

Aufgabe 1.1:

Bezeichne $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller (nicht notwendigerweise konvergenten) reellen Zahlenfolgen. Zeigen Sie, dass für beliebige $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Zahl

$$d((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|} \quad (1.1)$$

endlich ist und auf diese Weise eine Metrik d auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiert wird.

Aufgabe 1.2:

Auf $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$, dem Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen, betrachten wir die Metrik

$$d(x, y) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \frac{p_\nu(x - y)}{1 + p_\nu(x - y)} \quad \text{mit} \quad p_\nu(z) := \max_{t \in [a, b]} |z^{(\nu)}(t)|. \quad (1.2)$$

Zeigen Sie:

- (a) $x_k \rightarrow x$ bezüglich $d \iff x_k^{(\nu)} \rightarrow x^{(\nu)}$ gleichmäßig für alle $\nu \in \mathbb{N}$.
- (b) $(C^\infty([a, b], \mathbb{R}), d)$ ist vollständig.
- (c) Es existiert keine Norm auf $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$, welche d induziert.

Aufgabe 1.3: Auf $C[0, 1]$ betrachten wir die Norm

$$\|x\| := \max_{0 \leq t \leq 1} |tx(t)|. \quad (1.3)$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ wirklich eine Norm ist.
- (b) Ist $C[0, 1]$ mit dieser Norm vollständig?

Aufgabe 1.4:

Zeigen Sie, dass $C([a, b], \mathbb{R})$ mit $\|f\| = \|f\|_2 = \left(\int_a^b (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 2.1:

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie für alle $x, x', y, y' \in X$ die **Vierecksungleichung**

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y') .$$

Aufgabe 2.2:

(a) Die Menge

$$C_0(\mathbb{R}) = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f \text{ ist stetig und } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \right\} .$$

ist ein Vektorraum.

(b) Durch $\|f\|_\infty := \max_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ ist eine Norm auf $C_0(\mathbb{R})$ gegeben.

Aufgabe 2.3:

Für eine Funktion $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ ist die **totale Variation** durch

$$V(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{Z(n)} \sum_{\nu=1}^n |x(t_\nu) - x(t_{\nu-1})| \quad (2.1)$$

definiert, wobei $Z(n)$ alle Zerlegungen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ durchläuft.

(a) Geben Sie jeweils ein Beispiel einer stetigen Funktion mit beschränkter und einer stetigen Funktion mit unbeschränkter (totaler) Variation an.

(b) Zeigen Sie: Der **Vektorraum der Funktionen auf $[a, b]$ mit beschränkter Variation**

$$BV([a, b], \mathbb{K}) := \left\{ x: [a, b] \rightarrow \mathbb{K} \mid x \text{ von beschränkter Variation, d.h., } V(x) < \infty \right\} \quad (2.2)$$

wird mit der Norm

$$\|x\|_{BV} := |x(a)| + V(x) \quad (2.3)$$

zum Banachraum $(BV([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_{BV})$.

(c) Zeigen Sie: $BV([a, b], \mathbb{R})$ ist mit der von $B([a, b], \mathbb{R})$ induzierten Norm nicht vollständig.

Aufgabe 2.4: (Äquivalenz von Normen)

(a) Sei X ein linearer Raum. Zeigen Sie, dass der Begriff der Äquivalenz zweier Normen, tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf E definiert.

(b) Sei X der lineare Raum der Folgen, bei denen nur endlich viele Glieder ungleich 0 sind. Dann sind durch

$$\|x\|_1 = \sum_{n \geq 0} |x_n| \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |x_n|$$

zwei Normen auf X definiert. Zeigen Sie, dass diese nicht äquivalent sind.

