beiden gekoppelten linearen PDE erster Ordnung

$$v_t + v_x \;=\; 0\ , \qquad u_x - 4u_t \;=\; v\ .$$

Die lineare homogene PDE $v_t + v_x \;=\; 0$ ist offenbar erfüllt von $v(t, x) = f(t - x)$ mit einer beliebigen differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ebenso wird die lineare homogene PDE $u_x - 4u_t \;=\; 0$ von $u_h(t, x) = g(4x + t)$ mit einer beliebigen differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt. Angenommen f besitzt die Stammfunktion F, dann gilt

$$\frac{d}{dx}F(t - x) - 4\frac{d}{dt}F(t - x) \;=\; -f(t - x) - 4f(t - x) \;=\; -5f(t - x)\ .$$

Setzen wir nun $h := -\frac{F}{5}$, dann erhalten wir als allgemeine Lösung

$$u(t, x) \;=\; h(t - x) + g(4x + t)$$

mit beliebigen (zweimal) differenzierbaren Funktion $h, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Seien nun die Anfangsbedingungen $u(0, x) = \varphi(x),\ u_t(0, x) = \psi(x)$ vorgegeben, dann erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x) &=& g(4x) + h(-x) \\ \psi(x) &=& g'(4x) + h'(-x) \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} \varphi'(x) &=& 4g'(4x) - h'(-x) \\ \psi(x) &=& g'(4x) + h'(-x) \end{array}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \varphi'(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'(4x) \\ h'(-x) \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} g'(4x) \\ h'(-x) \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{1}{5}\left(\int_0^s \varphi'\left(\frac{\sigma}{4}\right) d\sigma + \int_0^s \psi\left(\frac{\sigma}{4}\right) d\sigma\right) &&= \frac{4}{5}\left(\varphi\left(\frac{s}{4}\right) + \int_0^{\frac{s}{4}} \psi(\tau)\, d\tau\right) + A \\ h(s) &= \frac{1}{5}\left(-\int_0^s \varphi'(-\sigma)\, d\sigma + 4\int_0^s \psi(-\sigma)\, d\sigma\right) &&= -\frac{1}{5}\left(-\varphi(-s) + 4\int_0^{-s} \psi(\tau)\, d\tau\right) + B \end{aligned}$$

Wegen $\varphi'(x) \;=\; 4g'(4x) - h'(-x)$ entfallen die Integrationskonstanten A, B. Somit ist die Lösung gegeben durch

$$u(t, x) \;=\; g(4x + t) + h(t - x) \;=\; \frac{1}{5}\left(4\varphi\left(x + \frac{t}{4}\right) + \varphi(x - t)\right) \;+\; \frac{4}{5}\int_{x-t}^{x+\frac{t}{4}} \psi(\tau)\, d\tau\ .$$

Mit $\varphi(x) = u(0, x) = x^2,\ \psi(x) = u_t(0, x) = \mathrm{e}^x$ ergibt sich dann

$$u(t, x) \;=\; \frac{1}{5}\left(4\left(x + \frac{t}{4}\right)^2 + (x - t)^2\right) \;+\; \frac{4}{5}\int_{x-t}^{x+\frac{t}{4}} \mathrm{e}^\tau d\tau \;=\; x^2 + \frac{t^2}{4} + \frac{4}{5}\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{4}} - \mathrm{e}^{-t}\right)$$

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 11

Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten

- **Definition 5.3:** Eine Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt rotationssymmetrisch, falls es eine Funktion $y\colon\ ]0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $u(x) = y(\|x\|)$ für alle $0 \neq x \in \Omega$ gibt.

- **Lemma 5.4:** Ist die Funktion u auf $\Omega \setminus \{0\}$ zweimal stetig differenzierbar und rotationssymmetrisch mit $u(x) = y(\|x\|)$ für alle $0 \neq x \in \Omega$, dann gilt
$$(\Delta u)(x) = y'(\|x\|) + \frac{n-1}{\|x\|} y'(\|x\|)\,.$$

- **Bemerkung:** Gleichung (10.7) lautet im Spezialfall $n = 2$ in Polarkoordinaten
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \;=\; 0\,. \tag{11.1}$$

- **Satz 5.5:** Das Dirichlet-Problem $\Delta u = 0$ in $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, $u = g$ auf $\partial B_1(0)$, besitzt in Polarkoordinaten die eindeutige Lösung
$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) r^n\,,$$
falls $g = g(\varphi)$ eine quadratintegrierbare 2π-periodische Funktion ist und a_n, b_n ihre Fourier-Koeffizienten sind.

- **Bem.:** Analog Satz 5.5 kann man harmonische Funktionen auf dem Kreis finden, die einer Neumannschen Randbedingung $\partial_\nu u = g$ auf $\partial\Omega$ genügen, wobei ν das äußere Einheitsnormalenvektorfeld an $\partial\Omega$ bezeichnet und im Falle $\Omega = B_1(0)$ durch $\nu(x) = \dfrac{x}{|x|}$ gegeben ist.

Randwertprobleme

- **Bemerkung:** Jede lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$ mit stetigen Koeffizientenfunktionen a_1, a_2 und einer stetigen Inhomogenität b auf einem Intervall $[a,b]$ kann man in die selbstadjungierte Form
$$Ly := (p(x)y')' + q(x)y = g \tag{11.2}$$
mit stetigen Funktionen p, q, g auf $[a,b]$ umschreiben, wobei p stetig differenzierbar ist und $p > 0$ auf $[a,b]$ erfüllt.

- **Randwertproblem (RWP)**: Wir sprechen von einem Randwertproblem/einer Randwertaufgabe für die Differentialgleichung n-ter Ordnung
$$u^{(n)}(t) \;=\; F(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n-1)})\,, \qquad u \in C^n([a,b],\mathbb{R}),$$
wenn die n zusätzlichen Bedingungen, welche die Lösung eindeutig charakterisieren sollen, nicht wie beim Anfangswertproblem an einer Stelle gestellt werden, sondern an den Randpunkten a und b.

- **Achtung:** Im Gegensatz zu Anfangswertproblemen können für Randwertprobleme sowohl mehrere als auch keine Lösung existieren. Nur unter bestimmten Bedingungen gibt es eine eindeutige Lösung.

- **Einteilung Randwertbedingungen**: Für (reelle) lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf dem Intervall $I = [a, b]$ nennen wir die Randwertbedingungen im Fall

$$\left.\begin{array}{rcl} u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) &=& g(x) \\ u(a) &=& \eta_1 \\ u(b) &=& \eta_2 \end{array}\right\} \qquad \textbf{erster Art}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) &=& g(x) \\ u'(a) &=& \eta_1 \\ u'(b) &=& \eta_2 \end{array}\right\} \qquad \textbf{zweiter Art}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) &=& g(x) \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) &=& \eta_1 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) &=& \eta_2 \end{array}\right\} \qquad \textbf{dritter Art (Sturmsche Randbedingung)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) &=& g(x) \\ u(a) &=& u(b) \\ u'(a) &=& u'(b) \end{array}\right\} \qquad \textbf{periodische Randbedingung}$$

- **Bezeichnung**: Gegeben seien $p \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ mit $p > 0$ und $q, g \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ sowie $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $\beta := (\beta_1, \beta_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\alpha\|, \|\beta\| > 0$. Dann heißt für ein $u \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ das Randwertproblem

$$\left.\begin{array}{rclcl} Lu(x) &:=& (p(x)u'(x))' + q(x)u(x) &=& g(x) \\ R_1u(x) &:=& \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a)u'(a) &=& \eta_1 \\ R_2u(x) &:=& \beta_1 u(b) + \beta_2 p(b)u'(b) &=& \eta_2 \end{array}\right\} \tag{11.3}$$

Sturm-Liouvillesches Randwertproblem[15]

- Das zugehörige **homogene Randwertproblem** ist dann $\boxed{Lu = 0,\ R_1u = 0,\ R_2u = 0}$. Es gilt

  (i) Jede (endliche) Linearkombination von Lösungen u_k des zugehörigen homogenen Randwertproblems ist wiederum Lösung der homogenen Randwertaufgabe.

  (ii) Die Differenz zweier Lösungen $v_1,\ v_2$ der (inhomogenen) Sturmschen Randwertaufgabe ist Lösung des zugehörigen homogenen Randwertproblems.

  (iii) Ist u eine Lösung der homogenen Aufgabe und v Lösung der inhomogenen Aufgabe, dann ist auch $u + v$ Lösung der inhomogenen Aufgabe.

  (iv) Ist v_* eine fest gewählte Lösung der inhomogenen Aufgabe, dann besitzt jede Lösung v der inhomogenen Aufgabe die Gestalt $v = v_* + u$, wobei u alle Lösungen der homogenen Aufgabe durchläuft.

- **Satz 4.4:** Für $p \in C^1([a, b])$ mit $p > 0$ auf $[a, b]$, $q \in C([a, b])$, $0 \neq \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$, ist das inhomogene Randwertproblem (11.3) genau dann für jedes $g \in C([a, b])$ und $\eta \in \mathbb{R}^2$ eindeutig lösbar, falls das homogene Randwertproblem $Ly = 0$, $Ry = 0$, nur die triviale Lösung $y = 0$ besitzt, oder äquivalenterweise $\det \begin{pmatrix} R_1y_1 & R_1y_2 \\ R_2y_1 & R_2y_2 \end{pmatrix} \neq 0$ für ein Fundamentalsystem y_1, y_2 von $Ly = 0$ gilt.

- **Bemerkung:** Aus dem Beweis geht hervor, dass die Randbedingungen auch die Gestalt

$$\left.\begin{array}{rclcl} R_1u(x) &:=& \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) + \alpha_3 u(b) + \alpha_4 u'(b) &=& \eta_1 \\ R_2u(x) &:=& \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) + \beta_3 u(a) + \beta_4 u'(a) &=& \eta_2 \end{array}\right\} \tag{11.4}$$

besitzen dürfen, damit die Aussage von Satz 4.4 korrekt bleibt.

[15] Jacques Charles François Sturm (1803-1855)

Zusatzaufgabe 11.1: (a) Zeigen Sie Lemma 5.4.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $u_n(x,y) = \sin(nx)\sinh(ny)$. Zeigen Sie: u_n löst die Laplace-Gleichung.

(c) Leiten Sie (11.1) aus der Laplace-Gleichung (10.7) durch Übergang zu Polarkoordinaten her.

(d) Lösen Sie Gleichung (11.1) mittels Ansatz $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Welches u erfüllt $u(1,\varphi) = g(\varphi)$?

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.1:

(a) Da u auf $\Omega \setminus \{0\}$ zweimal stetig differenzierbar ist, ist auch y auf $(0,\infty)$ zweimal stetig differenzierbar. Aufgrund der aus der Kettenregel resultierenden Gleichungen

$$du(x) \;=\; d(y \circ \|.\|)(x) \;=\; (dy \circ \|.\|)(x) \cdot d(\|.\|)(x) \;=\; y'(\|x\|) \cdot \frac{1}{\|x\|} x^{\mathrm{T}}$$

gilt

$$\begin{aligned}
(\Delta u)(x) \;&=\; (\operatorname{div}(\operatorname{grad} u))(x) \;=\; \operatorname{div}\left(y'(\|x\|)\frac{x}{\|x\|} \right) \\
&=\; y''(\|x\|)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\|x\|^2} \right) \;+\; y'(\|x\|)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\|x\| - x_i \frac{x_i}{\|x\|}}{\|x\|^2} \right) \\
&=\; y''(\|x\|)\frac{1}{\|x\|^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{=\|x\|^2} \;+\; y'(\|x\|)\left(\frac{n}{\|x\|} - \frac{1}{\|x\|^3} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{=\|x\|^2} \right) \;=\; y'(\|x\|) + \frac{n-1}{\|x\|} y'(\|x\|)\,.
\end{aligned}$$

(b) Berechnen wir die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}u_n,\ \frac{\partial}{\partial y}u_n,$ und $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_n,\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}u_n$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}u_n(x,y) \;&=\; n\cos(nx)\sinh(ny) \;\Longrightarrow\; \frac{\partial^2}{\partial x^2}u_n(x,y) \;=\; -\,n^2\sin(nx)\sinh(ny) \\
\frac{\partial}{\partial y}u_n(x,y) \;&=\; n\sin(nx)\cosh(ny) \;\Longrightarrow\; \frac{\partial^2}{\partial y^2}u_n(x,y) \;=\; n^2\sin(nx)\sinh(ny)
\end{aligned}$$

und damit offensichtlich die Laplace-Gleichung $\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0$ wegen

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_n(x,y) \;+\; \frac{\partial^2}{\partial y^2}u_n(x,y) \;=\; -\,n^2\sin(nx)\sinh(ny) + n^2\sin(nx)\sinh(ny) \;=\; 0\,.$$

(c) Wir erinnern uns zunächst, dass die Polarkoordinatentransformationen

$$\Phi\colon \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;:=\; \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \Phi^{-1}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \;:=\; \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{pmatrix} \tag{11.5}$$

zueinander invers sind, so dass nach der Kettenregel

$$I_2 \;=\; d(\mathrm{Id}) \;=\; d(\Phi \circ \Phi^{-1}) \;=\; (d\Phi \circ \Phi^{-1}) \cdot d(\Phi^{-1})$$

und somit insbesondere

$$d(\Phi^{-1}) \;=\; \left(d\Phi \circ \Phi^{-1}\right)^{-1} \;=\; \left(\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} \right)^{-1} \;=\; \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) & r\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \tag{11.6}$$

gilt. Für eine Funktion $u = u(r,\varphi)$ bzw. $U(x,y) = (u \circ \Phi^{-1})(x,y)$ ergeben sich somit

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right) \;&=\; dU \;=\; d(u \circ \Phi^{-1}) \;=\; (du \circ \Phi^{-1}) \cdot d\Phi^{-1} \\
&=\; \left(\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \cdot \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x & y \\ -\frac{y}{r} & \frac{x}{r} \end{pmatrix} \;=\; \left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{r} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{y}{r^2}, \frac{\partial u}{\partial r}\frac{y}{r} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{x}{r^2} \right)
\end{aligned}$$

sowie analog

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial r}\circ\Phi^{-1}\right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2},\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\right)\cdot\frac{1}{r}\begin{pmatrix} x & y\\ -\frac{y}{r} & \frac{x}{r}\end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{x}{r}-\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\frac{y}{r^2},\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{y}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\frac{x}{r^2}\right)$$

und

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\circ\Phi^{-1}\right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi},\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right)\cdot\frac{1}{r}\begin{pmatrix} x & y\\ -\frac{y}{r} & \frac{x}{r}\end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\frac{x}{r}-\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{y}{r^2},\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\frac{y}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{x}{r^2}\right) .$$

Unter Verwendung der mittels Quotienten- bzw. Kettenregel sowie $r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ erhaltenen Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) &= \frac{r-\frac{x^2}{r}}{r^2} = \frac{y^2}{r^3} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) &= \frac{r-\frac{y^2}{r}}{r^2} = \frac{x^2}{r^3}\end{aligned} \qquad \text{sowie} \qquad \begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^2}\right) &= \frac{-2xy}{r^4} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^2}\right) &= \frac{-2xy}{r^4}\end{aligned}$$

folgt nach Anwendung der Produktregel auf alle vier Summanden und den Vorbetrachtungen somit insgesamt

$$\begin{aligned}\Delta U(x,y) &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{r}-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{y}{r^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{y}{r}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{x}{r^2}\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{x}{r}-\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\frac{y}{r^2}\right)\frac{x}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{y^2}{r^3} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\frac{x}{r}-\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{y}{r^2}\right)\frac{y}{r^2} - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{-2xy}{r^4} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{y}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\frac{x}{r^2}\right)\frac{y}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{x^2}{r^3} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\frac{y}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{x}{r^2}\right)\frac{x}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{-2xy}{r^4} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{x^2}{r^3}+\frac{y^2}{r^3}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\left(\frac{x^2}{r^4}+\frac{y^2}{r^4}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} ,\end{aligned}$$

so dass hier $\Delta U(x,y)=0$ schon $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0$ impliziert bzw. – da Φ ein Diffeomorphismus ist – auch umgekehrt.

(d) Mit dem Ansatz $u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$ geht Gleichung (11.1) in

$$R''\Phi+\frac{1}{r}R'\Phi+\frac{1}{r^2}R\Phi''=0 .$$

über. Trennen wir die von r und die von φ abhängigen Terme, so folgt offenbar die Konstanzbedingung

$$\frac{r^2R''+rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda\in\mathbb{R} , \tag{11.7}$$

was für $R(r)$ auf die Euler-Differentialgleichung $r^2R''+rR'-\lambda R=0$, welche für $\lambda=0$ auf $R(r)=c+d\ln(r)$ führt (beachte jedoch, dass $d=0$ sein muss, wenn die Lösung auf $B_1(0)$ existieren soll) und anderenfalls mit dem Ansatz $R(r)=r^k$ auf die Bedingung

$$r^k\left(k(k-1)+k-\lambda\right) = 0 , \qquad \text{also} \quad k^2=\lambda>0 ,$$

wogegen wir für $\Phi(\varphi)$ dann die lineare Differentialgleichung $\Phi''+k^2\Phi$ mit konstanten Koeffizienten erhalten, welche die allgemeine Lösung $\Phi(\varphi)=a+b\varphi$ im Fall $k=0$ und anderenfalls $\Phi_k(\varphi)=a_k\cos(k\varphi)+b_k\sin(k\varphi)$ besitzt. Aufgrund der Polarkoordinaten und der daraus resultierenden Bedingung $\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$ an die Lösung gelangen wir nun zu den Lösungen

$$u_0(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} \quad \text{bzw.} \quad u_n(r,\varphi)=(a_n\cos(n\varphi)+b_n\sin(n\varphi))r^n \quad \text{für} \quad n\in\mathbb{N} \tag{11.8}$$

als Lösungen von $\Delta u = 0$ in $B_1(0)$. Aufgrund der Linearität des Differentialoperators ist die allgemeine Darstellung einer Lösung dann

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) r^n \ , \tag{11.9}$$

wobei die Koeffizienten etwa eindeutig durch eine quadratintegrable Randbedingung $u(1,\varphi) = g(\varphi)$ festgelegt sind.

Zusatzaufgabe 11.2:

(a) Zeigen Sie, dass $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$ durch Multiplikation mit $p(x) := \mathrm{e}^{\int a_1(x)\,dx} > 0$ in die Form (11.2) übergeht.

(b) Unter welchen Bedingungen an η_1, η_2 (bzw. auch $\alpha_i, \beta_i,\ i = 1,2$) besitzt das Randwertproblem (erster, zweiter und dritter Art) zur Differentialgleichung $u''(x) = 0$ eine eindeutige Lösung?

(c) Gegeben sei das Sturm-Liouvillesche Randwertproblem. Zeigen Sie (i) und (ii).

(d) Überführen Sie $Lu = g$ in ein lineares System erster Ordnung. Wie lauten nun $R_1 u,\ R_2 u$?