Aufgabe 3.1:

- (a) Konstruieren Sie zwei Endomorphismen auf ℓ^1 , wobei der erste injektiv, aber nicht surjektiv sei und der andere surjektiv, aber nicht injektiv sei.
- (b) Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge aus $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$.
- (i) Konvergiert sie auch in $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$? (ii) Konvergiert sie auch in $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$?
- (c) Geben Sie eine beschränkte Folge aus ℓ^p , $1 \leq p < \infty$ an, aus welcher man keine Cauchy-Teilfolge auswählen kann.

Aufgabe 3.2:

Zeigen Sie, dass auf jedem unendlich-dimensionalen Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ eine unstetige lineare Abbildung $A: X \rightarrow \mathbb{R}$ existiert.

Aufgabe 3.3:

- (a) Gegeben seien die normierten Räume $(X, \|\cdot\|_X) = (\Pi(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\Pi(\mathbb{R})})$ und $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, wobei $\Pi(\mathbb{R})$ den linearen Raum aller reellwertigen Polynome bezeichne und die Norm $\|\cdot\|_{\Pi(\mathbb{R})}$ für ein $p = p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ durch $\|p\|_{\Pi(\mathbb{R})} := \sum_{k=0}^n |a_k|$ definiert sei. Desweiteren seien die Abbildungen

$$(i) \quad A_1: p \mapsto \int_0^1 p(t) dt \quad (ii) \quad A_2: p \mapsto p'(0) \quad (iii) \quad A_3: p \mapsto \int_0^t p(s) ds$$

gegeben. Überprüfen Sie, ob $A_1 \in L(X, Y)$, $A_2 \in L(X, Y)$ und $A_3 \in L(X, X)$ gilt.

Falls ja, bestimmen Sie jeweils die Operatornorm.

- (b) Zeigen Sie, dass durch

$$(i) \quad A: f \mapsto \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} f(x) dx \quad \text{und} \quad (ii) \quad B: f \mapsto \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx$$

stetige lineare Abbildungen von $(C([-1, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ nach $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ gegeben sind.

Bestimmen Sie außerdem die Operatornormen $\|A\|$ und $\|B\|$.

Aufgabe 3.4:

Auf ℓ^1 definieren wir für jedes n einen stetigen Endomorphismus A_n durch

$$A_n(\xi_1, \xi_2, \dots) := (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots).$$

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \ell^1$ zwar $A_n x \rightarrow x$ gilt, aber (A_n) nicht in der Operatornorm gegen Id_{ℓ^1} konvergiert.

Aufgabe 4.1:

Sei $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $A_g: \left(L^2([0, 1]), \|\cdot\|_{L^2([0, 1])} \right) \rightarrow \left(L^2([0, 1]), \|\cdot\|_{L^2([0, 1])} \right)$ definiert durch $A_g f(x) = f(x)g(x)$. Zeigen Sie: $\|A_g\| = \|g\|_\infty := \max_{x \in [0, 1]} |g(x)|$.

Aufgabe 4.2:

Der Operator $A: D \subset \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ sei auf

$$D := \left\{ x \in \ell^\infty \mid \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{k} \text{ konvergiert} \right\} \quad \text{durch} \quad Ax := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{k}, 0, \dots \right)$$

definiert. Zeigen Sie:

- (a) $A: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ ist stetig bezüglich $\|\cdot\|_2$. (Warum ist A auf ℓ^2 definiert?)
- (b) A ist unstetig bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

Aufgabe 4.3: (Ein Distanzierungsproblem)

- (a) Sei F ein echter Unterraum des normierten Raumes $(E, \|\cdot\|_E)$ und $\delta > 0$ beliebig. Gibt es ein $y \in E$, so dass $\|x - y\|_E \geq \delta$ für alle $x \in F$ ist?

Zeigen Sie, dass die Frage für abgeschlossenes F zu bejahen ist.

- (b) Geben Sie einen Unterraum von ℓ^2 an, für den es nicht gilt.