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.2:

(a) Mit den Funktionen $g(x) = p(x)b(x)$ sowie $q(x) = p(x)a_2(x)$ folgt nach Multiplikation der Gleichung $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$ mit $p(x) := \mathrm{e}^{\int a_1(x)\,dx} > 0$ offenbar

$$\begin{aligned} g(x) = p(x)b(x) &= p(x)y'' + p(x)a_1(x)y' + p(x)a_2(x)y = \Big(p(x)y'' + p'(x)y'\Big) + p(x)a_2(x)y \\ &= \Big(p(x)y'\Big)' + q(x)y \ . \end{aligned}$$

(b) Die allgemein Lösung der Differentialgleichung $u''(x) = 0$ ist offenbar $u(x) = cx + d$.

- Das zugehörige Randwertproblem erster Art besitzt offenbar immer eine eindeutige Lösung.
- Das zugehörige Randwertproblem zweiter Art ist wegen $u' \equiv c$ offenbar niemals eindeutig, denn im Fall $\eta_1 = \eta_2$ existieren unendlich viele Lösungen und andernfalls überhaupt keine.
- Das zugehörige Randwertproblem dritter Art muss die Bedingung

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1(ca+d) + \alpha_2 c &=& \eta_1 \\ \beta_1(cb+d) + \beta_2 c &=& \eta_2 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 a + \alpha_2 & \alpha_1 \\ \beta_1 b + \beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

erfüllen, welche genau dann eindeutige Konstanten c und d liefert, wenn

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} \alpha_1 a + \alpha_2 & \alpha_1 \\ \beta_1 b + \beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix} = \alpha_1\beta_1(a-b) + \beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2 \ ,$$

also muss insbesondere $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0,0)$ gelten und sonst

$$\begin{aligned} \alpha_2 \neq 0 \neq \beta_1 \ , &\quad \text{falls} \quad \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 \neq 0 \neq \beta_2 \ , &\quad \text{falls} \quad \beta_1 = 0 \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \neq b - a \ , &\quad \text{falls} \quad \alpha_1 \neq 0 \neq \beta_1 \end{aligned}$$

(c) Wir zeigen die Folgerungen (i) und (ii) zur homogenen/inhomogenen Sturmschen Randwertaufgabe:

(i) Angenommen $u_k,\ k=1,\dots,n$, seien Lösungen des homogenen Randwertproblems. Dann folgt

$$\begin{aligned}
L\left(\sum_{k=1}^n c_k u_k\right)(x) &= \left(p(x)\left(\sum_{k=1}^n c_k u_k(x)\right)'\right)' + q(x)\sum_{k=1}^n c_k u_k(x)\\
&= \left(\sum_{k=1}^n c_k p(x) u_k'(x)\right)' + \sum_{k=1}^n c_k q(x) u_k(x)\\
&= \sum_{k=1}^n c_k\Big(\underbrace{(p(x)u_k'(x))' + q(x)u_k(x)}_{=0}\Big) = 0
\end{aligned}$$

einerseits und – ebenso aufgrund der Linearität – andererseits auch

$$\begin{aligned}
R_1\left(\sum_{k=1}^n c_k u_k\right)(x) &= \alpha_1\left(\sum_{k=1}^n c_k u_k(a)\right) + \alpha_2 p(a)\left(\sum_{k=1}^n c_k u_k\right)'(a)\\
&= \sum_{k=1}^n c_k\Big(\alpha_1 u_k(a) + \alpha_2 p(a) u_k'(a)\Big) = 0\\
R_2\left(\sum_{k=1}^n c_k u_k\right)(x) &= \beta_1\left(\sum_{k=1}^n c_k u_k(b)\right) + \beta_2 p(b)\left(\sum_{k=1}^n c_k u_k\right)'(b)\\
&= \sum_{k=1}^n c_k\Big(\beta_1 u_k(b) + \beta_2 p(b) u_k'(b)\Big) = 0
\end{aligned}$$

Damit erfüllt auch jede Linearkombination die homogene Sturmsche Randwertaufgabe.

(ii) Seien $v_1,\ v_2$ zwei Lösungen der inhomogenen Sturmschen Randwertaufgabe. Dann folgen

$$\begin{aligned}
L(v_1-v_2)(x) &= (p(x)(v_1-v_2)'(x))' + q(x)(v_1-v_2)(x)\\
&= \underbrace{(p(x)(v_1)'(x))' + q(x)v_1(x)}_{=g(x)} - \underbrace{\big((p(x)v_2'(x))' + q(x)v_2(x)\big)}_{=g(x)} \ = \ 0\\
R_1(v_1-v_2)(x) &= \alpha_1(v_1-v_2)(a) + \alpha_2 p(a)(v_1-v_2)'(a)\\
&= \underbrace{\alpha_1 v_1(a) + \alpha_2 p(a) v_1'(a)}_{=\eta_1} - \underbrace{(\alpha_1 v_2(a) + \alpha_2 p(a) v_2'(a))}_{=\eta_1} = 0\\
R_2(v_1-v_2)(x) &= \beta_1(v_1-v_2)(b) + \beta_2 p(b)(v_1-v_2)'(b)\\
&= \underbrace{\beta_1 v_1(b) + \beta_2 p(b) v_1'(b)}_{=\eta_2} - \underbrace{(\beta_1 v_2(b) + \beta_2 p(b) v_2'(b))}_{=\eta_2} = 0
\end{aligned}$$

Somit erfüllt v_1-v_2 die homogene Sturmsche Randwertaufgabe.

(d) Mit $y_1(x)=u(x)$ und $y_2(x)=p(x)u'(x)$ erhalten wir das System

$$\left.\begin{aligned}
y_1'(x) &= \tfrac{y_2(x)}{p(x)}\\
y_2'(x) &= -q(x)y_1(x) + g(x)
\end{aligned}\right\} \iff \begin{pmatrix} y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p(x)}\\ -q(x) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\ g(x)\end{pmatrix}$$

mit der Randbedingung

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 y_1(a) + \alpha_2 y_2(a) &= \eta_1\\
\beta_1 y_1(b) + \beta_2 y_2(b) &= \eta_2
\end{aligned}\right\} \iff \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(a)\\ y_2(a)\end{pmatrix} = \eta_1 \wedge \begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(b)\\ y_2(b)\end{pmatrix} = \eta_2$$

Zusatzaufgabe 11.3:

(a) Sei $A(x)$ eine $(n \times n)$-matrixwertige Funktion. Wann ist das folgende RWP eindeutig lösbar?

$$\left.\begin{array}{rcccl} L\mathbf{u}(x) & = & \dot{\mathbf{u}}(x) - A(x)\mathbf{u}(x) & = & \mathbf{h}(x) \\ R_j\mathbf{u}(x) & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \Big(\alpha_{jk}u_k(a) + \beta_{jk}u_k(b)\Big) & = & \eta_j \quad (j = 1, \ldots, k) \end{array}\right\}$$

(b) Auf $[0, M]$ sei die Differentialgleichung $u''(x) - 4u(x) = f(x)$ gegeben.

(i) Überprüfen Sie, ob die RWA für $f \equiv 0$ mit den folgenden Randbedingungen eindeutig lösbar ist:

$$\begin{array}{rcccl} R_1u(x) & := & 2u(0) - u'(0) + 2\mathrm{e}^{2M}u'(M) & = & \mathrm{e}^{2M} \\ R_2u(x) & := & 2u(M) + u'(M) & = & 0 \end{array}$$

(ii) Überprüfen Sie, ob die RWA für $f \equiv 1$ mit den folgenden Randbedingungen eindeutig lösbar ist:

$$\begin{array}{rcccl} R_1u(x) & := & u(0) & = & 0 \\ R_2u(x) & := & u(M) & = & 0 \end{array}$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.3:

(a) Wir finden ein Fundamentalsystem $\{\mathbf{u}_1(x), \ldots, \mathbf{u}_n(x)\}$ und mittels Variation der Konstanten eine Partikulärlösung $\mathbf{u}_p(x)$, so dass sich die allgemeine Lösung als

$$\mathbf{u}(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} c_k\mathbf{u}_k(x) + \mathbf{u}_p(x) \qquad (c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R})$$

ergibt. Einsetzen in die Randbedingungen liefert somit in den c_k das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n} c_k R_j\mathbf{u}_k(x) \;=\; \eta_j - R_j\mathbf{u}_p(x) \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

welches genau dann eindeutig lösbar ist, falls

$$\det \begin{pmatrix} R_1\mathbf{u}_1(x) & R_1\mathbf{u}_2(x) & R_1\mathbf{u}_3(x) & \ldots & R_1\mathbf{u}_n(x) \\ R_2\mathbf{u}_1(x) & R_2\mathbf{u}_2(x) & R_2\mathbf{u}_3(x) & \ldots & R_2\mathbf{u}_n(x) \\ R_3\mathbf{u}_1(x) & R_3\mathbf{u}_2(x) & R_3\mathbf{u}_3(x) & \ldots & R_3\mathbf{u}_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_n\mathbf{u}_1(x) & R_n\mathbf{u}_2(x) & R_n\mathbf{u}_3(x) & \ldots & R_n\mathbf{u}_n(x) \end{pmatrix} \;\neq\; 0\,.$$

Hinweis: Die eindeutige Lösbarkeit des RWP ist unabh. von den Inhomogenitäten $\mathbf{h}(x), \eta_j, \mathbf{u}_p(x)$.

(b) (i) Die Randwertaufgabe ist nicht eindeutig lösbar, denn beispielsweise mit dem Fundamentalsystem $\{u_1(x), u_2(x)\} \;=\; \{\mathrm{e}^{2x}, \mathrm{e}^{-2x}\}$ für die homogene Differentialgleichung ergibt sich

$$R := \begin{pmatrix} R_1u_1(x) & R_1u_2(x) \\ R_2u_1(x) & R_2u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2 + 4\mathrm{e}^{4M} & 2 + 2 - 4 \\ 2\mathrm{e}^{2M} + 2\mathrm{e}^{2M} & 2\mathrm{e}^{-2M} - 2\mathrm{e}^{-2M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^{4M} & 0 \\ 4\mathrm{e}^{2M} & 0 \end{pmatrix} \implies \det R \;=\; 0\,.$$

(ii) Die RWA ist nicht eindeutig lösbar, denn für $M > 0$ und beispielsweise mit dem Fundamentalsystem $\{u_1(x), u_2(x)\} \;=\; \{\mathrm{e}^{-2x}, \mathrm{e}^{2x}\}$ für die homogene Differentialgleichung ergibt sich

$$R := \begin{pmatrix} R_1u_1(x) & R_1u_2(x) \\ R_2u_1(x) & R_2u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e}^{-2M} & \mathrm{e}^{2M} \end{pmatrix} \quad\implies\quad \det R \;=\; 2\sinh(2M) \;>\; 0.$$

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 12

Ergänzung zu Randwertproblemen – Greensche Funktion

- Für die **inhomogene Randwertaufgabe** sucht man zunächst $\varphi \in C^2([a,b],\mathbb{R})$, welches die Randbedingungen $R_k\varphi(x) = \eta_k$ $(k = 1,2)$ erfüllt, und verwendet den Ansatz $u(x) = \varphi(x) + v(x)$ und erhält wegen $g = Lu = L\varphi + Lv$ und $\eta_k = R_k u = R_k\varphi + R_k v$ dann in $v(x)$ das **halbhomogene Randwertproblem**

$$Lv(x) \;=\; h(x)\;, \qquad R_1 v(x) \;=\; R_2 v(x) \;=\; 0 \qquad \text{mit} \qquad h(x) = g(x) - L\varphi(x)\;. \tag{12.1}$$

- **Greensche Funktion**: Sei $\{u_1(x), u_2(x)\}$ ein Fundamentalsystem mit Wronski-Determinante $W(x)$, welches $R_1u_1(x) = 0$ und $R_2u_2(x) = 0$ erfüllt. Mit der Lagrange-Identität (Aufgabe 11.2 (a)) folgt wegen $Lu_1 = Lu_2 = 0$ die Konstanz von

$$p(x)\cdot W(x) \;=\; p(x)\,(u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)) \;\neq\; 0 \qquad (W(x)\neq 0 \text{ da FS})$$

- **Satz 4.5:** Ist das **halbhomogene Randwertproblem** (12.1) (für $h \in C([a,b],\mathbb{R})$) eindeutig lösbar, dann ist die Lösung v von (12.1) mit der **Greenschen Funktion**

$$\Gamma(x,\xi) \;:=\; \frac{1}{p(x)\cdot W(x)}\cdot\begin{cases} u_1(\xi)u_2(x)\;, & a\le\xi\le x\le b\;,\\ u_1(x)u_2(\xi)\;, & a\le x\le\xi\le b\;.\end{cases} \tag{12.2}$$

zum Operator L unter den Randbedingungen $R_1y = 0 = R_2y$ gegeben durch

$$v(x) = \int_a^b \Gamma(x,\xi)h(\xi)\,d\xi\,. \tag{12.3}$$

Maximumprinzip in 1D

- **Maximumprinzip (einfachster Fall)**: Sei $g(x)$ eine beschränkte Funktion. Ist für $u \in C^2([a,b])$ in $]a,b[$ die Ungleichung

$$Lu(x) \;:=\; u''(x) + g(x)u'(x) \;>\; 0 \tag{12.4}$$

erfüllt, dann kann $u(x)$ sein Maximum nur am Rand annehmen.

- **Satz(Maximumprinzip in 1D)**: Angenommen, $g\colon\;]a,b[\to\mathbb{R}$ sei beschränkt, $u \in C^2([a,b])$ genüge der Differentialgleichung

$$Lu(x) \;:=\; u''(x) + g(x)u'(x) \;\geq\; 0 \qquad \text{für alle} \quad x\in]a,b[\tag{12.5}$$

und es gelte $\sup\limits_{x\in]a,b[} u(x) = M$. Existiert nun ein $c\in]a,b[$ mit $u(c) = M$, dann gilt $u\equiv M$.

- **Satz(Minimumprinzip in 1D)**: Angenommen, $g\colon\;]a,b[\to\mathbb{R}$ sei beschränkt, $u \in C^2([a,b])$ genüge der Differentialgleichung

$$Lu(x) \;:=\; u''(x) + g(x)u'(x) \;\leq\; 0 \qquad \text{für alle} \quad x\in]a,b[\tag{12.6}$$

und es gelte $\inf\limits_{x\in]a,b[} u(x) = M$. Existiert nun ein $c\in]a,b[$ mit $u(c) = M$, dann gilt $u\equiv M$.

- **Satz M.2:** Angenommen, $g\colon\;]a,b[\to\mathbb{R}$ sei auf jedem Intervall $[s,t]\subset[a,b]$ beschränkt, $u \in C^2([a,b])$ genüge der Differentialgleichung (12.6) und sei nicht konstant.
  (1) Gilt $M := \max\limits_{x\in[a,b]} u(x) = u(a)$ und ist g bei $x = a$ nach unten beschränkt, dann ist $u'(a) < 0$.
  (2) Gilt $M := \max\limits_{x\in[a,b]} u(x) = u(b)$ und ist g bei $x = b$ nach oben beschränkt, dann gilt $u'(b) > 0$.

Zusatzaufgabe 12.1:

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenfunktionen von $Lu(x) = -u''(x)$ unter den Randbedingungen $u(0) = u(\pi) = 0$, also alle Paare (λ, u_λ), welche $Lu(x) = \lambda u(x)$ erfüllen.

(b) Lösen Sie mittels des Separationsansatzes die Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ unter den Randbedingungen $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ zu den Anfangsdaten $u(0,x) = 0$ und $u_t(0,x) = 5\sin(7x)$.

(c) Lösen Sie mittels des Separationsansatzes die Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ unter den Randbedingungen $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ zu den Anfangsdaten $u_t(0,x) = 0$ und $u(0,x) = 3\sin(11x)$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.1:

(a) Das charakteristische Polynom der Gleichung $u''(x) + \lambda u(x) = 0$ lautet $\mu^2 + \lambda = 0$. Daher sind folgende Fälle zu unterscheiden:

(i) $\boxed{\lambda < 0}$: Dann ist $\mu = \pm\sqrt{-\lambda}$ und somit $\{e^{\sqrt{-\lambda}x}, e^{-\sqrt{-\lambda}x}\}$ ein Fundamentalsystem. Jedoch kann keine nicht-triviale Linearkombination die Randbedingungen erfüllen, denn wegen $\lambda < 0$ und $R_1u(x) = u(0)$ und $R_2u(x) = u(\pi)$ gilt stets

$$\det\begin{pmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\pi} & e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{pmatrix} = -2\sinh(\sqrt{-\lambda}\pi) < 0 .$$

(ii) $\boxed{\lambda = 0}$: Hier erhalten wir $\{1, x\}$ als Fundamentalsystem. Jedoch kann auch hier keine nicht-triviale Linearkombination die Randbedingungen erfüllen, denn stets gilt

$$\det\begin{pmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \pi \end{pmatrix} = \pi \neq 0 .$$

(iii) $\boxed{\lambda > 0}$: Dann ist $\mu = \pm i\sqrt{\lambda}$ und somit $\{\sin(\sqrt{\lambda}x), \cos(\sqrt{\lambda}x)\}$ ein reelles Fundamentalsystem. Unter den geforderten Randbedingungen gibt es genau dann eine nicht-triviale Lösung, wenn

$$\det\begin{pmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\sqrt{\lambda}\pi) & \cos(\sqrt{\lambda}\pi) \end{pmatrix} = 0 .$$

Das ist wegen $\lambda > 0$ genau dann der Fall, wenn $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$, also wenn $\lambda = k^2$ mit $k \in \mathbb{N}_{>0}$ ist (denn hier sind wir im Fall $\lambda > 0$). Zum Eigenwert k^2 erhalten wir somit als Basis des zugehörigen (eindimensionalen) Eigenraumes $\sin(kx)$.

Somit sind $\{u_k(x) | \exists k \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{R} \colon u_k(x) = c \cdot \sin(kx)\}$ die Eigenfunktionen des linearen Operators $Lu(x) = -u''(x)$ zu den jeweiligen Eigenwerten $\lambda = k^2$.

(b) Der Ansatz $u(t,x) = T(t)X(x)$ führt auf

$$T''(t) \cdot X(x) = T(t) \cdot X''(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \frac{T''(t)}{T(t)}$$

mit konstantem $\lambda \in \mathbb{R}$. Das Eigenwertproblem $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ besitzt unter den gegebenen Randbedingungen nach voriger Aufgabe die nicht-trivialen Lösungen $\lambda = k^2$ und

$$X_k(x) = \sin(kx) .$$

Die zweite Gleichung lautet daher $T''(t) + k^2T(t) = 0$ und besitzt die allgemeine Lösung

$$T_k(t) = a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt) \qquad (a_k, b_k \in \mathbb{R}).$$

Da es sich um eine lineare Differentialgleichung handelt, ist jede Linearkombination wiederum eine Lösung, insbesondere besitzt die allgemeine Lösung die Gestalt

$$u(t,x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)X_k(t) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right)\sin(kx) \tag{12.7}$$

Aufgrund der Anfangsbedingung $u(0,x) = 0$ folgt $a_k = 0$ für alle k. Weiterhin folgt aus $u_t(0,x) = 5\sin(7x)$ schließlich $7 \cdot b_7 = 5$ und $b_k = 0$ sonst, d.h. die Lösung ist

$$u(t,x) \;=\; \frac{5}{7}\sin(7t)\cdot\sin(7x) \;\; .$$

(c) Analog (b) gelangen wir unter Einbeziehung der Randbedingungen auf (12.7). Wegen $u_t(0,x) = 0$ folgt zunächst $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit $u(0,x) = 3\sin(11x)$ folgen nun $a_{11} = 3$ und $a_k = 0$ für alle $k \neq 11$, d.h., die Lösung ist

$$u(t,x) \;=\; 3\cos(11t)\cdot\sin(11x) \;\; .$$

Zusatzaufgabe 12.2: Bestimmen Sie ...