Aufgabe 4.4: (Gegenbeispiel Riesz für $\eta = 1$)

Sei $E := \{x \in C([0, 1], \mathbb{K}) : x(0) = 0\}$ und $I: E \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \int_0^1 x(t) dt$. Dann ist I eine lineare Abbildung. Weiterhin sei $F := \ker(I)$ der Kern von I . Zeigen Sie:

- (i) I ist stetig.
- (ii) $\|I\| = 1$.
- (iii) F ist abgeschlossener Teilraum von E .
- (iv) $\forall x \in E$ mit $\|x\| = 1$ ist $|Ix| < 1$.
- (v) $\forall x \in E: |Ix| = \text{dist}(x, F)$.
- (vi) Es kann kein $x_1 \in E$ mit $\|x_1\| = 1$ existieren, so dass $\|x - x_1\| \geq 1$ für alle $x \in F$ gilt.

Aufgabe 5.1:

Seien $n \in \mathbb{N}$, $-\infty < a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b < \infty$ und $l_k \in C([a, b], \mathbb{R})$, $k = 0, \dots, n$. Der **Lagrange-Interpolationsoperator** $L: C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R})$ sei definiert durch

$$(Lf)(x) := \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x).$$

Bestimmen Sie die Operatornorm von L (jeweils bezüglich der Supremumsnorm).

Aufgabe 5.2:

Seien M_1, M_2 und M Teilmengen eines Innenproduktraumes E . Zeigen Sie

$$(a) \quad M_1 \subset M_2 \implies M_2^\perp \subset M_1^\perp$$

$$(b) \quad M \subset (M^\perp)^\perp$$

$$(c) \quad M^\perp = ((M^\perp)^\perp)^\perp$$

$$\textbf{Tipp: } M^\perp := \{y \in E : \mid \forall x \in M : \langle x, y \rangle = 0\}$$

Aufgabe 5.3:

Auf dem $\mathbb{R}^3$ sei durch $\langle x|y \rangle := x^T A y$ mit

$$(a) \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (b) \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ein Innenprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ definiert (ohne Beweis).

Konstruieren Sie für eine der beiden Matrizen aus (a) und (b) mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens aus der kanonischen Basis e_1, e_2, e_3 eine Orthonormalbasis bezüglich $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Aufgabe 5.4:

(a) Zeigen Sie: In jedem Innenproduktraum $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt die **Parallelogrammgleichung**

$$\forall x, y \in E: \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (5.1)$$

(b) Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum und $x, y, z \in E$ beliebig.

Zeigen Sie den **Satz des Apollonius**:

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2 \left\| z - \frac{x + y}{2} \right\|^2. \quad (5.2)$$

Aufgabe 6.1:

Ist der Operator $A: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$, $\sum_{j=0}^n a_j x^j \mapsto \sum_{j=0}^n j a_j x^{j-1}$ linear und stetig bezüglich der Norm

$$\|p\| := \sup_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)| \quad ? \quad (6.1)$$

Dabei bezeichne $\mathbb{P}$ den Raum der Polynome.

Aufgabe 6.2: Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen konvex sind.

- (a) Seien $\alpha < \beta$, $a < b$ reelle Zahlen und $C := \{x \in C[a, b] \mid \alpha \leq x(t) \leq \beta \quad \forall t \in [a, b]\}$.
- (b) Seien $a < b$ reelle Zahlen, $n \in \mathbb{N}$ und

$$\mathbb{P}_n^+([a, b]) := \left\{ x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid 0 \leq x(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k \text{ mit } \alpha_k \in \mathbb{R} \text{ für } k = 0, \dots, n \right\}. \quad (6.2)$$

Aufgabe 6.3:

- (a) Zeigen Sie: In jedem Innenproduktraum gilt $x \perp y \iff \forall \alpha \in \mathbb{K}: \|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$.
- (b) Für welche $p \in [1, \infty]$ ist es möglich, $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ als Hilbertraum aufzufassen?