(a) ... die Greensche Funktion für die Randwertaufgabe $\begin{cases} u''(x) + \dfrac{1}{4x^2}u(x) = 0 & \text{in } [1,2] \\ u(1) = u(2) = 0. \end{cases}$

(b) ... mit (a) die Lösung der inhomogenen Randwertaufgabe $\begin{cases} u''(x) + \dfrac{1}{4x^2}u(x) = x^{-\frac{3}{2}} & \text{in } [1,2] \\ u(1) = u(2) = 0. \end{cases}$

Bem.: Mit $p(x) \equiv 1$ und $q(x) = \dfrac{1}{4x^2}$ ist $(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) \;=\; u''(x) + \dfrac{1}{4x^2}u(x)$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.2:

(a) Die homogene Differentialgleichung ist zur Eulerschen Differentialgleichung $4x^2u''(x) + u(x) = 0$ äquivalent, welche wir mit dem Ansatz $z(t) = u(\mathrm{e}^t)$ lösen können. Es folgen

$$\frac{dz}{dt} \;=\; \mathrm{e}^t u'(\mathrm{e}^t) \;=\; xu'(x)\;, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} \;=\; \mathrm{e}^t u'(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^{2t}u''(\mathrm{e}^t) \;=\; xu'(x) + x^2u''(x)$$

und somit die Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten $4\ddot{z}(t) - 4\dot{z}(t) + z(t) \;=\; 0$. Wegen $4D^2 - 4D + 1 \;=\; 4\left(D - \frac{1}{2}\right)^2$ führt dies auf die die allgemeine Lösung

$$z(t) \;=\; (c_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \quad \overset{\text{Ruecksubstitution}}{\Longrightarrow} \quad u(x) \;=\; (c_1 + c_2\ln(x))\sqrt{x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Wir benötigen jetzt ein Fundamentalsystem $\{u_1(x), u_2(x)\}$, so dass $u_1(1) = 0$ und $u_2(2) = 0$ ist. Offenbar können wir $u_1(x) = \ln(x)\sqrt{x}$ wählen, da der Logarithmus bei 1 verschwindet. Mit $u_2(x) = (\ln(x) - \ln(2))\sqrt{x}$ ist dann wie gewünscht

$$W(u_1(x), u_2(x)) \;:=\; \det\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \ln(x)\sqrt{x} & (\ln(x) - \ln(2))\sqrt{x} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln(x) - \ln(2)}{2\sqrt{x}} \end{pmatrix} = \ln(2) \neq 0$$

und somit ein Fundamentalsystem wie benötigt gefunden.
Die (eindeutige) **Greensche Funktion** ist (wegen $p \equiv 1$) nun

$$\Gamma(x,\xi) \;:=\; \frac{1}{\ln(2)} \cdot \begin{cases} \ln(\xi)\sqrt{\xi}\cdot(\ln(x) - \ln(2))\sqrt{x}\;, & 1 \leq \xi \leq x \leq 2\;, \\ \ln(x)\sqrt{x}\cdot(\ln(\xi) - \ln(2))\sqrt{\xi}\;, & 1 \leq x \leq \xi \leq 2\;. \end{cases}$$

Bem.: Das homogene RWP aus (a) wird offenbar (eindeutig) nur von der Nulllösung erfüllt.

(b) Mit Hilfe der GREENschen Funktion aus (a) ist die Lösung des halbhomogenen Randwertproblems

$$\begin{aligned}
\ln(2)v(x) &= \ln(2)\int_1^2 \Gamma(x,\xi)\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}d\xi \\
&= (\ln(x)-\ln(2))\sqrt{x}\int_1^x \ln(\xi)\sqrt{\xi}\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}d\xi \;+\; \ln(x)\sqrt{x}\int_x^2 (\ln(\xi)-\ln(2))\sqrt{\xi}\frac{1}{\sqrt{\xi^3}}d\xi \\
&= (\ln(x)-\ln(2))\sqrt{x}\int_1^x \frac{\ln(\xi)}{\xi}d\xi \;+\; \ln(x)\sqrt{x}\int_x^2 \frac{\ln(\xi)-\ln(2)}{\xi}d\xi \\
&= (\ln(x)-\ln(2))\sqrt{x}\left[\frac{(\ln(\xi))^2}{2}\right]_1^x \;+\; \ln(x)\sqrt{x}\left[\frac{(\ln(\xi))^2}{2}-\ln(2)\ln(\xi)\right]_x^2 \\
&= (\ln(x)-\ln(2))\sqrt{x}\frac{(\ln(x))^2}{2} \;+\; \ln(x)\sqrt{x}\left(-\frac{(\ln(2))^2}{2}-\frac{(\ln(x))^2}{2}+\ln(2)\ln(x)\right) \\
&= \frac{\ln(2)\ln(x)\sqrt{x}}{2}(\ln(x)-\ln(2)) \quad\Longrightarrow\quad v(x) \;=\; \frac{\ln(x)\sqrt{x}}{2}(\ln(x)-\ln(2))
\end{aligned}$$

wegen $\int f(x)f'(x)dx = \dfrac{(f(x))^2}{2}+c$. Offenbar sind die Randbedingungen $v(1)=v(2)=0$ erfüllt. Somit ist $v(x)$ die eindeutige Lösung des halbhomogenen Randwertproblems, denn es gilt

$$\begin{aligned}
v'(x) &= \frac{2+\ln(x)}{4\sqrt{x}}(\ln(x)-\ln(2))+\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} \\
v''(x) &= \frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(2+\ln(x))}{x}(\ln(x)-\ln(2))+\frac{1}{4}\cdot\frac{2+\ln(x)}{\sqrt{x^3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}}{x} \\
&= \underbrace{-\frac{\ln(x)}{8\sqrt{x^3}}(\ln(x)-\ln(2))}_{-\frac{1}{4x^2}v(x)}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}.
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 12.3: (a) Zeigen Sie das Maximumprinzip (einfachster Fall).

(b) Zeigen Sie das Maximumprinzip in 1D.

(c) In welcher Weise folgt das Minimumprinzip aus dem Maximumprinzip.

(d) Inwieweit kann die Beschränktheitsbedingung an $g(x)$ abgeschwächt werden?

(e) Zeigen Sie Satz M.2.

Lösung zu Zusatzaufgabe 12.3:

(a) Jede Funktion $u\in C([a,b])$ nimmt ihr Maximum an. Besitzt $u\in C^2([a,b])$ ein relatives Maximum in einem $c\in]a,b[$, dann gilt $u'(c)=0$ und $u''(c)\le 0$, also insbesondere

$$u''(c)+g(x)u'(c)\le 0\ . \tag{12.8}$$

Dies kann jedoch nicht auftreten, falls $u(x)$ auf $]a,b[$ die Differentialungleichung (12.4) erfüllt. Daher kann das Maximum nur am Rand angenommen werden.

(b) Angenommen, es gilt $u(c)=M$ für ein $c\in]a,b[$. Wir zeigen nun, dass dann $u(x)=M$ für alle $x\in]a,b[$ gelten muss. Dies tun wir mit der Methode „Beweis durch Widerspruch“:
Annahme: Es gibt ein $d\in]a,b[\setminus\{c\}$ mit $u(d)<M$.

- Ist $d>c$, so betrachten wir die Funktion

$$z(x) \;:=\; \mathrm{e}^{\alpha(x-c)}-1 \qquad (\alpha := \sup_{x\in]a,b[}|g(x)|+1).$$

Dann besitzt $z(x)$ die folgenden Eigenschaften:

1. $z < 0$ auf $]a, c[$
2. $z(c) = 0$
3. $z > 0$ auf $]c, b[$
4. $Lz(x) \;=\; z''(x) + g(x)z' \;=\; \alpha(\alpha + g(x))\mathrm{e}^{\alpha(x-c)} \;>\; 0$ auf $]a, b[\supset]a, d[$.
5. Wegen $d \in]c, b[$ und iii. existiert ein $\varepsilon \in \;]0, \frac{M-u(d)}{z(d)}[$.

Weiterhin betrachten wir auf $[a, d]$ die Funktion $w(x) \;=\; u(x) + \varepsilon z(x)$, für die dann

$$\begin{aligned} w(x) \;&=\; \underbrace{u(x)}_{\leq M} + \varepsilon \underbrace{z(x)}_{<0} \;<\; M \qquad (x \in]a, c[) \\ w(c) \;&=\; \underbrace{u(c)}_{=M} + \varepsilon \underbrace{z(c)}_{=0} \;=\; M \\ w(d) \;&=\; \underbrace{u(d)}_{<M} + \underbrace{\varepsilon}_{<\frac{M-u(d)}{z(d)}} z(d) \;<\; u(d) + M - u(d) \;=\; M \end{aligned}$$

Damit ist das Maximum von $w(x)$ mindestens M und wird in einem inneren Punkt des Intervalls $[a, d]$ angenommen. Dies steht aber zum Widerspruch zum Maximumprinzip (einfachster Fall), denn aufgrund der Linearität von L gilt

$$Lw(x) \;=\; Lu(x) + \varepsilon Lz(x) \;>\; 0 \qquad (x \in]a, d[).$$

- Ist $d < c$, so betrachten wir die Funktion

$$z(x) \;:=\; \mathrm{e}^{-\alpha(x-c)} - 1 \qquad (\alpha := \sup_{x \in]a,b[} |g(x)| + 1)$$

und erhalten analog einen Widerspruch.