Aufgabe 6.4:

- (a) Für $1 \leq n < m \in \mathbb{N}$ seien $\eta(k), \xi_1^{(k)}, \dots, \xi_n^{(k)} \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq m$, gegeben. Zeigen Sie: Es existieren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(a_1, \dots, a_n) := \sum_{k=1}^m \left(\eta^{(k)} - \sum_{\nu=1}^n a_\nu \xi_\nu^{(k)} \right)^2$$

minimal wird. Falls die $\xi_\nu = (x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(m)})$, $i = 1, \dots, n$, linear unabhängig sind, sind die a_ν sogar eindeutig bestimmt.

- (b) Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum. Zeigen Sie: Ist $P: E \rightarrow E$ ein symmetrischer Projektor, so ist P eine orthogonale Projektion.

Aufgabe 7.1:

Sei $\mathbb{P}_n^+([a, b])$ die Menge der Polynome vom Grad höchstens n , die auf $[a, b]$ nicht negativ sind. Zeigen Sie: Zu jedem $x \in C([a, b], \mathbb{R})$ existiert genau ein $p_0 \in \mathbb{P}_n^+([a, b])$, so dass

$$\forall p \in \mathbb{P}_n^+([a, b]): \int_a^b |x(t) - p_0(t)|^2 dt \leq \int_a^b |x(t) - p(t)|^2 dt .$$

Aufgabe 7.2:

Sei $A := \{x \in L^2([0, 1], \mathbb{R}) : x(s) \in [0, 1] \text{ f.ü.}\}$. Zeigen Sie:

- (i) A ist abgeschlossen in $(L^2([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$.
- (ii) Es gibt eine eindeutige Projektion $P: L^2([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow A$, die jedem Element seine Bestapproximation zuordnet, nämlich

$$(Px)(s) = \begin{cases} 1 & x(s) \geq 1 \\ x(s) & 0 \leq x(s) \leq 1 \\ 0 & x(s) \leq 0. \end{cases}$$

Aufgabe 7.3:

- (a) Zeigen Sie: Sei (X, d) ein metrischer Raum, $\alpha > 0$ sowie $Y \subset X$ eine überabzählbare Teilmenge mit der Eigenschaft $\forall y, z \in Y: (y \neq z \implies d(y, z) \geq \alpha)$. Dann ist (X, d) **nicht** separabel.
- (b) Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie:

$$(E, \|\cdot\|) \text{ separabel} \iff E \text{ besitzt abzählbare Teilmenge } D \text{ mit } \overline{\text{span}(D)} = E .$$

Aufgabe 7.4: Untersuchen Sie die folgenden Räume auf Separabilität

- (a) $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ für $p \in [1, \infty[$
- (b) $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$
- (c) $(c, \|\cdot\|_\infty)$
- (d) $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$

Aufgabe 8.1:

Finden Sie einfache Beispiele, die zeigen, dass

- (a) die Abzählbarkeitsvoraussetzung, bzw. (b) die Vollständigkeit des metrischen Raumes
im Baireschen Kategoriensatz notwendig ist.

Aufgabe 8.2: Zeigen Sie Korollar 6.5:

Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein unendlich-dimensionaler Banachraum über $\mathbb{K}$, dann ist jede (Hamel-)Basis von E überabzählbar.

Aufgabe 8.3:

Sei $D \subset C := C([a, b], \mathbb{R})$ die Menge aller stetigen Funktionen, die in mindestens einem Punkt differenzierbar sind. Zeigen Sie, dass D von 1. Kategorie (d.h., $D \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$, für geeignete abgeschlossene Mengen D_n mit leerem Inneren) und $C \setminus D$ dicht in C ist.

Tipp: Betrachten Sie für $t_0 \in [a, b]$ und $n \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$D_{t_0, n} = \{f \in C \mid |f(t) - f(t_0)| \leq n|t - t_0|, t \in [a, b]\} \quad \text{und} \quad D_n = \bigcup_{t_0} D_{t_0, n} \quad (8.1)$$

Bemerkung: D ist auch dicht in C , aber $C \setminus D$ ist mächtiger als D .

Aufgabe 8.4:

Zeigen Sie: Es gibt keine reellwertige Funktion auf dem Intervall $[0, 1]$, die in jedem rationalen Punkt stetig und in jedem irrationalen Punkt unstetig ist.

Tipp: Zeigen und verwenden Sie, dass eine Darstellung

$$[0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad (8.2)$$

mit abgeschlossenen Mengen F_n unmöglich ist.

Aufgabe 9.1:

Sei (X, d_X) ein vollständiger metrischer Raum und $f_n: (X, d_X) \rightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ eine Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen $f: (X, d_X) \rightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ konvergiert, d.h. $f_n(x) \rightarrow f(x)$ für alle $x \in X$.

- (a) Welche Aussage erhält man aus dem **Satz von Osgood**?
- (b) Zeigen Sie ferner: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren eine nichtleere offene Menge $V \subset X$ und ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall x \in V \quad \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \quad (9.1)$$

Tipp: Satz von Baire.

Aufgabe 9.2:

Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ Banach-Räume und $B: V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ ein bilineares Funktional, welches in jeder Variablen stetig sei. Es gelte also

- (i) für jedes $\xi \in V$ ist $B(\xi, \cdot): W \rightarrow \mathbb{R}$ linear und stetig,
- (ii) für jedes $\eta \in W$ ist $B(\cdot, \eta): V \rightarrow \mathbb{R}$ linear und stetig.

Zeigen Sie die Stetigkeit von B .

Tipp: Satz 6.10 oder Satz 6.13 (1) $\implies$ (2.a).

Aufgabe 9.3:

Es sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banachraum über $\mathbb{R}$ und $(x'_n)_n$ eine fest vorgegebene Folge aus E' . Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (a) Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus E mit $\|x_n\|_E \rightarrow 0$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x_n)$ konvergent;
- (b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n$ konvergiert absolut.

Tipp: Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit für die Richtung „(a) $\implies$ (b)“.

Aufgabe 9.4: Geben Sie je ein Beispiel einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus ℓ^2 an, die

- (a) komponentenweise, aber nicht schwach konvergiert;
- (b) schwach, aber nicht stark konvergiert.

Aufgabe 10.1: Sei $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ der metrische Raum aus Aufgabe 1.1.

- (a) Zeigen Sie, dass $x^{(j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x$ genau dann, wenn $\forall n \in \mathbb{N}: \xi_n^{(j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \xi_n$, wobei $x^{(j)} = (\xi_n^{(j)})$ und $x = (\xi_n)$ sind.
- (b) Beweisen Sie, dass $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ vollständig ist.

Aufgabe 10.2:

Finden Sie ein Beispiel eines (notwendigerweise unvollständigen) normierten Raumes $(X, \|\cdot\|_X)$ und einer Reihe, für die einerseits

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X < \infty$$

und andererseits

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

nicht in $(X, \|\cdot\|_X)$ konvergiert.

Aufgabe 10.3:

- (a) Sei X ein unendlich-dimensionaler linearer Raum. Zeigen Sie, dass es zwei Normen gibt, die nicht äquivalent sind.
- (b) Sei $A: (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ ein linearer Operator. Zeigen Sie, dass A genau dann beschränkt ist, wenn er beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet.
- (c) Sei $A: (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ ein beschränkter linearer surjektiver Operator und es gelte

$$\exists B > 0: \forall x \in X: \|x\|_X \leq B \|Ax\|_Y.$$

Zeigen Sie: Dann existiert die Inverse $A^{-1}: (Y, \|\cdot\|_Y) \rightarrow (X, \|\cdot\|_X)$ und ist beschränkt.

Aufgabe 10.4:

Zeigen Sie, dass der Dualraum von c_0 isomorph zu ℓ^1 ist.