(c) Wir wenden das Maximumprinzip auf die Funktion $-u$ an, denn es ist $\inf\limits_{x \in I} u(x) \;=\; \sup_{x \in I}(-u(x))$.

(d) Fordern wir nur noch, dass g auf jedem Intervall $[s, t] \subset]a, b[$ beschränkt bleibt, geht der Beweis analog.

(e) (1) Angenommen, $M \;:=\; \max\limits_{x \in [a,b]} u(x) \;=\; u(a)$ und es gibt einen Punkt $d \in]a, b[$ mit $u(d) \;<\; M$ (existiert, da M das Maximum und nach Voraussetzung $u(x)$ nicht konstant und C^2 ist). Da g bei a nach unten beschränkt ist und auf jedem Intervall $[a + \varepsilon, d]$ beschränkt, existiert ein endliches $K := \inf\limits_{x \in]a,d]} g(x)$. Definieren wir nun

$$\alpha \;:=\; \max\{0, -K\} + 1 \;\text{ und }\; z(x) \;=\; \mathrm{e}^{\alpha(x-a)} - 1\;,$$

so gilt $Lz(x) \;=\; \alpha(\alpha + g(x))\mathrm{e}^{\alpha(x-a)} \;>\; 0$ in $]a, d[$. Da weiterhin $z(d) \;>\; 0$ ist, existiert ein $\varepsilon \in \left]0, \frac{M-u(d)}{z(d)}\right[$. Für $w(x) = u(x) + \varepsilon z(x)$ gilt demnach

$$Lw(x) \;=\; \underbrace{Lu(x)}_{\geq 0} + \underbrace{\varepsilon Lz(x)}_{>0} \;>\; 0 \;\text{ in }\;]a, d[\;.$$

Nach dem Maximumprinzip (einfachster Fall) nimmt w sein Maximum am Rand an. Wegen

$$w(a) \;=\; u(a) \;=\; M = u(d) + \frac{M - u(d)}{z(d)} z(d) \;>\; u(d) + \varepsilon z(d) \;=\; w(d)$$

liegt das Maximum bei a. Demnach ist die (einseitige) Ableitung von w an der Stelle a nichtpositiv, also

$$w'(a) \;=\; u'(a) + \varepsilon z'(a) \;\leq\; 0.$$

Wegen $z'(a) \;=\; \alpha \;>\; 0$ folgt daraus wie behauptet $u'(a) < 0$.
(2) Für $M := \max\limits_{x \in [a,b]} u(x) = u(b)$ folgt die Behauptung in ähnlicher Weise.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 13

Vergleich & Reflexionen von Wellen und Diffusionen

- **Vergleich zwischen Wellen und Diffusionen:**
Eine grundlegende Eigenschaft von Wellen ist die Tatsache, dass Informationen in beiden Richtungen mit endlicher Geschwindigkeit transportiert werden. Bei Diffusionen breitet sich eine Anfangsstörung sofort im gesamten Definitionsbereich aus und verschwindet nach und nach. Die wesentlichen Eigenschaften dieser beiden Gleichungen können in nachstehender Tabelle zusammengefasst werden:

	Eigenschaft	**Wellen**	**Diffusionen**
(i)	Ausbreitungsgeschwindigkeit	Endlich ($\leq c$)	Unendlich
(ii)	Singularitäten für $t > 0$?	Werden entlang der Charakteristiken transportiert	Verschwinden sofort
(iii)	Für $t > 0$ korrekt gestellt?	Ja	Ja (wenigstens bei beschränkten Lösungen)
(iv)	Für $t < 0$ korrekt gestellt?	Ja	Nein
(v)	Maximum-Prinzip	Nein	Ja
(vi)	Verhalten für $t \to +\infty$	Nehmen nicht ab wegen konstanter Energie	Gehen gegen Null (falls φ integrierbar)
(vii)	Information	Wird transportiert	Geht allmählich verloren

Bei der Lösung der Diffusionsgleichung ist die Lösung beliebig oft differenzierbar, auch wenn es die Anfangsdaten nicht sind. Darüber hinaus hängt der Wert von $u(t,x)$ von der Anfangsvorgabe $\varphi(y)$ **für alle** $y \in \mathbb{R}$ ab. Umgekehrt hat der Wert von φ an der Stelle x_0 **unmittelbaren Einfluss auf jede andere Stelle** (für $t > 0$), obgleich eine wesentliche Auswirkung nur für kurze Zeit in der Nähe von x_0 spürbar ist. Daher ist die **Ausbreitungsgeschwindigkeit unendlich**. Dass die Diffusionsgleichung für $t < 0$ (für die „Vergangenheit“) **nicht korrekt gestellt** ist, tritt bei irreversiblen Prozessen (Wärmefluss, Brownsche Molekularbewegung, usw.) in der Physik in Erscheinung.

- **Diffusion auf Halbgeraden (Dirichletproblem)**: Wir betrachten das Problem

$$\left.\begin{array}{lcllr} v_t - kv_{xx} &=& 0 & (t,x) \in \;]0,\infty[\; \times \;]0,\infty[& \ldots\text{im Halbraum} \\ v(0,x) &=& \varphi(x) & x \in \;]0,\infty[& \ldots\text{Anfangsvorgabe} \\ v(t,0) &=& 0 & t \in \;]0,\infty[& \ldots\text{Dirichlet-Randvorgabe} \end{array}\right\} \qquad (13.1)$$

Setzen wir die Anfangsvorgabe ungerade auf die gesamte reelle Achse fort, dann stimmt die eindeutige Lösung von

$$u_t - ku_{xx} \;=\; 0\;, \qquad u(0,x) \;=\; \varphi_{\text{ungerade}}(x) \;:=\; \begin{cases} \varphi(x) & ,x > 0, \\ -\varphi(-x) & ,x > 0, \\ 0 & ,x = 0, \end{cases}$$

auf der rechten Halbachse mit der Lösung von (13.1) überein (Beachten Sie, dass wegen der bzgl. x ungeraden Anfangsvorgabe auch die Lösung $u(t,x)$ bzgl. x ungerade sein muss und daher $u(t,0) = -u(t,0) = 0$ folgt und somit die Randvorgabe erfüllt ist). Daher erhalten wir als Lösung

$$\begin{aligned} u(t,x) \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} S(t,x-y)\varphi_{\text{ungerade}}(y)dy \;=\; \int_0^{\infty} S(t,x-y)\varphi(y)dy - \int_{-\infty}^{0} S(t,x-y)\varphi(-y)dy \\ &=\; \int_0^{\infty} S(t,x-y)\varphi(y)dy + \int_{\infty}^{0} S(t,x+y)\varphi(y)dy = \boxed{\int_0^{\infty} \Big[S(t,x-y) - S(t,x+y)\Big]\varphi(y)dy} \end{aligned}$$

mit der **Greenschen Funktion** $\boxed{S(t,x) \;=\; \dfrac{1}{\sqrt{\pi 4kt}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4kt}} \quad (t > 0)}$.

- **Diffusion auf Halbgeraden (Neumannproblem)**: Wir betrachten das Problem

$$\left.\begin{array}{llll} w_t - kw_{xx} &= 0 & (t,x) \in \;]0,\infty[\; \times \;]0,\infty[& \ldots\text{im Halbraum} \\ w(0,x) &= \varphi(x) & x \in \;]0,\infty[& \ldots\text{Anfangsvorgabe} \\ w_x(t,0) &= 0 & t \in \;]0,\infty[& \ldots\text{Neumann-Randvorgabe} \end{array}\right\} \tag{13.2}$$

Nun verwenden wir, dass die Ableitung einer geraden Funktion eine ungerade Funktion ist. Setzen wir die Anfangsvorgabe gerade auf die reelle Achse fort, dann stimmt die eindeutige Lösung von

$$u_t - ku_{xx} = 0\,, \qquad u(0,x) = \varphi_{\text{gerade}}(x) := \begin{cases} \varphi(x) & ,x \geq 0, \\ \varphi(-x) & ,x < 0, \end{cases}$$

auf der rechten Halbachse mit der Lösung von (13.2) überein. Analog ergibt sich

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(t,x-y)\varphi_{\text{gerade}}(y)dy = \int_0^{\infty} S(t,x-y)\varphi(y)dy + \int_{-\infty}^{0} S(t,x-y)\varphi(-y)dy \\ &= \int_0^{\infty} S(t,x-y)\varphi(y)dy - \int_{\infty}^{0} S(t,x+y)\varphi(y)dy = \boxed{\int_0^{\infty} \Big[S(t,x-y) + S(t,x+y)\Big]\varphi(y)dy}. \end{aligned}$$