Aufgabe 11.1:

Innerhalb des Folgenraumes ℓ^2 betrachten wir den Teilraum $P := \{x \in \ell^2 \mid x \text{ ist finit}\}$. Dabei heißt eine Folge $x := (x(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ **fini**t, wenn es ein $k_x \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\forall n > k_x: x(n) = 0$ gilt. Zeigen Sie:

- (a) Durch $A_t(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x(n)t^n$, erhält man für festes $t \in \mathbb{R}$ ein lineares Funktional auf P .
- (b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist A_t stetig?
- (c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ kann A_t zu einer stetigen Linearform auf ℓ^2 fortgesetzt werden?
- (d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ lässt sich A_t in der Form $A_t(x) = \langle x, \xi \rangle$ für ein geeignetes $\xi \in \ell^2$ darstellen?

Aufgabe 11.2:

Es sei

$$E := \left\{ f \in L^1[0, 1] \mid \int_0^1 f \, d\lambda = 0 \right\}.$$

Offensichtlich ist E ein linearer Unterraum von $L^1[0, 1]$. Durch

$$F(f) := \int_0^{\frac{1}{2}} f \, d\lambda$$

ist ein stetiges lineares Funktional auf E gegeben.

Bestimmen Sie eine Fortsetzung $G \in L^1[0, 1]'$ mit $\|F\| = \|G\|$. Ist diese eindeutig?

Aufgabe 11.3:

Sei $X := \{x \in \ell^1 \mid \forall k \in \mathbb{N}: x(2k-1) = 0\}$. Lässt sich jedes stetige lineare Funktional auf X eindeutig und normerhaltend zu einem stetigen linearen Funktional auf ℓ^1 fortsetzen? Berechnen Sie gegebenenfalls alle derartigen Fortsetzungen!

Aufgabe 11.4:

Sei

$$G := \left\{ f \in L^2[0, 1] \mid \int_0^1 x f(x) \, dx = 0 \right\} \quad \text{und } L \in G' \text{ durch} \quad L(f) := \int_0^1 x^2 f(x) \, dx$$

definiert. Berechnen Sie eine stetige und lineare Fortsetzung gleicher Norm von L auf $L^2[0, 1]$. Ist diese eindeutig?

Tipp: Verwenden Sie ZA 11.2 (b).

Aufgabe 12.1:

Zeigen Sie: Seien E, F normierte Räume. Alle stetigen Operatoren von E nach F mit endlich-dimensionalem Bild sind offen. Insbesondere sind also alle linearen Funktionale auf E offen.

Aufgabe 12.2:

E, F seien normierte Räume, $D \subset E$ ein linearer Unterraum und $A: D \rightarrow F$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) Wenn A stetig und D abgeschlossen ist, dann ist A abgeschlossen.
- (b) Wenn A stetig und abgeschlossen und F vollständig ist, dann ist D abgeschlossen.
- (c) Sei D nicht abgeschlossen, $E = F$ und $A = \text{Id}_D$. A ist stetig aber nicht abgeschlossen.
- (d) Wenn A abgeschlossen und injektiv ist, dann ist $A^{-1}: A(D) \rightarrow E$ ebenfalls abgeschlossen.

Hinweis: Dabei heißt hier eine Abbildung abgeschlossen, wenn ihr Graph abgeschlossen ist.

Aufgabe 12.3:

Seien E, F Banachräume, D ein linearer Unterraum von E und $A: D \rightarrow F$ eine abgeschlossene, bijektive, lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass A^{-1} stetig ist.

Aufgabe 12.4:

E_1, E_2, F seien Banachräume und für $k \in \{1, 2\}$ sei $A_k: E_k \rightarrow F$ stetig und linear. Ferner existiere zu jedem $x \in E_1$ genau ein $y \in E_2$ mit $A_1x = A_2y$. Zeigen Sie, dass die durch $Ax := y$ definierte Abbildung $A: E_1 \rightarrow E_2$ linear und stetig ist.