- **Wellen auf Halbgeraden (Dirichletproblem)**: Wir betrachten das Problem

$$\left.\begin{array}{llll} u_{tt} - c^2u_{xx} &= 0 & (t,x) \in \;]0,\infty[\; \times \;]0,\infty[& \ldots\text{im Halbraum} \\ u(0,x) &= \varphi(x) & x \in \;]0,\infty[& \ldots\text{Anfangsvorgabe} \\ u_t(0,x) &= \psi(x) & x \in \;]0,\infty[& \ldots\text{Anfangsvorgabe} \\ u(t,0) &= 0 & t \in \;]0,\infty[& \ldots\text{Dirichlet-Randvorgabe} \end{array}\right\} \tag{13.3}$$

Setzen wir die Anfangsvorgaben ungerade auf die gesamte reelle Achse fort, dann stimmt die eindeutige Lösung von

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = 0\,, \qquad u(0,x) = \varphi_{\text{ungerade}}(x) := \begin{cases} \varphi(x) & ,x > 0, \\ -\varphi(-x) & ,x > 0, \\ 0 & ,x = 0, \end{cases}$$

$$u_t(0,x) = \psi_{\text{ungerade}}(x) := \begin{cases} \psi(x) & ,x > 0, \\ -\psi(-x) & ,x > 0, \\ 0 & ,x = 0, \end{cases}$$

auf der rechten Halbachse mit der Lösung von (13.3) überein (analog Aufgabe 11.4 (a) können wir zeigen, dass für ungerade Anfangsvorgaben auch eine ungerade Lösung herauskommt und daher $u(t,0) = -u(t,-0) = 0$ folgt und somit die Randvorgabe erfüllt ist). Daher erhalten wir als Lösung

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\sigma)\,d\sigma \qquad (\text{für } x > c|t|)$$

und für $0 < x < c|t|$ unter Ausnutzung der Symmetrien

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{\varphi(x+ct) - \varphi(ct-x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \psi(\sigma)\,d\sigma - \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0} \psi(-\sigma)\,d\sigma \\ &= \frac{\varphi(x+ct) - \varphi(ct-x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \psi(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{0} \psi(\sigma)\,d\sigma \\ &= \frac{\varphi(x+ct) - \varphi(ct-x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} \psi(\sigma)\,d\sigma \qquad (\text{für } 0 < x < c|t|) \end{aligned}$$

- **Mehrfache Reflexionen von Wellen** führen zu weiterer Zergliederung des Definitionsbereiches der Lösung und sind für die praktische Anwendung eher ungeeignet. Alternativ verwenden wir daher lieber die **Fourier-Methoden**.

- **Diffusionen mit einer Quelle**: Betrachten wir das Problem

$$\left.\begin{array}{rcll} u_t - k u_{xx} &=& f(t,x) & (t,x) \in \,]0,\infty[\, \times \,]-\infty,\infty[\\ u(0,x) &=& \varphi(x) & x \in \,]0,\infty[\end{array}\right\} \tag{13.4}$$

mit beliebigen Funktionen $f(t,x)$ und $\varphi(x)$, dann ist die Lösung

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t,x-y)\varphi(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(t-s,x-y) f(s,y)\, dy\, ds$$

mit der **Greenschen Funktion** $\boxed{S(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi 4kt}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4kt}} \quad (t>0)}$.

- **Diffusionen auf der Halbachse mit einer Quelle**:

  (a) Auf die inhomogene Diffusionsgleichung auf der Halbachse können wir die Reflexionsmethode anwenden (siehe oben).

  (b) Haben wir eine **Randquelle** $h(t)$ auf der Halbachse mit der **Dirichlet-Aufgabenstellung**

$$\left.\begin{array}{rclll} v_t - k v_{xx} &=& f(t,x) & (t,x) \in \,]0,\infty[\, \times \,]0,\infty[& \ldots \text{im Halbraum} \\ v(0,x) &=& \varphi(x) & x \in \,]0,\infty[& \ldots \text{Anfangsvorgabe} \\ v(t,0) &=& h(t) & t \in \,]0,\infty[& \ldots \text{Randquelle} \end{array}\right\} \tag{13.5}$$

  lösen wir stellvertretend das einfachere Problem

$$\left.\begin{array}{rclll} V_t - k V_{xx} &=& f(t,x) - h'(t) & (t,x) \in \,]0,\infty[\, \times \,]0,\infty[& \ldots \text{im Halbraum} \\ V(0,x) &=& \varphi(x) - h(0) & x \in \,]0,\infty[& \ldots \text{Anfangsvorgabe} \\ V(t,0) &=& 0 & t \in \,]0,\infty[& \ldots \text{keine Randquelle} \end{array}\right\} \tag{13.6}$$

  für $V(t,x) = v(t,x) - h(t)$ und verwenden wiederum die Reflexionsmethode.

  (c) Haben wir eine **Randquelle** $h(t)$ auf der Halbachse mit der **Neumann-Aufgabenstellung**

$$\left.\begin{array}{rclll} w_t - k w_{xx} &=& f(t,x) & (t,x) \in \,]0,\infty[\, \times \,]0,\infty[& \ldots \text{im Halbraum} \\ w(0,x) &=& \varphi(x) & x \in \,]0,\infty[& \ldots \text{Anfangsvorgabe} \\ w_x(t,0) &=& h(t) & t \in \,]0,\infty[& \ldots \text{Randquelle} \end{array}\right\} \tag{13.7}$$

  lösen wir stellvertretend das einfachere Problem

$$\left.\begin{array}{rclll} W_t - k W_{xx} &=& f(t,x) - x h'(t) & (t,x) \in \,]0,\infty[\, \times \,]0,\infty[& \ldots \text{im Halbraum} \\ W(0,x) &=& \varphi(x) - x h(0) & x \in \,]0,\infty[& \ldots \text{Anfangsvorgabe} \\ W_x(t,0) &=& 0 & t \in \,]0,\infty[& \ldots \text{keine Randquelle} \end{array}\right\}$$

  für $W(t,x) = w(t,x) - x h(t)$ und verwenden wiederum die Reflexionsmethode.

- **Wellen mit einer Quelle**: Betrachten wir das Problem

$$\left.\begin{array}{rcll} u_{tt} - c^2 u_{xx} &=& f(t,x) & (t,x) \in \,]0,\infty[\, \times \,]-\infty,\infty[\\ u(0,x) &=& \varphi(x) & x \in \,]0,\infty[\\ u_t(0,x) &=& \psi(x) & x \in \,]0,\infty[\end{array}\right\} \tag{13.8}$$

mit beliebigen Funktionen $f(t,x)$ und Anfangsvorgaben $\varphi(x), \psi(x)$, dann ist die Lösung

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy + \frac{1}{2c}\iint_{\Delta_x} f(s,y)dyds \\ &= \frac{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(s,y)dyds \end{aligned} \tag{13.9}$$

- **Wellen auf der Halbachse mit einer Quelle**: Für $0 < ct < x$ haben wir ebenfalls die Lösung (13.9). Für $0 < x < ct$ ändert sich der Integrationsbereich des Dreiecks und es kommt ein weiterer Term mit dem Randquellausdruck hinzu (Reflexionsmethode).

Zusatzaufgabe 13.1:

(a) Lösen Sie das Diffusions-Dirichlet-Problem (13.1) auf der Halbachse mit $\varphi(x) \equiv 1$.

(b) Lösen Sie das Diffusions-Neumann-Problem (13.2) auf der Halbachse mit $\varphi(x) \equiv 1$.

(c) Lösen Sie das Diffusions-Dirichlet-Problem (13.1) auf der Halbachse mit $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

(d) Lösen Sie auf der Halbachse sowohl das Diffusions-Dirichlet-Problem (13.1) als auch das Diffusions-Neumann-Problem (13.2) mit $\varphi(x) \equiv 0$.

Hinweis: Verwenden Sie gegebenenfalls abkürzend die Funktion $\boxed{\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-p^2} dp}$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 13.1:

(a) Wir setzen φ ungerade fort und erhalten wie oben und nach Substition

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_0^\infty \Big[S(t,x-y) - S(t,x+y)\Big]\varphi(y)dy = \frac{1}{\sqrt{\pi 4kt}} \int_0^\infty \Big[\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} - \mathrm{e}^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}}\Big] dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^\infty \mathrm{e}^{-p^2} dp - \int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^\infty \mathrm{e}^{-p^2} dp\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} \mathrm{e}^{-p^2} dp = \mathrm{Erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) \qquad (t > 0). \end{aligned}$$

(b) Wir setzen φ gerade fort, womit die Ableitung (als konstante Nullfunktion) ungerade wird. Es ergibt sich

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^\infty S(t,x-y)\varphi_{\text{gerade}}(y)dy = \frac{1}{\sqrt{\pi 4kt}} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-p^2} dp = 1 ,$$

wobei Sie die letzte Gleichung in den Hausaufgaben beweisen sollen. (Natürlich hätten wir die Lösung auch sofort raten und mit der Eindeutigkeit argumentieren können.)

(c) Wir setzen die Anfangsvorgabe $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$ ungerade fort und erhalten wie oben

$$u(t,x) = \int_0^\infty \Big[S(t,x-y) - S(t,x+y)\Big]\varphi(y)dy = \frac{1}{\sqrt{\pi 4kt}} \int_0^\infty \Big[\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} - \mathrm{e}^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}}\Big] \mathrm{e}^{-y} dy .$$

Wegen $(x-2kt)^2 = x^2 - 4ktx + 4k^2t^2$ und $(x+2kt)^2 = x^2 + 4ktx + 4k^2t^2$ erhalten wir die quadratischen Ergänzungen

$$\begin{aligned} -\frac{x^2 - 2xy + y^2}{4kt} - \frac{4kty}{4kt} &= -\frac{(y-x+2kt)^2}{4kt} + kt - x \\ -\frac{x^2 + 2xy + y^2}{4kt} - \frac{4kty}{4kt} &= -\frac{(y+x+2kt)^2}{4kt} + kt + x \end{aligned}$$

und mit entsprechenden Substitutionen weiter

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi 4kt}} \left[\mathrm{e}^{kt-x} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{(y-x+2kt)^2}{4kt}} dy - \mathrm{e}^{kt+x} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{(y+x+2kt)^2}{4kt}} dy\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\mathrm{e}^{kt-x} \int_{\frac{-x+2kt}{\sqrt{4kt}}}^\infty \mathrm{e}^{-p^2} dp - \mathrm{e}^{kt+x} \int_{\frac{x+2kt}{\sqrt{4kt}}}^\infty \mathrm{e}^{-p^2} dp\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{kt-x} \left[1 - \mathrm{Erf}\left(\frac{-x+2kt}{\sqrt{4kt}}\right)\right] - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{kt+x} \left[1 - \mathrm{Erf}\left(\frac{x+2kt}{\sqrt{4kt}}\right)\right] \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass die Fehlerfunktion $\mathrm{Erf}(s)$ ungerade fortgesetzt wird.

(d) Egal, ob gerade oder ungerade – die Fortsetzung ist jeweils die konstante Nullfunktion, so dass wir hier ohne Rechnung sofort aus der Eindeutigkeit die Nullfunktion als Lösung erhalten.

Zusatzaufgabe 13.2:

(a) Lösen Sie das (homogene) Dirichlet-Problem (13.3) mit $c = 2$ und mit den Anfangsvorgaben $v(0,x) = 1$ und $v_t(0,x) = 0$.

(b) Formulieren Sie analog zum (homogenen) Dirichlet-Problem (13.3) das (homogene) Neumann-Problem für Wellen auf der Halbgeraden und leiten Sie eine Lösungsformel her.

Lösung zu Zusatzaufgabe 13.2:

(a) Wie oben hergeleitet erhalten wir nach ungerader Fortsetzung wegen $\varphi = 1$ und $\psi = 0$ somit

$$u(t,x) \;=\; \begin{cases} \frac{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)}{2} \;=\; 1 & \text{für } x > c|t|, \\ \frac{\varphi(x+ct)-\varphi(ct-x)}{2} \;=\; 0 & \text{für } 0 < x < c|t|. \end{cases}$$

(b) Für Wellen auf der Halbgeraden lautet das Neumann-Problem

$$\left.\begin{array}{llll} u_{tt} - c^2 v_{xx} & = 0 & (t,x) \in \;]0,\infty[\;\times\;]0,\infty[& \ldots \text{im Halbraum} \\ u(0,x) & = \varphi(x) & x \in \;]0,\infty[& \ldots \text{Anfangsvorgabe} \\ u_t(0,x) & = \psi(x) & x \in \;]0,\infty[& \ldots \text{Anfangsvorgabe} \\ u_x(t,0) & = 0 & t \in \;]0,\infty[& \ldots \text{Neumann-Randvorgabe} \end{array}\right\} \qquad (13.10)$$

In diesem Fall setzen wir die Anfangsvorgaben gerade auf die gesamte reelle Achse fort. Dann stimmt die eindeutige Lösung von

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} \;=\; 0\,, \qquad u(0,x) \;=\; \varphi_{\text{gerade}}(x) \;:=\; \begin{cases} \varphi(x) & , x \geq 0, \\ \varphi(-x) & , x > 0, \end{cases}$$

$$u_t(0,x) \;=\; \psi_{\text{gerade}}(x) \;:=\; \begin{cases} \psi(x) & , x \geq 0, \\ \psi(-x) & , x > 0, \end{cases}$$

auf der rechten Halbachse mit der Lösung von (13.10) überein (in Aufgabe 13.2 haben wir gezeigt/sollen Sie zeigen, dass für gerade Anfangsvorgaben auch eine gerade Lösung herauskommt und daher für die Ableitung eine ungerade Funktion, d.h. $u_x(t,0) = -u_x(t,-0) = 0$ folgt und somit die Randvorgabe erfüllt ist). Daher erhalten wir als Lösung

$$u(t,x) \;=\; \frac{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)}{2} \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\sigma)\;d\sigma \qquad (\text{für } x > c|t|)$$

und für $0 < x < c|t|$ unter Ausnutzung der Symmetrien

$$\begin{aligned} u(t,x) \;&=\; \frac{\varphi(ct+x)+\varphi(ct-x)}{2} \;+\; \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \psi(\sigma)\;d\sigma \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0} \psi(-\sigma)\;d\sigma \\ &=\; \frac{\varphi(ct+x)+\varphi(ct-x)}{2} \;+\; \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \psi(\sigma)\;d\sigma \;+\; \frac{1}{2c}\int_{0}^{ct-x} \psi(\sigma)\;d\sigma \\ &=\; \frac{\varphi(ct+x)+\varphi(ct-x)}{2} \;+\; \frac{1}{c}\int_0^{ct-x} \psi(\sigma)\;d\sigma \;+\; \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} \psi(\sigma)\;d\sigma \quad (\text{für } 0 < x < c|t|). \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 13.3:

(a) Leiten Sie die Formel (13.9) her.

(b) Lösen Sie (13.8) mit $f(t,x) = xt$ und $\varphi \equiv \psi \equiv 0$.

(c) Lösen Sie (13.8) mit $f(t,x) = \mathrm{e}^{ax}$ und $\varphi \equiv \psi \equiv 0$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 13.3:

(a) Wir betrachten zunächst das AWP für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$u''(t) \;+\; A^2 u(t) \;=\; f(t), \qquad u(0) \;=\; \varphi, \qquad u'(0) \;=\; \psi$$

wobei wir A, φ, ψ als Konstanten auffassen. Dann kennen wir die Lösung als

$$u(t) \;=\; \cos(tA)\varphi \;+\; A^{-1}\sin(tA)\psi \;+\; A^{-1}\int_0^t \sin((t-s)A)f(s)ds\;. \qquad (13.11)$$

Beachte, dass wir $X(s) = \begin{pmatrix} \cos(tA) & A^{-1}\sin(tA) \\ -A\sin(tA) & \cos(tA) \end{pmatrix}$ als ausgezeichnetes Fundamentalsystem wählen können und somit $X(t-s)\mathbf{b}(s)$ mit $\mathbf{b}(s) = (0 \quad f(s))^T$ zeilenweise zu integrieren ist. Haben wir nun die Vorgaben $f = 0$ und $\varphi = 0$, so ergibt sich offenbar

$$u(t) \;=\; A^{-1}\sin(tA)\psi$$

als Lösung. Führen wir abkürzend den linearen Operator $S(t)$ durch $S(t)\psi := A^{-1}\sin(tA)\psi$ ein, so schreibt sich die allgemeine Lösung (13.11) als

$$u(t) \;=\; S'(t)\varphi \;+\; S(t)\psi \;+\; \int_0^t S(t-s)f(s)ds\;. \qquad (13.12)$$

Somit wird durch die Wirkung $S(t)\psi$ alles bekannt, was wir für die allgemeine Lösung benötigen. Betrachten wir nun wiederum unsere PDE (13.8), so ergibt sich hier

$$S(t)\psi \;=\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy\;,$$

wie wir aus dem homogenen Fall bereits wissen. In Analogie schließen wir aus (13.12) nun auf die Formel (13.9) unter Berücksichtigung von

$$\frac{\partial}{\partial t}S(t)\varphi \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\varphi(y)dy \;=\; \frac{c\varphi(x+ct)-(-c)\varphi(x-ct)}{2c} \;=\; \frac{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)}{2}\;.$$

Bemerkung:
Das Wesentliche der Operatormethode „Wenn wir die homogene Gleichung lösen können, dann können wir auch die inhomogene Gleichung lösen." wird als **Duhamelsches Prinzip** bezeichnet.

(b) Nach Aufgabenteil (a) erhalten wir als Lösung

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)}{2} \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)dy \;+\; \frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(s,y)dyds \\
&= 0 \;+\; 0 \;+\; \frac{1}{2c}\int_0^t\left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} sydy\right)ds \;=\; \frac{1}{2c}\int_0^t\left[s\frac{y^2}{2}\right]_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)}ds \\
&= \frac{1}{2c}\int_0^t\left[s\frac{(x+c(t-s))^2}{2} - s\frac{(x-c(t-s))^2}{2}\right]ds = \frac{2xc}{2c}\int_0^t (st-s^2)ds \\
&= x\left[\frac{s^2t}{2}-\frac{s^3}{3}\right]_{s=0}^{s=t} = x\frac{t^3}{6}.
\end{aligned}$$

Probe: $u(0,x) = 0,\ u_t(t,x) = \frac{xt^2}{2},\ u_t(0,x) = 0,\ u_{tt}(t,x) - c^2u_{xx}(t,x) = tx - c^2\cdot 0 = tx = f(t,x)$.

(c) Analog zu (b) erhalten wir

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} e^{ay}dyds \;=\; \frac{e^{ax}}{ac}\int_0^t \sinh(ac(t-s))ds \\
&= -\frac{e^{ax}}{a^2c^2}\Big[\cosh(ac(t-s))\Big]_0^t \;=\; \frac{e^{ax}}{a^2c^2}(\cosh(act)-1)\;.
\end{aligned}$$

Probe: Es gelten einerseits $u(0,x) = 0,\ u_t(t,x) = \sinh(act)\frac{e^{ax}}{ac},\ u_t(0,x) = 0$ und andererseits

$$u_{tt} - c^2u_{xx} \;=\; e^{ax}\cosh(act) - c^2\frac{e^{ax}}{c^2}(\cosh(act)-1) \;=\; e^{ax} \;=\; f(t,x)\;.$$

Sachwortverzeichnis